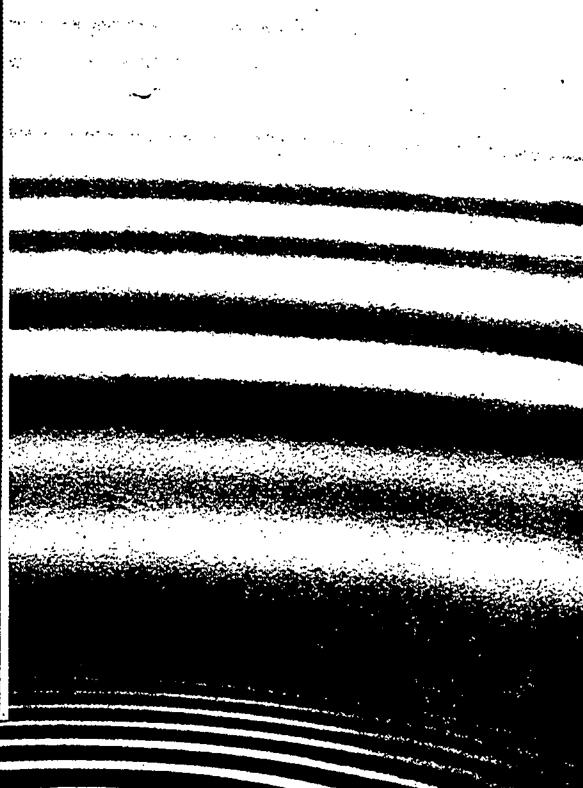
FÍSICA

Para Ciencias e Ingeniería

Tomo II


FÍSICA

Para Ciencias e Ingeniería

Quinta edición

Tomo II

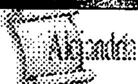
Raymond A. Serway
James Madison University

Robert J. Beichner
North Carolina State University

Traduc...
Dr. ... Campos O...ín
Ana Elizab... ...cía Hern...ez
...aductores pro...

...ánica
... Olesz...









McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO
SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Publisher: René Serrano Nájera
Gerente de producto: Sergio Cervantes González
Supervisor de edición: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: Zeferino García García

FÍSICA
Para Ciencias e Ingeniería
Quinta edición
Tomo II

ISBN 970-10-3580-1 Obra completa
ISBN 970-10-3581-X Tomo I
ISBN 970-10-3582-8 Tomo II

ISBN 970-10-1296-8 (cuarta edición)
ISBN 970-10-0326-8 (tercera edición)

Translated from the fifth English edition of
Physics for Scientists and Engineers
By Raymond A. Serway and Robert J. Beichner

ISBN 0-03-022657-0

1234567890

Impreso en México

09876543201

Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
Imprimir en Noviembre del 2001 en
Compañía Editorial Ultra, S.A. de C.V.
Centeno No. 162-2
Col. Granjas Esmeralda
Delegación Iztapalapa
C.P. 09810 México D.F.

Algunas constantes fundamentales[a]

Cantidad	Símbolo	Valor[b]
Unidad de masa atómica	u	$1.660\ 540\ 2(10) \times 10^{-27}$ kg $931.494\ 32(2\ 8)$ MeV/c^2
Número de Avogadro	N_A	$6.022\ 136\ 7(36) \times 10^{23}$ partículas/mol
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$	$9.274\ 015\ 4(31) \times 10^{-24}$ J/T
Radio de Bohr	$a_0 = \dfrac{\hbar^2}{m_e e^2 k_e}$	$0.529\ 177\ 249\ (24) \times 10^{-10}$ m
Constante de Boltzmann	$k_B = R/N_A$	$1.380\ 658\ (12) \times 10^{-23}$ J/K
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = \dfrac{h}{m_e c}$	$2.426\ 310\ 58(2\ 2) \times 10^{-12}$ m
Constante de Coulomb	$k_e = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$8.987\ 551\ 787 \times 10^9$ N·m²/C² (exacto)
Masa del deuterón	m_d	$3.343\ 586\ 0(20) \times 10^{-27}$ kg $2.013\ 553\ 214\ (24)$ u
Masa del electrón	m_e	$9.109\ 389\ 7(54) \times 10^{-31}$ kg $5.485\ 799\ 03(1\ 3) \times 10^{-4}$ u $0.510\ 999\ 06(1\ 5)$ MeV/c^2
Electrón-volt	eV	$1.602\ 177\ 33(4\ 9) \times 10^{-19}$ J
Carga elemental	e	$1.602\ 177\ 33(4\ 9) \times 10^{-19}$ C
Constante de los gases	R	$8.314\ 510\ (70)$ J/K·mol
Constante gravitacional	G	$6.672\ 59(8\ 5) \times 10^{-11}$ N·m²/kg²
Energía del estado base del hidrógeno	$E_I = -\dfrac{e^2 k_e}{2a_0}$	$-13.605\ 698\ (40)$ eV
Proporción frecuencia-voltaje de Josephson	$2e/h$	$4.835\ 976\ 7(14) \times 10^{14}$ Hz/V
Cuanto de flujo magnético	$\Phi_0 = \dfrac{h}{2e}$	$2.067\ 834\ 61(6\ 1) \times 10^{-15}$ T·m²
Masa del neutrón	m_n	$1.674\ 928\ 6(10) \times 10^{-27}$ kg $1.008\ 664\ 904\ (14)$ u $939.565\ 63(2\ 8)$ MeV/c^2
Magnetón nuclear	$\mu_n = \dfrac{e\hbar}{2m_p}$	$5.050\ 786\ 6(17) \times 10^{-27}$ J/T
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A (exacto)
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854\ 187\ 817 \times 10^{-12}$ C²/N·m² (exacto)
Constante de Planck	h	$6.626\ 075(40) \times 10^{-34}$ J·s
	$\hbar = h/2\pi$	$1.054\ 572\ 66(6\ 3) \times 10^{-34}$ J·s
Masa del protón	m_p	$1.672\ 623\ (10) \times 10^{-27}$ kg $1.007\ 276\ 470\ (12)$ u $938.272\ 3(28)$ MeV/c^2
Constante de Rydberg	R_H	$1.097\ 373\ 153\ 4(13) \times 10^7$ m⁻¹
Rapidez de la luz en el vacío	c	$2.997\ 924\ 58 \times 10^8$ m/s (exacta)

[a] Estas constantes son los valores recomendados en 1986 por la CODATA, están basados en un ajuste de mínimos cuadrados de datos de distintas mediciones. Para una lista más completa véase E. R. Cohen y B. N. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* 59:1121, 1987.

[b] Los números entre paréntesis para los valores en esta columna representan las incertidumbres de los últimos dos dígitos.

Datos del Sistema Solar

Cuerpo	Masa (kg)	Radio medio (m)	Periodo (s)	Distancia desde el Sol (m)
Mercurio	3.18×10^{23}	2.43×10^{6}	7.60×10^{6}	5.79×10^{10}
Venus	4.88×10^{24}	6.06×10^{6}	1.94×10^{7}	1.08×10^{11}
Tierra	5.98×10^{24}	6.37×10^{6}	3.156×10^{7}	1.496×10^{11}
Marte	6.42×10^{23}	3.37×10^{6}	5.94×10^{7}	2.28×10^{11}
Júpiter	1.90×10^{27}	6.99×10^{7}	3.74×10^{8}	7.78×10^{11}
Saturno	5.68×10^{26}	5.85×10^{7}	9.35×10^{8}	1.43×10^{12}
Urano	8.68×10^{25}	2.33×10^{7}	2.64×10^{9}	2.87×10^{12}
Neptuno	1.03×10^{26}	2.21×10^{7}	5.22×10^{9}	4.50×10^{12}
Plutón	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^{6}$	7.82×10^{9}	5.91×10^{12}
Luna	7.36×10^{22}	1.74×10^{6}	—	—
Sol	1.991×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—

Datos físicos usados con frecuencia[a]

Distancia promedio Tierra-Luna	3.84×10^{8} m
Distancia promedio Tierra-Sol	1.496×10^{11} m
Radio promedio de la Tierra	6.37×10^{6} m
Densidad del aire (0°C y 1 atm)	1.29 kg/m^3
Densidad del agua (20°C y 1 atm)	1.00×10^{3} kg/m^3
Aceleración de caída libre	9.80 m/s^2
Masa de la Tierra	5.98×10^{24} kg
Masa de la Luna	7.36×10^{22} kg
Masa del Sol	1.99×10^{30} kg
Presión atmosférica estándar	1.013×10^{5} Pa

[a]Éstos son los valores de las constantes como se usan en el texto.

Algunos prefijos para las potencias de diez

Potencia	Prefijo	Abreviatura	Potencia	Prefijo	Abreviatura
10^{-24}	yocto	y	10^{1}	deca	da
10^{-21}	zepto	z	10^{2}	hecto	h
10^{-18}	ato	a	10^{3}	kilo	k
10^{-15}	femto	f	10^{6}	mega	M
10^{-12}	pico	p	10^{9}	giga	G
10^{-9}	nano	n	10^{12}	tera	T
10^{-6}	micro	μ	10^{15}	peta	P
10^{-3}	mili	m	10^{18}	exa	E
10^{-2}	centi	c	10^{21}	zeta	Z
10^{-1}	deci	d	10^{24}	yota	Y


UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL
DEL TACHIRA
VICE - RECTORADO ACADEMICO
BIBLIOTECA

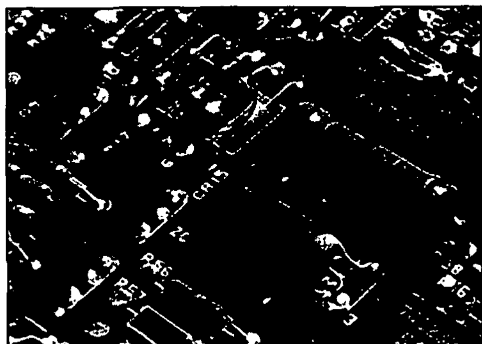
Panorama del contenido



Tabla de contenido

parte 4 *Electricidad y magnetismo* *707*







Prefacio



Al escribir esta quinta edición de *Física para Ciencias e Ingeniería* hemos hecho un esfuerzo mayor para mejorar la claridad de la presentación e incluir nuevas características pedagógicas que apoyen los procesos de enseñanza-aprendizaje. Con base en la retroalimentación positiva de los usuarios de la cuarta edición y en las sugerencias de los revisores se realizaron refinamientos para cubrir de la mejor manera las necesidades de los estudiantes y profesores. También se perfeccionó el paquete de complementos, el cual ahora incluye un CD-ROM que contiene tutoriales para el estudiante y software interactivo para la resolución de problemas, así como apoyo en Internet.

El texto está pensado como un curso introductorio de física para estudiantes de ciencias o ingeniería. El contenido completo del texto puede cubrirse en un curso de tres semestres, aunque es posible utilizar el material en un tiempo más corto omitiendo algunos capítulos y secciones seleccionadas. Sería conveniente que los fundamentos matemáticos de quienes tomen este curso incluyan un semestre de cálculo. Si eso no fuera factible, el estudiante debería inscribirse en un curso simultáneo de introducción al cálculo.

OBJETIVOS

Este libro introductorio a la física tiene dos objetivos principales: proporcionar al estudiante una presentación clara y lógica de los conceptos y principios básicos de la física, y reforzar la comprensión de los conceptos y principios por medio de una amplia gama de interesantes aplicaciones en el mundo real. Con este fin, se pone mayor atención en los argumentos físicos más importantes y en la metodología para la resolución de problemas. Al mismo tiempo, se ha intentado motivar al lector con ejemplos prácticos que muestren el papel de la física en disciplinas como la ingeniería, la química y la medicina.

CAMBIOS EN LA QUINTA EDICIÓN

Se hicieron numerosos cambios y mejoras al preparar la quinta edición de este texto. Algunas de las nuevas características están basadas en nuestras experiencias y en las tendencias actuales de la educación científica. Otros cambios se incorporaron como respuesta a los comentarios y las sugerencias ofrecidos por los usuarios de la cuarta edición, así como por los revisores del manuscrito. La lista siguiente describe los principales cambios en la quinta edición:

Mejoras en las ilustraciones

- **Los eventos con secuencia en el tiempo** se representan con letras encerradas en círculos en las ilustraciones de mecánica seleccionadas.

- **Los diagramas de movimiento** se usan muy pronto en el texto para ilustrar la diferencia entre velocidad y aceleración, conceptos que suelen confundir a los estu-

diantes principiantes. Los estudiantes se beneficiarán enormemente al bosquejar sus propios diagramas de movimiento a medida que se les solicita elaborarlos en las preguntas sorpresa.

- **Se logra mayor realismo** al sobreimponer fotografías y dibujos en figuras seleccionadas. Además, se mejoró la apariencia tridimensional de los "bloques" en las figuras que acompañan a los ejemplos y problemas de mecánica.

Ejemplos resueltos más realistas Los lectores familiarizados con la cuarta edición recordarán que había ejemplos idealizados. En la quinta edición estamos orgullosos de presentar ejemplos (con algunos cambios en la notación), con mayor realismo, esto los hace más interesantes y proporciona nueva motivación para el estudiante de física.

Acertijos Cada capítulo comienza con una interesante fotografía y una leyenda que incluye un acertijo. Cada acertijo posee una pregunta para activar el pensamiento, la cual intenta motivar la curiosidad del estudiante y aumentar su interés en el tema del capítulo. Parte o toda la respuesta de cada acertijo está contenida en el texto del capítulo e indicada por el icono.

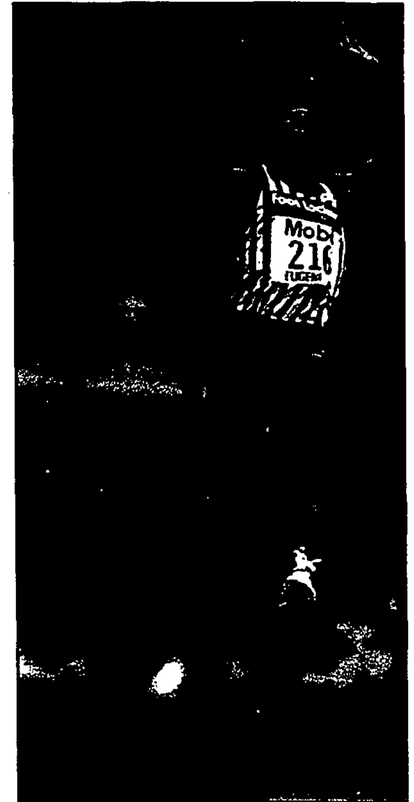
Líneas generales del capítulo La página inicial de cada capítulo incluye un panorama de los principales encabezados del mismo. Esta visión general proporciona a estudiantes e instructores una vista preliminar del contenido del capítulo.

Experimentos sorpresa Esta nueva característica estimula a los estudiantes a realizar experimentos sencillos por su cuenta y, en consecuencia, los involucra de manera activa en el proceso de aprendizaje. La mayoría de los experimentos sorpresa se pueden desarrollar con materiales de bajo costo como cuerdas, bandas de goma, cintas, regleta, popotes y globos. En la mayoría de los casos se les pide a los estudiantes observar el resultado de un experimento y explicarlo en términos de lo que ellos han aprendido en el capítulo. Cuando es apropiado, se les solicita registrar los datos y graficar sus resultados.



Preguntas sorpresa En cada capítulo se incluyen varias preguntas sorpresa para proporcionar a los estudiantes la oportunidad de probar su comprensión de los conceptos físicos presentados. Muchas están redactadas en formato de opción múltiple y requieren que el lector tome decisiones y las defienda sobre la base de razonamiento profundo. Algunas se plantearon para ayudarlos a superar conceptos erróneos comunes. (Los profesores podrán consultar las "Notas del instructor" en los márgenes de la edición respectiva para sugerencias concernientes a ciertas preguntas sorpresa.) Las respuestas a todas las preguntas sorpresa se encuentran al final de cada capítulo.

Notas al margen e iconos Para proporcionar a los estudiantes una mayor guía se incluyen comentarios al margen del texto que señalan equívocos comunes y "trampas". Con frecuencia, en dichos comentarios se citan referencias al CD-ROM *Conceptos centrales de la física* y a sitios útiles en Internet para motivar al lector a ampliar su comprensión de los conceptos físicos. El icono en el margen del texto refiere a los estudiantes al módulo específico y número(s) de pantalla del CD-ROM *Conceptos centrales de la física* que trata el tema que se está analizando. Una ilustración del texto, el ejemplo, la pregunta sorpresa o el problema marcada con el icono indica que viene acompañada por una simulación de Interactive Physics™ que puede encontrarse en el CD-ROM *Herramientas del estudiante.* [Véase la sección de "Auxiliares para el estudiante" (página xviii) para descripciones de estos dos paquetes de aprendizaje electrónico.]



Aplicaciones Algunos capítulos incluyen aplicaciones, las cuales son casi de la misma extensión o ligeramente más extensas que los ejemplos resueltos. Las aplicaciones demuestran a los estudiantes cómo poner en práctica los principios físicos cubiertos en el capítulo en problemas de la vida cotidiana o la ingeniería. Por ejemplo, analizan los frenos antibloqueo en el contexto de la fricción estática y cinética (véase el capítulo 5).

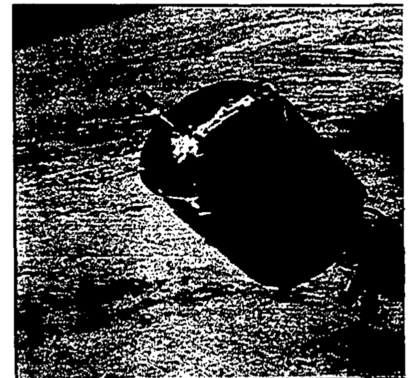
Problemas Se efectuó una revisión sustancial de los problemas de fin de capítulo con el propósito de mejorar su claridad y calidad. Aproximadamente 20 por ciento de ellos (alrededor de 650) son nuevos, y la mayoría está en el nivel intermedio (se identifican por el número en color azul). Muchos de los nuevos problemas requieren que los estudiantes realicen cálculos del orden de magnitud. Todos se editaron con sumo cuidado y cuando fue necesario se reescribieron. Las soluciones a casi 20 por ciento de los problemas de fin de capítulo se incluyen en el *Manual de soluciones y Guía del estudiante.** Éstos se identifican en el texto mediante recuadros alrededor de sus números. Un pequeño subconjunto de soluciones se puede encontrar en Internet (**http://www.saunderscollege.com/physics/**) y son accesibles a estudiantes e instructores que usen *Física para Ciencias e Ingeniería.* Estos problemas se identifican en el texto mediante el icono **WEB**.

Revisión línea por línea Todo el texto se editó cuidadosamente para mejorar la claridad de presentación y la precisión del lenguaje. Creemos que el resultado es un libro que, además de preciso, es agradable de leer.

Cambios tipográficos y de notación La sección de "Características del texto" (véase la página xvi) menciona el uso de **negritas** y pantallas para enfatizar enunciados y definiciones importantes. En el texto de la quinta edición, los pasajes en negritas sustituyen los pasajes menos legibles que aparecieron en itálicas en la cuarta edición. De manera similar, los símbolos para vectores destacan muy claramente del texto circundante debido al tipo en negritas usado en la quinta edición. Como un mecanismo para hacer las ecuaciones más transparentes y, por tanto, más fáciles de comprender, se utilizaron los subíndices "i" y "f" para representar los valores inicial y final en vez de la antigua notación de la cuarta edición, en la cual se usaba el subíndice 0 (que por lo común se pronuncia "cero") para representar un valor inicial y no se empleaba ninguno para indicar un valor final. En las ecuaciones que describen movimiento o dirección las variables están acompañadas por los subíndices x, y o z siempre que es necesario añadir claridad.

Cambios de contenido Un examen de la "Tabla de contenido" puede causar la impresión de que el contenido y la organización del texto son, en esencia, iguales a los de la cuarta edición. Sin embargo, se realizaron sutiles, aunque significativas, mejoras.

CONTENIDO



El material en este libro cubre temas fundamentales de la física clásica e incluye una introducción a la física moderna. Al inicio de cada parte se incluye un panorama del material del tema que se cubrirá, así como un repaso de la perspectiva histórica.

*El material auxiliar sólo está disponible en inglés. Si desea mayor información sobre éste, póngase en contacto con un representante de McGraw-Hill.

CARACTERÍSTICAS DEL TEXTO

La mayor parte de los instructores estarán de acuerdo con que el libro de texto elegido para un curso debe ser la guía fundamental del estudiante para entender y aprender el tema. Aún más, el texto debe ser de fácil comprensión y su diseño y redacción, facilitar el aprendizaje. A partir de estas reflexiones y con el fin de aumentar su utilidad, tanto para el estudiante como para el profesor, se han anexado muchas características pedagógicas. Estas características son las siguientes:

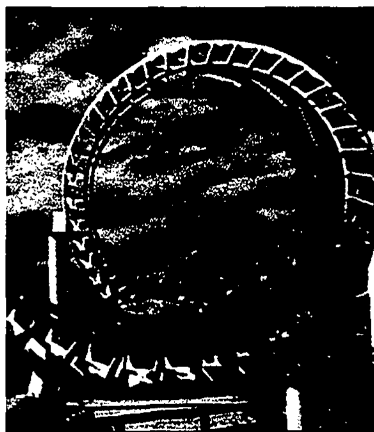
Información previa La mayor parte de los capítulos empiezan con una breve introducción, la cual incluye un análisis de los objetivos y el contenido del capítulo.

Enunciados y ecuaciones importantes Los enunciados y las definiciones más importantes se resaltan en negritas o con una pantalla de fondo color canela para agregar énfasis y facilitar su estudio. De manera similar, las principales ecuaciones se resaltan con una pantalla color canela para simplificar su localización.

Sugerencias para la solución de problemas Se incluyeron estrategias generales para resolver los diversos tipos de problemas presentados, tanto en los ejemplos como al final del capítulo. Estas características ayudarán a los estudiantes a identificar los pasos necesarios para resolver los problemas y eliminar cualquier duda que pudieran tener. Las "Sugerencias para resolver problemas" se resaltan con una pantalla gris/azul claro para que destaquen y así faciliten su localización.

Notas al margen Se utilizan comentarios y notas al margen para localizar enunciados, ecuaciones y conceptos importantes en el texto.

Ilustraciones La apariencia tridimensional de muchas ilustraciones se mejoró en esta quinta edición.



Nivel matemático El cálculo se introduce de manera gradual, teniendo siempre presente que los estudiantes con frecuencia toman cursos introductorios de cálculo y física de manera simultánea. La mayor parte de los pasos se muestran cuando se desarrollan las ecuaciones básicas y con frecuencia se hace referencia a los apéndices matemáticos en la parte final del libro. Los productos vectoriales se presentan más tarde en el texto, cuando son necesarios en aplicaciones físicas.

Ejemplos desarrollados Gran número de ejemplos desarrollados de dificultad variable se presenta como ayuda para que los estudiantes comprendan los conceptos. En muchos casos, estos ejemplos sirven como modelos para resolver los problemas de final de capítulo. Los ejemplos se diagramaron en un recuadro; las respuestas a los ejemplos con soluciones numéricas se resaltan con una pantalla gris/azul claro.

Ejercicios de los ejemplos desarrollados Con el fin de hacer el libro más interactivo con el estudiante y de reforzar de inmediato su comprensión de los conceptos y de las técnicas de solución de problemas, después de casi todos los ejemplos desarrollados se incluyen ejercicios con respuestas. Los ejercicios representan extensiones de los ejemplos.

Ejemplos conceptuales Como en la cuarta edición, en ésta se realizó un esfuerzo concertado para enfatizar el pensamiento crítico y la enseñanza de los conceptos físicos. Esto se logró al incluir ejemplos conceptuales que proporcionan los medios de revisar y aplicar los conceptos presentados en una sección. Algunos de ellos demuestran la conexión entre conceptos presentados en un capítulo y otras disciplinas, y también pueden servir como modelos para los estudiantes cuando se les pida res-

ponder a las preguntas de fin de capítulo, las cuales son primordialmente de naturaleza conceptual.

Preguntas Al final de cada capítulo se incorporan preguntas que requieren respuestas verbales. Algunas preguntas proporcionan al estudiante un medio para autoexaminar su aprendizaje de los conceptos presentados en el capítulo, otras podrían servir como base para iniciar los análisis en clase. Las respuestas a las preguntas seleccionadas se incluyen en el *Manual de soluciones y Guía del estudiante.*

Cifras significativas Las cifras significativas, tanto en los ejemplos resueltos como en los problemas de fin de capítulo, se manejaron con cuidado. La mayoría de los ejemplos y problemas numéricos se resolvieron hasta dos o tres cifras significativas, dependiendo de la precisión de los datos proporcionados.

Problemas En cada capítulo se incluye amplio grupo de problemas que dan un total de más de 3 000 en todo el texto. En la parte final del libro se proporcionan las respuestas a los problemas de número impar, en una sección cuyas páginas tienen bordes coloreados para facilitar su localización. Para beneficio tanto del estudiante como del profesor, alrededor de las dos terceras partes de los problemas están relacionados con secciones específicas del capítulo. Los problemas restantes, denominados "Problemas adicionales", no se relacionan con secciones específicas.

Es común que los problemas de una sección determinada se presenten de manera que se resuelvan primero los más sencillos (numerados en negritas); estos problemas directos son seguidos por problemas de dificultad creciente. Para identificar con facilidad los problemas de nivel intermedio, el número de éstos está impreso en azul; el reducido número de problemas de mayor dificultad está impreso en magenta.

Problemas de repaso Muchos capítulos incluyen problemas de repaso que requieren que el estudiante considere numerosos conceptos cubiertos en el capítulo, así como aquellos analizados en capítulos anteriores. Estos problemas podrían ser usados por los estudiantes para preparar pruebas y por los instructores para asignaturas especiales y discusiones en el salón de clases.

Problemas pareados Algunos problemas numéricos al final del capítulo son pareados con el mismo problema en forma simbólica. Dos problemas pareados se identifican mediante una pantalla de fondo común color canela.

Problemas que requieren computadora o calculadora La mayoría de los capítulos incluyen uno o más problemas cuya solución requiere el uso de una computadora o calculadora gráfica. Estos problemas se identifican mediante el icono 💻. El modelado de fenómenos físicos permite a los estudiantes obtener representaciones gráficas de variables y la realización de análisis numéricos.

Unidades El sistema internacional de unidades (SI) se aplica en todo el texto. El sistema de unidades de ingeniería inglés (sistema convencional) se emplea poco.

Resúmenes Cada capítulo contiene un resumen que repasa los conceptos y las ecuaciones importantes estudiados en él.

Apéndices y guardas Al final del texto se proporcionan varios apéndices. La mayor parte del material de cada uno constituye un repaso de las técnicas y los conceptos matemáticos utilizados en el texto, los cuales abarcan notación científica, álgebra, geometría, trigonometría, cálculo diferencial y cálculo integral. A lo largo del libro se hace referencia a estos apéndices. Casi todas las secciones de repaso matemático



en los apéndices incluyen ejemplos desarrollados y ejercicios con respuestas. Además de los repasos matemáticos, los apéndices contienen tablas de datos físicos, factores de conversión, masas atómicas, así como las unidades del SI de cantidades físicas y una tabla periódica de los elementos. En las guardas también aparece otra información útil, que adiciona constantes fundamentales y datos físicos, datos planetarios, una lista de prefijos estándar, símbolos matemáticos, el alfabeto griego y abreviaturas estándar de unidades de medida.

AUXILIARES

El paquete auxiliar se actualizó y amplió como respuesta a las sugerencias de los usuarios de la cuarta edición. Los cambios más importantes en el paquete del estudiante son el *Manual de soluciones y Guía del Estudiante* con un enfoque más amplio sobre la resolución de problemas, *CD-ROM de Herramientas del estudiante* y el *CD-ROM Saunders: Conceptos centrales en física,* desarrollados por Archipelago Productions. Los instructores encontrarán mayor apoyo para sus esfuerzos educativos con nuevos materiales electrónicos.

Auxiliares para el estudiante*

Manual de soluciones y Guía del estudiante de John R. Gordon, Ralph McGrew y Raymond A. Serway, con contribuciones de Duane Deardorff. Este Manual está constituido por dos volúmenes que muestran las soluciones detalladas de casi 20 por ciento de los problemas de fin del capítulo. Los problemas en el texto, cuyas soluciones completas se encuentran en el manual, se identifican mediante recuadros alrededor de sus números. Las soluciones a muchos problemas siguen el protocolo **ROAA** descrito en el texto. El Manual también presenta una lista de ecuaciones y conceptos importantes, así como respuestas a preguntas seleccionadas de fin de capítulo.

Guía de bolsillo,* de V. Gordon Lind. Este libro de notas, de 5 × 7 pulgadas, contiene cápsulas de cada sección del libro que proporcionan una sencilla guía de conceptos importantes, fórmulas y sugerencias para la solución de problemas.

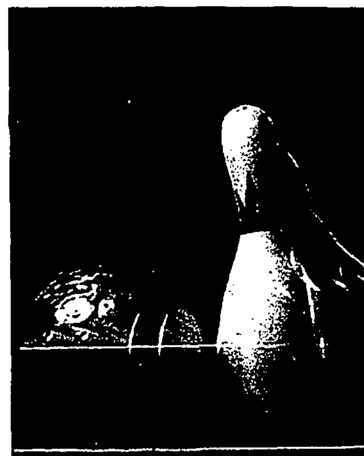
CD-ROM de Herramientas del estudiante* Este CD-ROM contiene herramientas que están diseñadas para mejorar el aprendizaje de los conceptos físicos y entrenar a los estudiantes para volverse mejores resolutores de problemas. Incluye una versión textual del muy aclamado programa Interactive Physics™, de MSC Working Knowledge, y más de 100 simulaciones de Interactive Physics™, simulaciones adaptadas a figuras apropiadas, ejemplos resueltos, preguntas sorpresa y problemas de fin de capítulo seleccionados (según se identifican mediante el icono).

Sitio web del estudiante Los estudiantes tendrán acceso a una abundancia de material en **http://www.saunderscollege.com/physics/**. El sitio de Internet presenta ensayos de autores invitados sobre temas especiales, problemas prácticos con respuestas y temas opcionales que acompañan capítulos selectos del libro. También se incluyen soluciones seleccionadas del *Manual de soluciones y Guía del estudiante,** una muestra de la *Guía de bolsillo** y un glosario que incluye más de 300 términos físicos.

Manual de laboratorio de física,* segunda edición, de David Loyd. Actualizado y rediseñado, este Manual complementa la enseñanza de los principios físicos básicos

*El material auxiliar sólo está disponible en inglés. Si desea mayor información sobre éste, póngase en contacto con un representante de McGraw-Hill.

mientras introduce procedimientos y equipo de laboratorio. Cada capítulo incluye un trabajo previo al laboratorio, objetivos y lista de equipo, la teoría tras el experimento, procedimientos experimentales paso a paso y preguntas. Para cada experimento se proporciona un reporte de laboratorio, de modo que los estudiantes pueden registrar datos y efectuar cálculos. Se les conmina a aplicar análisis estadísticos a sus datos para desarrollar su habilidad de juzgar la validez de sus resultados.



Así que usted desea estudiar física: Un curso preparatorio con cálculo, de Rodney Cole. Este texto de nivel introductorio es muy útil para aquellos estudiantes que necesitan preparación adicional antes o durante un curso de física basado en el cálculo. El estilo directo y ameno permite comprender de manera más sencilla cómo se emplean las matemáticas en el contexto de la física.

Aplicaciones de la física a las ciencias de la vida, de Jerry Faughn. Este suplemento brinda ejemplos, lecturas y problemas de las ciencias biológicas relacionados con la física. Los temas incluyen: "Fricción en articulaciones humanas", "Física del sistema circulatorio humano", "Física del sistema nervioso" y "Ultrasonido y sus aplicaciones". Este suplemento es útil en cursos que tienen un número considerable de estudiantes de medicina.

Auxiliares del profesor

Manual del profesor con soluciones* de Ralph McGrew, Jeff Saul y Charles Teague, con contribuciones de Duane Deardorff y Rhett Allain. Este Manual contiene resúmenes de capítulo, las respuestas a los problemas de número par y soluciones completamente desarrolladas para todos los problemas en el texto. Las soluciones a los nuevos problemas de la quinta edición están marcadas para que el maestro pueda identificarlas con facilidad. Algo nuevo en esta edición del Manual son las sugerencias de cómo enseñar temas difíciles y cómo ayudar al estudiante a superar malas interpretaciones. Estas sugerencias están basadas en investigación reciente en la enseñanza de la física.

Sitio web del instructor El área del instructor en **http://www.saunderscollege.com/physics/** incluye un listado de transparencias generales; una guía de experimentos relevantes del *Manual del laboratorio de física*, segunda edición, de David Loyd; una guía de correlación entre secciones en *Física para Ciencias e Ingeniería* y módulos en el *CD-ROM Saunders: Conceptos centrales en física*; problemas complementarios con respuestas; temas opcionales para acompañar capítulos selectos del texto, y una guía de correlación de problemas.

CD-ROM de recursos para el instructor* Este CD-ROM, que acompaña la quinta edición de *Física para Ciencias e Ingeniería*, se creó para proporcionar a los instructores nuevas y excitantes herramientas para presentaciones en el salón de clases. El CD-ROM contiene una colección de archivos de gráficas dibujadas tomadas del libro. Estos archivos abiertos de manera directa, pueden ser importados en diversos paquetes de presentaciones, o usados en el paquete de presentación incluido en el CD-ROM. Las leyendas para cada dibujo se ampliaron y resaltaron en negritas para facilitar la visualización en el salón de clase. El CD-ROM contiene archivos electrónicos del *Manual del instructor*, del *Banco de pruebas* y de *Problemas prácticos con soluciones*.

---

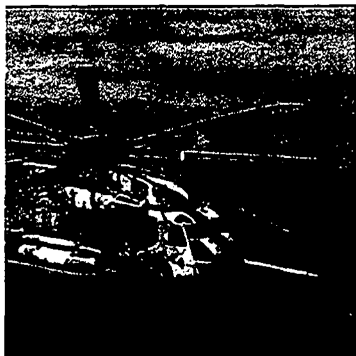
*El manual auxiliar sólo está disponible en inglés. Si desea mayor información sobre éste, póngase en contacto con un representante de Mc-Graw-Hill.



CAPA: Computer-Assisted Personalized Approach (Aproximación personalizada asistida con computadora). CAPA es un sistema de red de comunicación para aprendizaje, enseñanza, asistencia y administración. Proporciona a los estudiantes un conjunto de personalizados, preguntas y exámenes constituido con problemas conceptuales cualitativos y cuantitativos, incluyendo *Física para Ciencias e Ingeniería*. CAPA fue desarrollado a través de un esfuerzo de colaboración de los departamentos de Física-Astronomía, Ciencias de la Computación y Química, de la Michigan State University. A los estudiantes se les ofrecen retroalimentación inmediata y sugerencias relevantes vía Internet y formas para corregir sus errores sin sanciones antes de terminar una actividad asignada. El sistema registra la participación y el rendimiento de cada estudiante en las tareas asignadas, las preguntas y los exámenes; los registros están disponibles "en línea", tanto para el estudiante como para su instructor. Para mayor información, visite el sitio web de CAPA en **http://www.pa.msu.edu/educ/CAPA/**

WebAssign: Sistema de tareas con base en la Web WebAssign es un servicio de entrega, recolección, calificación y registro de tareas basado en la Web y desarrollado en la North Carolina State University. Los instructores que se suscriban a WebAssign asignarán tareas a sus estudiantes, usando preguntas y problemas tomados directamente de *Física para Ciencias e Ingeniería*. WebAssign proporciona a los educandos retroalimentación inmediata sobre sus tareas, misma que les ayuda a dominar información y habilidades, y los conduce a mayor competencia y mejores calificaciones. WebAssign libera a los instructores de la engorrosa labor de calificar y registrar las calificaciones, lo que les permitirá dedicar más tiempo para reunirse con sus alumnos y preparar presentaciones en el salón de clases. Detalles acerca de WebAssign y una demostración del mismo están disponibles en **http://webassign.net/info.** Para más información acerca de la inscripción a este servicio contacte WebAssign en **webassign@ncsu.edu.**

Servicio de tareas Con este servicio los instructores pueden reducir su carga de trabajo de calificación asignando problemas que activen el pensamiento para ser resueltos en casa usando Internet. Los instructores echarán un vistazo al banco de problemas que incluyen problemas de *Física para Ciencias e Ingeniería*, seleccionarán aquellos que deseen asignar a sus estudiantes y luego dejarán que el Servicio de Tareas se encargue de la entrega y calificación. Este sistema fue desarrollado y es mantenido por Fred Moore, en la University of Texas (**moore@physics.utexas.edu**). Los estudiantes "bajan" los problemas que se les asignan, remiten sus respuestas y obtienen retroalimentación inmediata; si sus respuestas son incorrectas puede reenviarlas. Esta característica de rápida calificación facilita el aprendizaje efectivo. Después de la fecha de entrega de sus trabajos recibirán las soluciones a sus problemas. Se requiere mínimo tiempo de conexión "en línea". El Servicio de Tareas usa problemas con base en algoritmos; esto significa que cada estudiante resuelve conjuntos de problemas que son diferentes a los proporcionados a otros. Los detalles acerca de este servicio, así como una demostración del mismo, están disponibles en **http://hw10.ph.utexas.edu/instInst.html**



Banco de pruebas impreso* de Edward Adelson. El *Banco de pruebas impreso* contiene aproximadamente 2 300 preguntas de opción múltiple. Se ofrece al instructor que no tiene acceso a una computadora. Alrededor de 20 por ciento de las anteriores opciones de la prueba fueron sustituidas por nuevas preguntas de activación del pensamiento basadas en conceptos.

Banco de pruebas computarizado Disponible en formatos Windows™ y Macintosh®, el *Banco de pruebas computarizado* contiene más de 2 300 preguntas de opción múltiple que representan cada capítulo del texto. El *Banco de pruebas computarizado* permite al profesor crear muchas pruebas individuales, así como la edición de preguntas

y la adición de nuevas preguntas. El software resuelve todos los problemas e imprime cada respuesta en una clave de calificaciones independiente. Todas las preguntas se revisaron para hacerlo más exacto.

Acetatos de transparencias para proyección Esta colección de transparencias consta de más de 300 figuras a todo color del libro; se caracteriza por su amplia área impresa para facilitar la observación en el salón de clases.

Manual del instructor de laboratorio de física, de David Loyd. Cada capítulo contiene un análisis del experimento, sugerencias didácticas, respuestas a las preguntas seleccionadas y un examen posterior al laboratorio con preguntas con respuesta breve y de ensayo. También se incluye una lista de los proveedores del equipo científico y un resumen del equipo necesario para todos los experimentos de laboratorio comprendidos en el manual.

OPCIONES DE ENSEÑANZA

Los temas en este libro se presentan en la siguiente secuencia: mecánica clásica, ondas mecánicas, y calor y termodinámica, seguido por electricidad y magnetismo, ondas electromagnéticas, óptica y relatividad. Ésta es una forma más tradicional, con el tema de ondas mecánicas expuesto antes de electricidad y magnetismo.

Los profesores que imparten cursos de dos semestres pueden eliminar algunas secciones y capítulos sin perder continuidad. Esto se ha marcado como "Opcional" en la tabla de contenido y en las correspondientes secciones del texto. Para provecho del estudiante los instructores asignarán algunas de estas secciones o capítulos como lecturas adicionales.

RECONOCIMIENTOS

La quinta edición de este libro fue preparada con la guía y asistencia de muchos profesores que revisaron parte o la totalidad del manuscrito, el texto preliminar o ambos. Deseamos agradecer a los siguientes académicos y expresarles nuestro sincero aprecio por sus valiosas sugerencias, críticas y estímulo:

Edward Adelson, *Ohio State University*
Roger Bengtson, *University of Texas at Austin*
Joseph Biegen, *Broome Community College*
Ronald J. Bieniek, *University of Missouri at Rolla*
Ronald Brown, *California Polytechnic State University-San Luis Obispo*
Michael E. Browne, *University of Idaho*
Tim Burns, *Leeward Community College*
Randall Caton, *Christopher Newport University*
Sekhar Chivukula, *Boston University*
Alfonso Díaz-Jiménez, *ADJOIN Research Center*
N. John DiNardo, *Drexel University*
F. Eugene Dunnum, *University of Florida*
William Ellis, *Cornell University*
F. Paul Esposito, *University of Cincinnati*
Paul Fahey, *University of Scranton*
Arnold Feldman, *University of Hawaii at Manoa*
Alexander Firestone, *Iowa State University*
Robert Forsythe, *Broome Community College*
Philip Fraundorf, *University of Missouri at St. Louis*
John Gerty, *Broome Community College*
John B. Gruber, *San Jose State University*
John Hubisz, *North Carolina State University*
Joey Huston, *Michigan State University*
Calvin S. Kalman, *Concordia University*
Natalie Kerr, M.D., *University of Tennessee, Memphis*
Peter Killen, *University of Queensland (Australia)*



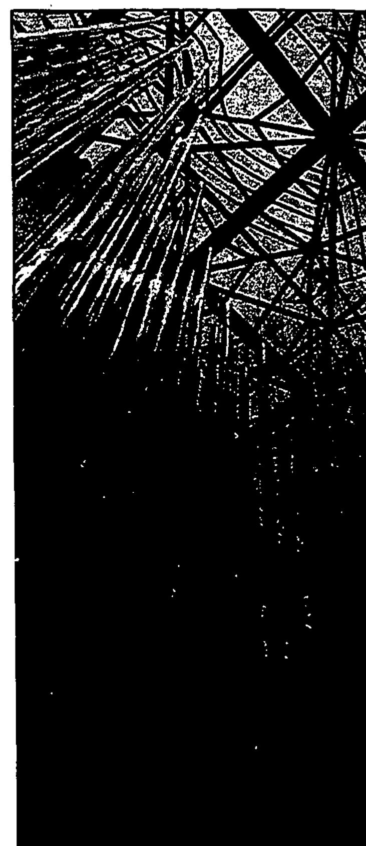
Earl Koller, *Stevens Institute of Technology*
David LaGraffe, *U.S. Military Academy*
Ying-Cheng Lai, *University of Kansas*
Donald Larson, *Drexel University*
Robert Lieberman, *Cornell University*
Ralph McGrew, *Broome Community College*
David Mills, *Monash University (Australia)*
Clement J. Moses, *Utica College*
Peter Parker, *Yale University*
John Parsons, *Columbia University*
Arnold Perlmutter, *University of Miami*
Henry Schriemer, *Queen's University (Canadá)*
Paul Snow, *University of Bath (Reino Unido)*
Edward W. Thomas, *Georgia Institute of Technology*
Charles C. Vuille, *Embry-Riddle Aeronautical University*
Xiaojun Wang, *Georgia Southern University*
Gail Welsh, *Salisbury State University*

Este libro fue cuidadosamente verificado para precisión por James H. Smith (*University of Illinois en Urbana-Champaign*), Gregory Snow (*University of Nebraska-Lincoln*), Edward Gibson (*California State University-Sacramento*), Ronald Jodoin (*Rochester Institute of Technology*), Arnold Perlmutter (*University of Miami*), Michael Paesler (*North Carolina State University*) y Clement J. Moses (*Utica College*).

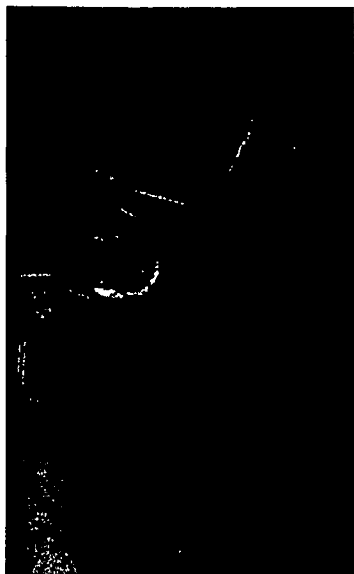
También agradecemos a las personas siguientes por sus sugerencias y asistencia durante la preparación de las ediciones anteriores de este libro:

George Alexandrakis, *University of Miami*
Elmer E. Anderson, *University of Alabama*
Wallace Arthur, *Fairleigh Dickinson University*
Duane Aston, *California State University at Sacramento*
Stephen Baker, *Rice University*
Richard Barnes, *Iowa State University*
Stanley Bashkin, *University of Arizona*
Robert Bauman, *University of Alabama*
Marvin Blecher, *Virginia Polytechnic Institute and State University*
Jeffrey J. Braun, *University of Evansville*
Kenneth Brownstein, *University of Maine*
William A. Butler, *Eastern Illinois University*
Louis H. Cadwell, *Providence College*
Ron Canterna, *University of Wyoming*
Bo Casserberg, *University of Minnesota*
Soumya Chakravarti, *California Polytechnic State University*
C. H. Chan, *University of Alabama at Huntsville*
Edward Chang, *University of Massachusetts at Amherst*
Don Chodrow, *James Madison University*
Clifton Bob Clark, *University of North Carolina at Greensboro*
Walter C. Connolly, *Appalachian State University*
Hans Courant, *University of Minnesota*
Lance E. De Long, *University of Kentucky*
James L. DuBard, *Binghamton-Southern College*
F. Paul Esposito, *University of Cincinnati*
Jerry S. Faughn, *Eastern Kentucky University*
Paul Feldker, *Florissant Valley Community College*
Joe L. Ferguson, *Mississippi State University*
R. H. Garstang, *University of Colorado at Boulder*
James B. Gerhart, *University of Washington*
John R. Gordon, *James Madison University*
Clark D. Hamilton, *National Bureau of Standards*
Mark Heald, *Swarthmore College*
Herb Helbig, *Rome Air Development Center*
Howard Herzog, *Broome Community College*
Paul Holoday, *Henry Ford Community College*
Jerome W. Hosken, *City College of San Francisco*
Larry Hmurcik, *University of Bridgeport*
William Ingham, *James Madison University*
Mario Iona, *University of Denver*

Karen L. Johnston, *North Carolina State University*
Brij M. Khorana, *Rose-Hulman Institute of Technology*
Larry Kirkpatrick, *Montana State University*
Carl Kocher, *Oregon State University*
Robert E. Kribel, *Jacksonville State University*
Barry Kunz, *Michigan Technological University*
Douglas A. Kurtze, *Clarkson University*
Fred Lipschultz, *University of Connecticut*
Francis A. Liuima, *Boston College*
Robert Long, *Worcester Polytechnic Institute*
Roger Ludin, *California Polytechnic State University*
Nolen G. Massey, *University of Texas at Arlington*
Charles E. McFarland, *University of Missouri at Rolla*
Ralph V. McGrew, *Broome Community College*
James Monroe, *The Pennsylvania State University, Beaver Campus*
Bruce Morgan, *United States Naval Academy*
Clement J. Moses, *Utica College*
Curt Moyer, *Clarkson University*
David Murdock, *Tennessee Technological University*
A. Wilson Nolle, *University of Texas at Austin*
Thomas L. O'Kuma, *San Jacinto College North*
Fred A. Otter, *University of Connecticut*
George Parker, *North Carolina State University*
William F. Parks, *University of Missouri at Rolla*
Philip B. Peters, *Virginia Military Institute*
Eric Peterson, *Highland Community College*
Richard Reimann, *Boise State University*
Joseph W. Rudmin, *James Madison University*
Jill Rugare, *DeVry Institute of Technology*
Charles Scherr, *University of Texas at Austin*
Eric Sheldon, *University of Massachusetts-Lowell*
John Shelton, *College of Lake County*
Stan Shepard, *Pennsylvania State University*
James H. Smith, *University of Illinois at Urbana-Champaign*
Richard R. Sommerfield, *Foothill College*
Kervork Spartalian, *University of Vermont*
Robert W. Stewart, *University of Victoria*
James Stith, *American Institute of Physics*
Charles D. Teague, *Eastern Kentucky University*
Edward W. Thomas, *Georgia Institute of Technology*
Carl T. Tomizuka, *University of Arizona*
Herman Trivilino, *San Jacinto College North*
Som Tyagi, *Drexel University*
Steve Van Wyk, *Chapman College*
Joseph Veit, *Western Washington University*
T. S. Venkataraman, *Drexel University*
Noboru Wada, *Colorado School of Mines*
James Walker, *Washington State University*
Gary Williams, *University of California, Los Angeles*
George Williams, *University of Utah*
Edward Zimmerman, *University of Nebraska, Lincoln*
Earl Zwicker, *Illinois Institute of Technology*



Estamos agradecidos, además, con Ralph McGrew, por organizar los problemas de fin de capítulo, por escribir muchos problemas nuevos y por sus sugerencias para mejorar el contenido del texto. Los nuevos problemas de fin de capítulo fueron escritos por Rich Cohen, John DiNardo, Robert Forsythe, Ralph McGrew y Ronald Bieniek, con sugerencias de Liz McGrew, Alexandra Héder y Richard McGrew. Damos las gracias a Laurent Hodges por permitirnos usar problemas de fin de capítulo seleccionados; a John R. Gordon, Ralph McGrew y Duane Deardorff, por escribir el *Manual de soluciones y Guía del estudiante*, y a Michael Rudmin por su atractivo diseño. Ralph McGrew, Jeff Saul y Charles Teague prepararon un exce-



lente *Manual del instructor*, y se los agradecemos. También, a Gloria Langer, Linda Miller y Jennifer Serway, por su excelente trabajo al preparar el *Manual del instructor* y los materiales complementarios que aparecen en nuestro sitio en Internet.

Especial gratitud y reconocimiento para el equipo profesional de Saunders College Publishing, en particular a Susan Pashos, Sally Kusch, Carol Bleistine, Frank Messina, Suzanne Hakanen, Ruth Hoover, Alexandra Buczek, Pauline Mula, Walter Neary y John Vondeling, por su fino trabajo durante el desarrollo y la producción de este libro. Tenemos mucho aprecio por la inteligente línea editorial de Irene Nunes, la edición de la versión final de Sue Nelson y Mary Patton, el excelente trabajo artístico producido por Rolin Graphics y los dedicados esfuerzos de recopilación de fotografías de Dena Digilio Betz.

En fin, agradecemos profundamente a nuestras esposas e hijos por su amor, apoyo y sacrificios tan prolongados.

Raymond A. Serway
Chapel Hill, North Carolina

Robert J. Beichner
Raleigh, North Carolina

John W. Jewett, Jr.
Pomona, California

Al estudiante



Es conveniente proporcionar algunos consejos que le serán muy útiles a usted, el estudiante. Antes de hacerlo, supondremos que ya leyó el prefacio, el cual describe las diversas características del libro que le ayudarán a lo largo del curso.

CÓMO ESTUDIAR

A menudo se les pregunta a los profesores: "¿Cómo debo estudiar física y prepararme para los exámenes?" No hay una respuesta sencilla, pero nos gustaría dar algunas sugerencias a partir de nuestras experiencias en el aprendizaje y la enseñanza a lo largo de los años.

Lo primero y más importante es mantener una actitud positiva hacia el tema, teniendo en mente que la física es la más importante de las ciencias naturales. Otros cursos de ciencias posteriores usarán los mismos principios físicos, por lo que es tracendente que usted comprenda y sea capaz de aplicar los diferentes conceptos y las teorías estudiados en el texto.

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

Es fundamental que entienda los conceptos y principios básicos antes de intentar resolver los problemas asignados. Esto se consigue de mejor manera mediante una lectura cuidadosa del libro de texto antes de asistir al salón de clases. Durante la lectura es útil subrayar aquellos puntos que no sean claros para usted; con ese fin se dejaron a propósito amplios márgenes en el texto. También asegúrese de realizar un diligente intento para contestar los cuestionamientos de las preguntas sorpresa conforme llegue a ellas durante su lectura. Trabajamos duro para preparar preguntas que le ayuden a juzgar por sí mismo cuán bien comprende el material. Los experimentos sorpresa, además de darle un descanso ocasional de su lectura, le ayudarán a experimentar algunos de los nuevos conceptos que está intentando aprender. Tome notas cuidadosas en clase y después plantee preguntas pertinentes relativas a las ideas que requieren aclararse. No olvide que son pocas las personas que absorben todo el significado del material científico después de una sola lectura. Tal vez sean necesarias varias lecturas del texto y sus notas. Su asistencia a clases y el trabajo de laboratorio deben complementar el texto y clarificar parte del material más difícil. Tiene que reducir al mínimo la memorización del material, ya que memorizar pasajes, ecuaciones y deducciones no significa que entienda el material. Su comprensión crecerá mediante una combinación de hábitos de estudio eficientes, discusiones con otros estudiantes y profesores, y de su habilidad para resolver los problemas presentados en el libro. Siempre que requiera clarificar algún concepto, pregunte.

PLAN DE ESTUDIO

Es importante establecer un plan de estudio regular, de preferencia diario. Asegúrese de leer el programa de estudios del curso y de seguir el plan establecido por



su profesor. Las clases serán mucho más provechosas si lee el material correspondiente del libro antes de asistir a ellas. Como regla general debe dedicar alrededor de dos horas de estudio por cada hora de clase. Si tiene problemas con el curso, busque el consejo del profesor o de estudiantes que ya hayan tomado el curso. Puede requerir instrucción adicional de estudiantes experimentados. Con frecuencia los profesores le ofrecerán sesiones de repaso, además de las clases regulares. Es importante que evite el hábito de postergar el estudio hasta un día o dos antes de un examen, pues esto casi siempre conducirá a resultados desastrosos. En vez de mantenerse en vela en sesiones de noches completas, es mejor revisar brevemente los conceptos básicos y las ecuaciones, y disfrutar una noche de verdadero descanso. Si cree que necesita ayuda adicional para la comprensión de los conceptos, la preparación de exámenes o la solución de problemas, le sugerimos que adquiera una copia del *Manual de soluciones y Guía del estudiante* que conseguirá en la librería de su escuela.

APROVECHE LAS CARACTERÍSTICAS DEL LIBRO

Debe utilizar plenamente las diversas características del texto presentadas en el prefacio. Por ejemplo, las notas al margen son prácticas para ubicar y describir ecuaciones y conceptos importantes; las **negritas** indican los enunciados y las definiciones de mayor relevancia. En los apéndices se incluyen muchas tablas útiles, aunque la mayor parte se incorpora en el texto, donde se manejan más a menudo. El apéndice B es un repaso conveniente de las técnicas matemáticas.

Las respuestas de los problemas impares se proporcionan al final del texto, las de las preguntas sorpresa están ubicadas al final de cada capítulo y las de preguntas de fin de capítulo seleccionadas vienen en el *Manual de soluciones y Guía del estudiante*. Los ejercicios (con respuestas) que se encuentran después de algunos ejemplos resueltos representan extensiones de dichos ejemplos y, en muchos casos, se espera que efectúe un cálculo sencillo. Con ellos, se persigue probar su habilidad para resolver problemas a medida que avanza en el texto. Las "Sugerencias para resolver problemas" se agregan en capítulos seleccionados a lo largo de todo el libro para proporcionarle información adicional que le ayude a resolver problemas. Un panorama de la obra completa se da en la "Tabla de contenido", en tanto que el "Índice" le permitirá localizar rápidamente material específico. Las notas a pie de página se usan en ocasiones para complementar el texto o para citar otras referencias sobre el tema estudiado.

Después de leer un capítulo, debe ser capaz de definir cualesquiera nuevas cantidades introducidas en él y discutir los principios y las suposiciones que se utilizan para llegar a ciertas relaciones clave. Los resúmenes de capítulo y las secciones de repaso del *Manual de soluciones y Guía del estudiante* le servirán en este sentido. En algunos casos será necesario referirse al índice del texto para localizar ciertos temas. Debe asociar correctamente con cada cantidad física el símbolo usado para representarla, junto con la unidad en la que la cantidad se especifica. Además, expresar cada relación importante en un enunciado redactado de manera concisa y precisa.

SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

R. P. Feynman, premio Nobel de Física, dijo una vez: "Usted no sabe nada hasta que lo ha practicado." De acuerdo con esta afirmación, reiteramos el consejo de que desarrolle las habilidades para resolver una amplia gama de problemas. Su capacidad para solucionar problemas será una de las principales pruebas de su conocimiento

de física; en consecuencia, debe tratar de resolver el mayor número posible de problemas. Una buena práctica consiste en tratar de encontrar soluciones alternas al mismo problema. Por ejemplo, los problemas de mecánica pueden resolverse con las leyes de Newton, aunque con frecuencia es mucho más directo un método alternativo que usa consideraciones de energía. No debe detenerse en pensar que entiende el problema sólo porque vio en clase cómo se soluciona, tendrá que ser capaz de resolver el problema y los similares.

El método de solución de problemas debe planearse cuidadosamente. Un plan sistemático es importante, en especial cuando un problema implica varios conceptos. Primero lea el problema varias veces hasta asegurarse de que entiende lo que se está preguntando. Busque cualesquiera palabras clave que le ayuden a interpretar el problema y que tal vez le permitan hacer ciertas suposiciones. Su habilidad para interpretar la pregunta de manera apropiada es una parte integral de la solución de problemas. En segundo lugar debe adquirir el hábito de apuntar la información dada en un problema y las cantidades que necesitan encontrarse; por ejemplo, construir una tabla con las cantidades dadas y las cantidades que se van a buscar. Este procedimiento algunas veces se usa en los ejemplos resueltos del texto. Por último, una vez elegido el método que considere apropiado para resolver un problema proceda con su solución. Las estrategias generales de solución de problemas de este tipo se incluyen en el texto y se destacan por medio de una pantalla azul claro-gris. También desarrollamos el protocolo **ROAA** para ayudarlo a guiarse a través de problemas complejos. Si sigue los pasos de este procedimiento (**R**ecopilar información, **O**rganizar su aproximación, realizar su **A**nálisis y finalmente **A**prender de su trabajo), no sólo encontrará más fácil llegar a la solución, sino que también obtendrá más de sus esfuerzos.

A menudo, los estudiantes no reconocen las limitaciones de ciertas fórmulas o leyes físicas en una situación particular. Es muy importante que entienda y recuerde las suposiciones que sustenten una teoría o un formalismo particular. Por ejemplo, ciertas ecuaciones en cinemática se aplican sólo a una partícula que se mueve con aceleración constante. Estas ecuaciones no son válidas para describir movimientos cuya aceleración no es constante, como el movimiento de un objeto conectado a un resorte o el movimiento de un objeto a través de un fluido.

Estrategia general para la solución de problemas



Casi todos los cursos de física general requieren que el estudiante adquiera las habilidades para la solución de problemas, en tanto que los exámenes se componen en gran medida de problemas que comprueban dichas habilidades. Esta breve sección describe algunas ideas que le permitirán aumentar su precisión en la solución de problemas, ampliar su comprensión de los conceptos físicos, eliminar el pánico inicial o la falta de dirección para enfocar un problema y organizar su trabajo. Una manera de cumplir estas metas es adoptar una estrategia de solución de problemas. Muchos capítulos incluyen una sección denominada "Sugerencias para resolver problemas", que le ayudará en los "obstáculos difíciles".

En el desarrollo de estrategias para la solución de problemas, por lo general, se siguen cinco pasos básicos:

- Dibuje un diagrama adecuado con leyendas y ejes de coordenadas apropiados (si fuese necesario).
- Cuando examine lo que se le pide en el problema, identifique el principio (o principios) físico básico que está implícito y liste las cantidades conocidas y las incógnitas.



- Seleccione una relación básica o deduzca una ecuación que pueda utilizarse para encontrar la incógnita y luego resuelva simbólicamente la ecuación para la incógnita.
- Sustituya los valores dados junto con las unidades apropiadas en la ecuación.
- Obtenga un valor numérico para la incógnita. El problema se verifica y se indica con una marca si las siguientes preguntas pueden contestarse apropiadamente: ¿Concuerdan las unidades? ¿La respuesta es razonable? ¿Los signos más o menos son apropiados o incluso muy importantes?

Uno de los objetivos de esta estrategia es promover la precisión. Los diagramas dibujados adecuadamente eliminan muchos errores en el signo, también ayudan a aislar los principios físicos del problema. Obtener soluciones simbólicas y marcar con cuidado las cantidades conocidas y las incógnitas servirán para evitar errores cometidos por descuido. Emplear soluciones simbólicas le motivará a pensar en términos de la física del problema. La verificación de unidades al final del problema indica un posible error algebraico. La disposición y organización física de su problema hará que el producto final sea más comprensible y fácil de seguir. Una vez que ha desarrollado un sistema organizado para examinar problemas y extraer información relevante se convertirá en un solucionador de problemas más confiable.

EXPERIMENTOS

La física es una ciencia fundada en observaciones experimentales. De acuerdo con este hecho, recomendamos tratar de complementar el libro con varios tipos de experimentos "accesibles", ya sea en casa o en el laboratorio. La mayoría de los capítulos incluyen uno o dos experimentos sorpresa que describen prácticas sencillas que es posible realizar por su cuenta. Pueden utilizarse para probar ideas y modelos estudiados en clase o en el texto. Por ejemplo, el juguete Slinky™ es una excelente herramienta para estudiar ondas viajeras; con una bola balanceándose en el extremo de una cuerda larga se investiga el movimiento de un péndulo; es factible emplear varias masas unidas al extremo de un resorte vertical o una banda de hule para determinar su naturaleza elástica; un viejo par de lentes Polaroid para el sol, algunos lentes desechados y una lente de aumento son los componentes de diversos experimentos de óptica; usted logrará una medición aproximada de la aceleración de la gravedad dejando caer una bola desde una altura conocida y medirá el tiempo de descenso con un cronómetro. Esta lista de tales experimentos es interminable. Cuando no cuente con modelos físicos emplee su imaginación y trate de desarrollar modelos propios.



NUEVOS MEDIOS

Lo exhortamos encarecidamente a usar uno o más de los productos multimedia que acompañan a este texto. Es mucho más fácil comprender la física si la ve en acción, y estos nuevos materiales le permitirán ser parte de dicha acción:

CD-ROM Herramientas del estudiante El CD-ROM de plataforma dual (compatible con Windows™ y Macintosh®) *Herramientas del estudiante* está disponible con cada nueva copia del texto. Este CD-ROM contiene una versión del texto del programa Interactive Physics™, de MSC Working Knowledge. Las simulaciones de Interactive Physics™ están referidas a las siguientes figuras; ejemplos resueltos, preguntas sorpresa y problemas de fin de capítulo (identificados en el texto con el icono).

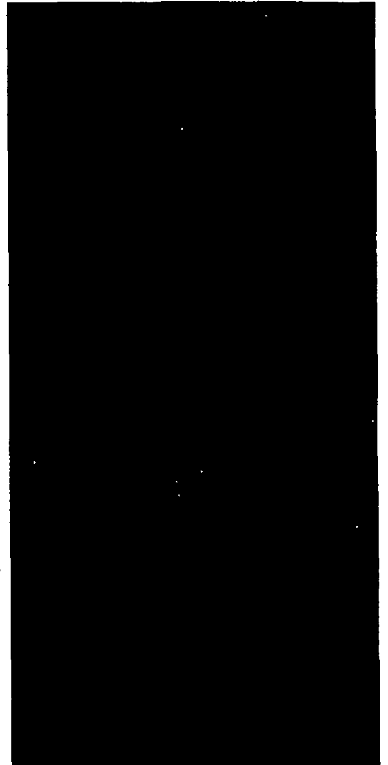
Capítulo 23

Problema 23.52

Capítulo 29

Problema 29.43

Problema 29.56



UNA INVITACIÓN A LA FÍSICA

Es nuestro más sincero deseo que también encuentre la física como una experiencia emocionante y agradable, y que se beneficie de esta experiencia, independientemente de la profesión que haya elegido. ¡Bienvenido al emocionante mundo de la física!

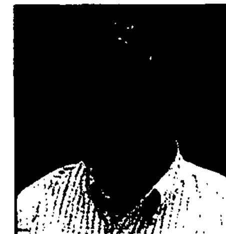
El científico no estudia la naturaleza porque sea útil, la estudia porque se deleita en ella, y se deleita en ella porque es hermosa. Si la naturaleza no fuera bella, no valdría la pena conocerla, y si no ameritara saber de ella, no valdría la pena vivir la vida.

—Henri Poincaré

Acerca de los autores



Raymond A. Serway recibió su doctorado en el Illinois Institute of Technology y es profesor emérito en la James Madison University. En 1990 recibió el premio Madison Scholar de la James Madison University, donde ha enseñado durante 17 años. El doctor Serway comenzó su carrera docente en la Clarkson University, donde dirigió investigación y enseñó de 1967 a 1980. Obtuvo el Distinguished Teaching Award en la Clarkson University en 1977 y el Alumni Achievement Award de Utica College en 1985. Como científico invitado en el Laboratorio de Investigación IBM en Zurich, Suiza, trabajó con K. Alex Müller, quien obtuvo el premio Nobel en 1987. El doctor Serway también fue científico visitante en el Argonne National Laboratory, donde colaboró con su mentor y amigo Sam Marshall. Además de las primeras ediciones de este libro de texto, el doctor Serway es autor de *Principios de física*, segunda edición, y coautor de *Física universitaria*, quinta edición, y *Física moderna*, segunda edición; también lo es del libro de texto para secundaria *Física*, editado por Holt, Rinehart & Winston. De manera adicional, ha publicado más de 40 reportes de investigación en el campo de la física de materia condensada y ha ofrecido más de 60 conferencias en reuniones profesionales. El doctor Serway y su esposa Elizabeth disfrutan viajar, jugar golf y pasar tiempo de calidad con sus cuatro hijos y cuatro nietos.



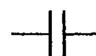
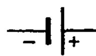
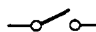
Robert J. Beichner recibió su doctorado en la State University de Nueva York en Buffalo. En la actualidad es profesor asociado de física en la North Carolina State University, donde dirige el grupo de desarrollo e investigación en educación de la física. Tiene más de 20 años de experiencia docente en institutos de enseñanza superior, escuelas de estudios superiores y niveles universitarios. Su interés en la investigación está centrado en el mejoramiento de la instrucción en física: en su trabajo ha publicado estudios de laboratorio basados en videos, aprendizaje cooperativo y ambientes de aprendizaje complementados con tecnología y la asesoría de estudiantes para que comprendan diversos temas de física. El doctor Beichner ha ostentado varios papeles de liderazgo en el campo de la investigación educativa en física y ha brindado numerosas pláticas y coloquios acerca de su labor. Además de ser uno de los autores de este texto, es coautor de dos discos compactos, varios paquetes de programas disponibles comercialmente y dos libros para el servicio social de profesores de escuela elemental. El doctor Beichner disfruta remar su kayak en el mar y pasar el tiempo con su esposa Mary y sus dos hijas, Sarah y Julie.



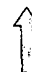
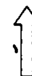
John W. Jewett Jr. obtuvo su doctorado en la Ohio State University, con especialidad en óptica y las propiedades magnéticas de la materia condensada. En la actualidad es profesor de física en la California State Polytechnic University-Pomona. A través de su carrera docente, ha sido un activo promotor de la educación científica. Además de recibir cuatro becas de la National Science Foundation, ayudó a levantar y dirigir el área de física moderna del Southern California Institute (SCAMPI). También es director de Science IMPACT (Instituto para la Moderna Pedagogía y la Enseñanza Creativa), el cual trabaja con maestros y escuelas para desarrollar currícula científicas efectivas. Ambas organizaciones operan en Estados Unidos y otros países. Entre sus honores se incluyen cuatro galardones de rendimiento meritorio y compromiso profesional, haber sido seleccionado como profesor sobresaliente de la California State Polytechnic University en 1991-1992, y el premio a la excelencia en la enseñanza de la física universitaria de la Asociación Americana de Maestros de Física (AAPT, sus siglas en inglés) en 1998. Ha dado muchas conferencias, tanto en su país como en el extranjero, incluyendo múltiples presentaciones en reuniones nacionales de la AAPT. Será coautor de la tercera edición de *Principios de física*, con el doctor Serway. El doctor Jewett disfruta tocar el piano, viajar y coleccionar antiguos artículos médicos usados por curanderos, así como pasar el tiempo con su esposa Lisa y sus hijos.

Carta pedagógica de colores

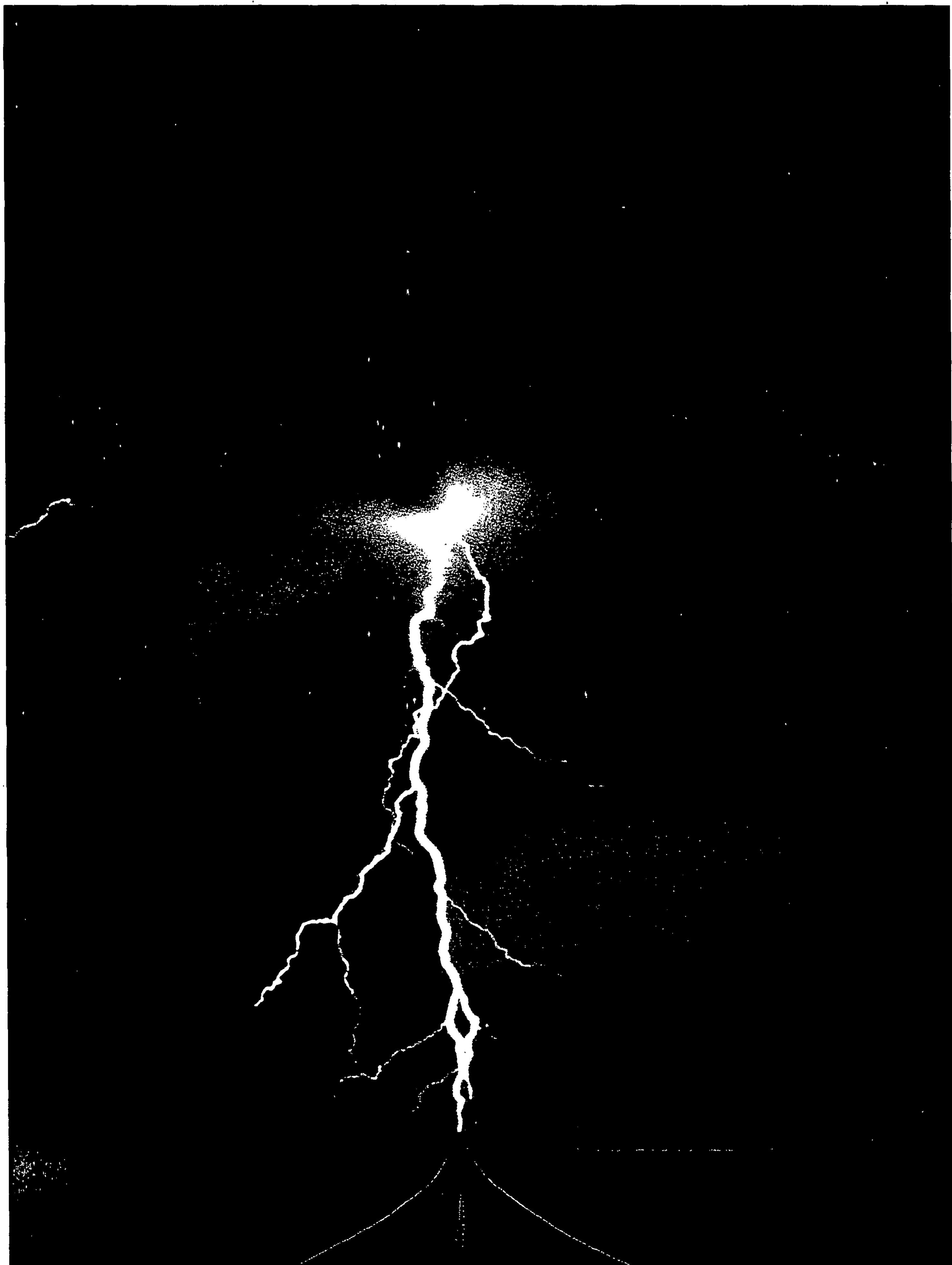
Parte 4 (Capítulos 23-34): Electricidad y magnetismo

Campos eléctricos		Capacitores	
Campos magnéticos		Inductores (bobinas)	
Cargas positivas		Voltímetros	
Cargas negativas		Amperímetros	
Resistores		Galvanómetros	
Baterías y otras fuentes de potencia		Generadores de ca	
Interruptores		Símbolo de tierra	

Parte 5 (Capítulos 35-38): Luz y óptica

Rayo de luz		Objetos	
Lentes y prismas		Imágenes	
Espejos			

FÍSICA



parte 4

Electricidad y magnetismo

Ahora se estudiará la rama de la física interesada por los fenómenos eléctricos y magnéticos. Las leyes de la electricidad y el magnetismo desempeñan un papel central en la operación de dispositivos como radios, televisiones, motores eléctricos, computadoras, aceleradores de alta energía y otros aparatos electrónicos. Fundamentalmente, las fuerzas interatómicas e intermoleculares responsables de la formación de sólidos y líquidos son eléctricas de origen. Además de esto, fuerzas como la atracción y la repulsión entre objetos y la fuerza elástica en un resorte surgen de fuerzas eléctricas en el nivel atómico.

Evidencias en documentos chinos sugieren que el magnetismo ya era conocido alrededor del año 2000 a.C. Los antiguos griegos observaban fenómenos eléctricos y magnéticos posiblemente tan temprano como en el 700 a.C. Ellos encontraron que cuando se frotaba una pieza de ámbar se electrificaba y atraía pedazos de paja u hojas. Los griegos supieron de las fuerzas magnéticas a través de observaciones del fenómeno que ocurría de manera natural cuando la piedra *magnetita* (Fe_3O_4) era atraída por el hierro. (La palabra *eléctrico* proviene de *elektron*, el vocablo griego para "ámbar". La palabra *magnético* proviene de *Magnesia*, el nombre de la provincia griega donde se encontró por primera vez la magnetita.)

En 1600 el inglés William Gilbert descubrió que la electrificación no estaba limitada al ámbar sino que se trataba de un fenómeno general. En los años posteriores a este descubrimiento los científicos electrificaban una infinidad de objetos, ¡incluyendo pollos y personas! Los experimentos de Charles Coulomb en 1785 confirmaron la ley del cuadrado inverso para las fuerzas eléctricas.

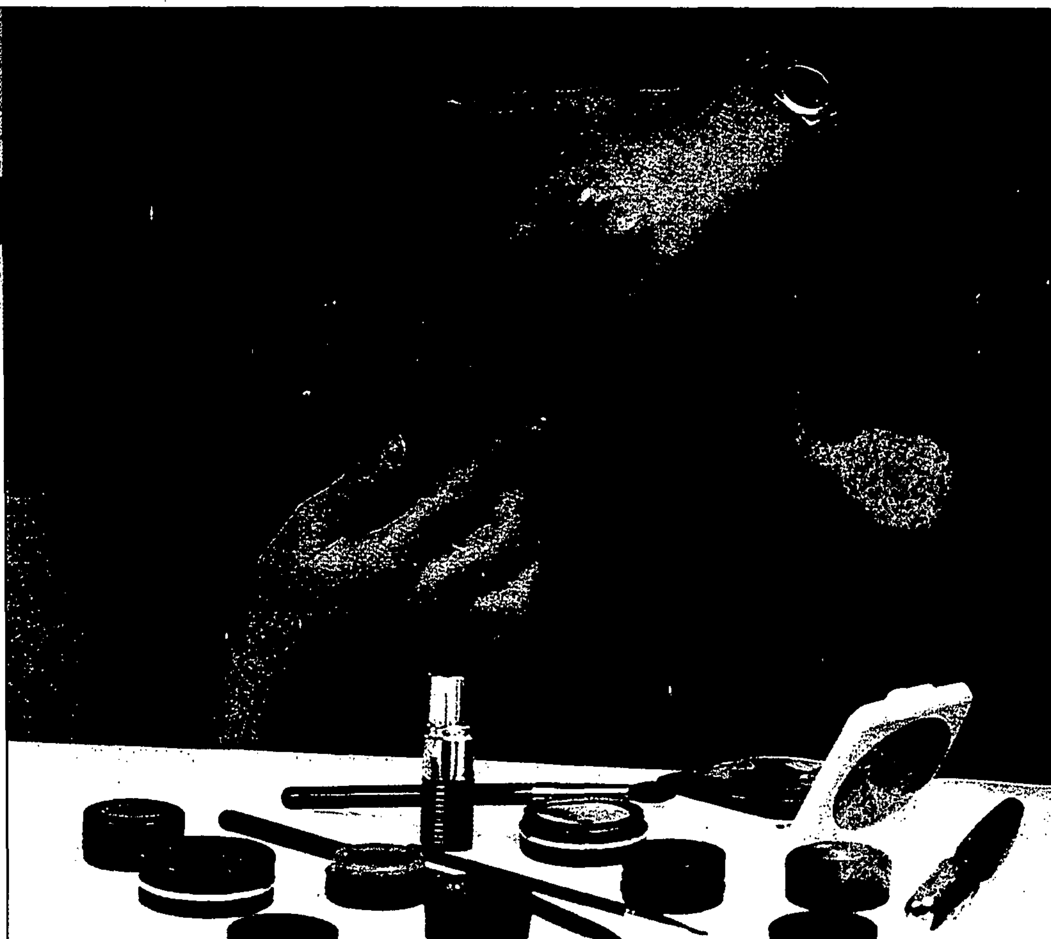
No fue sino hasta la primera mitad del siglo XIX cuando los científicos establecieron que la electricidad y el magnetismo eran fenómenos relacionados. En 1819 Hans Oersted descubrió que la aguja de una brújula se desviaba cuando se colocaba cerca de un circuito que conducía una corriente eléctrica. En 1831 Michael Faraday y, casi simultáneamente, Joseph Henry mostraron que cuando un alambre se movía cerca de un imán (o, de manera equivalente, cuando un imán se movía cerca de un alambre), se establecía una corriente eléctrica en el alambre. En 1873 James Clerk Maxwell usó estas observaciones y otros hechos experimentales como base para formular las leyes del electromagnetismo que se conocen en la actualidad. (*Electromagnetismo* es el nombre que se dio a los campos combinados de electricidad y magnetismo.) Poco tiempo después (alrededor de 1888) Heinrich Hertz verificó las predicciones de Maxwell al producir ondas electromagnéticas en el laboratorio. Estos logros condujeron a desarrollos tan prácticos como el radio y la televisión.

Las contribuciones de Maxwell al campo del electromagnetismo fueron especialmente significativas debido a que las leyes que él formuló son básicas para *todas* las formas de fenómenos electromagnéticos. Su trabajo es tan importante como el de Newton en torno a las leyes del movimiento y la teoría de la gravitación.

◄ Paul y Lindamarie Ambrose/FPG International

ACERTIJO

Los lentes de contacto suaves no son incómodos porque atraen las proteínas de las lágrimas del usuario, incorporando las moléculas complejas justo en los lentes. En cierto sentido se convierten en parte del usuario. Algunos tipos de maquillaje explotan esta misma fuerza atractiva para adherirse a la piel. ¿Cuál es la naturaleza de esta fuerza? *(Charles D. Winters)*



capítulo

23 Campos eléctricos

Líneas generales del capítulo

La fuerza electromagnética entre partículas cargadas es una de las fuerzas fundamentales de la naturaleza. Este capítulo inicia con la descripción de algunas propiedades fundamentales de las fuerzas eléctricas. Continúa con el análisis de la ley de Coulomb, que es la ley fundamental que rige la fuerza entre cualesquiera dos partículas cargadas. Después se introduce el concepto de campo eléctrico asociado con una distribución de carga y se describe su efecto sobre otras partículas cargadas. A continuación se analiza cómo usar la ley de Coulomb para calcular los campos eléctricos de una distribución de carga determinada. El capítulo concluye con un análisis del movimiento de una partícula cargada en un campo eléctrico uniforme.

23.1 PROPIEDADES DE LAS CARGAS ELÉCTRICAS

11.2 Algunos experimentos sencillos demuestran la existencia de fuerzas y cargas eléctricas. Por ejemplo, después de pasar un peine por su cabello en un día seco, usted descubrirá que el peine atrae pedacitos de papel. Con frecuencia, la fuerza atractiva es lo suficientemente fuerte para sostener los pedazos de papel. El mismo efecto ocurre cuando los materiales como el vidrio y el caucho se frotan con seda o piel.

Otro experimento sencillo es frotar con lana un globo inflado. El globo se adhiere entonces a una pared, a menudo durante horas. Cuando los materiales se comportan de esta manera se dice que están *electrificados* o se han **cargado eléctricamente.** Usted puede electrificar su cuerpo sin dificultad al frotar con vigor sus zapatos sobre una alfombra de lana. La carga sobre su cuerpo puede sentirse y eliminarse tocando ligeramente (y sorprendiendo) a un amigo. En condiciones adecuadas observará una chispa al tocarlo y los dos sentirán un ligero estremecimiento. (Experimentos como éstos funcionan mejor en días secos porque una cantidad excesiva de humedad en el aire puede ocasionar que cualquier carga que usted acumule se "escape" de su cuerpo a la tierra.)

En una serie de sencillos experimentos se encontró que hay dos tipos de cargas eléctricas, a las cuales Benjamín Franklin (1706-1790) les asignó los nombres de **positiva** y **negativa**. Para demostrar este hecho considere una barra dura de caucho que se haya frotado con un paño y que después se suspende por medio de un hilo no metálico, como se muestra en la figura 23.1. Cuando una barra de cristal que se ha frotado con seda se acerca a la barra de caucho, las dos se atraen entre sí (Fig. 23.1a). Por otra parte, si dos barras de caucho cargadas (o dos barras de vidrio cargadas) se acercan una a otra, como en la figura 23.1b, las dos se repelen. Esta observación demuestra que el caucho y el vidrio están en dos estados de electrificación diferentes. A partir de estas observaciones se concluye que **cargas similares se repelen entre sí y cargas opuestas se atraen entre sí.**

Experimento sorpresa

Frote un globo inflado contra su cabello y luego sosténgalo cerca de una fina corriente de agua que salga de un grifo. ¿Qué ocurre? (Un bolígrafo o peine de plástico que se hayan frotado también pueden funcionar.)

Utilizando la convención sugerida por Franklin, la carga eléctrica sobre una barra de vidrio se denomina positiva, y la que se produce en una barra de caucho se conoce como negativa. En consecuencia, cualquier cuerpo cargado que es atraído por una barra de caucho cargada (o repelido por una de vidrio cargada) debe tener una carga positiva, y cualquier cuerpo cargado que es repelido por una barra de caucho cargada (o atraído hacia una barra de vidrio cargada) debe tener una carga negativa.

Las fuerzas eléctricas atractivas son responsables del comportamiento de una amplia gama de productos comerciales. Por ejemplo, el plástico en muchos lentes de contacto, *etafilcon*, está hecho de moléculas que atraen eléctricamente las moléculas de proteína en las lágrimas humanas. Estas moléculas proteicas son absorbidas y sostenidas por el plástico de tal forma que los lentes al final están compuestos sobre todo por lágrimas del usuario. Debido a esto el ojo del usuario no percibe a los lentes como un objeto extraño, y los puede usar sin sentir incomodidad. Muchos cosméticos también sacan ventaja de las fuerzas eléctricas al incorporar materiales que son atraídos eléctricamente a la piel o el cabello, provocando que los pigmentos u otros químicos permanezcan en su lugar una vez aplicados.

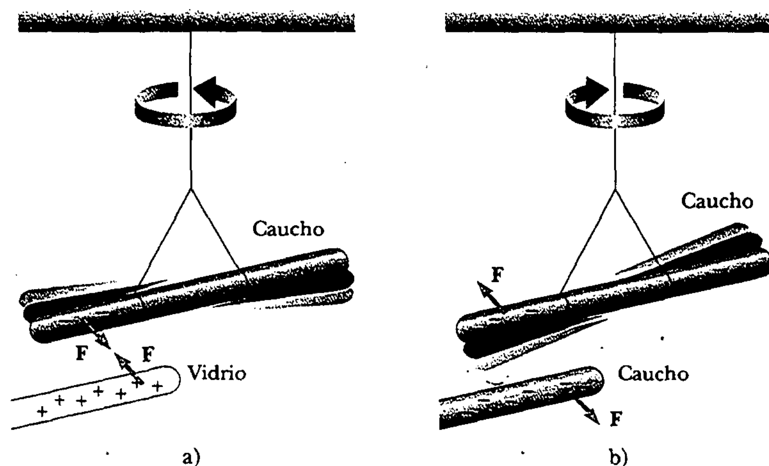


Figura 23.1 a) Una barra de caucho cargada negativamente y suspendida por un hilo, es atraída a una barra de vidrio con carga positiva. b) Una barra de caucho cargada negativamente es repelida por otra barra de caucho con carga negativa.

La carga se conserva

Otro aspecto importante del modelo de electricidad de Franklin es la implicación de que la **carga eléctrica siempre se conserva**. Es decir, cuando un cuerpo se frota contra otro, no se crea carga en el proceso. El estado electrificado se debe a una *transferencia* de carga de un cuerpo a otro. Un cuerpo gana cierta cantidad de carga negativa mientras el otro gana una cantidad igual de carga positiva. Por ejemplo, cuando una barra de vidrio se frota con seda, ésta obtiene una carga negativa que es igual en magnitud a la carga positiva en la barra de vidrio. A partir de la comprensión de la estructura atómica se sabe que los electrones cargados negativamente son transferidos del vidrio a la seda en el proceso de frotamiento. De igual modo, cuando el caucho se frota con piel, los electrones se transfieren de la piel al caucho, con lo cual éste queda con una carga negativa neta y la piel con una carga positiva neta. Este proceso es consistente con el hecho de que la materia neutra, sin carga, contiene tanto cargas positivas (protones con núcleos atómicos) como cargas negativas (electrones).

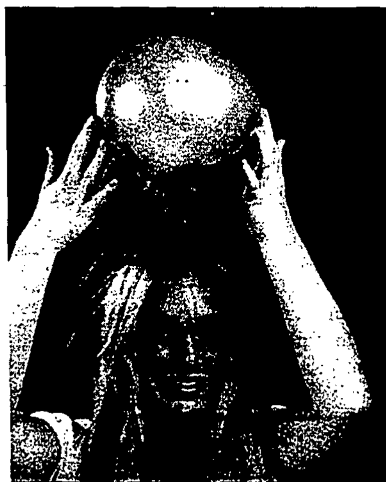


Figura 23.2 Frotar un globo contra su cabello en un día seco provoca que tanto el globo como su cabello se carguen eléctricamente. *(Charles D. Winters).*

Pregunta sorpresa 23.1

Si usted frota un globo inflado contra su cabello, los dos materiales se atraen entre sí, como se muestra en la figura 23.2. ¿La cantidad de carga presente en el globo y su cabello después de que los frota es a) menor, b) igual o c) mayor que la cantidad de carga presente antes del frotamiento?

La carga está cuantizada

En 1909 Robert Millikan (1868-1953) descubrió que la carga eléctrica siempre se presenta como algún múltiplo integral de cierta unidad fundamental de carga e. En términos modernos se dice que la carga q está **cuantizada**, donde q es el símbolo estándar utilizado para la carga. Es decir, la carga eléctrica existe como "paquetes" discretos, y se puede escribir $q = Ne$, donde N es algún entero. Otros experimentos en el mismo periodo muestran que el electrón tiene una carga $-e$ y el protón tiene una carga de igual magnitud pero opuesta en signo $+e$. Algunas partículas, como el neutrón, no tienen carga. Un átomo neutro debe contener el mismo número de protones que de electrones.

Ya que la carga es una cantidad que se conserva, la carga neta en una región cerrada permanece constante. Si las partículas cargadas se crean en algún proceso, siempre se crearán en pares cuyos miembros tendrán cargas de igual magnitud pero de signo opuesto.

A partir de lo analizado hasta ahora se concluye que la carga eléctrica tiene las siguientes importantes propiedades:

Propiedades de la carga eléctrica

- Hay dos tipos de cargas en la naturaleza, con la propiedad de que cargas diferentes se atraen unas a otras y cargas similares se rechazan entre sí.
- La carga se conserva.
- La carga está cuantizada.

23.2 AISLANTES Y CONDUCTORES

11.3 Es conveniente clasificar las sustancias en términos de su capacidad para conducir carga eléctrica:

> Los **conductores** eléctricos son materiales en que las cargas eléctricas se mueven con bastante libertad, en tanto que los **aislantes** eléctricos son materiales en los que las cargas eléctricas no se mueven con tanta libertad.

Materiales como el vidrio, el caucho y la madera entran en la categoría de aislantes eléctricos. Cuando dichos materiales se cargan por frotamiento, sólo el área que se frota queda cargada y la carga no puede moverse a otras regiones del material.

Los metales son buenos conductores

En contraste, materiales como el cobre, el aluminio y la plata son buenos conductores eléctricos. Cuando estos materiales se cargan en alguna pequeña región, la carga se distribuye rápidamente por sí sola sobre toda la superficie del material. Si usted sostiene una barra de cobre en su mano y la frota con lana o piel, no atraerá un pequeño pedazo de papel. Esto podría sugerir que el metal no puede cargarse. Sin embargo, si usted sostiene la barra de cobre por medio de un mango de madera mientras la frota, la barra permanecerá cargada y atraerá al pedazo de papel. Esto se explica del modo siguiente: sin la madera aislante las cargas eléctricas producidas por frotamiento se moverán con rapidez del cobre a través de su cuerpo y finalmente hacia la tierra. El mango de madera aislante evita el flujo de carga hacia su mano.

Los **semiconductores** son una tercera clase de materiales y sus propiedades eléctricas se encuentran entre las de los aislantes y las de los conductores. El silicio y el germanio son ejemplos bien conocidos de semiconductores utilizados comúnmente en la fabricación de diversos dispositivos electrónicos, tales como transistores y diodos emisores de luz. Las propiedades eléctricas de los semiconductores pueden cambiarse en varios órdenes de magnitud añadiendo a los materiales cantidades controladas de ciertos átomos.

Cuando un conductor se conecta a la tierra por medio de un alambre o tubo de conducción se dice que está **aterrizado**. La tierra puede considerarse entonces un "sumidero" infinito al cual las cargas eléctricas pueden emigrar fácilmente. Con esto en mente se puede entender de qué manera se carga un conductor por medio de un proceso conocido como **inducción.**

Carga por inducción

Para entender la inducción considere una esfera conductora neutra (descargada) aislada de la tierra, como se muestra en la figura 23.3a. Cuando una barra de caucho cargada negativamente se acerca a la esfera, la región de la esfera más cercana a la barra obtiene un exceso de carga positiva, mientras que la región de la esfera más alejada de la barra obtiene un exceso igual de carga negativa, como se muestra en la figura 23.3b. (Esto significa que los electrones en la parte de la esfera más cerca de la barra emigran hacia el lado opuesto de la esfera. Esto ocurre aun si la barra de hecho nunca toca la esfera.) Si se realiza el mismo experimento con un alambre conductor conectado de la esfera a tierra (Fig.23.3c), una parte de los electrones en el conductor son tan intensamente repelidos por la presencia de la carga

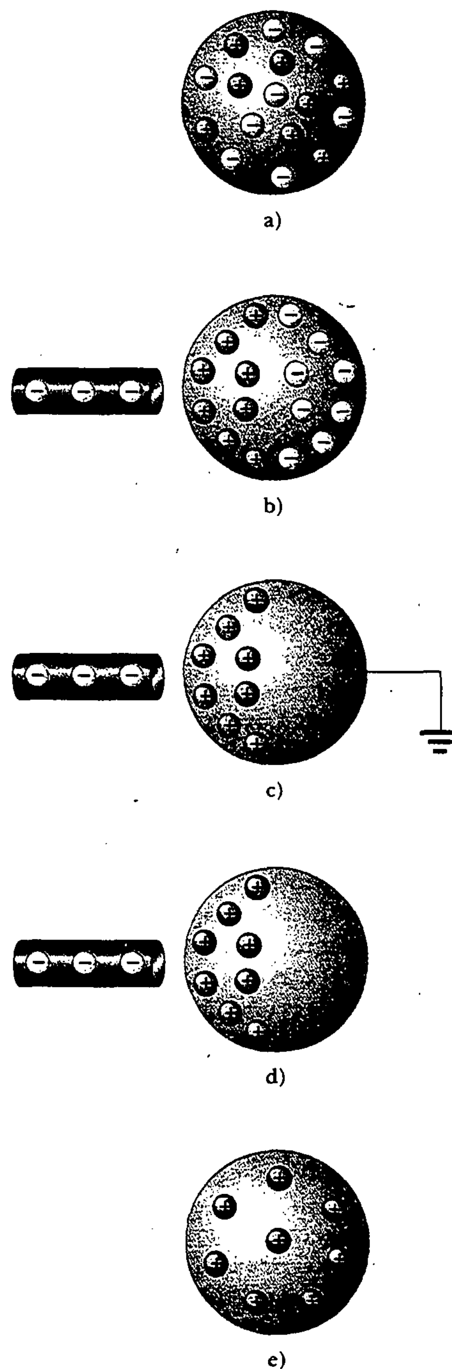


Figura 23.3 Cargando un objeto metálico por *inducción* (es decir, los dos objetos nunca se tocan entre sí). a) Una esfera metálica neutra, con igual número de cargas positivas y negativas. b) La carga en la esfera neutra se redistribuye cuando una barra de caucho cargada se coloca cerca de la esfera. c) Cuando la esfera se aterriza, algunos de sus electrones parten a través del alambre de tierra. d) Cuando la conexión a tierra se elimina, la esfera tiene exceso de carga positiva que está distribuida de manera no uniforme. e) Cuando la barra se retira, el exceso de carga positiva se distribuye uniformemente sobre toda la superficie de la esfera.

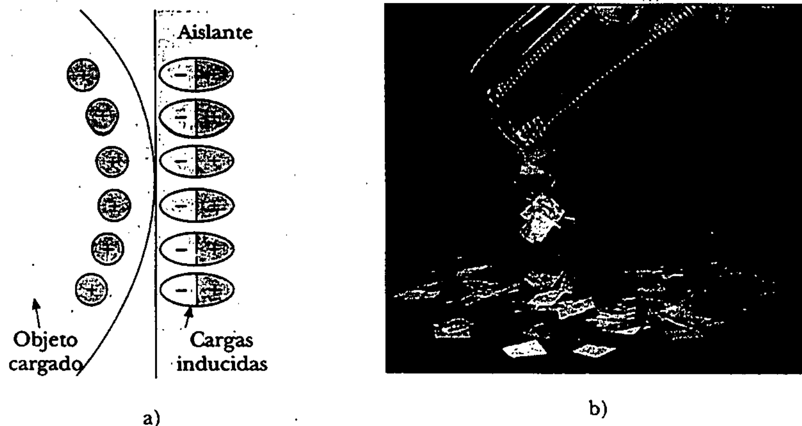


Figura 23.4 a) El objeto cargado a la izquierda induce cargas sobre la superficie de un aislante. b) Un peine cargado atrae pedazos de papel porque las cargas son desplazadas en el papel. *(© 1968 Fundamental Photographs)*

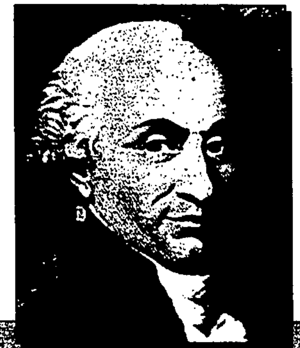
Experimento sorpresa

Corte un papel en pedazos muy pequeños. Peine su cabello y luego acerque el peine a los pedazos de papel. Advierta que éstos se aceleran hacia el peine. ¿Cómo se compara la magnitud de la fuerza eléctrica con la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida sobre el papel? Siga observando y podrá ver que unos cuantos pedazos saltan alejándose del peine. Éstos no se alejan simplemente; son repelidos. ¿Qué ocasiona esto?

negativa en la barra que salen de la esfera a través del alambre de aterrizaje y van a la tierra. Si el alambre a tierra se quita después (Fig. 23.3d), la esfera de conducción contiene un exceso de carga positiva *inducida.* Cuando se quita la barra de caucho de la vecindad de la esfera (Fig. 23.3e), la carga positiva inducida permanece sobre la esfera sin aterrizaje. Observe que la carga que permanece sobre la esfera se distribuye uniformemente sobre su superficie debido a las fuerzas repulsivas entre las cargas similares. También advierta que, durante el proceso, la barra de caucho no pierde nada de su carga negativa.

Para cargar un objeto por inducción no es necesario el contacto con el cuerpo que induce la carga. Esto contrasta con la forma en que se carga un objeto por frotamiento (es decir, por *conducción*), para lo cual es necesario el contacto entre los dos objetos.

Un proceso similar a la inducción en conductores ocurre en aislantes. En la mayor parte de las moléculas neutras el centro de carga positiva coincide con el centro de carga negativa. Sin embargo, en presencia de un objeto cargado esos centros dentro de cada molécula en un aislante pueden desplazarse ligeramente, lo que produce más carga positiva en un lado de la molécula que en el otro. Este realineamiento de carga dentro de moléculas individuales produce una carga inducida sobre la superficie del aislante, como se muestra en la figura 23.4. Así, a partir de esa información usted debe poder explicar por qué un peine que se ha pasado por el cabello atrae pedazos de papel eléctricamente neutros, o por qué un globo que se ha frotado contra su ropa puede adherirse a una pared eléctricamente neutra.



Charles Coulomb (1736-1806) La mayor contribución de Coulomb a la ciencia fue en el campo de la electrostática y el magnetismo. Durante su vida también investigó la resistencia de los materiales y determinó las fuerzas que afectan a los objetos sobre las vigas, contribuyendo así al campo de la mecánica estructural. En el campo de la ergonomía su investigación proporcionó una comprensión fundamental de las formas en las cuales las personas y los animales pueden realizar mejor su trabajo. *(Fotografía cortesía de AIP Niels Bohr Library/E. Scott Barr Collection)*

Pregunta sorpresa 23.2

El objeto A es atraído hacia el objeto B. Si se sabe que la carga del objeto B es positiva, ¿qué se puede decir del objeto A? a) Está cargado positivamente. b) Está cargado negativamente. c) Es eléctricamente neutro. d) No hay suficiente información para responder la pregunta.

23.3 LA LEY DE COULOMB



11.4 Charles Coulomb (1736-1806) midió las magnitudes de las fuerzas eléctricas entre objetos cargados mediante la balanza de torsión, que él mismo inventó (Fig. 23.5).

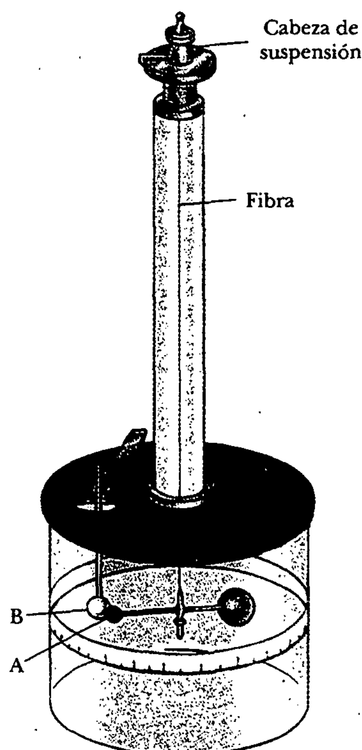


Figura 23.5 Balanza de torsión de Coulomb usada para establecer la ley del cuadrado inverso para la fuerza eléctrica entre dos cargas.

Coulomb confirmó que la fuerza eléctrica entre dos pequeñas esferas cargadas es proporcional al cuadrado inverso de la distancia que las separa r—es decir, $F_e \propto 1/r^2$. El principio operativo de la balanza de torsión es el mismo que el del aparato que usó Cavendish para medir la constante gravitacional (véase la sección 14.2), con las esferas eléctricamente neutras reemplazadas por unas cargadas. La fuerza eléctrica entre las esferas cargadas A y B en la figura 23.5 provoca que las esferas o se atraigan o se repelan entre sí, y el movimiento resultante causa que se tuerza la fibra suspendida. Ya que el momento de torsión de restitución de la fibra torcida es proporcional al ángulo a través del cual gira la fibra, una medición de este ángulo proporciona una medida cuantitativa de la fuerza eléctrica de atracción o repulsión. Una vez que las esferas se cargan por frotamiento, la fuerza eléctrica entre ellas es muy grande comparada con la atracción gravitacional, así que puede ignorarse la fuerza gravitacional.

Los experimentos de Coulomb demostraron que la **fuerza eléctrica** entre dos partículas cargadas estacionarias

- es inversamente proporcional al cuadrado de la separación r entre las partículas y está dirigida a lo largo de la línea que las une;
- es proporcional al producto de las cargas q_1 y q_2 sobre las dos partículas;
- es atractiva si las cargas son de signo opuesto y repulsiva si las cargas tienen el mismo signo.

A partir de estas observaciones se puede expresar la **ley de Coulomb** como una ecuación dando la magnitud de la fuerza eléctrica (en ocasiones llamada *fuerza de Coulomb*) entre dos cargas puntuales:

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \tag{23.1}$$

donde k_e es una constante conocida como **constante de Coulomb.** En este experimento Coulomb también pudo demostrar que el valor del exponente de r era 2 hasta una incertidumbre de un pequeño porcentaje. Los experimentos modernos han demostrado que el exponente es 2 hasta una incertidumbre de unas cuantas partes en 10^{16}.

La constante de Coulomb tiene un valor que depende de las unidades elegidas. La unidad de carga en unidades del SI es el **coulomb** (C). La constante de Coulomb k_e en unidades SI tiene el valor

Constante de Coulomb

$$k_e = 8.987\,5 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$$

Esta constante se escribe también en la forma

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

donde la constante ϵ_0 se conoce como la *permitividad del espacio libre* y tiene el valor de $8.854\,2 \times 10^{-12}$ $\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$.

La unidad de carga más pequeña conocida en la naturaleza es la carga en un electrón o protón,[1] el cual tiene un valor absoluto de

Carga en un electrón o protón

$$|e| = 1.602\,19 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Por tanto, 1 C de carga es aproximadamente igual a la carga de 6.24×10^{18} electrones o protones. Este número es muy pequeño cuando se le compara con el número de

[1] Ninguna unidad de carga más pequeña que e se ha detectado como carga libre; sin embargo, algunas teorías recientes han propuesto la existencia de partículas llamadas *quarks* que tienen cargas $e/3$ y $2e/3$. Aunque hay considerable evidencia experimental de la existencia de tales partículas dentro de la materia nuclear, nunca se han detectado quarks *libres.* Se analizan otras propiedades de los quarks en el capítulo 46 de la versión amplia de este texto.

TABLA 23.1 Carga y masa del electrón, protón y neutrón

Partícula	Carga (C)	Masa (kg)
Electrón (e)	$-1.602\ 191\ 7 \times 10^{-19}$	$9.109\ 5 \times 10^{-31}$
Protón (p)	$+1.602\ 191\ 7 \times 10^{-19}$	$1.672\ 61 \times 10^{-27}$
Neutrón (n)	0	$1.674\ 92 \times 10^{-27}$

electrones libres[2] en 1 cm^3 de cobre, el cual es del orden de 10^{23}. Aun así, 1 C es una cantidad sustancial de carga. En los experimentos ordinarios, donde una barra de caucho o vidrio se cargan por fricción, se obtiene una carga neta del orden de 10^{-6} C. En otras palabras, sólo una fracción muy pequeña de la carga total disponible se transfiere entre la barra y el material de frotamiento.

Las cargas y las masas del electrón, protón y neutrón se proporcionan en la tabla 23.1.

EJEMPLO 23.1 El átomo de hidrógeno

El electrón y el protón de un átomo de hidrógeno están separados (en promedio) por una distancia de aproximadamente 5.3×10^{-11} m. Encuentre las magnitudes de la fuerza eléctrica y la fuerza gravitacional entre las dos partículas.

Solución Con base en la ley de Coulomb se encuentra que la fuerza eléctrica atractiva tiene la magnitud

$$F_e = k_e \frac{|e|^2}{r^2} = \left(8.99 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}\right) \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{(5.3 \times 10^{-11}\ \text{m})^2}$$

$$= 8.2 \times 10^{-8}\ \text{N}$$

Utilizando la ley de la gravitación de Newton y la tabla 23.1 para las masas de partículas se determina que la fuerza gravitacional tiene la magnitud

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2}$$

$$= \left(6.7 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}\right) \times \frac{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})}{(5.3 \times 10^{-11}\ \text{m})^2}$$

$$= 3.6 \times 10^{-47}\ \text{N}$$

La razón $F_e/F_g \approx 2 \times 10^{39}$. Así pues, la fuerza gravitacional entre partículas atómicas cargadas es despreciable comparada con la fuerza eléctrica. Advierta la similitud de forma entre la ley de la gravitación de Newton y la ley de Coulomb de fuerzas eléctricas. Aparte de la magnitud, ¿cuál es la diferencia fundamental entre las dos fuerzas?

Cuando trabaje con la ley de Coulomb recuerde que la fuerza es una cantidad vectorial y que debe tratarse como corresponde. Por consiguiente, la ley expresada en forma vectorial para la fuerza eléctrica ejercida por una carga q_1 sobre una segunda carga q_2, escrita $\mathbf{F}_{12}$, es

$$\mathbf{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(23.2)}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario dirigido de q_1 a q_2, como se muestra en la figura 23.6a. Puesto que la fuerza eléctrica obedece la tercera ley de Newton, la fuerza eléctrica

[2] Un átomo metálico, como el cobre, contiene uno o más electrones exteriores, los cuales están unidos débilmente al núcleo. Cuando muchos átomos se combinan para formar un metal, los llamados *electrones libres* son esos electrones exteriores, los cuales no están ligados a ningún átomo. Estos electrones se mueven por el metal de manera similar a las moléculas de gas que se mueven en un recipiente.

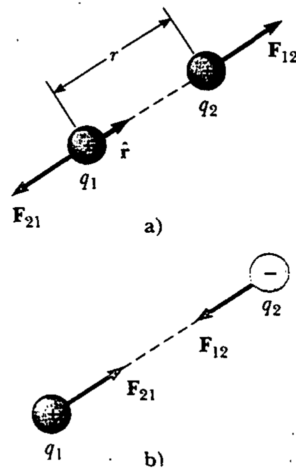


Figura 23.6 Dos cargas puntuales separadas por una distancia r ejercen una fuerza entre sí, la que está dada por la ley de Coulomb. La fuerza $\mathbf{F}_{21}$ ejercida por q_2 sobre q_1 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ ejercida por q_1 sobre q_2. a) Cuando las cargas son del mismo signo, la fuerza es repulsiva. b) Cuando las cargas son de signos opuestos, la fuerza es atractiva.

ejercida por q_2 sobre q_1 es igual en magnitud a la fuerza ejercida por q_1 sobre q_2 y en la dirección opuesta; es decir, $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. Por último, de acuerdo con la ecuación 23.2, se ve que si q_1 y q_2 tienen el mismo signo, el producto q_1q_2 es positivo y la fuerza es repulsiva, como se ve en la figura 23.6a. Si q_1 y q_2 son de signo opuesto, como se muestra en la figura 23.6b, el producto q_1q_2 es negativo y la fuerza es atractiva. Advertir el signo del producto q_1q_2 es una manera sencilla de determinar la dirección de las fuerzas que actúan sobre las cargas.

Pregunta sorpresa 23.3

El objeto A tiene una carga de +2 μC y el objeto B tiene una carga de +6 μC. ¿Cuál enunciado es cierto?

a) $\mathbf{F}_{AB} = -3\mathbf{F}_{BA}$. b) $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$. c) $3\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$.

Cuando están presentes más de dos cargas la fuerza entre cualquier par de ellas está dada por la ecuación 23.2, por tanto, la fuerza resultante sobre cualquiera de ellas es igual a la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por las diversas cargas individuales. Por ejemplo, si hay cuatro cargas, entonces las fuerzas resultantes ejercidas por las partículas 2, 3 y 4 sobre la partícula 1 son

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{41}$$

EJEMPLO 23.2 Encuentre la fuerza resultante

Considere tres cargas puntuales localizadas en las esquinas de un triángulo recto, como se muestra en la figura 23.7, donde $q_1 = q_3 = 5.0\ \mu\text{C}$, $q_2 = -2.0\ \mu\text{C}$, y $a = 0.10$ m. Encuentre la fuerza resultante ejercida sobre q_3.

Solución Primero observe la dirección de las fuerzas individuales ejercidas por q_1 y q_2 sobre q_3. La fuerza F_{23} ejercida por q_2 sobre q_3 es atractiva debido a que q_2 y q_3 tienen signos opuestos. La fuerza F_{13} ejercida por q_1 sobre q_3 es repulsiva debido a que ambas cargas son positivas.

La magnitud de $\mathbf{F}_{23}$ es

$$F_{23} = k_e \frac{|q_2||q_3|}{a^2}$$

$$= \left(8.99 \times 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\right) \frac{(2.0 \times 10^{-6}\,\text{C})(5.0 \times 10^{-6}\,\text{C})}{(0.10\ \text{m})^2}$$

$$= 9.0\ \text{N}$$

Advierta que, en vista de que q_3 y q_2 tienen signos opuestos, $\mathbf{F}_{23}$ está dirigida hacia la izquierda, como se indica en la figura 23.7.

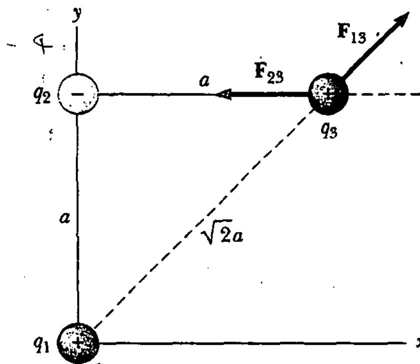


Figura 23.7 La fuerza ejercida por q_1 sobre q_3 es $\mathbf{F}_{13}$. La fuerza ejercida por q_2 sobre q_3 es $\mathbf{F}_{23}$. La fuerza resultante $\mathbf{F}_3$ ejercida sobre q_3 es el vector suma $\mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23}$.

La magnitud de la fuerza ejercida por q_1 sobre q_3 es

$$F_{13} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(\sqrt{2}a)^2}$$

$$= \left(8.99 \times 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\right)\frac{(5.0 \times 10^{-6}\text{C})\ (5.0 \times 10^{-6}\text{C})}{2(0.10\ \text{m})^2}$$

$$= 11\ \text{N}$$

La fuerza $\mathbf{F}_{13}$ es repulsiva y forma un ángulo de 45° con el eje x. En consecuencia, las componentes x y y de $\mathbf{F}_{13}$ son iguales, con la magnitud dada por F_{13} cos 45° = 7.9 N.

La fuerza $\mathbf{F}_{23}$ está en la dirección x negativa. Por tanto, las componentes x y y de la fuerza resultante que actúa sobre q_3 son

$$F_{3x} = F_{13x} + F_{23} = 7.9\ \text{N} - 9.0\ \text{N} = -1.1\ \text{N}$$

$$F_{3x} = F_{13y} = 7.9\ \text{N}$$

También se puede expresar la fuerza resultante que actúa sobre q_3 en forma de vector unitario como

$$\mathbf{F}_3 = (-1.1\mathbf{i} + 7.9\mathbf{j})\ \text{N}$$

Ejercicio Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza resultante $\mathbf{F}_3$.

Respuesta 8.0 N a un ángulo de 98° con el eje x.

EJEMPLO 23.3 ¿Dónde es cero la fuerza resultante?

Tres cargas puntuales se encuentran a lo largo del eje x, como se muestra en la figura 23.8. La carga positiva q_1 = 15.0 μC está en x = 2.00 m, la carga positiva q_2 = 6.00 μC está en el origen, y la fuerza resultante que actúa sobre q_3 es cero. ¿Cuál es la coordenada x de q_3?

Solución Puesto que q_3 es negativa y tanto q_1 como q_2 son positivas, las fuerzas $\mathbf{F}_{13}$ y $\mathbf{F}_{23}$ son atractivas, según se indica en la figura 23.8. A partir de la ley de Coulomb $\mathbf{F}_{13}$ y $\mathbf{F}_{23}$ tienen magnitudes

$$F_{13} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2.00 - x)^2} \qquad F_{23} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{x^2}$$

Para que la fuerza resultante sobre q_3 sea cero, $\mathbf{F}_{23}$ debe ser igual en magnitud y opuesta en dirección a $\mathbf{F}_{13}$, o

$$k_e \frac{|q_1||q_3|}{x^2} = k_e \frac{|q_1||q_3|}{(2.00 - x)^2}$$

Puesto que k_e y q_3 son comunes en ambos lados, y, por ende, se pueden excluir, se resuelve para x y se encuentra que

$$(2.00 - x)^2|q_2| = x^2|q_1|$$

$$(4.00 - 4.00x + x^2)(6.00 \times 10^{-6}\ \text{C}) = x^2(15.0 \times 10^{-6}\ \text{C})$$

Al resolver esta ecuación cuadrática para x se encuentra que x = 0.775 m. ¿Por qué la raíz negativa no es aceptable?

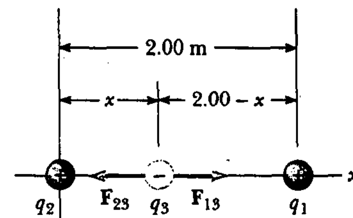


Figura 23.8 Tres cargas puntuales se colocan a lo largo del eje x. Si la fuerza neta que actúa sobre q_3 es cero, entonces la fuerza $\mathbf{F}_{13}$ ejercida por q_1 sobre q_3 debe ser igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza $\mathbf{F}_{23}$ ejercida por q_2 sobre q_3.

EJEMPLO 23.4 Encuentre la carga sobre las esferas

Dos pequeñas esferas idénticas cargadas, cada una con 3.0 × 10^{-2} kg de masa, cuelgan en equilibrio como se indica en la figura 23.9a. La longitud de cada cuerda es de 0.15 m y el ángulo θ es de 5.0°. Encuentre la magnitud de la carga sobre cada esfera.

Solución De acuerdo con el triángulo recto que se muestra en la figura 23.9a, se ve que sen $\theta = a/L$. Por consiguiente,

$$a = L \operatorname{sen} \theta = (0.15\ \text{m})\operatorname{sen} 5.0° = 0.013\ \text{m}$$

La separación de las esferas es $2a$ = 0.026 m.

Las fuerzas que actúan sobre la esfera izquierda se muestran en la figura 23.9b. Ya que la esfera está en equilibrio, las fuerzas en las direcciones horizontal y vertical deben sumar cero por separado:

1) $\Sigma F_x = T \operatorname{sen} \theta - F_e = 0$

2) $\Sigma F_y = T \cos \theta - mg = 0$

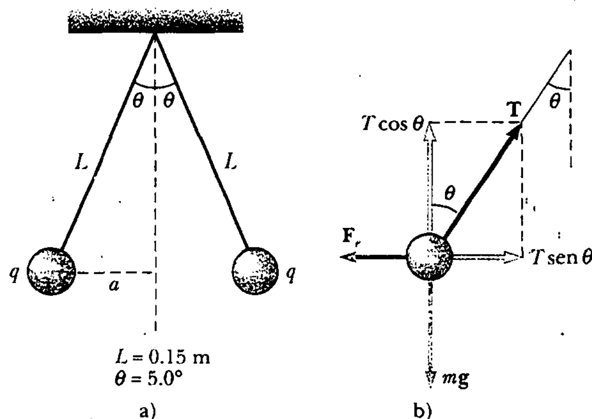


Figura 23.9 a) Dos esferas idénticas, cada una conduciendo la misma carga q, suspendidas en equilibrio. b) Diagrama de cuerpo libre para la esfera a la izquierda.

De la ecuación 2) se ve que $T = mg/\cos\theta$; por tanto, T puede eliminarse de la ecuación 1) si se hace esta sustitución. Lo anterior proporciona un valor para la magnitud de la fuerza eléctrica F_e:

3) $F_e = mg \tan\theta$

$$= (3.0 \times 10^{-2}\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)\tan 5.0°$$

$$= 2.6 \times 10^{-2}\ \text{N}$$

A partir de la ley de Coulomb (Ec. 23.1), la magnitud de la fuerza eléctrica es

$$F_e = k_e \frac{|q|^2}{r^2}$$

donde $r = 2a = 0.026$ m y $|q|$ es la magnitud de la carga en cada esfera. (Advierta que el término $|q|^2$ surge aquí porque la carga es la misma en ambas esferas.) Esta ecuación puede resolverse para $|q|^2$ y así obtener

$$|q|^2 = \frac{F_e r^2}{k_e} = \frac{(2.6 \times 10^{-2}\ \text{N})(0.026\text{m})^2}{8.99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2}$$

$$|q| = 4.4 \times 10^{-8}\ \text{C}$$

Ejercicio Si la carga sobre las esferas fuera negativa, ¿cuántos electrones tendrían que añadirse a ellas para producir una carga neta de -4.4×10^{-8} C?

Respuesta 2.7×10^{11} electrones.

Experimento sorpresa

Para este experimento usted necesita dos tiras de cinta transparente de 20 cm (masa de cada una ≈ 65 mg). Doble aproximadamente 1 cm de cinta en un extremo de cada tira para crear una pestaña. Sostenga ambos trazos de cinta lado a lado sobre una mesa y frote su dedo atrás y adelante sobre las cintas. Separe de inmediato las cintas de la superficie de modo que queden cargadas. Mantenga juntas las pestañas y las cintas se repelerán una a otra formando una "V" invertida. Mida el ángulo entre las piezas y estime el exceso de carga sobre cada tira. Suponga que las cargas actúan como si estuviesen ubicadas en el centro de masa de cada tira.

23.4 EL CAMPO ELÉCTRICO

11.5 Hasta ahora se han introducido dos campos de fuerza al análisis —la fuerza gravitacional y la fuerza eléctrica. Como se apuntó con antelación, los campos de fuerza pueden actuar a través del espacio según produciendo un efecto incluso cuando no exista contacto físico entre los objetos. El campo gravitacional **g** en un punto en el espacio según se definió en la sección 14.6 es igual a la fuerza gravitacional $\mathbf{F}_g$ que actúa sobre una partícula de prueba de masa m dividida entre dicha masa $\mathbf{g} \equiv \mathbf{F}_g/m$. Un acercamiento similar a las fuerzas eléctricas fue desarrollado por Michael Faraday, el cual tiene tal valor práctico que se le dedicará mucha atención en varios de los siguientes capítulos. En esta aproximación se dice que existe un **campo eléctrico** en la región del espacio que rodea a un objeto cargado. Cuando otro objeto cargado ingresa a este campo eléctrico, una fuerza eléctrica actúa sobre él. Como ejemplo, considere la figura 23.10, en la cual se muestra una pequeña carga positiva de prueba q_0 colocada cerca de un segundo objeto portando una carga positiva Q mucho mayor. La intensidad (en otras palabras, la magnitud) del campo eléctrico en la ubicación de la carga de prueba se define como la fuerza eléctrica ***por unidad de car-***

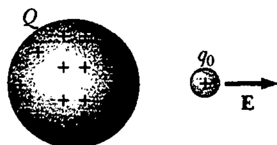


Figura 23.10 Una pequeña carga de prueba positiva q_0 colocada cerca de un objeto que conduce una carga positiva mucho mayor Q experimenta un campo eléctrico **E** dirigido como se muestra.

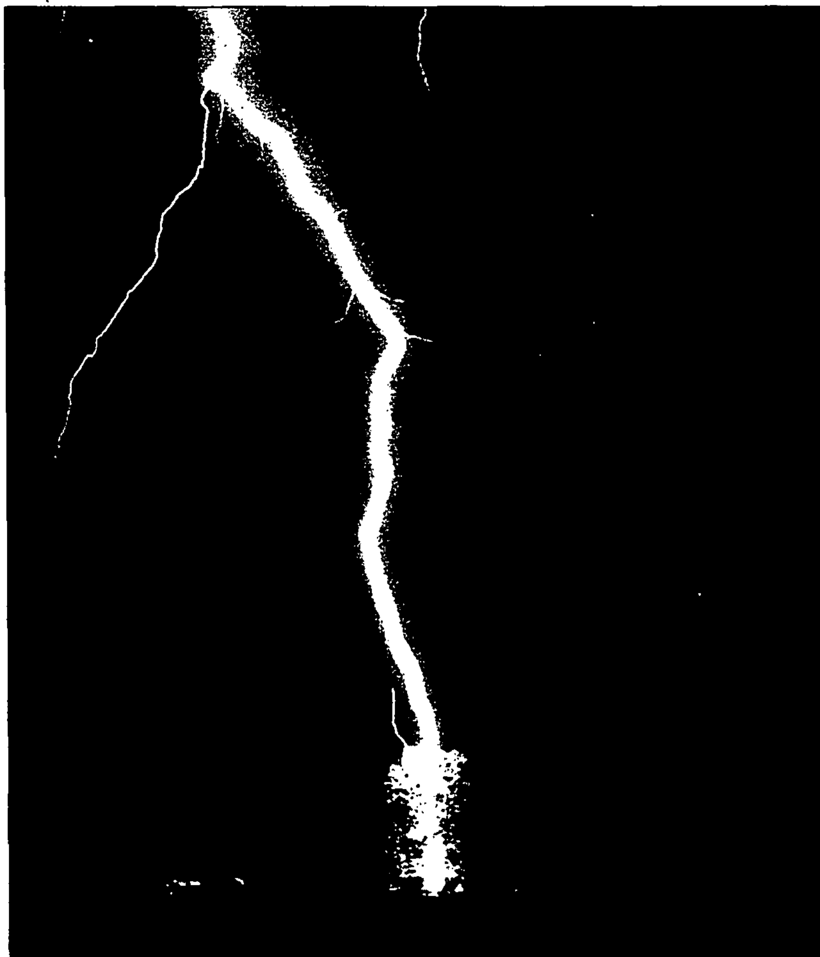
ga, o para ser más específico **el campo eléctrico E en un punto en el espacio se define como la fuerza eléctrica $\mathbf{F}_e$ que actúa sobre una carga de prueba positiva q_0 colocada en dicho punto, dividida entre la magnitud de la carga de prueba:**

$$\mathbf{E} \equiv \frac{\mathbf{F}_e}{q_0} \tag{23.3}$$

Definición de campo eléctrico

Advierta que **E** es el campo producido por alguna carga *externa* a la carga de prueba —esto, no es el campo producido por la propia carga de prueba. Además, advierta que la existencia de un campo eléctrico es una propiedad de su fuente. Por ejemplo, cada electrón viene con su propio campo eléctrico.

El vector **E** tiene las unidades del SI de newtons por coulomb (N/C), y, como se muestra en la figura 23.10, su dirección es la dirección de la fuerza que experimenta una carga de prueba positiva cuando se coloca en el campo. Se dice que **un campo eléctrico existe en un punto si una carga de prueba en reposo situada en ese punto experimenta una fuerza eléctrica.** Una vez que la magnitud y la dirección del campo eléctrico se conocen en algún punto, la fuerza eléctrica ejercida sobre *cualquier* partícula cargada ubicada en ese punto puede calcularse a partir de la ecuación 23.3. Además, se dice que el campo eléctrico existe en cierto punto (incluso en el espacio vacío) **independientemente de si una carga de prueba se localiza en ese punto.** (Esto es análogo al campo gravitacional establecido por cualquier objeto, del



Esta dramática fotografía captura un relámpago que golpea un árbol cerca de algunas casas rurales. (© *Johnny Autery*)

TABLA 23.2 Valores típicos de campo eléctrico

Fuente	E(N/C)
Tubo de luz fluorescente	10
Atmósfera (buen clima)	100
Globo frotado en cabello	1 000
Atmósfera (bajo nubes de tormenta)	10 000
Fotocopiadora	100 000
Chispa en el aire	> 3 000 000
Cerca del electrón en el átomo de hidrógeno	5×10^{11}

cual se dice que existe en un punto dado sin importar si algún otro objeto está presente en dicho punto para "sentir" el campo.) Las magnitudes del campo eléctrico de varias fuentes de campo se proporcionan en la tabla 23.2.

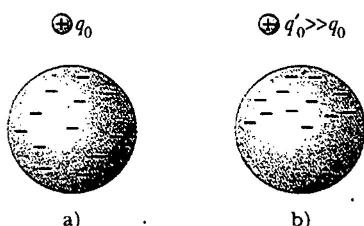


Figura 23.11 a) Para una carga de prueba q_0 suficientemente pequeña, la distribución de la carga sobre la esfera es inalterada. b) Cuando la carga de prueba q'_0 es mayor, la distribución de carga sobre la esfera se altera como resultado de la proximidad de q'_0.

Cuando se aplica la ecuación 23.3, se debe suponer que la carga de prueba q_0 es suficientemente pequeña para que no interfiera en la distribución de carga responsable del campo eléctrico. Si una pequeña carga de prueba casi nula, q_0, se sitúa cerca de una esfera metálica uniformemente cargada, como se muestra en la figura 23.11a, la carga sobre la esfera metálica que produce el campo eléctrico permanece distribuida uniformemente. Si la carga de prueba es tan grande ($q'_0 >> q_0$) como se ilustra en la figura 23.11b, la carga sobre la esfera metálica se redistribuye y la proporción entre la fuerza y la carga de la prueba es diferente: ($F'_e/q'_0 \neq F_e/q_0$). Es decir, debido a esta redistribución de la carga sobre la esfera metálica, el campo eléctrico que establece es diferente del campo establecido en presencia de q_0 que es mucho menor.

Para determinar la dirección de un campo eléctrico considere una carga puntual q localizada a una distancia r de una carga de prueba q_0 ubicada en un punto P, como se muestra en la figura 23.12. De acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza ejercida por q sobre la carga de prueba es

$$\mathbf{F}_e = k_e \frac{qq_0}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario dirigido desde q hacia q_0. Ya que el campo eléctrico en P, la posición de la carga de prueba, está definido por $\mathbf{E} = \mathbf{F}_e/q_0$, se encuentra que el campo eléctrico en P creado por q es

$$\mathbf{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \textbf{(23.4)}$$

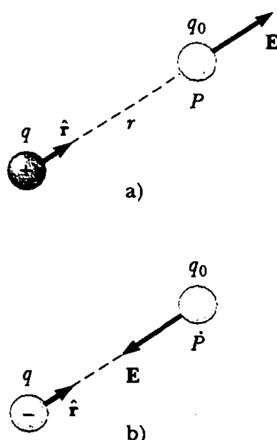


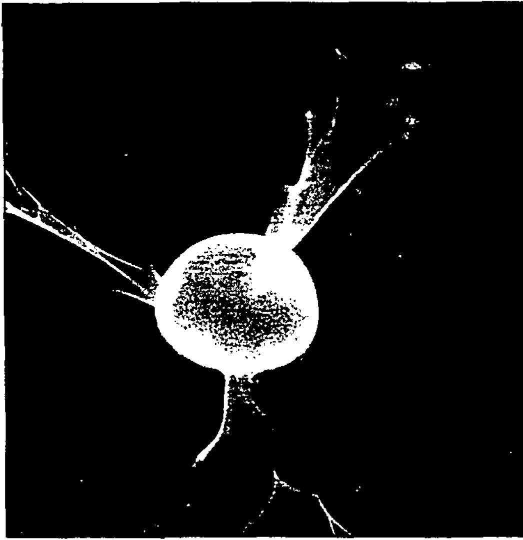
Figura 23.12 Una carga de prueba q_0 en el punto P está a una distancia r desde una carga puntual q. a) Si q es positiva, entonces el campo eléctrico en P apunta radialmente hacia afuera desde q. b) Si q es negativa, entonces el campo eléctrico en P apunta radialmente hacia adentro, hacia q.

Si q es positiva, como en la figura 23.12a, el campo eléctrico está dirigido radialmente hacia afuera de ella. Si q es negativa, como en la figura 23.12b, el campo está dirigido hacia ella.

Con el fin de calcular el campo eléctrico en un punto P debido a un grupo de cargas puntuales, primero se calculan en forma individual los vectores de campo eléctrico en P utilizando la ecuación 23.4, y a continuación se suman vectorialmente. En otras palabras,

en cualquier punto P, el campo eléctrico total debido a un grupo de cargas es igual al vector suma de los campos eléctricos de las cargas individuales.

Este principio de superposición aplicado a campos se desprende directamente de la propiedad de superposición de las fuerzas eléctricas. De este modo, el campo eléctrico de un grupo de cargas puede expresarse como



Esta esfera metálica es cargada por un generador de modo que conduce una carga eléctrica neta. La alta concentración de carga sobre la esfera crea un fuerte campo eléctrico alrededor de la esfera. Luego las cargas escapan a través del gas que rodea a la esfera, produciendo un resplandor rosado. *(E. R. Degginer/H. Armstrong Roberts)*

$$\mathbf{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \qquad \textbf{(23.5)}$$

donde r_i es la distancia desde la i-ésima carga q_i hasta el punto P (la ubicación de la carga de prueba) y $\hat{\mathbf{r}}_i$ es un vector unitario dirigido de q_i a P.

Pregunta sorpresa 23.4

Una carga de +3 μC está en un punto P donde el campo eléctrico está dirigido hacia la derecha y tiene una magnitud de 4×10^6 N/C. Si la carga se reemplaza con una carga de -3 μC, ¿qué ocurre con el campo eléctrico en P?

EJEMPLO 23.5 Campo eléctrico debido a dos cargas

Una carga $q_1 = 7.0$ μC se ubica en el origen y una segunda carga $q_2 = -5.0$ μC se ubica en el eje x a 0.30 m del origen (Fig. 23.13). Encuentre el campo eléctrico en el punto P, el cual tiene coordenadas (0, 0.40) m.

Solución Comience por encontrar la magnitud del campo eléctrico en P producido por cada carga. Los campos $\mathbf{E}_1$ producidos por la carga de 7.0 μC y $\mathbf{E}_2$ debido a la carga de -5.0 μC se muestran en la figura 23.13. Sus magnitudes son

$$E_1 = k_e \frac{|q_1|}{r_1^2} = \left(8.99 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}\right) \frac{(7.0 \times 10^{-6}\text{C})}{(0.40 \text{ m})^2}$$

$$= 3.9 \times 10^5 \text{N/C}$$

$$E_2 = k_e \frac{|q_2|}{r_2^2} = \left(8.99 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}\right) \frac{(5.0 \times 10^{-6}\text{C})}{(0.50 \text{ m})^2}$$

$$= 1.8 \times 10^5 \text{N/C}$$

El vector $\mathbf{E}_1$ tiene sólo una componente y. El vector $\mathbf{E}_2$ tiene una componente x dada por $E_2 \cos\theta = \frac{3}{5} E_2$ y una componen-

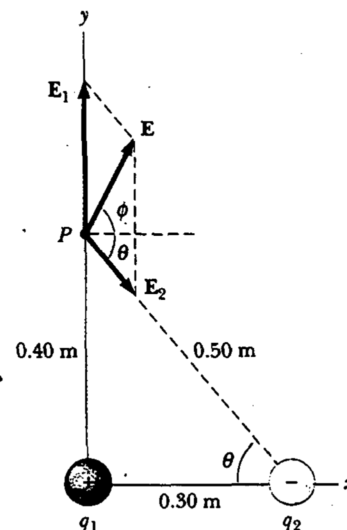


Figura 23.13 El campo eléctrico total $\mathbf{E}$ en P es igual al vector suma $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, donde $\mathbf{E}_1$ es el campo debido a la carga positiva q_1 y $\mathbf{E}_2$ es el campo debido a la carga negativa q_2.

te y negativa dada por $-E_2$ sen $\theta = -\frac{4}{5}E_2$. Por tanto, se puede expresar el vector como

$$\mathbf{E}_1 = 3.9 \times 10^5\mathbf{j}\ \text{N/C}$$
$$\mathbf{E}_2 = (1.1 \times 10^5\mathbf{i} - 1.4 \times 10^5\mathbf{j})\ \text{N/C}$$

El campo resultante **E** en P es la superposición de $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = (1.1 \times 10^5\mathbf{i} + 2.5 \times 10^5\mathbf{j})\ \text{N/C}$$

De acuerdo con este resultado se encuentra que **E** tiene una magnitud de 2.7×10^5 N/C y forma un ángulo ϕ de 66° con el eje x positivo.

Ejercicio Determine la fuerza eléctrica ejercida sobre una carga de 2.0×10^{-8} C situada en P.

Respuesta 5.4×10^{-3} N en la misma dirección que **E**.

EJEMPLO 23.6 Campo eléctrico de un dipolo

Un **dipolo eléctrico** se define como una carga positiva q y una carga negativa $-q$ separadas por alguna distancia. Para el dipolo mostrado en la figura 23.14 determine el campo eléctrico **E** en P debido a estas cargas, donde P está a una distancia $y \gg a$ desde el origen.

Solución En P los campos $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ debidos a las dos cargas son iguales en magnitud, ya que P es equidistante de las cargas. El campo total es $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, donde

$$E_1 = E_2 = k_e \frac{q}{r^2} = k_e \frac{q}{y^2 + a^2}$$

Las componentes y de $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ se cancelan entre sí y las componentes x son iguales, pues ambas están a lo largo del eje x. En consecuencia, **E** es paralela al eje x y tiene una magnitud igual a $2E_1 \cos\theta$. En la figura 23.14 se ve que $\cos\theta = a/r = a/(y^2 + a^2)^{1/2}$. Por consiguiente,

$$E = 2E_1 \cos\theta = 2k_e \frac{q}{(y^2 + a^2)} \frac{q}{(y^2 + a^2)^{1/2}}$$
$$= k_e \frac{2qa}{(y^2 + a^2)^{3/2}}$$

Puesto que $y \gg a$, se puede ignorar a^2 y escribir

$$E \approx k_e \frac{2qa}{y^3}$$

De este modo, se ve que, a distancias lejanas del dipolo pero a lo largo del bisector perpendicular de la línea que une las dos cargas, la magnitud del campo eléctrico creado por el dipolo varía con $1/r^3$, en tanto que el campo de variación más lenta de una carga puntual varía con $1/r^2$ (véase la Ec. 23.4). Esto es porque en puntos alejados los campos de las dos cargas iguales en magnitud y opuestas en signo casi se cancelan entre sí. La variación de $1/r^3$ en E para el dipolo se obtiene también para un punto distante a lo largo del eje x (véase el problema 21) y para cualquier punto distante general.

El dipolo eléctrico es un buen modelo de muchas moléculas, como el ácido clorhídrico (HCl). Como se verá en capítulos posteriores, los átomos y las moléculas neutros se comportan como dipolos cuando se ponen en un campo eléctrico externo. Además, muchas moléculas, como el HCl, son dipolos permanentes. El efecto de dichos dipolos sobre el comportamiento de materiales sujetos a campos eléctricos se analiza en el capítulo 26.

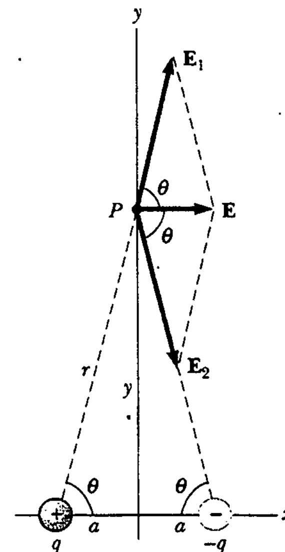


Figura 23.14 El campo eléctrico total **E** en P debido a dos cargas de igual magnitud y signo opuesto (un dipolo eléctrico) es igual al vector suma $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. El campo $\mathbf{E}_1$ se debe a la carga positiva q, y $\mathbf{E}_2$ es el campo debido a la carga negativa $-q$.

23.5 CAMPO ELÉCTRICO DE UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGA CONTINUA

Con mucha frecuencia las distancias entre cargas en un grupo de cargas es mucho menor que la distancia del grupo a algún punto de interés (por ejemplo, un punto donde el campo eléctrico se va a calcular). En estas situaciones el sistema de cargas puede considerarse como *continuo*. Es decir, el sistema de cargas con un espaciamiento muy próximo es equivalente a una carga total que está distribuida continuamente a lo largo de una línea, sobre alguna superficie o por todo un volumen.

Para evaluar el campo eléctrico creado por una distribución de carga continua se recurre al siguiente procedimiento: Primero se divide la distribución de carga en pequeños elementos, cada uno de ellos con una pequeña carga Δq, como se muestra en la figura 23.15. Luego se emplea la ecuación 23.4 para calcular el campo eléctrico debido a uno de estos elementos en un punto P. Por último se evalúa el campo total en P debido a la distribución de carga sumando las contribuciones de todos los elementos de carga (esto es, aplicando el principio de superposición).

Una distribución de carga continua

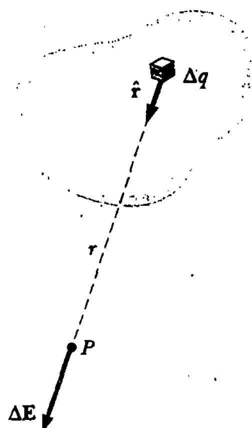


Figura 23.15 El campo eléctrico en P debido a una distribución de carga continua es el vector suma de los campos $\Delta\mathbf{E}$ debidos a todos los elementos Δq de la distribución de carga.

El campo eléctrico en P debido a un elemento que porta una carga Δq es

$$\Delta \mathbf{E} = k_e \frac{\Delta q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

donde r es la distancia del elemento al punto P y $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario dirigido del elemento de carga hacia P. El campo eléctrico total en P debido a todos los elementos en la distribución de carga es, aproximadamente,

$$\mathbf{E} \approx k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i$$

donde el índice i se refiere al i-ésimo elemento en la distribución. Puesto que la distribución de carga es casi continua, el campo total en P en el límite $\Delta q_i \to 0$ es

$$\mathbf{E} = k_e \lim_{\Delta q_i \to 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i = k_e \int \frac{dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(23.6)}$$

Campo eléctrico de una distribución de carga continua

donde la integración es sobre la distribución de carga completa. Ésta es una operación vectorial y debe tratarse de manera apropiada.

Este tipo de cálculo se ilustra con varios ejemplos, donde se supone que la carga se distribuye de manera uniforme en una línea, sobre una superficie, o a través de algún volumen. Cuando efectúe estos cálculos es conveniente que use el concepto de densidad de carga junto con las siguientes anotaciones:

- Si una carga Q se distribuye uniformemente por un volumen V, la **densidad de carga volumétrica** ρ se define por

Densidad de carga volumétrica

$$\rho \equiv \frac{Q}{V}$$

donde ρ tiene unidades de coulombs por metro cúbico (C/m^3).

- Si una carga Q se distribuye uniformemente sobre una superficie de área A, la **densidad de carga superficial** σ está definida por

Densidad de carga superficial

$$\sigma \equiv \frac{Q}{A}$$

donde σ tiene unidades de coulombs por metro cuadrado (C/m^2).

- Si una carga Q se distribuye uniformemente a lo largo de una línea de longitud ℓ, la **densidad de carga lineal** λ está definida por

Densidad de carga lineal

$$\lambda \equiv \frac{Q}{\ell}$$

donde λ tiene unidades de coulombs por metro (C/m).

- Si la carga se distribuye de manera no uniforme sobre un volumen, superficie o línea, las densidades de carga se pueden expresar como

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \qquad \sigma = \frac{dQ}{dA} \qquad \lambda = \frac{dQ}{d\ell}$$

donde dQ es la cantidad de carga en un pequeño elemento de volumen, superficie o longitud.

EJEMPLO 23.7 El campo eléctrico debido a una barra cargada

Una barra de longitud ℓ tiene una carga positiva uniforme por unidad de longitud λ y una carga total Q. Calcule el campo eléctrico en un punto P que está ubicado a lo largo del eje de la barra y a una distancia a de un extremo. (Fig. 23.16.)

Solución Suponga que la barra está sobre el eje x, que dx es la longitud de un pequeño segmento de la barra y que dq es la carga sobre dicho segmento. Puesto que la barra tiene una carga por unidad de longitud λ, la carga dq sobre el pequeño segmento es $dq = \lambda\, dx$.

El campo $d\mathbf{E}$ producido por este segmento en P está en la dirección x negativa (puesto que la fuente del campo porta una carga Q positiva), y su magnitud es

$$dE = k_e \frac{dq}{x^2} = k_e\lambda \frac{dx}{x^2}$$

Ya que cada elemento produce un campo en la dirección x negativa, el problema de sumar dichas contribuciones es particularmente simple en este caso. El campo total en P producido por todos los segmentos de la barra, que se encuentran a diferentes distancias desde P, está dado por la ecuación 23.6, que en este caso se convierte en[3]

$$E = \int_a^{\ell+a} k_e\lambda \frac{dx}{x^2}$$

donde los límites en la integral se extienden desde un extremo de la barra ($x = a$) hasta el otro ($x = \ell + a$). Las constantes k_e y λ pueden separarse de la integral para producir

$$E = k_e\lambda \int_a^{\ell+a} \frac{dx}{x^2} = k_e\lambda\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{\ell+a}$$

$$= k_e\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\ell + a}\right) = \frac{k_eQ}{a(\ell + a)}$$

donde se ha usado el hecho de que la carga total $Q = \lambda\ell$.

Si P está bastante lejos de la barra ($a \gg \ell$), entonces ℓ puede ignorarse en el denominador, y $E \approx k_eQ/a^2$. Ésta es exactamente la forma que usted esperaría para una carga puntual. Por tanto, a grandes valores de a/ℓ, la distribución de carga aparece como una carga puntual de magnitud Q. Utilizar la técnica de límite ($a/\ell \to \infty$) es un buen método para verificar una fórmula teórica.

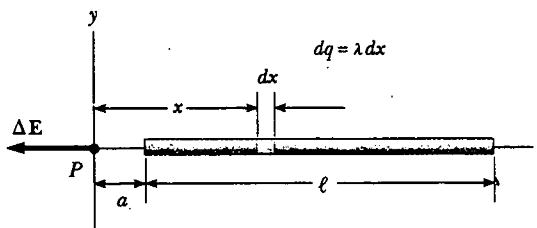


Figura 23.16 El campo eléctrico en P debido a una barra cargada de manera uniforme yaciendo sobre el eje x. La magnitud del campo en P debido al segmento de carga dq es $k_e dq/x^2$. El campo total en P es el vector suma sobre todos los segmentos de la barra.

EJEMPLO 23.8 El campo eléctrico de un anillo de carga uniforme

Un anillo de radio a tiene una carga positiva total Q distribuida uniformemente. Calcule el campo eléctrico debido al anillo en un punto P que se encuentra a una distancia x de su centro a lo largo del eje central perpendicular al plano del anillo (Fig. 23.17a).

Solución La magnitud del campo eléctrico en P debido al segmento de carga dq es

$$dE = k_e \frac{dq}{r^2}$$

Este campo tiene una componente $dE_x = dE \cos\theta$ a lo largo del eje y una componente $dE_\perp$ perpendicular al eje. Sin embargo, como se ve en la figura 23.17b, el campo resultante en P debe estar sobre el eje x debido a que la suma de las componentes perpendiculares de todos los segmentos de carga es

[3] Es importante que usted comprenda el procedimiento usado para efectuar integraciones como ésta. Primero, exprese el elemento de carga dq en términos de las otras variables en la integral (en este ejemplo existe una variable, x, y de modo que se hace el cambio $dq = \lambda\, dx$). La integral debe ser sobre cantidades escalares; por tanto, usted debe expresar el campo eléctrico en términos de componentes, si es necesario. (En este ejemplo el campo tiene sólo una componente x, por lo que no es necesario preocuparse por este detalle.) Después reduzca su expresión a una integral sobre una sola variable (o a integrales múltiples, cada una sobre una sola variable). En los ejemplos que tienen simetrías esférica o cilíndrica la única variable será una coordenada radial.

igual a cero. Es decir, la componente perpendicular del campo creado para cualquier elemento de carga es cancelada por la componente perpendicular creada por un elemento en el lado opuesto del anillo. Puesto que $r = (x^2 + a^2)^{1/2}$ y $\cos\theta = x/r$, se encuentra que

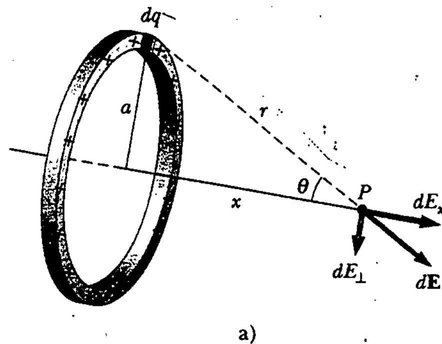
$$dE_x = dE\cos\theta = \left(k_e\frac{dq}{r^2}\right)\frac{x}{r} = \frac{k_e x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dq$$

Todos los segmentos del anillo producen la misma contribución al campo en P puesto que todos son equidistantes de este punto. Así, se puede integrar para obtener el campo total en P:

$$E_x = \int \frac{k_e x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dq = \frac{k_e x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\int dq$$
$$= \frac{k_e x}{(x^2+a^2)^{3/2}}Q$$

Este resultado muestra que el campo es cero en $x = 0$. ¿Esto le sorprende?

Ejercicio Demuestre que, a grandes distancias del anillo ($x \gg a$), el campo eléctrico a lo largo del eje mostrado en la figura 23.17 se acerca al de una carga puntual de magnitud Q.



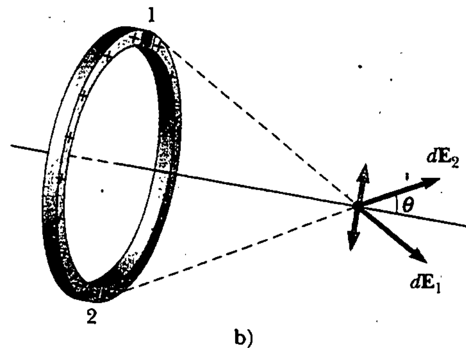


Figura 23.17 Un anillo de radio a cargado de manera uniforme. a) El campo en P sobre el eje x debido a un elemento de carga dq. b) El campo eléctrico total en P está a lo largo del eje x. La componente perpendicular del campo en P debida al segmento 1 se cancela por la componente perpendicular debida al segmento 2.

EJEMPLO 23.9 El campo eléctrico de un disco cargado uniformemente

Un disco de radio R tiene una densidad de carga superficial uniforme σ. Calcule el campo eléctrico en un punto P que se encuentra a lo largo del eje central perpendicular del disco y a una distancia x de su centro (Fig. 23.18).

Solución Si se considera al disco como un conjunto de anillos concéntricos se puede usar el resultado del ejemplo 23.8 —el cual da el campo creado por un anillo de radio r— y sumar las contribuciones de todos los anillos que conforman el disco. Por simetría, el campo sobre un punto axial debe estar a lo largo del eje central.

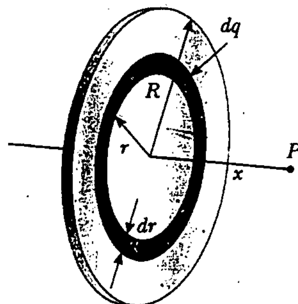


Figura 23.18 Un disco de radio R cargado de manera uniforme. El campo eléctrico en un punto axial P está dirigido a lo largo del eje central, perpendicular al plano del disco.

El anillo de radio r y ancho dr mostrado en la figura 23.18 tiene un área de superficie igual a $2\pi r\,dr$. La carga dq sobre este anillo es igual al área del anillo multiplicada por la densidad de carga superficial: $dq = 2\pi\sigma r\,dr$. Usando este resultado en la ecuación dada para E_x en el ejemplo 23.8 (con a sustituida por r) se tiene, para el campo debido al anillo,

$$dE = \frac{k_e x}{(x^2+r^2)^{3/2}}(2\pi\sigma r\,dr)$$

Para obtener el campo total en P se integra esta expresión sobre los límites $r = 0$ hasta $r = R$, observando que x es una constante. Esto produce

$$E = k_e x\pi\sigma\int_0^R \frac{2r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$
$$= k_e x\pi\sigma\int_0^R (x^2+r^2)^{-3/2}\,d(r^2)$$
$$= k_e x\pi\sigma\left[\frac{(x^2+r^2)^{-1/2}}{-1/2}\right]_0^R$$
$$= 2\pi k_e\sigma\left(\frac{x}{|x|} - \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right)$$

Este resultado es válido para todos los valores de x. Se puede calcular el campo cercano al disco sobre el eje suponiendo

que $R \gg x$; en consecuencia, la expresión entre paréntesis se reduce a la unidad:

$$E \approx 2\pi k_e \sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

donde $\epsilon_0 = 1/(4\pi k_e)$ es la permitividad del espacio libre. Como se verá en el siguiente capítulo, el mismo resultado se obtiene para el campo creado por una lámina infinita cargada uniformemente.

23.6 LÍNEAS DE CAMPO ELÉCTRICO

11.5 Una forma conveniente de visualizar los patrones de campo eléctrico es dibujar líneas que apunten en la misma dirección que el vector de campo eléctrico en cualquier punto. Estas líneas, llamadas **líneas de campo eléctrico**, se relacionan con el campo eléctrico en cualquier región del espacio de la siguiente manera:

- El vector de campo eléctrico **E** es tangente a la línea del campo eléctrico en cada punto.
- El número de líneas por unidad de área a través de una superficie perpendicular a las líneas es proporcional a la magnitud del campo eléctrico en esa región. Así, E es más grande cuando las líneas de campo están próximas entre sí y es pequeño cuando están apartadas.

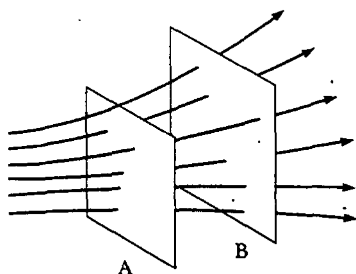
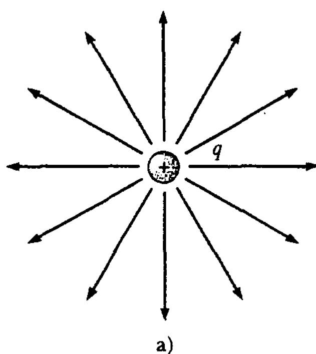
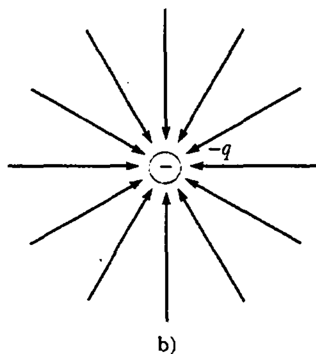


Figura 23.19 Líneas de campo eléctrico penetrando dos superficies. La magnitud del campo es mayor sobre la superficie A que sobre la superficie B.

Estas propiedades se ilustran en la figura 23.19. La densidad de líneas a través de la superficie A es más grande que la densidad de líneas a través de la superficie B. En consecuencia, el campo eléctrico es más intenso sobre la superficie A que sobre la superficie B. Además, el hecho de que las líneas en diferentes situaciones apunten en diferentes direcciones indica que el campo no es uniforme.

Algunas líneas de campo eléctrico representativas para el campo debido a una carga puntual positiva individual se muestran en la figura 23.20a. Advierta que en este dibujo bidimensional sólo se muestran las líneas de campo que están en el plano que contiene a la carga puntual. En realidad, las líneas están dirigidas radialmente hacia afuera de la carga en todas las direcciones; por tanto, en lugar de la "rueda" plana de líneas mostradas, deberá dibujar una esfera de líneas completa. Ya que una carga de prueba positiva situada en este campo sería repelida por la carga pun-





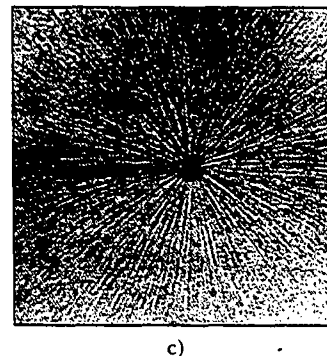


Figura 23.20 Líneas de campo eléctrico para una carga puntual. a) Para una carga puntual positiva, las líneas están dirigidas radialmente hacia afuera. b) Para una carga puntual negativa, las líneas están dirigidas radialmente hacia adentro. Advierta que las figuras muestran sólo aquellas líneas de campo que yacen en el plano que contiene a la carga. c) Las áreas oscuras son pequeñas piezas de hilo suspendidas en aceite, las cuales se alinean con el campo eléctrico producido en el centro por un pequeño conductor cargado. *(c, Cortesía de Harold M. Waage, Princeton University)*

tual positiva, las líneas están dirigidas radialmente alejándose de la carga puntual positiva. Las líneas de campo eléctrico que representan el campo debido a una carga puntual negativa individual están dirigidas hacia la carga (Fig. 23.20b). En cualquier caso, las líneas están a lo largo de la dirección radial y en todas partes se extienden hacia el infinito. Advierta que las líneas están más próximas conforme se van acercando a la carga; esto indica que la intensidad del campo aumenta conforme se mueve hacia la carga fuente.

Las reglas para dibujar líneas de campo eléctrico son como siguen:

Reglas para dibujar líneas de campo eléctrico

- Las líneas deben empezar en una carga positiva y terminar en una carga negativa.
- El número de líneas dibujadas saliendo de una carga positiva o aproximándose a una carga negativa es proporcional a la magnitud de la carga.
- Ningún par de líneas de campo puede cruzarse.

¿Esta visualización del campo eléctrico en términos de líneas de campo es consistente con la ecuación 23.4, la expresión obtenida para E usando la ley de Coulomb? Para responder esta pregunta considere una superficie esférica imaginaria de radio r concéntrica con una carga puntual. A partir de la simetría se ve que la magnitud del campo eléctrico es la misma en todas partes sobre la superficie de la esfera. El número de líneas N que emergen de la carga es igual al número que penetra la superficie esférica. Por tanto, el número de líneas por unidad de área sobre la esfera es $N/4\pi r^2$ (donde el área de la superficie de la esfera es $4\pi r^2$). Ya que E es proporcional al número de líneas por unidad de área, se ve que E varía con $1/r^2$; este descubrimiento es consistente con la ecuación 23.4.

Como se ha visto, se usan líneas de campo eléctrico para describir cualitativamente el campo eléctrico. Un problema con este modelo es el hecho de que siempre se dibuja un número finito de líneas desde (o hacia) cada carga. De esta forma parece como si el campo actuara sólo a lo largo de ciertas direcciones, lo cual no es cierto. En realidad el campo es *continuo* —es decir, existe en todo punto. Otro problema asociado con este modelo es el riesgo de obtener una impresión errónea de un dibujo bidimensional de líneas de campo que se está usando para describir una situación tridimensional. Tenga cuidado con estas deficiencias cada vez que dibuje u observe un diagrama donde se muestren líneas de campo eléctrico.

Se elige $C'q$ como el número de líneas de campo que parten de cualquier objeto con carga positiva y $C'|q|$ como el número de líneas que terminan en cualquier objeto cargado negativamente, donde C' es una constante de proporcionalidad arbitraria. Una vez que se elige C', se fija el número de líneas. Por ejemplo, si el objeto 1 tiene carga Q_1 y el objeto 2 tiene carga Q_2, entonces la proporción del número de líneas es $N_2/N_1 = Q_2/Q_1$.

Las líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales de igual magnitud pero signos opuestos (el dipolo eléctrico) se muestran en la figura 23.21. Ya que las cargas son de igual magnitud, el número de líneas que empiezan en la carga positiva debe ser igual al número de las que terminan en la carga negativa. En puntos muy cercanos a las cargas, las líneas son casi radiales. La alta densidad de líneas entre las cargas indica una región de intenso campo eléctrico.

La figura 23.22 muestra las líneas de campo eléctrico en la vecindad de dos cargas puntuales positivas iguales. También en este caso las líneas son casi radiales en puntos cercanos a cualesquiera de las cargas, y el mismo número de líneas surge de cada carga porque éstas son iguales en magnitud. A grandes distancias de las cargas, el campo es aproximadamente igual al de una carga puntual individual de magnitud $2q$.

Por último, en la figura 23.23 se bosquejaron las líneas de campo eléctrico asociadas con una carga positiva $+2q$ y una carga negativa $-q$. En este caso el número de líneas que salen de $+2q$ es el doble del número que termina en $-q$. Por tanto, só-

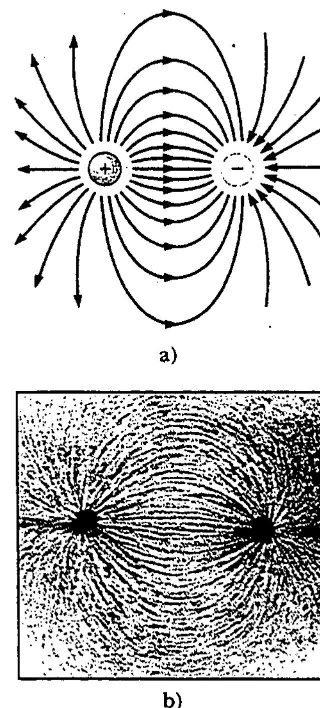


Figura 23.21 a) Líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales de igual magnitud y signo opuesto (un dipolo eléctrico). El número de líneas que parten de la carga positiva es igual al número de las que llegan a la carga negativa. b) Las líneas oscuras son pequeñas piezas de hilo suspendidas en aceite, las cuales se alinean con el campo eléctrico de un dipolo. *(b, Cortesía de Harold M. Waage, Princeton University)*

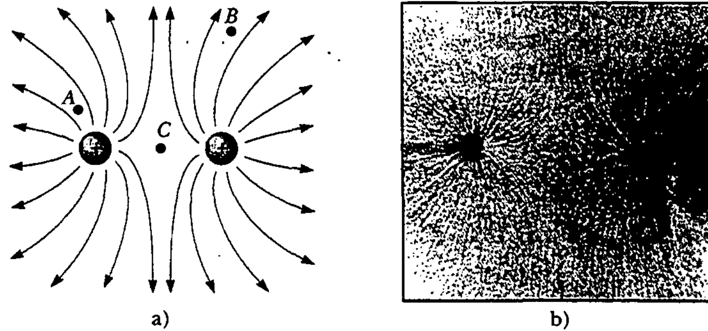


Figura 23.22 a) Líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales positivas. (Las posiciones *A*, *B* y *C* se analizan en la pregunta sorpresa 23.5.) b) Piezas de hilo suspendidas en aceite, las cuales se alinean con el campo eléctrico creado por dos cargas positivas de igual magnitud. *(Fotografía cortesía de Harold M. Waage, Princeton University)*

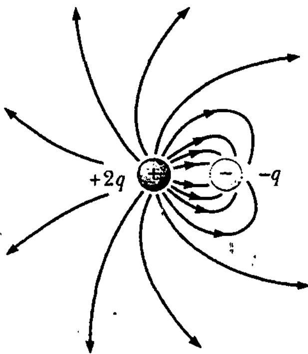


Figura 23.23 Líneas de campo eléctrico para una carga puntual $+2q$ y una segunda carga puntual $-q$. Advierta que de cada dos líneas que parten de $+2q$, una llega a $-q$.

lo la mitad de las líneas que salen de la carga positiva alcanza a la carga negativa. La mitad restante termina en una carga negativa que se supone está en el infinito. A distancias que son muy grandes comparadas con la separación de las cargas, las líneas de campo eléctrico son equivalentes a las de una carga individual $+q$.

Pregunta sorpresa 23.5

Clasifique la magnitud del campo eléctrico en los puntos *A*, *B* y *C* mostrados en la figura 23.22a (la magnitud más grande primero).



23.7 MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

Cuando una partícula de carga q y masa m se sitúa en un campo eléctrico $\mathbf{E}$, la fuerza eléctrica ejercida sobre la carga es $q\mathbf{E}$. Si ésta es la única fuerza ejercida sobre la partícula, debe ser la fuerza neta y, por ende, debe causar que la partícula se acelere. En este caso la segunda ley de Newton aplicada a la partícula produce

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = m\mathbf{a}$$

Por tanto, la aceleración de la partícula es

$$\mathbf{a} = \frac{q\mathbf{E}}{m} \tag{23.7}$$

Si $\mathbf{E}$ es uniforme (es decir, constante en magnitud y dirección), entonces la aceleración es constante. Si la partícula tiene una carga positiva, la aceleración está en la dirección del campo eléctrico. Si la partícula tiene carga negativa, entonces la aceleración es en la dirección opuesta del campo eléctrico.

EJEMPLO 23.10 Una carga positiva acelerada

Una carga puntual positiva q de masa m se libera desde el reposo en un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}$ dirigido a lo largo del eje x, como se muestra en la figura 23.24. Describa su movimiento.

Solución La aceleración es constante y está dada por $q\mathbf{E}/m$. El movimiento es lineal simple a lo largo del eje x. Por consiguiente, se pueden aplicar las ecuaciones de la cinemática en una dimensión (véase el capítulo 2):

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \tfrac{1}{2}a_xt^2$$

$$v_{xf} = v_{xi} + a_xt$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

Si $x_i = 0$ y $v_{xi} = 0$ se obtiene

$$x_f = \tfrac{1}{2}a_xt^2 = \frac{qE}{2m}t^2$$

$$v_{xf} = a_xt = \frac{qE}{m}t$$

$$v_{xf}^2 = 2a_xx_f = \left(\frac{2qE}{m}\right)x_f$$

La energía cinética de la carga después de que se ha movido una distancia $x = x_f - x_i$ es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{2qE}{m}\right)x = qEx$$

Este resultado también puede obtenerse del teorema del trabajo y la energía cinética gracias a que el trabajo realizado por la fuerza eléctrica es $F_ex = qEx$ y $W = \Delta K$

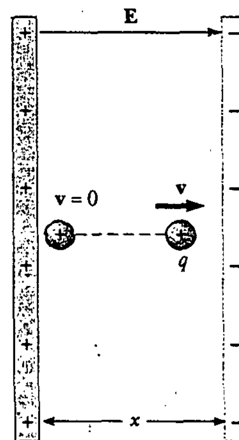


Figura 23.24 Una carga puntual positiva q en un campo eléctrico uniforme **E** experimenta una aceleración constante en la dirección del campo.

El campo eléctrico en la región entre dos placas metálicas planas con cargas opuestas es casi uniforme (Fig. 23.25). Suponga que un electrón de carga $-e$ se proyecta horizontalmente dentro de este campo a una velocidad inicial $v_i\mathbf{i}$. Puesto que el campo eléctrico **E** en la figura 23.25 está en la dirección y positiva, la aceleración del electrón es en la dirección y negativa. Es decir,

$$\mathbf{a} = -\frac{eE}{m}\mathbf{j} \tag{23.8}$$

Ya que la aceleración es constante, se pueden aplicar las ecuaciones de la cinemática en dos dimensiones (véase el capítulo 4) con $v_{xi} = v_i$ y $v_{yi} = 0$. Después de que el electrón ha estado en el campo eléctrico durante un tiempo t, las componentes de su velocidad son

$$v_x = v_i = \text{constante} \tag{23.9}$$

$$v_y = a_yt = -\frac{eE}{m}t \tag{23.10}$$

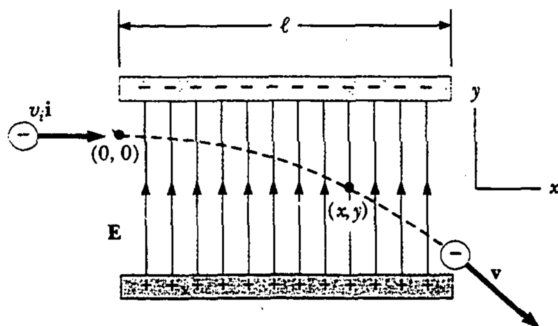


Figura 23.25 Un electrón se lanza horizontalmente en un campo eléctrico uniforme producido por dos placas cargadas. El electrón experimenta una aceleración descendente (opuesta a **E**) y su movimiento es parabólico mientras está entre las placas.

Sus coordenadas después de un tiempo t en el campo son

$$x = v_i t \quad \textbf{(23.11)}$$

$$y = \tfrac{1}{2} a_y t^2 = -\tfrac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 \quad \textbf{(23.12)}$$

Al sustituir el valor $t = x/v_i$ de la ecuación 23.11, en la ecuación 23.12, se ve que y es proporcional a x^2. Por tanto, la trayectoria es una parábola. Después de que el electrón abandona el campo continúa moviéndose en una línea recta en la dirección de **v** en la figura 23.25, obedeciendo la primera ley de Newton, a una rapidez $v > v_i$.

Observe que se ha ignorado la fuerza gravitacional que actúa sobre el electrón. Ésta es una buena aproximación cuando se trabaja con partículas atómicas. Para un campo eléctrico de 10^4 N/C, la relación entre la magnitud de la fuerza eléctrica eE y la magnitud de la fuerza gravitacional mg es del orden de 10^{14} para un electrón y del orden de 10^{11} para un protón.

EJEMPLO 23.11 Un electrón acelerado

En la figura 23.25 se muestra un electrón que entra a la región de un campo eléctrico uniforme con $v_i = 3.00 \times 10^6$ m/s y $E = 200$ N/C. La longitud horizontal de las placas es $\ell = 0.100$ m. a) Encuentre la aceleración del electrón mientras está en el campo eléctrico.

Solución La carga en el electrón tiene un valor absoluto de 1.60×10^{-19} C y $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg. Por tanto, la ecuación 23.8 produce

$$\mathbf{a} = -\frac{eE}{m}\mathbf{j} = -\frac{(1.60 \times 10^{-19}\text{C})(200\text{ N/C})}{9.11 \times 10^{-31}\text{kg}}\mathbf{j}$$

$$= -3.51 \times 10^{13}\,\mathbf{j}\text{ m/s}^2$$

b) Encuentre el tiempo que tarda el electrón en viajar a través del campo.

Solución La distancia horizontal a través del campo es $\ell = 0.100$ m. Empleando la ecuación 23.11 con $x = \ell$, se encuentra que el tiempo que transcurre en el campo eléctrico es

$$t = \frac{\ell}{v_i} = \frac{0.100\text{m}}{3.00 \times 10^6\text{m/s}} = 3.33 \times 10^{-8}\text{ s}$$

c) ¿Cuál es el desplazamiento vertical y del electrón mientras está en el campo eléctrico?

Solución Utilizando la ecuación 23.12 y los resultados de las partes a) y b), se encuentra que

$$y = \tfrac{1}{2} a_y t^2 = \tfrac{1}{2}(-3.51 \times 10^{13}\text{m/s}^2)(3.33 \times 10^{-8}\text{s})^2$$

$$= -0.0195\text{ m} = -1.95\text{ cm}$$

Si la separación entre las placas es más pequeña que esto, el electrón golpeará la placa positiva.

Ejercicio Encuentre la rapidez del electrón a medida que sale del campo.

Respuesta 3.22×10^6 m/s.

El tubo de rayos catódicos

El ejemplo que se acaba de trabajar describe una porción de un tubo de rayos catódicos (TRC). Este tubo, ilustrado en la figura 23.26, se usa comúnmente para obtener un despliegue visual de información electrónica en osciloscopios, sistemas de radar, receptores de televisión y monitores de computadoras. El TRC es un tubo al vacío en el que un haz de electrones se acelera y desvía bajo la influencia de campos eléctricos o magnéticos. El haz de electrones se produce por medio de un conjunto de dispositivos llamado *cañón de electrones* localizado en el cuello del tubo. Estos electrones, si no son perturbados, viajan en una trayectoria en línea recta hasta que inciden en el frente del TRC, "la pantalla", la cual está recubierta con un material que emite luz visible cuando se bombardea con electrones.

En un osciloscopio los electrones se desvían en diversas direcciones por medio de dos conjuntos de placas situadas en ángulos rectos entre sí en el cuello del tubo. (El TRC de una televisión dirige el rayo con un campo magnético, como se estudiará

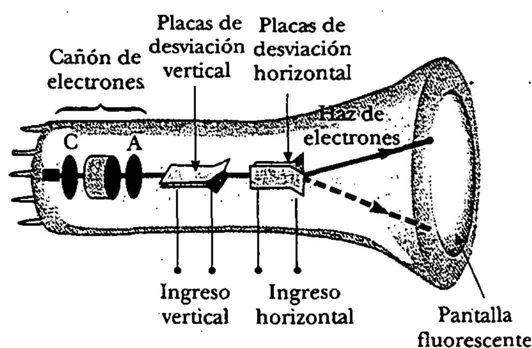


Figura 23.26 Diagrama esquemático de un tubo de rayos catódicos. Los electrones que parten del cátodo caliente C son acelerados hacia el ánodo A. Además de acelerar a los electrones, el cañón de electrones también se usa para apuntar el haz de electrones y las placas desvían el haz.

en el capítulo 29.) Un circuito eléctrico externo se usa para controlar la cantidad de carga presente en las placas. La colocación de la carga positiva sobre una placa horizontal y la carga negativa sobre la otra crea un campo eléctrico entre las placas y permite que el rayo se dirija de lado a lado. Las placas verticales de desviación actúan de la misma manera, excepto que cambiar la carga en ellas desvía el rayo verticalmente.

RESUMEN

Las **cargas eléctricas** tienen las siguientes propiedades importantes:

- Cargas diferentes se atraen entre sí y cargas iguales se repelen entre sí.
- La carga se conserva.
- La carga está cuantizada —es decir, existe en paquetes discretos que son algún múltiplo entero de la carga electrónica.

Los **conductores** son materiales en los que las cargas se mueven libremente. Los **aislantes** son materiales en los que las cargas no se mueven con libertad.

La **ley de Coulomb** establece que la fuerza eléctrica ejercida por una carga q_1 sobre una segunda carga q_2 es

$$\mathbf{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(23.2)}$$

donde r es la distancia entre las dos cargas y $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario dirigido desde q_1 hacia q_2. La constante k_e, conocida como constante de Coulomb, tiene el valor $k_e = 8.99 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$.

La unidad de carga más pequeña que se conoce en la naturaleza es la carga sobre un electrón o protón: $|e| = 1.602\ 19 \times 10^{-19}$ C.

El campo eléctrico **E** en algún punto en el espacio se define como la fuerza eléctrica $\mathbf{F}_e$ que actúa sobre una pequeña carga positiva de prueba en ese punto, dividida entre la magnitud de la carga de prueba q_0:

$$\mathbf{E} \equiv \frac{\mathbf{F}_e}{q_0} \qquad \textbf{(23.3)}$$

A una distancia r de una carga puntual q, el campo eléctrico debido a la carga está dado por

$$\mathbf{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(23.4)}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario dirigido de la carga al punto en cuestión. El campo eléctrico está dirigido radialmente hacia afuera de una carga positiva y dirigido radialmente hacia adentro de una carga negativa.

El campo eléctrico debido a un grupo de cargas puntuales puede obtenerse con el principio de superposición. Es decir, el campo eléctrico total en algún punto es igual a la suma vectorial de los campos eléctricos de todas las cargas:

$$\mathbf{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \quad \textbf{(23.5)}$$

El campo eléctrico en algún punto de una distribución de carga continua es

$$\mathbf{E} = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \textbf{(23.6)}$$

donde dq es la carga en un elemento de la distribución de carga y r es la distancia del elemento al punto en cuestión.

Las **líneas de campo eléctrico** describen un campo eléctrico en cualquier región del espacio. El número de líneas por unidad de área a través de una superficie perpendicular a las líneas es proporcional a la magnitud de **E** en esa región.

Una partícula cargada de masa m y carga q que se mueve en un campo eléctrico **E** tiene una aceleración

$$\mathbf{a} = \frac{q\mathbf{E}}{m} \quad \textbf{(23.7)}$$

Sugerencias para resolver problemas

Determinación del campo eléctrico

- **Unidades:** En cálculos que involucren la constante de Coulomb k_e $(= 1/4\pi\epsilon_0)$ las cargas deben estar expresadas en coulombs y las distancias en metros.
- **Cálculo del campo eléctrico de cargas puntuales:** Para encontrar el campo eléctrico total en un punto dado empiece por calcular el campo eléctrico en el punto debido a cada carga individual. El campo resultante en el punto es el vector suma de los campos debidos a las cargas individuales.
- **Distribuciones de carga continuas:** Cuando se enfrente a problemas que involucren una distribución de carga continua, las sumas vectoriales para evaluar el campo eléctrico total de algún punto deben ser sustituidas por integrales vectoriales. La distribución de carga se divide en pedazos infinitesimales y se calcula la suma vectorial integrando sobre toda la distribución de carga. Debe revisar los ejemplos 23.7 a 23.9.
- **Simetría:** Siempre que trabaje con una distribución de cargas puntuales o con una distribución de carga continua aproveche cualquier simetría en el sistema para simplificar sus cálculos.

PREGUNTAS

1. Con frecuencia se observan (o escuchan) chispas al quitarse la ropa en la oscuridad en un día seco. Explique.
2. Se afirma que desde un punto de vista atómico, la carga suele transferirse por medio de electrones. Justifique esta afirmación.
3. Un globo se carga negativamente por frotamiento y después se adhiere a una pared. ¿Esto significa que la pared está cargada positivamente? ¿Por qué después de cierto tiempo cae el globo?
4. Una ligera esfera metálica descargada que está suspendida de un hilo es atraída hacia una barra de caucho cargada. Después de tocar la barra ésta repele a la esfera. Explique.
5. Explique qué se entiende por "átomo neutro".

6. ¿Por qué algunas prendas se pegan entre sí y a su cuerpo después de sacarlas de una secadora?
7. Una gran esfera metálica aislada de la tierra se carga con un generador electrostático, mientras una persona de pie sobre un taburete aislante sostiene la esfera. ¿Por qué es seguro hacer esto? ¿Por qué no sería seguro para otra persona tocar la esfera después de que ésta se ha cargado?
8. ¿Cuáles son las similitudes y diferencias entre la ley de Newton de la gravedad, $F_g = Gm_1m_2/r^2$, y la ley de Coulomb, $F_e = k_eq_1q_2/r^2$?
9. Suponga que alguien propone una teoría según la cual la gente está unida a la Tierra por fuerzas eléctricas y no por la gravedad. ¿Cómo probaría usted que esta teoría es errónea?
10. ¿Cómo distinguiría experimentalmente un campo eléctrico de un campo gravitacional?
11. ¿La vida sería diferente si el electrón estuviera cargado positivamente y el protón negativamente? ¿La elección de signos tiene alguna relación con las interacciones físicas y químicas? Explique.
12. Al definir el campo eléctrico, ¿por qué es necesario especificar que la magnitud de la carga de prueba es muy pequeña (es decir, por qué es necesario tomar el límite de $\mathbf{F}_e/q$ a medida que $q \to 0$)?
13. Dos esferas conductoras cargadas, cada una de radio a, están separadas por una distancia $r > 2a$. ¿La fuerza sobre cada esfera está dada por la ley de Coulomb? Explique. (*Sugerencia*: véase el capítulo 14 sobre gravitación.)
14. ¿Cuándo es válido aproximar una distribución de carga por medio de una carga puntual?
15. ¿Es posible que un campo eléctrico exista en el espacio vacío? Justifique su respuesta.
16. Explique por qué las líneas de campo eléctrico nunca se cruzan. (*Sugerencia*: $\mathbf{E}$ debe tener una dirección única en todos los puntos.)
17. Un electrón libre y un protón libre se ponen en un campo eléctrico idéntico. Compare las fuerzas eléctricas sobre cada partícula. Compare sus aceleraciones.
18. Explique qué sucede con la magnitud del campo eléctrico de una carga puntual cuando r tiende a cero.
19. Una carga negativa se pone en una región del espacio donde el campo eléctrico está dirigido verticalmente hacia arriba. ¿Cuál es la dirección de la fuerza eléctrica experimentada por esta carga?
20. Una carga $4q$ está a una distancia r de una carga $-q$. Compare el número de líneas de campo eléctrico que salen de la carga $4q$ con el número que entra a la carga $-q$.
21. En la figura 23.23, ¿dónde terminan las líneas adicionales que salen de la carga $+2q$?
22. Considere dos cargas puntuales iguales separadas por cierta distancia d. ¿En qué punto (aparte de ∞) una tercera carga de prueba no experimentaría una fuerza neta?
23. Una carga puntual negativa $-q$ se sitúa en el punto P cerca del anillo cargado positivamente que se muestra en la figura 23.17. Si $x \ll a$, describa el movimiento de la carga puntual si ésta se libera a partir del reposo.
24. Explique las diferencias entre densidades de carga lineal, superficial y volumétrica, y dé ejemplos de cuándo se usaría cada una.
25. Si el electrón en la figura 23.25 se lanza dentro del campo eléctrico a una velocidad arbitraria $\mathbf{v}_i$ (a un ángulo con respecto a $\mathbf{E}$), ¿su trayectoria seguirá siendo parabólica? Explique.
26. Se sabe de algunos casos en que la gente que se encuentra cerca de donde un rayo golpea la Tierra se ha tenido que quitar la ropa. Explique por qué podría suceder esto.
27. ¿Por qué un alambre de tierra debe conectarse a la barra de soporte metálico para una antena de televisión?
28. Una pieza ligera de hoja de aluminio envuelve una barra de madera. Cuando la barra que transporta una carga positiva se acerca a la hoja, las dos partes de la hoja se separan. ¿Por qué? ¿Qué tipo de carga hay en la hoja?
29. ¿Por qué es más difícil cargar un objeto por frotamiento en un día húmedo que en un día seco?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** = use computadora para resolver el problema = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 23.1 Propiedades de las cargas eléctricas
Sección 23.2 Aislantes y conductores
Sección 23.3 La Ley de Coulomb

1. a) Calcule el número de electrones en un pequeño alfiler de plata, eléctricamente neutro, que tiene una masa de 10.0 g. La plata tiene 47 electrones por átomo, y su masa molar es de 107.87 g/mol. b) Se añaden electrones al alfiler hasta que la carga negativa neta sea de 1.00 mC. ¿Cuántos electrones se añaden por cada 10^9 electrones ya presentes?
2. a) Dos protones en una molécula están separados por una distancia de 3.80×10^{-10} m. Encuentre la fuerza eléctrica ejercida por un protón sobre el otro. b) ¿Cómo se compara la magnitud de esta fuerza con la magnitud de la fuerza gravitacional entre los dos protones? c) ¿Cuál debe ser la relación carga a masa de una partícula si la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos de estas partículas es igual a la magnitud de la fuerza eléctrica entre ellas?

WEB 3. Richard Feynman dijo una vez que si dos personas estuvieran paradas a una distancia de un brazo una de otra y cada una tuviera 1% más de electrones que de protones, la fuerza de repulsión entre ellas sería suficiente para levantar un "peso" igual al de toda la Tierra. Efectúe un cálculo de orden de magnitud para sustentar esta afirmación.
4. Dos pequeñas esferas de plata, cada una con 10.0 g de masa, están separadas 1.00 m. Calcule la fracción de los

electrones en una esfera que se deben transferir a la otra para producir una fuerza atractiva de 1.00×10^4 N (aproximadamente 1 ton) entre las esferas. (El número de electrones por átomo de plata es 47, y el número de átomos por gramo es el número de Avogadro dividido entre la masa molar de la plata, 107.87 g/mol.)

5. Suponga que 1.00 g de hidrógeno se separa en electrones y protones. Suponga también que los protones están colocados en el polo norte terrestre y que los electrones se colocan en el polo sur. ¿Cuál es la fuerza de compresión resultante sobre la Tierra?
6. Dos pequeñas esferas conductoras idénticas se colocan con sus centros separados 0.300 m. A una se le da una carga de 12.0 nC y a la otra una carga de −18.0 nC. a) Encuentre la fuerza eléctrica ejercida sobre una esfera por la otra. b) Las esferas se conectan por un alambre conductor. Encuentre la fuerza eléctrica entre las dos después de que se alcanza el equilibrio.
7. Tres cargas puntuales se colocan en las esquinas de un triángulo equilátero, como se muestra en la figura P23.7. Calcule la fuerza eléctrica neta sobre la carga de 7.00 μC.

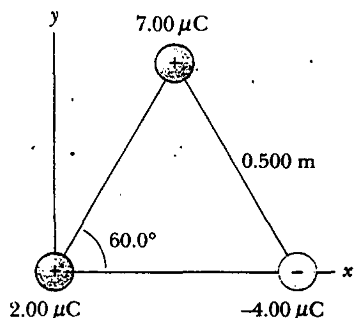


Figura P23.7 Problemas 7 y 15.

8. Dos pequeñas cuentas que tienen cargas positivas $3q$ y q están fijas en los extremos opuestos de una barra aislante horizontal que se extiende desde el origen al punto $x = d$. Como se muestra en la figura P23.8, una tercera cuenta pequeña cargada es libre de deslizarse sobre la barra. ¿En qué posición está en equilibrio la tercera cuenta? ¿Puede estar en equilibrio estable?

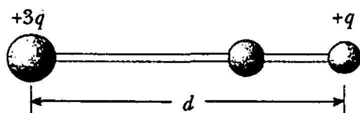


Figura P23.8

9. **Problema de repaso.** En la teoría de Bohr del átomo de hidrógeno, un electrón se mueve en una órbita circular en torno a un protón, donde el radio de la órbita es 0.529×10^{-10} m. a) Encuentre la fuerza eléctrica entre los dos. b) Si esta fuerza provoca la aceleración centrípeta del electrón, ¿cuál es la rapidez del electrón?

10. **Problema de repaso.** Dos cargas puntuales idénticas, cada una con una carga $+q$, están fijas en el espacio y separadas por una distancia d. Una tercera carga puntual $-Q$ de masa m puede moverse con libertad y se encuentra inicialmente en reposo en un bisector perpendicular de las dos cargas fijas a una distancia x desde el punto medio entre las dos cargas fijas (Fig. P23.10). a) Muestre que si x es pequeña en relación con d, el movimiento de $-Q$ es armónico simple a lo largo del bisector perpendicular. Determine el periodo de ese movimiento. b) ¿Qué tan rápido se moverá la carga $-Q$ cuando esté en el punto intermedio entre las dos cargas fijas, si inicialmente se libera a una distancia $a \ll d$ del punto medio?

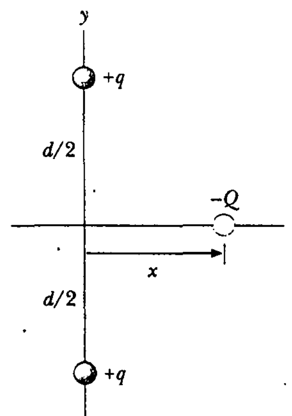


Figura P23.10

Sección 23.4 El campo eléctrico

11. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico que equilibrará el peso de a) un electrón y b) un protón? (Use los datos de la tabla 23.1.)
12. Un objeto que tiene una carga neta de 24.0 μC, se coloca en un campo eléctrico uniforme de 610 N/C que está dirigido verticalmente. ¿Cuál es la masa de este objeto si "flota" en el campo?
13. En la figura P23.13 determine el punto (distinto del infinito) en el cual el campo eléctrico es cero.

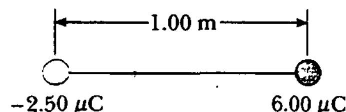


Figura P23.13

14. Un avión vuela a través de un nubarrón a una altura de 2 000 m. (Ésta es una situación muy peligrosa debido a corrientes ascendentes, turbulencia y la posibilidad de una descarga eléctrica.) Si hay una concentración de carga de +40.0 C a una altura de 3 000 m dentro de la nube y de −40.0 C a una altura de 1 000 m, ¿cuál es el campo eléctrico E en la aeronave?

15. En la figura P23.7 se muestran tres cargas colocadas en las esquinas de un triángulo equilátero. a) Calcule el campo eléctrico en la posición de la carga de 2.00 μC debido a las cargas de 7.00 μC y −4.00 μC. b) Utilice su respuesta a la parte a) para determinar la fuerza sobre la carga de 2.00 μC.

16. Tres cargas puntuales están ordenadas como se muestra en la figura P23.16. a) Encuentre el vector de campo eléctrico que crean en el origen de manera conjunta las cargas de 6.00 nC y −3.00 nC. b) Encuentre el vector fuerza sobre la carga de 5.00 nC.

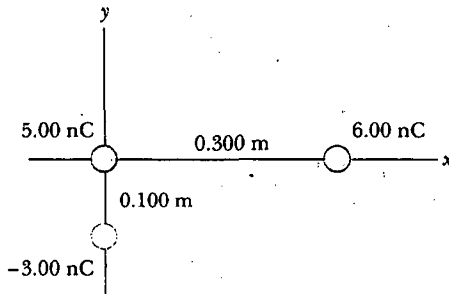


Figura P23.16

WEB 17. Tres cargas positivas iguales, q, están en las esquinas de un triángulo equilátero de lado a, como se muestra en la figura P23.17 a) Suponga que las tres cargas juntas generan un campo eléctrico. Encuentre la ubicación de un punto (distinto al infinito) donde el campo eléctrico es cero. (*Sugerencia*: bosqueje las líneas de campo en el plano de las cargas.) b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico en P debido a las dos cargas en la base?

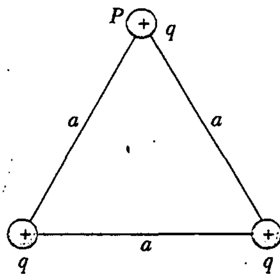


Figura P23.17

18. Dos cargas puntuales de 2.00-μC se localizan sobre el eje x. Una está en x = 1.00 m y la otra en x = −1.00 m. a) Determine el campo eléctrico sobre el eje y en y = 0.500 m. b) Calcule la fuerza eléctrica sobre una carga de −3.00 μC situada en el eje y en y = 0.500 m.

19. Cuatro cargas puntuales están en las esquinas de un cuadrado de lado a, como se muestra en la figura P23.19. a) Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico en la posición de la carga q. b) ¿Cuál es la fuerza resultante sobre q?

20. Una partícula puntual con una carga q se localiza en (x_0, y_0) en el plano xy. Demuestre que las componentes x y y

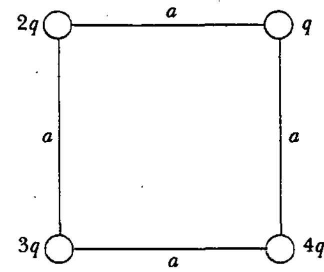


Figura P23.19

del campo eléctrico en el punto (x, y) debidas a esta carga q son

$$E_x = \frac{k_e q(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{k_e q(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{3/2}}$$

21. Considere el dipolo eléctrico mostrado en la figura P23.21. Demuestre que el campo eléctrico en un punto *distante* a lo largo del eje x es $E_x \cong 4k_e qa/x^3$.

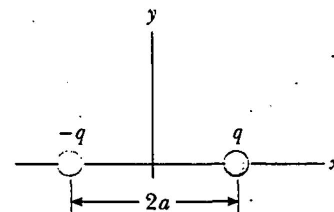


Figura P23.21

22. Considere n cargas puntuales positivas iguales, cada una de magnitud Q/n, situadas simétricamente alrededor de un círculo de radio R. a) Calcule la magnitud del campo eléctrico E en un punto a una distancia x sobre la línea que pasa por el centro del círculo y perpendicular al plano del círculo. b) Explique por qué este resultado es idéntico al obtenido en el ejemplo 23.8.

23. Considere un número infinito de cargas idénticas (cada una con carga q) colocadas a lo largo del eje x a distancias a, $2a$, $3a$, $4a$, . . . del origen. ¿Cuál es el campo eléctrico en el origen debido a esta distribución? *Sugerencia*: aproveche el hecho de que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Sección 23.5 Campo eléctrico de una distribución de carga continua

24. Una barra de 14.0 cm de largo está cargada uniformemente y tiene una carga total de −22.0 μC. Determine la magnitud y dirección del campo eléctrico a lo largo del eje de la barra en un punto a 36.0 cm de su centro.

25. Una línea de carga continua se encuentra a lo largo del eje x, extendiéndose desde $x = +x_0$ hasta el infinito positivo. La línea tiene una densidad de carga lineal uniforme λ_0. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico en el origen?
26. Una línea de carga empieza en $x = +x_0$ y se extiende hasta el infinito positivo. Si la densidad de carga lineal es $\lambda = \lambda_0 x_0/x$, determine el campo eléctrico en el origen.
27. Un anillo cargado uniformemente de 10.0 cm de radio tiene una carga total de 75.0 μC. Encuentre el campo eléctrico sobre el eje del anillo de a) 1.00 cm, b) 5.00 cm, c) 30.0 cm, y d) 100 cm del centro del anillo.
28. Muestre que la intensidad de campo máxima $E_{máx}$ a lo largo del eje de un anillo cargado uniformemente ocurre en $x = a/\sqrt{2}$ (véase la Fig. 23.17) y tiene el valor $Q/(6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2)$.
29. Un disco cargado de modo uniforme de 35.0 cm de radio tiene una densidad de carga de 7.90×10^{-3} C/m^2. Calcule el campo eléctrico sobre el eje del disco en a) 5.00 cm, b) 10.0 cm, c) 50.0 cm, y d) 200 cm del centro del disco.
30. En el ejemplo 23.9 se obtiene la expresión exacta para el campo eléctrico en un punto sobre el eje de un disco de radio $R = 3.00$ cm, con una carga de +5.20 μC distribuida de manera uniforme. a) Con el resultado del ejemplo 23.9 calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje y a 3.00 mm del centro. Compare esta respuesta con el campo calculado a partir de la aproximación de campo cercano $E = \sigma/2\epsilon_0$. b) Utilizando el resultado del ejemplo 23.9 calcule el campo eléctrico en un punto sobre el eje y a 30.0 cm del centro del disco. Compare este resultado con el campo eléctrico obtenido tratando al disco como una carga puntual de +5.20 μC a una distancia de 30.0 cm.
31. El campo eléctrico a lo largo del eje de un disco cargado de manera uniforme de radio R y carga total Q se calculó en el ejemplo 23.9. Demuestre que el campo eléctrico a distancias x que son grandes comparadas con R se acerca al de una carga puntual $Q = \sigma\pi R^2$. (*Sugerencia:* demuestre primero que $x/(x^2 + R^2)^{1/2} = (1 + R^2/x^2)^{-1/2}$ y use la serie del binomio $(1 + \delta)^n \approx 1 + n\delta$ cuando $\delta \ll 1$.)
32. Un pedazo de poliestireno de masa m tiene una carga neta de $-q$ y flota sobre el centro de una lámina de plástico horizontal y muy larga, que tiene una densidad de carga uniforme en su superficie. ¿Cuál es la carga por unidad de área de la lámina de plástico?
WEB 33. Una barra aislante cargada de manera uniforme de 14.0 cm de largo se dobla en forma de semicírculo, como se muestra en la figura P23.33. Si la barra tiene una carga total de −7.50 μC, encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico en O, el centro del semicírculo.
34. a) Considere un cascarón cilíndrico circular recto cargado uniformemente con una carga total Q, radio R y altura h. Determine el campo eléctrico en un punto a una distancia d del lado derecho del cilindro, como se muestra en la figura P23.34. (*Sugerencia:* emplee el resultado del ejemplo 23.8 y considere al cilindro como una colección de anillos de carga.) b) Considere ahora un cilindro sólido con las mismas dimensiones y que conduce la misma carga, la cual está distribuida de manera uniforme a través de su volumen. Utilice el resultado del ejemplo 23.9 para encontrar el campo creado en el mismo punto.

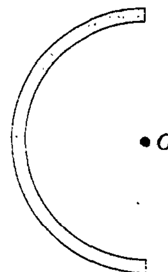


Figura P23.33

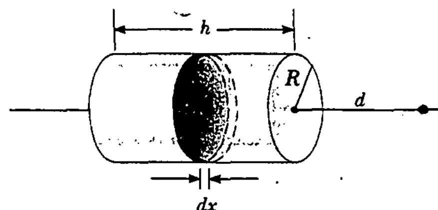


Figura P23.34

35. Una barra delgada de longitud ℓ y carga uniforme por unidad de longitud λ está a lo largo del eje x como se muestra en la figura P23.35. a) Demuestre que el campo eléctrico en P, a una distancia y de la barra, a lo largo del bisector perpendicular no tiene componente x y está dado por $E = 2k_e\lambda \text{ sen } \theta_0/y$. b) Utilizando su resultado del inciso a) muestre que el campo de una barra de longitud infinita es $E = 2k_e\lambda/y$. (*Sugerencia:* calcule primero el campo P debido a un elemento de longitud dx, el cual tiene una carga $\lambda\, dx$. Después cambie variables de x a θ aprovechando que $x = y \tan\theta$ y $dx = y \sec^2\theta\, d\theta$ e integre sobre θ).

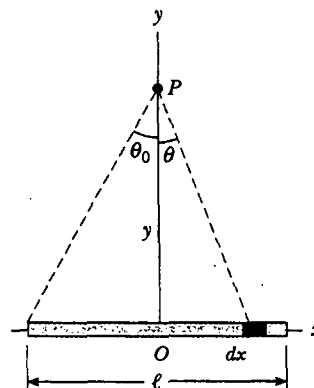


Figura P23.35

36. Tres cilindros plásticos sólidos tienen radio de 2.50 cm y longitud de 6.00 cm. Uno a) transporta carga con densidad uniforme de 15.0 nC/m^2 por toda su superficie. Otro b) conduce carga con la misma densidad uniforme

sólo sobre su cara lateral curva. El tercero c) tiene carga con densidad uniforme de 500 nC/m^3 en todo el plástico. Encuentre la carga de cada cilindro.

37. Ocho cubos plásticos sólidos, cada uno con 3.00 cm por lado, se unen para formar cada uno de los objetos (i, ii, iii y iv) mostrados en la figura P23.37. a) Si cada objeto transporta carga con densidad uniforme de 400 nC/m^3 a través de su volumen, ¿cuál es la carga de cada objeto? b) Si a cada objeto se le da carga con densidad uniforme de 15.0 nC/m^2 en todas partes sobre su superficie expuesta, ¿cuál es la carga en cada objeto? c) Si la carga se coloca sólo sobre los lados donde se encuentran las superficies perpendiculares, con una densidad uniforme de 80.0 pC/m, ¿cuál es la carga de cada objeto?

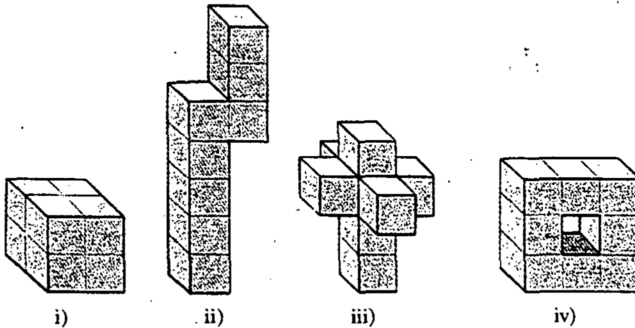


Figura P23.37

Sección 23.6 Líneas de campo eléctrico

38. Un disco cargado positivamente tiene una carga uniforme por unidad de área, como se describe en el ejemplo 23.9. Dibuje las líneas de campo eléctrico en un plano perpendicular al plano del disco que pasa por su centro.

39. Una barra cargada negativamente de longitud finita tiene una carga uniforme por unidad de longitud. Dibuje las líneas de campo eléctrico en un plano que contenga a la barra.

40. La figura P23.40 muestra las líneas de campo eléctrico para dos cargas puntuales separadas por una pequeña distancia. a) Determine la proporción q_1/q_2. b) ¿Cuáles son los signos de q_1 y q_2?

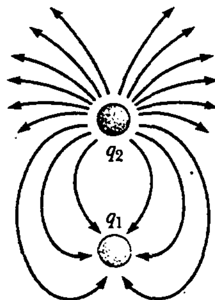


Figura P23.40

Sección 23.7 Movimiento de partículas cargadas en un campo eléctrico uniforme

41. Un electrón y un protón se ponen en reposo en un campo eléctrico de 520 N/C. Calcule la rapidez de cada partícula 48.0 ns después de liberarlas.

42. Un protón se lanza en la dirección x positiva dentro de una región de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = -6.00 \times 10^5\mathbf{i}$ N/C. El protón viaja 7.00 cm antes de detenerse. Determine a) la aceleración del protón, b) su rapidez inicial, y c) el tiempo que tarda en detenerse.

43. Un protón acelera desde el reposo en un campo eléctrico uniforme de 640 N/C. Cierto tiempo después su rapidez es de 1.20×10^6 m/s (no relativista, puesto que v es mucho menor que la rapidez de la luz). a) Encuentre la aceleración del protón. b) ¿Cuánto tarda el protón en alcanzar esta rapidez? c) ¿Qué distancia ha recorrido en ese tiempo? d) ¿Cuál es su energía cinética en este tiempo?

44. Cada uno de los electrones en un haz de partículas tiene una energía cinética de 1.60×10^{-17} J. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico que detendrá estos electrones en una distancia de 10.0 cm?

WEB **45.** Cada uno de los electrones en un haz de partículas tiene una energía cinética K. ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico que detendrá estos electrones en una distancia d?

46. Una cuenta de 1.00 g cargada positivamente cae desde el reposo en el vacío desde una altura de 5.00 m a través de un campo eléctrico vertical uniforme con una magnitud de 1.00×10^4 N/C. La cuenta golpea al suelo a una rapidez de 21.0 m/s. Determine a) la dirección del campo eléctrico (arriba o abajo), y b) la carga en la cuenta.

47. Un protón se mueve a 4.50×10^5 m/s en la dirección horizontal. Entra a un campo eléctrico vertical uniforme de 9.60×10^3 N/C. Ignore todos los efectos gravitacionales y encuentre a) el tiempo que tarda el protón en viajar 5.00 cm en forma horizontal, b) su desplazamiento vertical después de que ha recorrido 5.00 cm horizontalmente, y c) las componentes horizontal y vertical de su velocidad después de que ha recorrido 5.00 cm en la dirección horizontal.

48. Un electrón se proyecta a un ángulo de 30.0° sobre la horizontal a una rapidez de 8.20×10^5 m/s, en una región donde el campo eléctrico es $\mathbf{E} = 390\mathbf{j}$ N/C. Ignore los efectos de la gravedad y determine a) el tiempo que tarda el electrón en regresar a su altura inicial, b) la altura máxima que alcanza, y c) su desplazamiento horizontal cuando alcanza su altura máxima.

49. Se lanzan protones a una rapidez inicial $v_i = 9.55 \times 10^3$ m/s dentro de una región donde se presenta un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = (-720\mathbf{j})$ N/C, como se muestra en la figura P23.49. Los protones van a incidir sobre un blanco que se encuentra a una distancia horizontal de 1.27 mm del punto donde se lanzaron los protones. Determine a) los dos ángulos de lanzamiento θ que darán como resultado un impacto, y b) el tiempo total de vuelo para cada trayectoria.

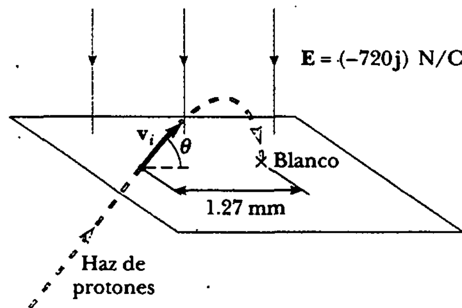


Figura P23.49

PROBLEMAS ADICIONALES

50. Tres cargas puntuales están alineadas a lo largo del eje x como se muestra en la figura P23.50. Encuentre el campo eléctrico en a) la posición (2.00, 0) y b) la posición (0, 2.00).

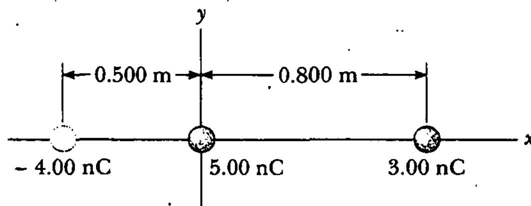


Figura P23.50

51. Un campo eléctrico uniforme de 640 N/C de magnitud existe entre dos placas paralelas que están separadas 4.00 cm. Un protón se suelta desde la placa positiva en el mismo instante en que un electrón se suelta desde la placa negativa. a) Determine la distancia desde la placa positiva en que las dos partículas se cruzan. (Ignore la atracción eléctrica entre el protón y el electrón.) b) Repita el inciso a para un ion sodio (Na^+) y un ion cloro (Cl^-).

52. Una pequeña bola de plástico de 2.00 g está suspendida de una cuerda larga de 20.0 cm en un campo eléctrico uniforme, como se ve en la figura P23.52. Si la bola está en equilibrio cuando la cuerda forma un ángulo de 15.0° con la vertical, ¿cuál es la carga neta en la bola?

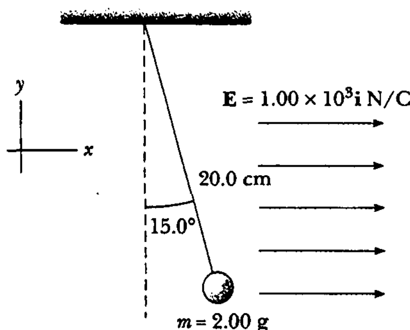


Figura P23.52

WEB 53. Una bola de corcho cargada, de 1.00 g de masa, está suspendida en una cuerda ligera en presencia de un campo eléctrico uniforme, como se muestra en la figura P23.53. Cuando $\mathbf{E} = (3.00\mathbf{i} + 5.00\mathbf{j}) \times 10^5$ N/C, la bola está en equilibrio a $\theta = 37.0°$. Encuentre a) la carga en la bola y b) la tensión en la cuerda.

54. Una bola de corcho cargada, de masa m, está suspendida en una cuerda ligera en presencia de un campo eléctrico uniforme, como se muestra en la figura P23.53. Cuando $\mathbf{E} = (A\mathbf{i} + B\mathbf{j})$ N/C, donde A y B son números positivos, la bola está en equilibrio a un ángulo θ. Encuentre a) la carga en la bola y b) la tensión en la cuerda.

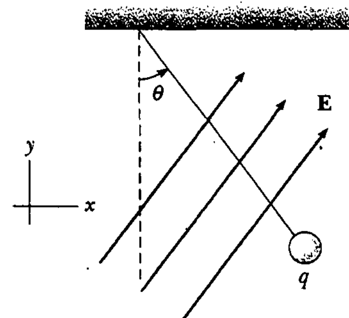


Figura P23.53 Problemas 53 y 54.

55. Cuatro cargas puntuales idénticas ($q = +10.0$ μC) se localizan en las esquinas de un rectángulo, como se indica en la figura P23.55. Las dimensiones del rectángulo son $L = 60.0$ cm y $W = 15.0$ cm. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza eléctrica neta ejercida sobre la carga en la esquina inferior izquierda por las otras tres cargas.

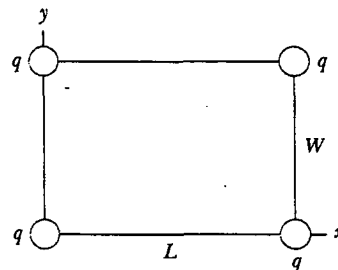


Figura P23.55

56. Tres pequeñas bolas idénticas de poliestireno (m = 2.00 g) están suspendidas de un punto fijo por medio de tres hilos no conductores, cada uno con una longitud de 50.0 cm y masa despreciable. En equilibrio, las tres bolas

forman un triángulo equilátero con lados de 30.0 cm. ¿Cuál es la carga común q que tiene cada bola?

57. Dos bloques metálicos idénticos descansan sobre una superficie horizontal sin fricción conectados por un resorte metálico ligero que tiene una constante de fuerza $k = 100$ N/m y una longitud no elongada de 0.300 m, como se muestra en la figura P23.57a. Una carga total Q se coloca lentamente sobre el sistema, lo cual provoca que el resorte se estire a una longitud de equilibrio de 0.400 m, como se muestra en la figura P23.57b. Determine el valor de Q, suponiendo que toda la carga reside sobre los bloques y que los mismos son como cargas puntuales.

58. Dos bloques metálicos idénticos descansan sobre una superficie horizontal sin fricción conectados por un resorte metálico ligero que tiene una constante de fuerza k y una longitud no elongada L_i, como se muestra en la figura P23.57a. Una carga total Q se coloca lentamente sobre el sistema, lo cual provoca que el resorte se estire a una longitud de equilibrio L, como se muestra en la figura P23.57b. Determine el valor de Q, suponiendo que toda la carga reside sobre los bloques y que los mismos son como cargas puntuales.

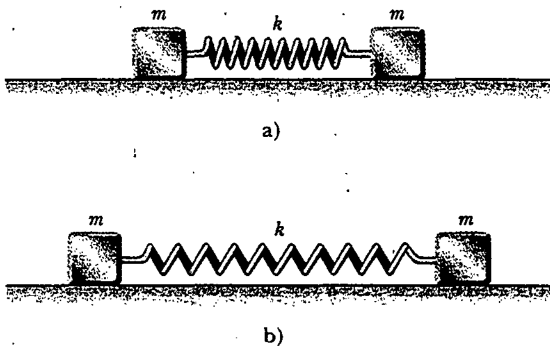


Figura P23.57 Problemas 57 y 58.

59. Barras delgadas idénticas de longitud $2a$ conducen cargas iguales, $+Q$, distribuidas de manera uniforme a lo largo de sus longitudes. Las barras descansan sobre el eje x con sus centros separados por una distancia $b > 2a$ (Fig. P23.59). Demuestre que la magnitud de la fuerza ejercida por la barra izquierda sobre la de la derecha está dada por

$$F = \left(\frac{k_e Q^2}{4a^2}\right)\ln\left(\frac{b^2}{b^2 - 4a^2}\right).$$

60. Se dice que una partícula es no relativista mientras su rapidez sea menor a un décimo de la rapidez de la luz, o menor a 3.00×10^7 m/s. a) ¿Cuánto tiempo permanecerá un electrón como no relativista si parte del reposo en una región de un campo eléctrico de 1.00 N/C? b) ¿Cuánto tiempo permanecerá un protón como no relativista en el mismo campo eléctrico? c) Por lo general los campos eléctricos son mucho mayores a 1 N/C. ¿La partícula cargada permanecerá no relativista durante un tiempo menor o mayor en un campo eléctrico mucho más grande?

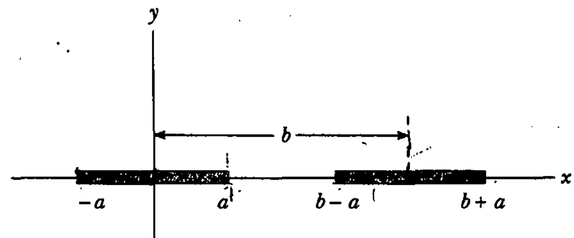


Figura P23.59

61. Una línea de carga positiva se forma dentro de un semicírculo de radio $R = 60.0$ cm, como se muestra en la figura P23.61. La carga por unidad de longitud a lo largo del semicírculo se describe por medio de la expresión $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$. La carga total en el semicírculo es 12.0 μC. Calcule la fuerza total en una carga de 3.00 μC situada en el centro de curvatura.

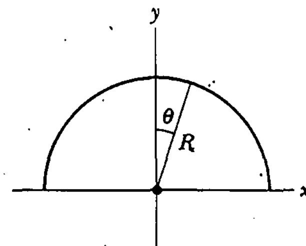


Figura P23.61

62. Dos esferas pequeñas, cada una de 2.00 g de masa, están suspendidas por medio de cuerdas ligeras de 10.0 cm de largo (Fig. P23.62). Un campo eléctrico uniforme se aplica en la dirección x. Si las esferas tienen cargas iguales a -5.00×10^{-8} C y $+5.00 \times 10^{-8}$ C, determine el campo eléctrico que permite a las esferas estar en equilibrio a un ángulo de $\theta = 10.0°$.

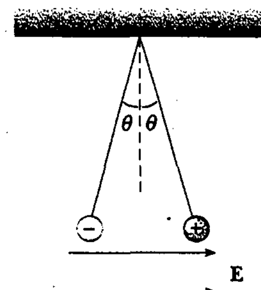


Figura P23.62

63. Dos esferas pequeñas de masa m están suspendidas de cuerdas de longitud ℓ que están conectadas a un punto común. Una esfera tiene carga Q; la otra tiene carga $2Q$. Suponga que los ángulos θ_1 y θ_2 que las cuerdas forman con la vertical son pequeños. a) ¿Cómo se relacionan θ_1 y θ_2? b) Demuestre que la distancia r entre las esferas es

$$r \cong \left(\frac{4k_eQ^2\ell}{mg}\right)^{1/3}$$

64. Tres cargas de igual magnitud q están fijas en los vértices de un triángulo equilátero (Fig. P23.64). Una cuarta carga Q tiene la libertad de movimiento a lo largo del eje x positivo bajo la influencia de las fuerzas ejercidas por las tres cargas fijas. Encuentre un valor de s para el cual Q esté en equilibrio. Usted necesitará resolver una ecuación trascendental.

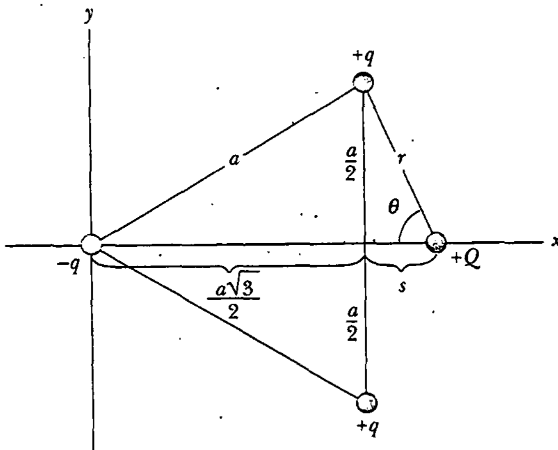


Figura P23.64

65. **Problema de repaso.** Cuatro cargas puntuales idénticas, cada una con carga $+q$, están fijas en las esquinas de un cuadrado de lado L. Una quinta carga puntual $-Q$ está a una distancia z a lo largo de la línea perpendicular al plano del cuadrado y que pasa por el centro del cuadrado (Fig. P23.65). a) Muestre que la fuerza ejercida sobre $-Q$ por las otras cuatro cargas es

$$\mathbf{F} = -\frac{4k_eqQz}{\left(z^2 + \frac{L^2}{2}\right)^{3/2}}\mathbf{k}$$

Advierta que esta fuerza está dirigida hacia el centro del cuadrado si z es positiva ($-Q$ arriba del cuadrado) o negativa ($-Q$ debajo del cuadrado). b) Si z es pequeña comparada con L, la expresión anterior se reduce a $\mathbf{F} \approx -$ (constante) $z\mathbf{k}$. ¿Por qué este resultado implica que el movimiento de $-Q$ es armónico simple, y cuál sería el periodo de este movimiento si la masa de $-Q$ fuese m?

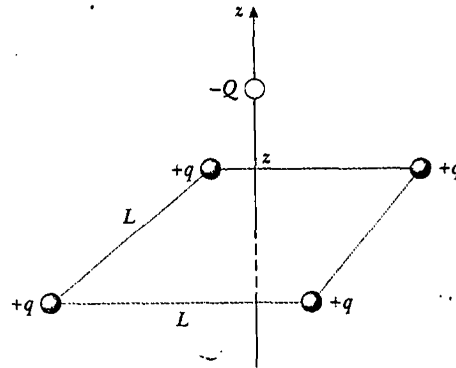


Figura P23.65

66. **Problema de repaso.** Una bola de corcho de 1.00 g que tiene una carga de 2.00 μC está suspendida verticalmente de una cuerda ligera que mide 0.500 m de largo, en un campo eléctrico uniforme dirigido hacia abajo cuya magnitud es $E = 1.00 \times 10^5$ N/C. Si la bola se desplaza ligeramente de la vertical, oscila como un péndulo simple. a) Determine el periodo de esta oscilación. b) ¿La gravedad debe incluirse en el cálculo del inciso a)? Explique.

67. Tres cargas de igual magnitud q se encuentran en las esquinas de un triángulo equilátero de longitud de lado a (Fig. P23.67). a) Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico en el punto P, en el punto medio de las cargas negativas, en términos de k_e, q y a. b) ¿Dónde debe situarse una carga $-4q$ de manera que cualquier carga localizada en P no experimente fuerza eléctrica neta? En el inciso b) deje que P sea el origen y que la distancia entre la carga $+q$ y P sea 1.00 m.

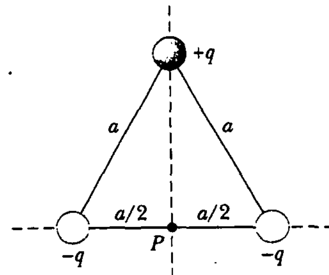


Figura P23.67

68. Dos cuentas idénticas tienen cada una masa m y carga q. Cuando se ponen en un tazón esférico de radio R con paredes no conductoras y sin fricción, las cuentas se mueven hasta que en la posición de equilibrio están separadas una distancia R (Fig. P23.68). Determine la carga en cada cuenta.

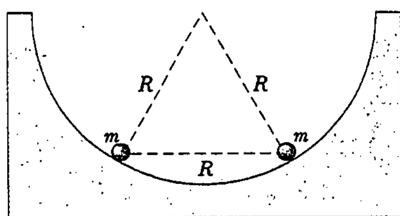


Figura P23.68

69. Ocho cargas puntuales, cada una de magnitud q, se localizan en las esquinas de un cubo de lado s, como se muestra en la figura P23.69. a) Determine las componentes x, y y z de la fuerza resultante ejercida sobre la carga localizada en el punto A por las otras cargas. b) ¿Cuáles son la magnitud y dirección de esta fuerza resultante?

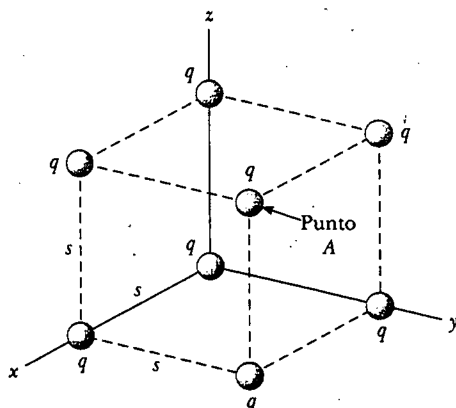


Figura P23.701 Problemas 69 y 70

70. Considere la distribución de carga mostrada en la figura P23.69. a) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico en el centro de cualquier cara del cubo tiene un valor de $2.18k_eq/s^2$. b) ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en el centro de la cara superior del cubo?
71. Una línea de carga con una densidad uniforme de 35.0 nC/m reposa a lo largo de la línea $y = -15.0$ cm, entre los puntos con coordenadas $x = 0$ y $x = 40.0$ cm. Encuentre el campo eléctrico creado en el origen.
72. Tres cargas puntuales q, $-2q$ y q están ubicadas a lo largo del eje x como se muestra en la figura P23.72. Demuestre que el campo eléctrico en P ($y \gg a$) a lo largo del eje y es

$$\mathbf{E} = -k_e \frac{3qa^2}{y^4} \mathbf{j}$$

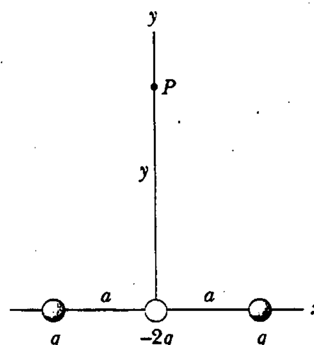


Figura P23.72

Esta distribución de carga, que es en esencia la de dos dipolos eléctricos, recibe el nombre de *cuadrupolo eléctrico.* Observe que **E** varía con r^{-4} para el cuadrupolo, comparado con las variaciones de r^{-3} para el dipolo y r^{-2} para el monopolo (una carga individual).

73. **Problema de repaso.** Una partícula cargada negativamente $-q$ se coloca en el centro de un anillo cargado de modo uniforme, donde el anillo tiene una carga positiva total Q, como se muestra en el ejemplo 23.8. La partícula, restringida a moverse a lo largo del eje x, se desplaza una *pequeña* distancia x a lo largo del eje (donde $x \ll a$) y se libera. Demuestre que la partícula oscila con movimiento armónico simple con una frecuencia

$$f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{k_e qQ}{ma^3}\right)^{1/2}$$

74. **Problema de repaso.** Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio, como se muestra en la figura P23.74, donde θ es pequeño. El momento de inercia del dipolo es I. Si el dipolo se libera desde esta posición, demuestre que su orientación angular presenta movimiento armónico simple con una frecuencia

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2qaE}{I}}$$

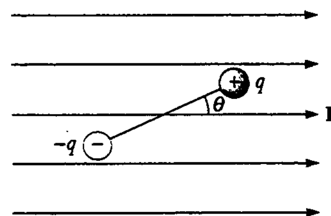
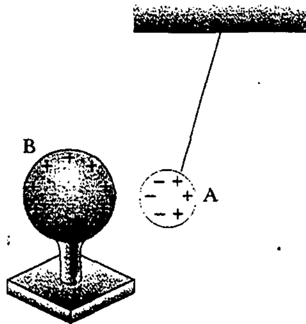


Figura P23.74

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

23.1 b). La cantidad de carga presente después del frotamiento es la misma que antes; sólo se distribuye de modo diferente.

23.2 d). El objeto A pudiera tener carga negativa, pero también podría ser eléctricamente neutro con una separación de carga inducida, como se muestra en la figura siguiente:



23.3 b). A partir de la tercera ley de Newton, la fuerza eléctrica ejercida por el objeto B sobre el objeto A es igual en magnitud a la fuerza ejercida por el objeto A sobre el objeto B y en la dirección opuesta —es decir, $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$.

23.4 Nada, si se supone que la fuente de carga que produce el campo no se altera por nuestras acciones. Recuerde que el campo eléctrico no se crea por la carga +3 μC o por la carga −3 μC sino por la fuente de carga (que no se ve en este caso).

23.5 *A*, *B* y *C*. El campo es mayor en el punto *A* porque es ahí donde las líneas de campo están más juntas entre sí. La ausencia de líneas en el punto *C* indica que ahí el campo eléctrico es cero.



ACERTIJO

Algunas compañías ferroviarias están planeando revestir las ventanas de sus trenes interurbanos con una fina capa metálica. (El revestimiento es tan delgado que usted puede ver a través de él.) Las compañías están haciendo esto en respuesta a las quejas de los usuarios acerca de las ruidosas pláticas de algunos pasajeros a través de sus teléfonos celulares. ¿Cómo puede resolver este problema un revestimiento metálico que sólo tiene unos cientos de nanómetros de ancho? *(Arthur Tilley/FPG International)*

capítulo

Ley de Gauss

24

Líneas generales del capítulo

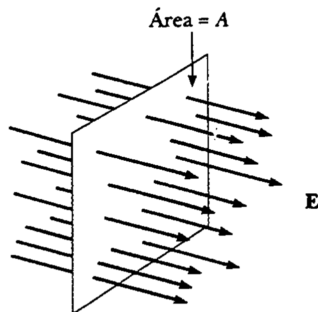


Figura 24.1 Líneas de campo que representan un campo eléctrico uniforme penetrando un plano de área A perpendicular al campo. El flujo eléctrico Φ_E a través de esta área es igual a EA.

En el capítulo anterior se mostró cómo usar la ley de Coulomb para calcular el campo eléctrico generado por una distribución de carga dada. En este capítulo se describirá la *ley de Gauss* y un método alternativo para calcular campos eléctricos. La ley se basa en el hecho de que la fuerza electrostática fundamental entre cargas puntuales exhibe un comportamiento del cuadrado inverso. Si bien la ley de Gauss es una consecuencia de la ley de Coulomb, es mucho más conveniente para calcular el campo eléctrico de distribuciones de carga altamente simétricas y hace posible un razonamiento cualitativo útil cuando se trata con problemas más complicados.

24.1 FLUJO ELÉCTRICO

11.6 El concepto de líneas de campo eléctrico se descubrió de manera cualitativa en el capítulo 23. Ahora se utilizará el concepto de flujo eléctrico para tratar las líneas de campo eléctrico sobre una base más cuantitativa.

Considere un campo eléctrico que es uniforme tanto en magnitud como en dirección, como el que se muestra en la figura 24.1. Las líneas de campo penetran una superficie rectangular de área A, la cual es perpendicular al campo. Recuerde de la sección 23.6 que el número de líneas por unidad de área (en otras palabras, la *densidad de línea*) es proporcional a la magnitud del campo eléctrico. Por tanto, el número total de líneas que penetra la superficie es proporcional al producto EA. El producto de la magnitud de campo eléctrico E y el área de la superficie A perpendicular al campo recibe el nombre de **flujo eléctrico Φ_E**:

$$\Phi_E = EA \tag{24.1}$$

A partir de las unidades del SI correspondientes a E y A, se ve que Φ_E tiene unidades de newton-metros cuadrados por coulomb ($N \cdot m^2/C$). **El flujo eléctrico es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que penetran alguna superficie.**

EJEMPLO 24.1 Flujo a través de una esfera

¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una esfera que tiene un radio de 1.00 m y porta una carga de +1.00 μC en su centro?

Solución La magnitud del campo eléctrico a 1.00 m de esta carga está dada por la ecuación 23.4,

$$E = k_e \frac{q}{r^2} = (8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)\frac{1.00 \times 10^{-6}\text{ C}}{(1.00\text{ m})^2}$$

$$= 8.99 \times 10^3 \text{ N/C}$$

El campo apunta radialmente hacia afuera y, por tanto, es perpendicular en todo punto a la superficie de la esfera. El flujo a través de la esfera (cuya área de superficie es $A = 4\pi r^2 = 12.6$ m^2) es, por consiguiente,

$$\Phi_E = EA = (8.99 \times 10^3 \text{ N/C})(12.6 \text{ m}^2)$$

$$= 1.13 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

Ejercicio ¿Cuáles serían a) el campo eléctrico y b) el flujo a través de la esfera si ésta tuviese un radio de 0.500 m?

Respuesta a) 3.60×10^4 N/C; b) 1.13×10^5 N$\cdot$m^2/C.

Si la superficie que se está considerando no es perpendicular al campo, el flujo a través de ella debe ser menor que el dado por la ecuación 24.1. Para entender lo anterior véase la figura 24.2, donde la normal a la superficie del área A forma un ángulo θ con el campo eléctrico uniforme. Advierta que el número de líneas que cruzan esta área A es igual al número que cruza el área A', la cual es una proyección del área A alineada perpendicular al campo. De acuerdo con la figura 24.2, las dos

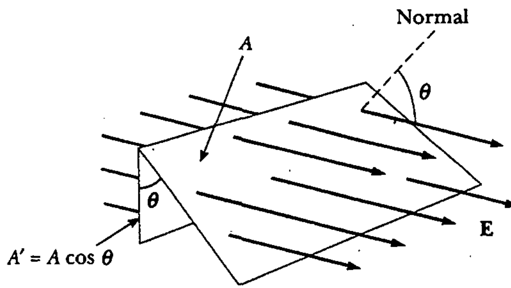


Figura 24.2 Líneas de campo que representan un campo eléctrico uniforme penetrando un área A que está a un ángulo θ con el campo. Debido a que el número de líneas que van a través del área A' es igual al número de las líneas que atraviesan A, el flujo a través de A' es igual al flujo a través de A y está dado por $\Phi_E = EA\cos\theta$.

Experimento sorpresa

Proyecte la luz de una lámpara de escritorio sobre una baraja y observe cómo el tamaño de la sombra sobre su escritorio depende de la orientación de la baraja con respecto al rayo de luz. ¿Una fórmula como la ecuación 24.2 podría usarse para describir cuánta luz ha sido bloqueada por la baraja?

áreas están relacionadas por $A' = A\cos\theta$. Ya que el flujo a través de A es igual al flujo a través de A', se concluye que el flujo a través de A es

$$\Phi_E = EA' = EA\cos\theta \tag{24.2}$$

A partir de este resultado se ve que el flujo a través de una superficie de área fija A tiene un valor máximo EA cuando la superficie es perpendicular al campo (en otras palabras, cuando la normal a la superficie es paralela al campo, es decir, $\theta = 0°$ en la figura 24.2); el flujo es cero cuando la superficie es paralela al campo (en otras palabras, cuando la normal a la superficie es perpendicular al campo, es decir, $\theta = 90°$).

En el análisis anterior se supuso un campo eléctrico uniforme. En situaciones más generales, el campo eléctrico puede variar sobre una superficie considerada. Por consiguiente, la definición de flujo dada por la ecuación 24.2 tiene sentido sólo sobre un pequeño elemento de área. Considere una superficie general dividida en un gran número de elementos pequeños, cada uno de área ΔA. La variación en el campo eléctrico sobre un elemento puede ignorarse si el elemento es suficientemente pequeño. Resulta conveniente definir un vector $\Delta\mathbf{A}_i$ cuya magnitud represente el área del i-ésimo elemento de la superficie y cuya dirección se *define como perpendicular* al elemento de superficie, como se muestra en la figura 24.3. El flujo eléctrico $\Delta\Phi_E$ a través de este elemento es

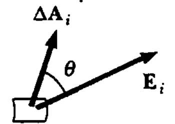


Figura 24.3 Un pequeño elemento de superficie con área ΔA_i. El campo eléctrico forma un ángulo θ con el vector $\Delta\mathbf{A}_i$, definido como normal al elemento de superficie, y el flujo a través del elemento es igual a $E_i\Delta A_i\cos\theta$.

$$\Delta\Phi_E = E_i\Delta A_i\cos\theta = \mathbf{E}_i\cdot\Delta\mathbf{A}_i$$

donde se ha usado la definición del producto escalar de dos vectores ($\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$). Al sumar las contribuciones de todos los elementos se obtiene el flujo total a través de la superficie.[1] Si se deja que el área de cada elemento tienda a cero, entonces el número de elementos tiende al infinito y la suma se sustituye por una integral. En consecuencia, la definición general de flujo eléctrico es

Definición de flujo eléctrico

$$\Phi_E = \lim_{\Delta A_i\to 0}\sum \mathbf{E}_i\cdot\Delta\mathbf{A}_i = \int_{\text{superficie}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} \tag{24.3}$$

La ecuación 24.3 es una *integral de superficie*, que debe ser evaluada sobre la superficie en cuestión. En general, el valor de Φ_E depende tanto del patrón del campo como de la superficie.

Casi siempre se está interesado en la evaluación del flujo a través de una *superficie cerrada*, la que se define como una que divide el espacio en una región interior y en otra exterior, de manera que uno no puede moverse de una región a la otra sin cruzar la superficie. La superficie de una esfera, por ejemplo, es una superficie cerrada.

Considere la superficie cerrada de la figura 24.4. Los vectores $\Delta\mathbf{A}_i$ apuntan en diferentes direcciones en los diversos elementos de superficie, pero en cada punto

[1] Es importante advertir que los dibujos con líneas de campo tienen sus imprecisiones, puesto que puede suceder que un pequeño elemento de área (según su posición) tenga muchas o muy pocas líneas que lo penetren. Se subraya que la definición básica del flujo eléctrico es $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$. Las líneas se utilizan sólo como una ayuda para visualizar el concepto.

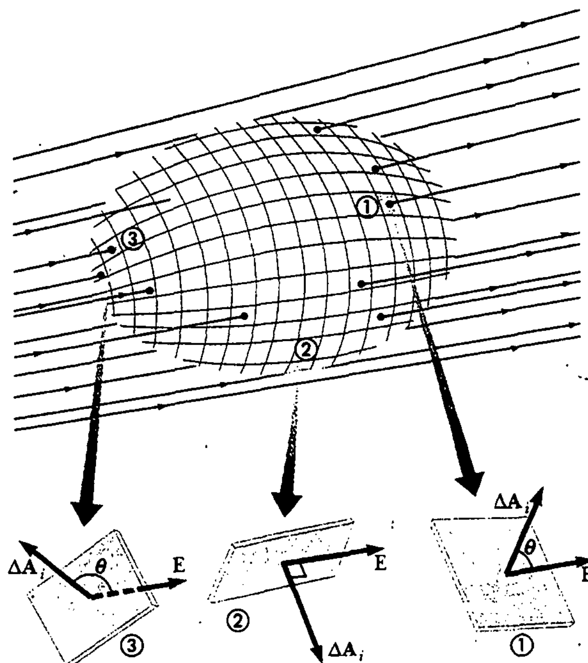


Figura 24.4 Una superficie cerrada en un campo eléctrico. Los vectores de área $\Delta\mathbf{A}_i$ son, por convención, normales a la superficie y apuntan hacia afuera. El flujo a través de un elemento de área puede ser positivo (elemento ①), cero (elemento ②), o negativo (elemento ③).



Karl Friedrich Gauss
Matemático y astrónomo alemán (1777-1855)

son normales a la superficie y, por convención, siempre apuntan hacia afuera. En los elementos marcados como ①, las líneas de campo están cruzando la superficie desde el interior hacia afuera y $\theta < 90°$; por tanto, el flujo $\Delta\Phi_E = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{A}_i$ a través de estos elementos es positivo. Para el elemento ② las líneas de campo rozan la superficie (perpendicular al vector $\Delta\mathbf{A}_i$); por tanto, $\theta = 90°$ y el flujo es cero. Para elementos como ③, donde las líneas de campo están atravesando la superficie desde el exterior hacia el interior, $180° > \theta > 90°$ y el flujo se vuelve negativo puesto que $\cos\theta$ es negativo. El flujo *neto* a través de la superficie es proporcional al número neto de líneas que abandonan la superficie, donde el número neto significa *el número de las que abandonan la superficie menos el número de las que entran a la superficie.* Si salen más líneas de las que entran, el flujo neto es positivo. Si entran más líneas de las que salen, el flujo neto es negativo. Con el símbolo $\oint$ representando una integral sobre una superficie cerrada, se puede escribir el flujo neto Φ_E a través de la superficie cerrada como

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint E_n dA \qquad \textbf{(24.4)}$$

donde E_n representa la componente del campo eléctrico normal a la superficie. La evaluación del flujo neto a través de una superficie cerrada podría ser muy problemática. Sin embargo, si el campo es normal a la superficie en cada punto y de magnitud constante, el cálculo es directo, como lo fue en el ejemplo 24.1. El siguiente ejemplo también ilustra este punto.

EJEMPLO 24.2 Flujo a través de un cubo

Considere un campo eléctrico uniforme **E** orientado en la dirección x. Encuentre el flujo eléctrico neto a través de la superficie de un cubo de lados ℓ orientado como se indica en la figura 24.5.

Solución El flujo neto es la suma de los flujos a través de cada cara del cubo. En primer lugar, observe que el flujo a través de cuatro de las caras (③, ④ y las que no tienen número) es cero, puesto que **E** es perpendicular a $d\mathbf{A}$ en estas caras.

El flujo neto a través de las caras ① y ② es

$$\Phi_E = \int_1 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} + \int_2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$$

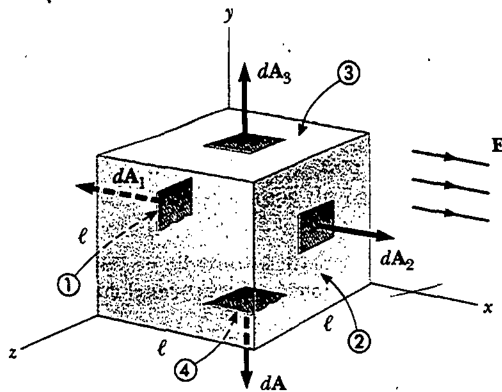


Figura 24.5 Una superficie cerrada en la forma de un cubo en un campo eléctrico uniforme orientado de manera paralela al eje x. El flujo neto a través de la superficie cerrada es cero. El lado ④ es el fondo del cubo, y el lado ① es opuesto al lado ②.

Para ①, **E** es constante y dirigido hacia adentro, en tanto que $d\mathbf{A}$ se dirige hacia afuera ($\theta = 180°$); por tanto, el flujo a través de esta cara es

$$\int_1 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_1 E(\cos 180°)dA = -E\int_1 dA = -EA = -E\ell^2$$

puesto que el área de cada cara es $A = \ell^2$.

Para ②, **E** es constante y apunta hacia afuera y en la misma dirección que $d\mathbf{A}(\theta = 0°)$; por ende, el flujo a través de esta cara es

$$\int_2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_2 E(\cos 0°)dA = E\int_2 dA = +EA = E\ell^2$$

Por tanto, el flujo neto sobre las seis caras es

$$\Phi_E = -E\ell^2 + E\ell^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

24.2 LEY DE GAUSS

11.6 En esta sección se describirá una relación general entre el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada (conocida en ocasiones como *superficie gaussiana*) y la carga encerrada por la superficie. Esta relación, conocida como *ley de Gauss*, es de importancia fundamental en el estudio de los campos eléctricos.

Considere de nuevo una carga puntual positiva q localizada en el centro de una esfera de radio r, como la que se muestra en la figura 24.6. De acuerdo con la ecuación 23.4 se sabe que la magnitud del campo eléctrico en cualquier punto sobre la superficie de la esfera es $E = k_e q/r^2$. Como se apuntó en el ejemplo 24.1, las líneas de campo apuntan radialmente hacia afuera y por ello son perpendiculares a la superficie en cada punto de la misma. Esto significa que en cada punto superficial, **E** es paralelo al vector $\Delta\mathbf{A}_i$, que representa al elemento de área local ΔA_i que rodea al punto superficial. Por tanto,

$$\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{A}_i = E\Delta A_i$$

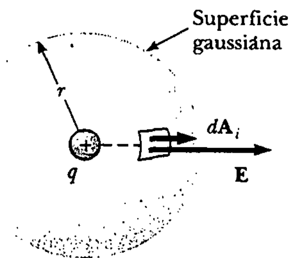


Figura 24.6 Una superficie gaussiana esférica de radio r rodeando una carga puntual q. Cuando la carga está en el centro de la esfera, el campo eléctrico es normal a la superficie y constante en magnitud en todas partes.

y de la ecuación 24.4 se encuentra que el flujo neto a través de la superficie gaussiana es

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint E\,dA = E\oint dA$$

donde se ha movido E fuera de la integral porque, por simetría, E es constante sobre la superficie y está dada por $E = k_e q/r^2$. Además, como la superficie es esférica, $\oint dA = A = 4\pi r^2$. Por tanto, el flujo neto a través de la superficie gaussiana es

$$\Phi_E = \frac{k_e q}{r^2}(4\pi r^2) = 4\pi k_e q$$

Recordando de la sección 23.3 que $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$, se puede escribir esta ecuación en la forma

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{24.5}$$

Se puede verificar que esta expresión para el flujo neto proporciona el mismo resultado que el del ejemplo 24.1: $\Phi_E = (1.00 \times 10^{-6}\text{ C})/(8.85 \times 10^{-12}\text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2) = 1.13 \times 10^5\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$.

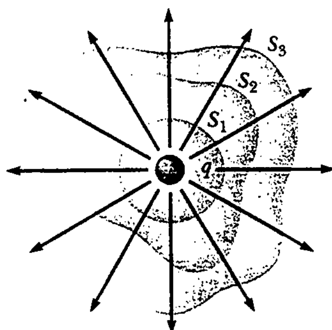


Figura 24.7 Superficies cerradas de varias formas, rodeando una carga q. El flujo eléctrico neto es el mismo a través de todas las superficies.

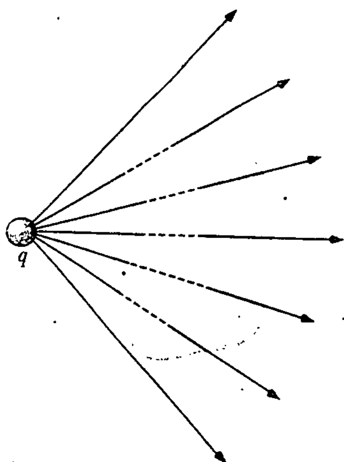


Figura 24.8 Una carga puntual ubicada *afuera* de una superficie cerrada. El número de líneas que ingresan a la superficie es igual al número de las que salen de la superficie.

El flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada es cero si no existe carga en su interior

Advierta en la ecuación 24.5 que el flujo neto a través de la superficie esférica es proporcional a la carga interna. El flujo es independiente del radio r porque el área de la superficie esférica es proporcional a r^2, mientras que el campo eléctrico es proporcional a $1/r^2$. En consecuencia, en el producto del área y el campo eléctrico, la dependencia de r se cancela.

Considere ahora varias superficies cerradas que rodean a una carga q, como se muestra en la figura 24.7. La superficie S_1 es esférica, en tanto que las superficies S_2 y S_3 no lo son. De la ecuación 24.5, el flujo que pasa por S_1 tiene el valor q/ϵ_0. Como se analizó en la sección anterior, el flujo es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie. La construcción de la figura 24.7 muestra que el número de líneas que pasan por S_1 es igual al número de líneas que atraviesan las superficies no esféricas S_2 y S_3. Por consiguiente, es razonable concluir que el flujo neto a través de *cualquier* superficie cerrada es independiente de la forma de esa superficie. **El flujo neto a través de cualquier superficie cerrada que rodea a una carga puntual q está dado por q/ϵ_0.**

Considere a continuación una carga puntual localizada *afuera* de una superficie cerrada de forma arbitraria, como la de la figura 24.8. Como usted puede observar en esta construcción, cualquier línea de campo eléctrico que entra a la superficie sale de ella en otro punto. El número de líneas de campo eléctrico que entran a la superficie es igual al número de las que salen de la superficie. Por tanto, se concluye que **el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada que rodea a ninguna carga es cero.** Si se aplica este resultado al ejemplo 24.2, se puede ver fácilmente que el flujo neto a través del cubo es cero, puesto que no hay carga dentro del cubo.

Pregunta sorpresa 24.1

Suponga que la carga en el ejemplo 24.1 está apenas afuera de la esfera, a 1.01 m de su centro. ¿Cuál es el flujo total que atraviesa la esfera?

Extienda estos argumentos a dos casos generalizados: 1) el de muchas cargas puntuales y 2) el de una distribución de carga continua. Una vez más se usa el principio de superposición, el cual indica que **el campo eléctrico producido por muchas cargas es la suma vectorial de los campos eléctricos producidos por las cargas individuales.** Por tanto, se puede expresar el flujo a través de cualquier superficie cerrada como

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots) \cdot d\mathbf{A}$$

donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico total en cualquier punto sobre la superficie producido por la adición vectorial de los campos eléctricos en dicho punto debido a las cargas individuales.

Considere el sistema de cargas mostrado en la figura 24.9. La superficie S rodea sólo una carga, q_1; por tanto, el flujo neto a través de S es q_1/ϵ_0. El flujo a través de S debido a las cargas q_2 y q_3 fuera de ella es cero porque cada línea de campo eléctrico que entra a S en un punto sale de ella en otro. La superficie S' rodea las cargas q_2 y q_3; por tanto, el flujo neto a través de S' es $(q_2 + q_3)/\epsilon_0$. Por último, el flujo neto a través de la superficie S' es cero debido a que no hay carga dentro de esta superficie. Es decir, *todas* las líneas de campo eléctrico que entran a S'' en un punto salen de S'' en otro.

La **ley de Gauss**, que es una generalización de lo que se acaba de describir, establece que el flujo neto a través de *cualquier* superficie cerrada es

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \tag{24.6}$$

Ley de Gauss

donde q_{in} representa la carga neta dentro de la superficie y $\mathbf{E}$ representa el campo eléctrico en cualquier punto sobre la superficie.

Una prueba formal de la ley de Gauss se presenta en la sección 24.6. Cuando emplee la ecuación 24.6 debe advertir que, aunque la carga q_{in} es la carga neta dentro de la superficie gaussiana, $\mathbf{E}$ representa el *campo eléctrico total*, que incluye contribuciones de cargas tanto dentro como fuera de la superficie.

La ley de Gauss es útil para evaluar E cuando la distribución de la carga tiene alta simetría

En principio, se puede resolver la ley de Gauss para $\mathbf{E}$ y así determinar el campo eléctrico de un sistema de cargas o de una distribución continua de carga. Sin embargo, en la práctica, este tipo de solución sólo es aplicable en un número limitado de situaciones donde haya un alto grado de simetría. Como verá en la sección siguiente, la ley de Gauss puede usarse para evaluar el campo eléctrico de distribuciones de carga que tienen simetría esférica, cilíndrica o plana. Si uno elige con cuidado la superficie gaussiana que rodea a la distribución de carga, la integral en la ecuación 24.6 puede simplificarse. También debe observar que una superficie gaussiana es una construcción matemática y no necesita coincidir con cualquier superficie física real.

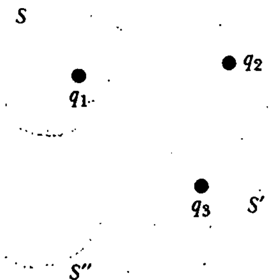


Figura 24.9 El flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie cerrada depende sólo de la carga *dentro* de dicha superficie. El flujo neto a través de la superficie S es q_1/ϵ_0, el flujo neto a través de la superficie S' es $(q_2 + q_3)/\epsilon_0$, y el flujo neto a través de la superficie S'' es cero.

Pregunta sorpresa 24.2

Para una superficie gaussiana a través de la cual el flujo neto es cero, los siguientes cuatro enunciados *podrían ser ciertos*. ¿Cuáles afirmaciones *deben ser verdaderas*? a) No hay cargas dentro de la superficie. b) La carga neta dentro de la superficie es cero. c) El campo eléctrico es cero en cualquier punto sobre la superficie. d) El número de líneas de campo eléctrico que entran a la superficie es igual al número de las que salen de la superficie.

Ejemplo conceptual 24.3

Una superficie gaussiana esférica rodea una carga puntual q. Describa qué sucede con el flujo total a través de la superficie si a) la carga se triplica, b) el radio de la esfera se duplica, c) la superficie se cambia a un cubo, y d) la carga se coloca en otra posición dentro de la superficie.

Solución a) El flujo a través de la superficie se triplica, ya que el flujo es proporcional a la cantidad de carga dentro de la superficie.

b) El flujo no cambia porque todas las líneas de campo eléctrico desde la carga pasan a través de la esfera, sin importar el radio de la misma.

c) El flujo no cambia cuando lo hace la forma de la superficie gaussiana, ya que todas las líneas de campo eléctrico desde la carga pasan a través de la superficie, sin importar la forma de la misma.

d) El flujo no cambia cuando la carga se mueve a otra posición dentro de esa superficie, pues la ley de Gauss se refiere a la carga total encerrada, sin importar dónde se ubica la carga dentro de la superficie.

24.3 APLICACIÓN DE LA LEY DE GAUSS A AISLANTES CARGADOS

Como se mencionó antes, la ley de Gauss es útil para determinar campos eléctricos cuando hay un alto grado de simetría en la distribución de la carga. Los siguientes ejemplos demuestran maneras de elegir la superficie gaussiana sobre la cual la integral de superficie dada por la ecuación 24.6 puede simplificarse y determinar el campo eléctrico. Al elegir la superficie siempre se debe sacar ventaja de la simetría de la distribución de la carga para que se pueda eliminar E de la integral y resolverla. La meta en este tipo de cálculos es determinar una superficie que satisfaga una o más de las siguientes condiciones:

1. El valor del campo eléctrico puede considerarse, por simetría, como constante sobre toda la superficie.
2. El producto punto en la ecuación 24.6 puede expresarse como un producto algebraico simple $E\,dA$ porque $\mathbf{E}$ y $d\mathbf{A}$ son paralelos.
3. El producto punto en la ecuación 24.6 es cero porque $\mathbf{E}$ y $d\mathbf{A}$ son perpendiculares.
4. Puede decirse que el campo sobre la superficie es cero.

Estas cuatro condiciones se usan en ejemplos a lo largo del resto de este capítulo.

EJEMPLO 24.4 El campo eléctrico debido a una carga puntual

A partir de la ley de Gauss calcule el campo eléctrico debido a una carga puntual aislada q.

Solución Una sola carga representa la distribución de carga más simple posible, y se usa este caso conocido para mostrar cómo resolver el campo eléctrico con la ley de Gauss. Elija una superficie gaussiana esférica de radio r y centrada en la carga puntual, como se muestra en la figura 24.10. El campo eléctrico debido a una carga puntual positiva apunta radialmente hacia afuera por simetría y es, por tanto, normal a la superficie en cada punto. Por consiguiente, como en la condición 2), $\mathbf{E}$ es paralelo a $d\mathbf{A}$ en cada punto. Por tanto, $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = E\,dA$ y la ley de Gauss produce

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint E\,dA = \frac{q}{J_0}$$

Por simetría, E es constante en todos los puntos sobre la superficie, lo cual satisface la condición 1), así que puede sacarse de la integral. Por tanto,

$$\oint E\,dA = E\oint dA = E(4\Pi r^2) = \frac{q}{J_0}$$

donde se ha aprovechado el hecho de que el área de la superficie de una esfera es $4\pi r^2$. Ahora, se resuelve para el campo eléctrico:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e\frac{q}{r^2}$$

Éste es el campo eléctrico conocido debido a una carga puntual que se ha desarrollado a partir de la ley de Coulomb en el capítulo 23.

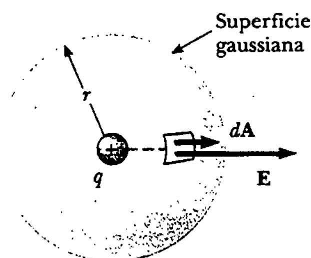


Figura 24.10 La carga puntual q está en el centro de la superficie gaussiana esférica, y $\mathbf{E}$ es paralelo a $d\mathbf{A}$ en cada punto sobre la superficie.

EJEMPLO 24.5 Una distribución de carga simétrica esféricamente

1.6 Una esfera sólida aislante de radio a tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ y lleva una carga positiva total Q (Fig. 24.11). a) Calcule la magnitud del campo eléctrico en un punto fuera de la esfera.

Solución Puesto que la distribución de carga es simétrica esféricamente, seleccione de nuevo una superficie gaussiana esférica de radio r, concéntrica con la esfera, como se muestra en la figura 24.11a. Para esta elección las condiciones 1) y 2)

se satisfacen, como lo fueron para la carga puntual en el ejemplo 24.4. Siguiendo la línea de razonamiento dada en el ejemplo 24.4 se encuentra que

$$E = k_e \frac{Q}{r^2} \quad \text{(para } r > a\text{)}$$

Observe que este resultado es idéntico al obtenido para una carga puntual. Por tanto, se concluye que, para una esfera cargada uniformemente, el campo en la región externa a la esfera es *equivalente* al de una carga puntual localizada en el centro de la esfera.

b) Encuentre la magnitud del campo eléctrico en un punto dentro de la esfera.

Solución En este caso se elige una superficie gaussiana esférica con radio $r < a$, concéntrica con la esfera aislada (Fig. 24.11b). Exprese el volumen de esta esfera más pequeña mediante V'. Para aplicar la ley de Gauss en esta situación es importante observar que la carga q_{in} dentro de la superficie gaussiana de volumen V' es menor que Q. Para calcular la carga q_{in}, aproveche el hecho de que $q_{in} = \rho V'$:

$$q_{in} = \rho V' = \rho(\tfrac{4}{3}\pi r^3)$$

Por simetría, la magnitud del campo eléctrico es constante en cualquier punto de la superficie gaussiana esférica y es normal a la superficie en cada punto —ambas condiciones la 1) y la 2) se satisfacen. Por consiguiente, la ley de Gauss en la región $r < a$ produce

$$\oint E\,dA = E\oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

Al despejar E se obtiene

$$E = \frac{q_{in}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Puesto que, por definición, $\rho = Q/\frac{4}{3}\pi a^3$ y dado que $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$, esta expresión para E puede escribirse de la siguiente manera:

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{k_e Q}{a^3} r \quad \text{(para } r < a\text{)}$$

Advierta que este resultado para E difiere del obtenido en el inciso a). Éste muestra que $E \to 0$ a medida que $r \to 0$. En consecuencia, el resultado elimina el problema que existiría en $r = 0$ si E varía como $1/r^2$ dentro de la esfera como lo hace afuera de la misma. Es decir, si $E \propto 1/r^2$ para $r < a$, el campo sería infinito en $r = 0$, lo cual es imposible físicamente. Advierta también que las expresiones para las partes a) y b) son equiparables cuando $r = a$.

Una gráfica de E *versus* r se muestra en la figura 24.12.

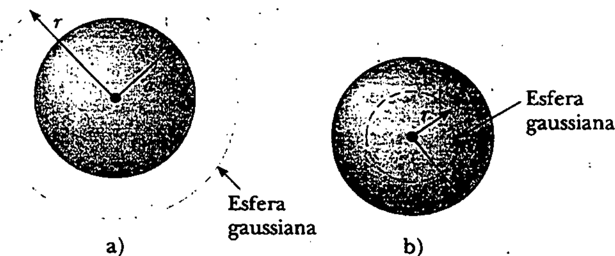


Figura 24.11 Una esfera de radio a y carga total Q, aislada y cargada de manera uniforme. a) La magnitud del campo eléctrico en un punto exterior a la esfera es k_eQ/r^2. b) La magnitud del campo eléctrico dentro de la esfera aislante se debe sólo a la carga *dentro* de la esfera gaussiana, definida por el círculo punteado, y es k_eQr/a^3.

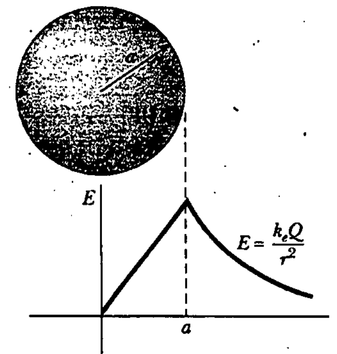


Figura 24.12 Gráfica de E contra r para una esfera aislante cargada de manera uniforme. El campo eléctrico dentro de la esfera ($r < a$) varía linealmente con r. El campo afuera de la esfera ($r > a$) es el mismo que el de una carga puntual Q ubicada en $r = 0$.

EJEMPLO 24.6 El campo eléctrico debido a un cascarón esférico delgado

Un cascarón esférico delgado de radio a tiene una carga total Q distribuida uniformemente sobre su superficie (Fig. 24.13a). Encuentre el campo eléctrico en puntos a) fuera y b) dentro del cascarón.

Solución a) El cálculo del campo fuera del cascarón es idéntico al ya realizado para la esfera sólida que se muestra en el ejemplo 24.5a. Si se construye una superficie gaussiana esférica de radio $r > a$, concéntrica con el cascarón (Fig. 24.13b), la carga dentro de esta superficie es Q. En consecuencia, el campo en un punto fuera del cascarón es equivalente al de una carga puntual Q ubicada en el centro:

$$E = k_e \frac{Q}{r^2} \quad \text{(para } r > a\text{)}$$

b) El campo eléctrico dentro del cascarón esférico es cero. Esto se desprende de la ley de Gauss aplicada a una superficie esférica de radio $r < a$ concéntrica con el cascarón (Fig. 24.13c). Debido a la simetría esférica de la distribución

de carga, y a que la carga neta dentro de la superficie es cero —lo que satisface de nuevo las condiciones 1) y 2)— la aplicación de la ley de Gauss muestra que $E = 0$ en la región $r < a$.

Los mismos resultados pueden obtenerse con la ecuación 23.6 e integrando sobre la distribución de carga. Este cálculo es mucho más complicado. La ley de Gauss permite determinar estos resultados en una manera mucho más sencilla.

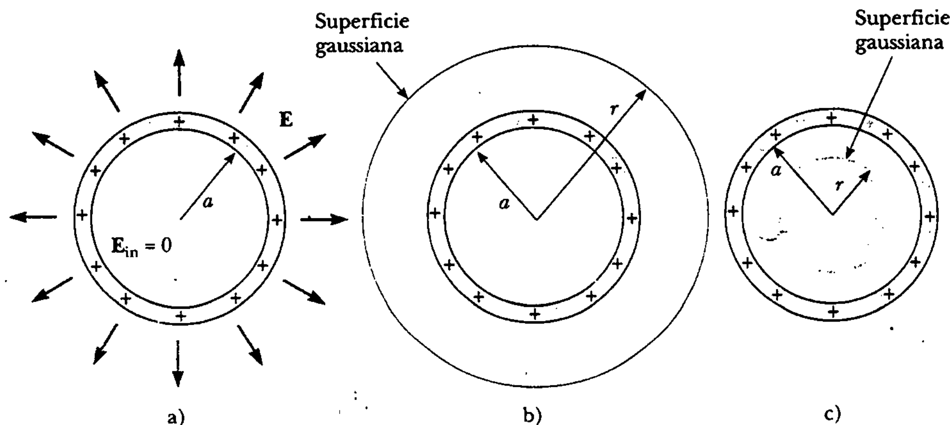


Figura 24.13 a) El campo eléctrico dentro de un cascarón esférico cargado de manera uniforme es cero. El campo afuera es el mismo que el debido a una carga puntual Q ubicada en el centro del cascarón. b) La superficie gaussiana para $r > a$. c) Superficie gaussiana para $r < a$.

EJEMPLO 24.7 Una distribución de carga simétrica cilíndricamente

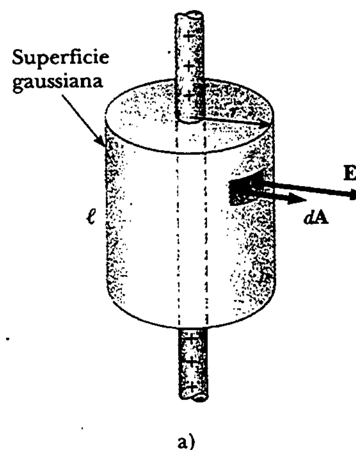
11.7 Encuentre el campo eléctrico a una distancia r de una línea de carga positiva de longitud infinita cuya carga por unidad de longitud λ sea constante (Fig. 24.14a).

Solución La simetría de la distribución de carga requiere que **E** sea perpendicular a la línea de carga y apuntar hacia afuera, como se muestra en la figura 24.14a y b. Para reflejar la simetría de la distribución de carga se selecciona una superficie gaussiana cilíndrica de radio r y longitud ℓ que es coaxial con la línea de carga. Para la parte curva de esta superficie **E** es constante en magnitud y perpendicular a la superficie en cada punto —se satisfacen las condiciones 1) y 2). Además, el flujo a través de los extremos del cilindro gaussiano es cero debido a que **E** es paralelo a estas superficies —la primera aplicación que se ha visto de la condición 3).

Tome la integral de superficie en la ley de Gauss sobre toda la superficie gaussiana. Sin embargo, debido al valor cero de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ para los extremos del cilindro, se puede restringir la atención sólo a la superficie curva del cilindro.

La carga total dentro de la superficie gaussiana es $\lambda\ell$. Al aplicar la ley de Gauss y las condiciones 1) y 2) se encuentra que, para la superficie curva,

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \oint dA = EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0}$$



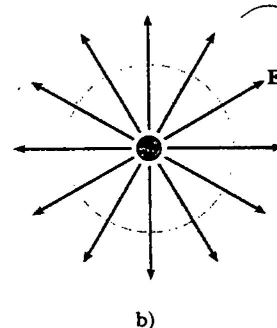


Figura 24.14 a) Una línea de carga infinita rodeada por una superficie cilíndrica gaussiana, concéntrica con la línea. b) Una vista del extremo muestra que el campo eléctrico en la superficie cilíndrica es constante en magnitud y perpendicular a la superficie.

El área de la superficie curva es $A = 2\pi r\ell$; por tanto,

$$E(2\pi r\ell) = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = 2k_e \frac{\lambda}{r} \qquad \textbf{(24.7)}$$

Así, se ve que el campo eléctrico de una distribución de carga simétrica cilíndricamente varía como $1/r$, en tanto que el campo externo a una distribución de carga simétrica esféricamente varía como $1/r^2$. La ecuación 24.7 también se derivó en el capítulo 23 (véase el problema 35[b]), mediante la integración del campo de una carga puntual.

Si la línea de carga en este ejemplo tiene una longitud finita, el resultado para E no es el dado por la ecuación 24.7. Una línea de carga finita no posee suficiente simetría para hacer uso de la ley de Gauss. Esto se debe a que la magnitud del campo eléctrico ya no es constante sobre la superficie del cilindro gaussiano —el campo cerca de los extremos de la línea sería diferente de aquel para los extremos lejanos. Por tanto, la condición 1) no sería satisfecha en esta situación. Además, **E** no es perpendicular a la superficie cilíndrica en todos los puntos —los vectores de campo cerca de los extremos tendrían una componente paralela a la línea. Por consiguiente, la condición 2) no sería satisfecha. Cuando hay poca simetría en la distribución de la carga, como en este caso, es necesario calcular **E** utilizando la ecuación 23.6.

Para puntos cerca de una línea de carga finita y alejados de los extremos, la ecuación 24.7 ofrece una buena aproximación del valor del campo.

Se deja como un problema (véase el problema 29) demostrar que el campo eléctrico dentro de una barra cargada uniformemente de longitud finita es proporcional a r.

EJEMPLO 24.8 Un plano de carga no conductor

Encuentre el campo eléctrico debido a un plano infinito no conductor de carga positiva con densidad de carga superficial uniforme σ.

Solución Por simetría, **E** debe ser perpendicular al plano y debe tener la misma magnitud en todos los puntos equidistantes desde el plano. El hecho de que la dirección de **E** se aleja de las cargas positivas indica que la dirección de **E** en un lado del plano debe ser opuesta a su dirección en el otro lado, como se muestra en la figura 24.15. Una superficie gaussiana que refleja la simetría es un cilindro pequeño cuyo eje es perpendicular al plano y cuyos extremos tienen cada uno un área A y son equidistantes del plano. Como **E** es paralelo a la superficie curva —y, por tanto, perpendicular a $d\mathbf{A}$ en cualquier parte de la superficie— la condición 3) se satisface y no existe contribución a la integral de superficie a partir de esta superficie. Para los extremos planos del cilindro se satisfacen las condiciones 1) y 2). El flujo a través de cada extremo del cilindro es EA; por consiguiente, el flujo total a través de toda la superficie gaussiana es justo la que atraviesa los extremos, $\Phi_E = 2EA$.

Al advertir que la carga total dentro de la superficie es $q_{in} = \sigma A$, se emplea la ley de Gauss y se encuentra que

$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad \textbf{(24.8)}$$

Puesto que la distancia de los extremos planos del cilindro al plano no aparece en la ecuación 24.8, se concluye que $E = \sigma/2\epsilon_0$ a cualquier distancia desde el plano. Es decir, el campo es uniforme en todos lados.

Una configuración de carga importante relacionada con este ejemplo consta de dos planos paralelos, uno cargado positivamente y el otro cargado negativamente, y cada uno con una densidad de carga superficial σ (véase el problema 58). En esta situación los campos eléctricos debidos a los dos planos se añaden en la región entre los planos, lo que resulta en un campo de magnitud σ/ϵ_0, y se cancelan en cualquier sitio para producir un campo cero.

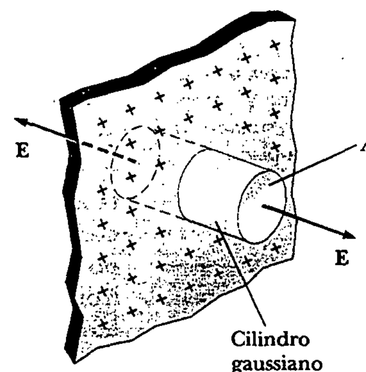


Figura 24.15 Una superficie gaussiana cilíndrica penetra un plano de carga infinito. El flujo es EA a través de cada extremo de la superficie gaussiana y cero a través de su superficie curva.

EJEMPLO CONCEPTUAL 24.9

Explique por qué la ley de Gauss no puede utilizarse para calcular el campo eléctrico cerca de un dipolo eléctrico, un disco cargado, o un triángulo con una carga puntual en cada esquina.

Solución Las distribuciones de carga de estas configuraciones no tienen suficiente simetría para hacer uso práctico de la ley de Gauss. No se puede encontrar una superficie cerrada que rodee cualquiera de estas distribuciones y satisfaga una o más de las condiciones 1) a 4) listadas al principio de esta sección.

 CONDUCTORES EN EQUILIBRIO ELECTROSTÁTICO

Como aprendió en la sección 23.2, un buen conductor eléctrico contiene cargas (electrones) que no están unidas a ningún átomo y, por tanto, se pueden mover en la proximidad dentro del material. Cuando no hay movimiento neto de carga dentro del conductor, éste está en **equilibrio electrostático**. Como se verá, un conductor en equilibrio electrostático tiene las siguientes propiedades:

Propiedades de un conductor en equilibrio electrostático

1. El campo eléctrico es cero en cualquier parte dentro del conductor.
2. Si un conductor aislado transporta una carga, esta última reside en su superficie.
3. El campo eléctrico afuera de un conductor cargado es perpendicular a la superficie del conductor y tiene una magnitud de σ/ϵ_0, donde σ es la densidad de carga superficial en ese punto.
4. En un conductor de forma irregular, la densidad de carga superficial es mayor en puntos donde el radio de curvatura de la superficie es más pequeño.

En el análisis que sigue se verificarán las primeras tres propiedades. La cuarta propiedad se presentará aquí sin profundizar demasiado, de modo que se tenga una lista completa de propiedades para conductores en equilibrio electrostático.

La primera propiedad puede entenderse considerando una placa conductora situada en un campo externo **E** (Fig. 24.16). Se puede argumentar que el campo eléctrico dentro del conductor *debe* ser cero bajo la suposición de que existe equilibrio electrostático. Si el campo no fuese cero, las cargas libres se acelerarían bajo la acción del campo. Sin embargo, este movimiento de electrones significaría que el conductor no está en equilibrio electrostático. Por ende, la existencia de equilibrio electrostático es consistente sólo con un campo cero en el conductor.

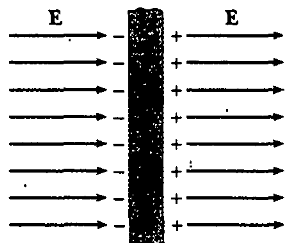


Figura 24.16 Una placa conductora en un campo eléctrico externo **E**. Las cargas inducidas sobre las dos superficies de la placa producen un campo eléctrico que se opone al campo externo, dando como resultado un campo cero dentro de la placa.

Ahora investigue cómo se logra este campo cero. Antes de que se aplique el campo externo los electrones libres se distribuyen uniformemente por todo el conductor. Cuando se aplica el campo externo, los electrones libres aceleran hacia la izquierda en la figura 24.16 y producen una acumulación de carga negativa en la superficie izquierda. El movimiento de electrones hacia la izquierda da como resultado un plano de carga positiva sobre la superficie derecha. Estos planos de carga crean un campo eléctrico adicional dentro del conductor, el cual se opone al campo externo. La densidad de carga superficial aumenta conforme se mueven los electrones hasta que la magnitud del campo eléctrico interno es igual a la del campo externo, y el resultado es un campo neto igual a cero dentro del conductor. El tiempo que tarda un buen conductor en alcanzar el equilibrio es del orden de 10^{-16} s, lo que para la mayor parte de los propósitos puede considerarse instantáneo.

Se puede usar la ley de Gauss para comprobar la segunda propiedad de un conductor en equilibrio electrostático. La figura 24.17 muestra un conductor de forma arbitraria. Se dibuja una superficie gaussiana dentro del conductor y ésta puede estar tan cerca de la superficie de éste como se quiera. Como se acaba de demostrar, el campo eléctrico en todos los puntos dentro del conductor es cero cuando éste se encuentra en equilibrio electrostático. Por tanto, el campo eléctrico debe ser cero en cualquier punto sobre la superficie gaussiana, en concordancia con la condición 4) de la sección 24.3. Por tanto, el flujo neto a través de esta superficie gaussiana es cero. A partir de este resultado y de la ley de Gauss, se concluye que la carga neta dentro de la superficie gaussiana es cero. Puesto que puede no haber carga ne-

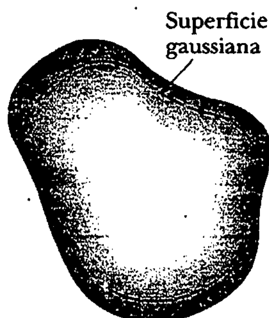
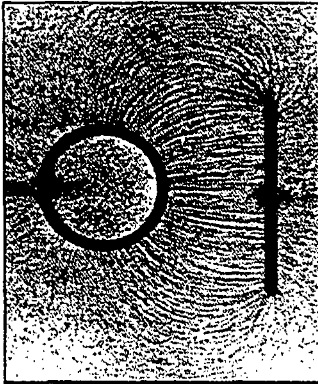


Figura 24.17 Conductor de forma arbitraria. La línea punteada representa una superficie gaussiana justo dentro del conductor.



Patrones de campo eléctrico rodeando una placa conductora cargada colocada cerca de un cilindro conductor cargado de manera opuesta. Pequeñas piezas de hilo suspendidas en aceite se alinean con las líneas de campo eléctrico. Advierta que 1) las líneas de campo son perpendiculares a ambos conductores y 2) no hay líneas dentro del cilindro ($E = 0$). *(Cortesía de Harold M. Waage, Princeton University)*

ta dentro de la superficie gaussiana (la cual está arbitrariamente cercana a la superficie del conductor), **cualquier carga neta sobre el conductor debe residir sobre su superficie**. La ley de Gauss no indica cómo se distribuye este exceso de carga sobre la superficie de un conductor.

También se puede utilizar la ley de Gauss para verificar la tercera propiedad. Se dibuja una superficie gaussiana en la forma de un pequeño cilindro cuyas caras en los extremos son paralelas a la superficie del conductor (Fig. 24.18). Parte del cilindro está apenas afuera del conductor, y parte está adentro. El campo es normal a la superficie del conductor de la condición de equilibrio electrostático. (Si **E** tiene una componente paralela a la superficie del conductor, las cargas libres se moverían a lo largo de la superficie; en tal caso, el conductor no estaría en equilibrio.) En consecuencia, se satisface la condición 3) en la sección 24.3 para la parte curva de la superficie gaussiana cilíndrica —no hay flujo a través de esta parte de la superficie gaussiana porque **E** es paralelo a la superficie. No hay flujo a través de la cara plana del cilindro en el interior del conductor debido a que $\mathbf{E} = 0$ —se satisface la condición 4). Por consiguiente, el flujo neto a través de la superficie es el que pasa sólo a través de la cara plana afuera del conductor, donde el campo es perpendicular a la superficie gaussiana. Usando las condiciones 1) y 2) para esta cara el flujo es EA, donde E es el campo eléctrico afuera del conductor, y A es el área de la cara del cilindro. La aplicación de la ley de Gauss a esta superficie produce

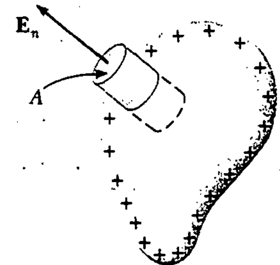


Figura 24.18 Una superficie gaussiana con forma de un pequeño cilindro se usa para calcular el campo eléctrico justo afuera de un conductor cargado. El flujo a través de la superficie gaussiana es E_nA. Recuerde que **E** es cero dentro del conductor.

$$\Phi_E = \oint E\,dA = EA = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

donde se ha aprovechado el hecho de que $q_{\text{in}} = \sigma A$. Al despejar E se obtiene

Campo eléctrico afuera de un conductor cargado

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(24.9)}$$

EJEMPLO 24.10 Una esfera dentro de un cascarón esférico

Una esfera conductora sólida de radio a tiene una carga positiva neta $2Q$. Un cascarón esférico conductor de radio interior b y radio exterior c es concéntrico con la esfera sólida y tiene una carga neta $-Q$. Con la ley de Gauss determine el campo eléctrico en las regiones marcadas como ①, ②, ③ y ④ en la figura 24.19, y la distribución de carga sobre el cascarón cuando todo el sistema está en equilibrio electrostático.

Solución Advierta primero que las distribuciones de carga tanto en la esfera como en el cascarón se caracterizan por simetría esférica alrededor de sus centros comunes. Para determinar el campo eléctrico a diversas distancias r desde este centro se construye una superficie esférica gaussiana para cada una de las cuatro regiones de interés. Una superficie tal para la región ② se muestra en la figura 24.19.

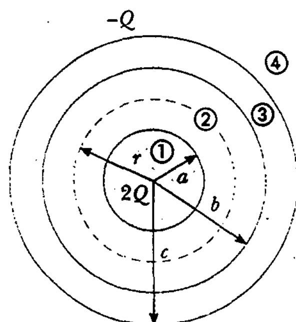


Figura 24.19 Una esfera conductora sólida de radio a y que transporta una carga $2Q$ rodeada por un cascarón esférico conductor que porta una carga $-Q$.

Para encontrar E en el interior de la esfera sólida (región ①), considere una superficie gaussiana de radio $r < a$. Puesto que no hay carga dentro de un conductor en equilibrio electrostático, se ve que $q_{in} = 0$, por lo que, con base en la ley de Gauss y la simetría, $E_1 = 0$ para $r < a$.

En la región ② —entre la superficie de la esfera sólida y la superficie interior del cascarón— se construye una superficie gaussiana esférica de radio r donde $a < r < b$, y se advierte que la carga dentro de esta superficie es $+2Q$ (la carga sobre la esfera sólida). Debido a la simetría esférica las líneas de campo eléctrico deben apuntar radialmente hacia afuera y ser de magnitud constante sobre la superficie gaussiana. Siguiendo el ejemplo 24.4, y utilizando la ley de Gauss, se encuentra que

$$E_2 A = E_2(4\pi r^2) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{2Q}{\epsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{2k_e Q}{r^2} \qquad \text{(para } a < r < b\text{)}$$

En la región ④, donde $r > c$, la superficie gaussiana esférica construida rodea a una carga total $q_{in} = 2Q + (-Q) = Q$. En consecuencia, la ley de Gauss aplicada a esta superficie produce

$$E_4 = \frac{k_e Q}{r^2} \qquad \text{(para } r > c\text{)}$$

En la región ③ el campo eléctrico debe ser cero debido a que el cascarón esférico es también un conductor en equilibrio. Si se construye una superficie gaussiana de radio r donde $b < r < c$, se ve que q_{in} debe ser cero puesto que $E_3 = 0$. De acuerdo con este argumento, se concluye que la carga sobre la superficie interior del cascarón esférico debe ser $-2Q$ para cancelar la carga $+2Q$ sobre la esfera sólida. Puesto que la carga neta sobre el cascarón es $-Q$, se concluye que la superficie exterior del cascarón debe tener una carga $+Q$.

Pregunta sorpresa 24.3

¿Cómo cambiaría el flujo eléctrico a través de una superficie gaussiana que rodea al cascarón en el ejemplo 24.10 si la esfera sólida estuviese descentrada pero aún dentro del cascarón?

Sección opcional

24.5 VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DE LAS LEYES DE GAUSS Y DE COULOMB

Cuando una carga neta se pone sobre un conductor, la carga se distribuye por sí sola sobre la superficie de una manera tal que el campo eléctrico dentro del conductor es cero. La ley de Gauss indica que no puede haber carga neta dentro del conductor en esta situación. En esta sección se investiga una verificación experimental de la ausencia de esta carga.

Se ha visto que la ley de Gauss es equivalente a la ecuación 23.6, la expresión para el campo eléctrico de una distribución de carga. Puesto que ésta situación surge de la ley de Coulomb, se puede declarar teóricamente que las leyes de Gauss y de Coulomb son equivalentes. Por tanto, es posible probar la validez de ambas leyes intentando detectar una carga neta dentro de un conductor o, de manera equivalente, un campo eléctrico no cero dentro del conductor. Si se detecta un campo no cero en el conductor, la ley de Gauss y la de Coulomb son inválidas. Muchos expe-

rimentos, incluyendo los primeros trabajos de Faraday, Cavendish y Maxwell, se han realizado para detectar el campo dentro de un conductor. En todos los casos reportados no se pudo detectar ningún campo eléctrico dentro de un conductor.

He aquí uno de los experimentos que se pueden desarrollar.[2] Una bola metálica cargada positivamente en el extremo de un hilo de seda se introduce por una pequeña abertura a un conductor hueco descargado aislado del suelo (Fig. 24.20a). La bola cargada positivamente induce una carga negativa sobre la pared interna del conductor hueco, dejando una carga positiva igual sobre la pared exterior (Fig. 24.20b). La presencia de carga positiva sobre la pared exterior se indica mediante la desviación de la aguja de un electrómetro (un dispositivo utilizado para medir cargas, las cuales sólo se miden en la superficie exterior del conductor). Luego la bola se baja y se le permite tocar la superficie interior del conductor hueco (Fig. 24.20c). La carga se transfiere entre la bola y la superficie interior de modo que ya no está cargada después de que se produce el contacto. La desviación de la aguja permanece inalterada mientras esto ocurre, indicando que la carga sobre la superficie exterior no es afectada. Cuando la bola se retira, los registros del electrómetro permanecen iguales (Fig. 24.20d). Además, se encuentra que la bola está descargada; esto comprueba que la carga fue transferida entre la bola y la superficie interior del conductor hueco. El efecto global es que la carga que estaba originalmente en la bola ahora aparece en el conductor hueco. El hecho de que la desviación de la aguja en el electrómetro que mide la carga sobre la superficie exterior permanezca invariable sin importar lo que ha ocurrido dentro del conductor hueco indica que la carga neta en el sistema siempre residió en la superficie exterior del conductor.

Si ahora se aplica otra carga positiva a la bola de metal y se le coloca cerca del exterior del conductor, ésta es repelida por el conductor. Esto demuestra que $\mathbf{E} \neq 0$ afuera del conductor, un descubrimiento consistente con el hecho de que el conductor porta una carga neta. Si la bola metálica cargada ahora se baja en el interior del conductor hueco cargado, no muestra evidencia de una fuerza eléctrica. Esto muestra que $\mathbf{E} = 0$ dentro del conductor hueco.

Este experimento verifica las predicciones de la ley de Gauss y, por tanto, comprueba la ley de Coulomb. La equivalencia de las leyes de Gauss y de Coulomb se debe al comportamiento cuadrado-inverso de la fuerza eléctrica. Por tanto, se puede interpretar este experimento como verificador del exponente 2 en el comportamiento $1/r^2$ de la fuerza eléctrica. Los experimentos de Williams, Faller y Hill en 1971 mostraron que el exponente de r en la ley de Coulomb es $(2 + \delta)$, ¡donde $\delta = (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$!

En el experimento que se ha descrito, la bola cargada que cuelga en el conductor hueco no exhibiría desviación aun en el caso en el cual un campo eléctrico externo se aplicara al sistema entero. El campo dentro del conductor todavía es cero. Esta capacidad de los conductores de "bloquear" los campos eléctricos externos se utiliza en muchos lugares, desde los escudos electromagnéticos para los componentes de computadora hasta los finos recubrimientos metálicos en los vidrios de las torres de control en los aeropuertos para evitar que la radiación originada fuera de la torre afecte la electrónica en el interior de la misma. Los usuarios de teléfonos celulares que viajan en los trenes interurbanos como el mostrado al inicio del capítulo deben hablar muy alto para ser escuchados sobre el ruido del tren. En respuesta a las quejas de otros pasajeros, las compañías ferroviarias están considerando revestir las ventanas con un delgado conductor metálico. Este revestimiento, combinado con el marco metálico del carro del tren, bloquea las transmisiones del teléfono celular hacia el interior y fuera del tren.

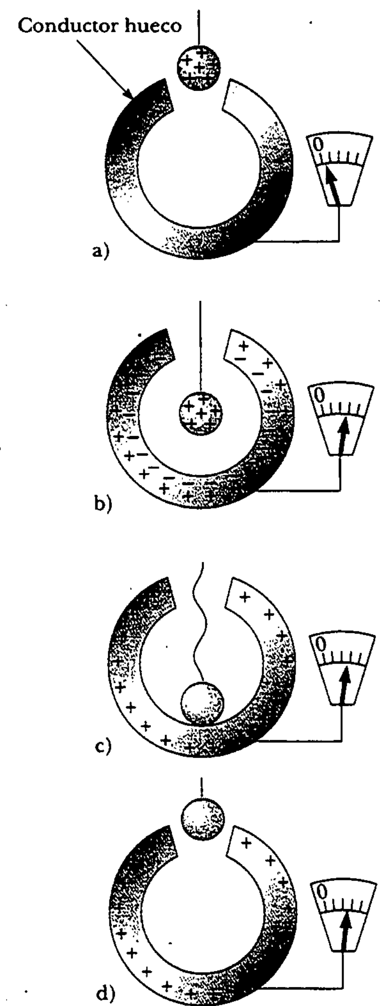


Figura 24.20 Un experimento donde se demuestra que cualquier carga transferida a un conductor reside en su superficie en equilibrio electrostático. El conductor hueco está aislado de tierra y la pequeña bola metálica está sostenida por un hilo aislante.

Experimento sorpresa

Envuelva un radio o teléfono inalámbrico en papel aluminio y vea si todavía trabaja. ¿Tiene importancia si el aluminio toca la antena?

[2] Con frecuencia el experimento se conoce como *experimento del balde de hielo de Faraday*, ya que Faraday, quien lo realizó por primera vez, utilizó un balde de hielo como conductor hueco.

Sección opcional

24.6 DEDUCCIÓN FORMAL DE LA LEY DE GAUSS

Una manera de deducir la ley de Gauss involucra *ángulos sólidos*. Considere una superficie esférica de radio r que contiene un elemento de área ΔA. El ángulo sólido $\Delta\Omega$ subtendido por este elemento en el centro de la esfera se define como

$$\Delta\Omega \equiv \frac{\Delta A}{r^2}$$

Según esta expresión, se ve que $\Delta\Omega$ no tiene dimensiones, puesto que ΔA y r^2 tienen dimensiones L^2. La unidad adimensional de un ángulo sólido es el **estereorradián**. (Usted quizá quiera comparar esta ecuación con la ecuación 10.1b, la definición del radián.) Puesto que el área de la superficie de una esfera es $4\pi r^2$, el ángulo sólido total subtendido por la esfera es

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ estereorradianes}$$

Considere ahora una carga puntual q rodeada por una superficie cerrada de forma arbitraria (Fig. 24.21). El flujo eléctrico total a través de esta superficie puede obtenerse al evaluar $\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{A}$ para cada pequeño elemento de área ΔA y al sumar todos los elementos. El flujo a través de cada elemento es

$$\Delta\Phi_E = \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{A} = E\Delta A\cos\theta = k_e q\frac{\Delta A\cos\theta}{r^2}$$

donde r es la distancia desde la carga al elemento de área, θ es el ángulo entre el campo eléctrico $\mathbf{E}$ y $\Delta\mathbf{A}$ para el elemento, y $E = k_e q/r^2$ para una carga puntual. En la figura 24.22 se ve que la proyección del elemento de área perpendicular al radio vector es ΔA cos θ. En consecuencia, la cantidad ΔA cos θ/r^2 es igual al ángulo sólido $\Delta\Omega$ que el elemento de superficie ΔA subtiende a la carga q. También se ve que $\Delta\Omega$ es igual al ángulo sólido subtendido por el elemento de área de una superficie esfé-

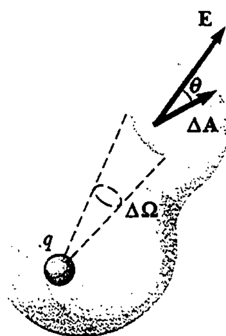


Figura 24.21 Una superficie cerrada de forma arbitraria rodea una carga puntual q. El flujo eléctrico neto a través de la superficie es independiente de la forma de la superficie.

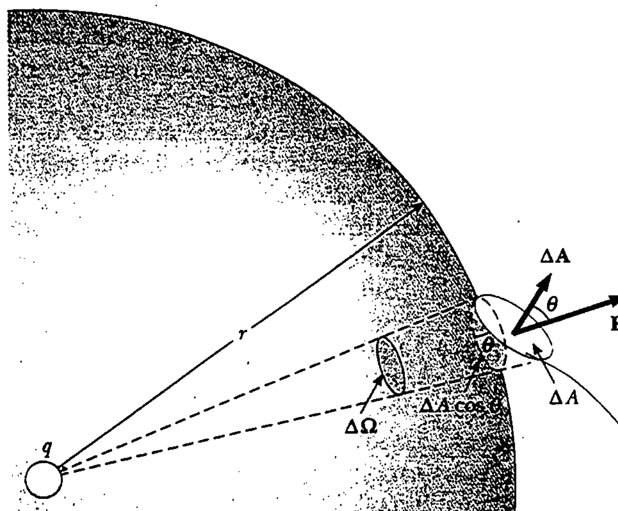


Figura 24.22 El elemento de área ΔA subtiende un ángulo sólido $\Delta\Omega = (\Delta A\cos\theta)/r^2$ en la carga q.

rica de radio r. Puesto que el ángulo sólido total en un punto es 4π estereorradianes, el flujo total a través de la superficie cerrada es

$$\Phi_E = k_e q \oint \frac{dA\cos\theta}{r^2} = k_e q \oint d\Omega = 4\Pi k_e q = \frac{q}{\epsilon_0}$$

De este modo, se ha deducido la ley de Gauss, ecuación 24.6. Observe que este resultado es independiente de la forma de la superficie cerrada, así como de la posición de la carga dentro de la superficie.

RESUMEN

El **flujo eléctrico** es proporcional al número de líneas de campo eléctrico que penetran una superficie. Si el campo eléctrico es uniforme y forma un ángulo θ con la normal a la superficie de área A, el flujo eléctrico a través de la superficie es

$$\Phi_E = EA\cos\theta \qquad \textbf{(24.2)}$$

En general, el flujo eléctrico a través de una superficie es

$$\Phi_E = \int_{\text{superficie}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} \qquad \textbf{(24.3)}$$

Usted necesita poder aplicar las ecuaciones 24.2 y 24.3 en una variedad de situaciones, particularmente aquellas en las cuales la simetría simplifica los cálculos.

La **ley de Gauss** establece que el flujo eléctrico neto Φ_E a través de cualquier superficie gaussiana cerrada es igual a la carga *neta* dentro de la superficie dividida entre ϵ_0:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(24.6)}$$

Utilizando la ley de Gauss usted puede calcular el campo eléctrico debido a diversas distribuciones de carga simétricas. La tabla 24.1 registra algunos resultados característicos.

TABLA 24.1 Cálculos de campo eléctrico típico mediante la ley de Gauss

Distribución de carga	Campo eléctrico	Ubicación
Esfera aislante de radio R, densidad de carga uniforme y carga total Q	$k_e \frac{Q}{r^2}$ $k_e \frac{Q}{R^3} r$	$r > R$ $r < R$
Cascarón esférico delgado de radio R y carga total Q	$k_e \frac{Q}{r^2}$ 0	$r > R$ $r < R$
Línea de carga de longitud infinita y carga por unidad de longitud λ	$2k_e \frac{\lambda}{r}$	Afuera de la línea
Plano no conductor, infinito y cargado, que tiene densidad de carga superficial σ	$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	Cualquier parte afuera del plano
Conductor con densidad de carga superficial σ	$\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ 0	Justo afuera del conductor Dentro del conductor

Un conductor en **equilibrio electrostático** tiene las siguientes propiedades:

1. El campo eléctrico es cero en todos los puntos dentro del conductor.
2. Cualquier carga neta sobre el conductor reside por completo en su superficie.
3. El campo eléctrico justo afuera del conductor es perpendicular a su superficie y tiene una magnitud σ/ϵ_0, donde σ es la densidad de carga superficial en ese punto.
4. En un conductor de forma irregular la densidad de carga superficial es mayor donde el radio de curvatura de la superficie es más pequeño.

Sugerencias para resolver problemas

La ley de Gauss, como se ha visto, es muy poderosa para resolver problemas que involucren distribuciones de carga altamente simétricas. En este capítulo encontrará tres tipos de simetría: plana, cilíndrica y esférica. Es importante repasar los ejemplos del 24.4 al 24.10 y seguir el siguiente método cuando use la ley de Gauss:

- Elija una superficie gaussiana que tenga una simetría que corresponda con la distribución de carga y satisfaga una o más de las condiciones listadas en la sección 24.3. Para cargas puntuales o distribuciones de carga simétricas esféricamente, la superficie gaussiana debe ser una esfera centrada en la carga, como en los ejemplos 24.4, 24.5, 24.6 y 24.10. Para líneas de carga uniformes o cilindros cargados uniformemente, su superficie gaussiana debe ser una superficie cilíndrica que sea coaxial con la línea de carga o el cilindro, como en el ejemplo 24.7. Para planos de carga una elección útil es una superficie gaussiana cilíndrica que atraviese el plano, como se muestra en el ejemplo 24.8. Estas elecciones le permitirán simplificar la integral de superficie que aparece en la ley de Gauss y representar el flujo eléctrico total a través de esa superficie.
- Evalúe el término q_{in}/ϵ_0 en la ley de Gauss, lo cual equivale a calcular la carga eléctrica total q_{in} dentro de la superficie gaussiana. Si la densidad de carga es uniforme (es decir, si λ, σ o ρ son constantes), simplemente multiplique dicha densidad de carga por la longitud, el área o el volumen encerrado por la superficie gaussiana. Si la distribución de carga *no es uniforme*, usted deberá integrar la densidad de carga sobre la región encerrada por la superficie gaussiana. Por ejemplo, si la carga se distribuye a lo largo de una línea, debe integrar la expresión $dq = \lambda\ dx$, donde dq es la carga en un elemento de longitud infinitesimal dx. Para un plano de carga, integre $dq = \sigma\ dA$, donde dA es un elemento infinitesimal de área. Para un volumen de carga, integre $dq = \rho\ dV$, donde dV es un elemento de volumen infinitesimal.
- Una vez que los términos de la ley de Gauss se han evaluado, calcule el campo eléctrico sobre la superficie gaussiana si la distribución de carga se da en el problema. Por el contrario, si se conoce el campo eléctrico, calcule la distribución de carga que produce el campo.

PREGUNTAS

1. El Sol está más bajo en el cielo durante el invierno de lo que está en el verano. ¿Cómo cambia esto el flujo de luz solar que golpea un área dada sobre la superficie de la Tierra? ¿Cómo afecta esto al clima?
2. Si el campo eléctrico en una región del espacio es cero, ¿puede usted concluir que no hay cargas eléctricas en esa región? Explique.
3. Si más líneas de campo eléctrico salen de una superficie gaussiana de las que entran, ¿qué puede usted concluir acerca de la carga neta encerrada por dicha superficie?
4. Un campo eléctrico uniforme existe en una región del espacio en la cual ya no hay cargas. ¿Qué puede usted concluir acerca del flujo eléctrico neto a través de una superficie gaussiana ubicada en esta región del espacio?

5. Si se conoce la carga total dentro de una superficie cerrada, pero no se especifica la distribución de la carga, ¿puede usar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico? Justifique su respuesta.
6. Explique por qué el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada con una carga encerrada determinada es independiente del tamaño o forma de la superficie.
7. Considere el campo eléctrico debido a un plano infinito no conductor que tiene una densidad de carga uniforme. Explique por qué el campo eléctrico no depende de la distancia desde el plano en función del espaciamiento de las líneas de campo eléctrico.
8. Use la ley de Gauss para explicar por qué las líneas de campo eléctrico deben empezar o terminar en cargas eléctricas. (*Sugerencia:* cambie el tamaño de la superficie gaussiana.)
9. Con base en la naturaleza repulsiva de la fuerza entre partículas iguales y la libertad de movimiento de carga en el conductor, explique por qué el exceso de carga en un conductor aislado debe residir en su superficie.
10. Una persona se sitúa dentro de una gran esfera metálica hueca que está aislada de la tierra. Si una gran carga se pone en la esfera, ¿la persona se lastimará al tocar el interior de la esfera? Explique qué sucederá si la persona tiene también una carga inicial cuyo signo es opuesto al de la carga en la esfera.
11. ¿Cómo diferirían las observaciones descritas en la figura 24.20 si el conductor hueco estuviera conectado a tierra? ¿Cómo diferirían si la pequeña bola cargada fuera un aislador en vez de un conductor?
12. ¿Qué otro experimento podría efectuarse en la bola de la figura 24.20 para demostrar que su carga se transfirió al conductor hueco?
13. ¿Qué sucedería con la lectura del electrómetro si la bola cargada en la figura 24.20 tocara la pared interna del conductor?, ¿si tocara la pared externa?
14. Usted habrá escuchado que uno de los lugares más seguros durante una tormenta eléctrica es dentro de un carro. ¿A qué se debe esto?
15. Dos esferas sólidas, ambas de radio R, conducen cargas totales idénticas Q. Una esfera es un buen conductor, mientras que la otra es un aislante. Si la carga sobre la esfera aislante está distribuida uniformemente por todo su volumen interior, ¿cómo se comparan los campos eléctricos externos de estas dos esferas? ¿Los campos son idénticos en el interior de las dos esferas?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en http://www.saunderscollege.com/physics/ □ = use computadora para resolver el problema □ = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 24.1 Flujo eléctrico

1. Un campo eléctrico de magnitud igual a 3.50 kN/C se aplica a lo largo del eje x. Calcule el flujo eléctrico a través de un plano rectangular de 0.350 m de ancho y 0.700 m de largo si a) el plano es paralelo al plano yz, b) es paralelo al plano xy, y c) el plano contiene al eje y y su normal forma un ángulo de 40.0° con el eje x.
2. Un campo eléctrico vertical de 2.00×10^4 N/C de magnitud existe sobre la superficie de la Tierra un día en el que amenaza una tormenta. Un auto que puede considerarse como un rectángulo de aproximadamente 6.00 m por 3.00 m viaja a lo largo de un camino inclinado 10.0° hacia abajo. Determine el flujo eléctrico a través de la base inferior del auto.
3. Una espira de 40.0 cm de diámetro se gira en un campo eléctrico uniforme hasta que se encuentra la posición de máximo flujo eléctrico. El valor que se mide del flujo en esta posición es de 5.20×10^5 N·m²/C. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico?
4. Un cascarón esférico se pone en un campo eléctrico uniforme. Determine el flujo eléctrico total a través del cascarón.
5. Considere una caja triangular cerrada que descansa dentro de un campo eléctrico horizontal de magnitud $E = 7.80 \times 10^4$ N/C, como se muestra en la figura P24.5. Calcule el flujo eléctrico a través de a) la superficie vertical, b) la superficie inclinada, y c) toda la superficie de la caja.

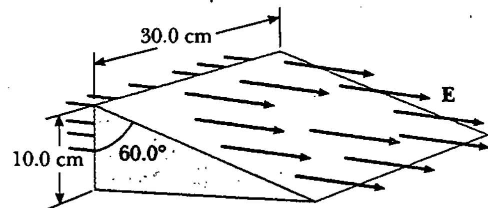


Figura P24.5

6. Un campo eléctrico uniforme $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ cruza una superficie de área A. ¿Cuál es el flujo a través de esta área si la superficie se ubica a) en el plano yz, b) en el plano xz, c) en el plano xy?
7. Una carga puntual q se localiza en el centro de un anillo uniforme que tiene densidad de carga lineal λ y radio a, como se muestra en la figura P24.7. Determine el

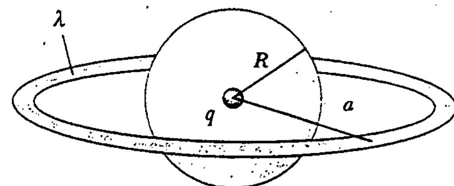


Figura P24.7

flujo eléctrico total a través de la esfera centrada en la carga puntual y que tiene radio R, donde $R < a$.

8. Una pirámide con una base cuadrada de 6.00 m y altura de 4.00 m se coloca en un campo eléctrico vertical de 52.0 N/C. Calcule el flujo eléctrico total a través de las cuatro superficies inclinadas de la pirámide.
9. Un cono de radio R en la base y altura h está sobre una mesa horizontal. Un campo horizontal uniforme E penetra el cono, como se muestra en la figura P24.9. Determine el flujo eléctrico que entra en el lado izquierdo del cono.

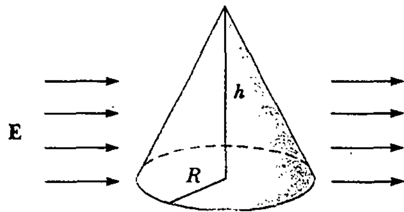


Figura P24.9

Sección 24.2 Ley de Gauss

10. Cuando se mide el campo eléctrico en cualquier parte sobre la superficie de un cascarón esférico delgado con 0.750 m de radio, se ve que es igual a 890 N/C y apunta radialmente hacia el centro de la esfera. a) ¿Cuál es la carga neta dentro de la superficie de la esfera? b) ¿Qué puede concluir acerca de la naturaleza y distribución de la carga dentro del cascarón esférico?
11. Las siguientes cargas se localizan dentro de un submarino: 5.00 μC, −9.00 μC, 27.0 μC, y −84.0 μC. a) Calcule el flujo eléctrico neto a través del submarino. b) ¿El número de líneas de campo eléctrico que salen del submarino es mayor, menor o igual al número de las líneas que entran?
12. Cuatro superficies cerradas, S_1 a S_4, junto con las cargas $-2Q$, Q y $-Q$ se dibujan en la figura P24.12. Encuentre el flujo eléctrico a través de cada superficie.

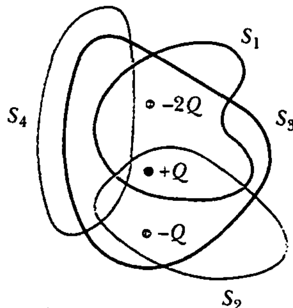


Figura P24.12

13. a) Una carga puntual q se localiza a una distancia d de un plano infinito. Determine el flujo eléctrico a través del plano debido a la carga puntual. b) Una carga puntual q se localiza a *muy corta* distancia del centro de un cuadrado *muy grande*, sobre la línea perpendicular al cuadrado que pasa por su centro. Determine el flujo eléctrico aproximado a través del cuadrado debido a la carga puntual. c) Explique por qué las respuestas a los incisos a) y b) son idénticas.
14. Calcule el flujo eléctrico total a través de la superficie paraboloide debido al campo eléctrico constante de magnitud E_0 en la dirección mostrada en la figura P24.14.

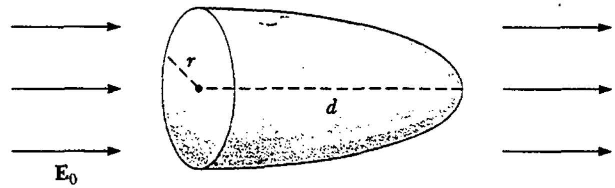


Figura P24.14

WEB 15. Una carga puntual Q se localiza arriba del centro de la cara plana de un hemisferio de radio R, como se muestra en la figura P24.15. ¿Cuál es el flujo eléctrico a) a través de la superficie curva, y b) a través de la cara plana?

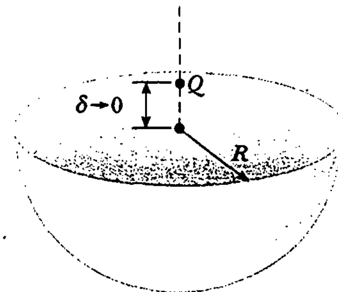


Figura P24.15

16. Una carga puntual de 12.0 μC se coloca en el centro de un cascarón esférico de 22.0 cm de radio. ¿Cuál es el flujo eléctrico total a través de a) la superficie del cascarón, y b) cualquier superficie hemisférica del cascarón? c) ¿Los resultados dependen del radio? Explique.
17. Una carga puntual de 0.046 2 μC está dentro de una pirámide. Determine el flujo eléctrico total a través de la superficie de la pirámide.
18. Una línea de carga infinitamente larga que tiene una carga uniforme por unidad de longitud λ se encuentra a una distancia d de un punto O, como se muestra en la figura P24.18. Determine el flujo eléctrico total a través de la superficie de una esfera de radio R centrada en O resultante de esta línea de carga. (*Sugerencia*: considere tanto $R < d$ como $R > d$.)

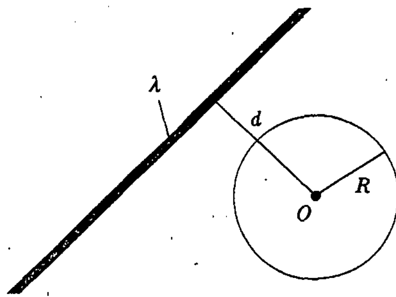


Figura P24.18

19. Una carga puntual $Q = 5.00\ \mu C$ se localiza en el centro de un cubo de lado $L = 0.100$ m. Además, otras seis cargas puntuales idénticas, cada una con una carga $q = -1.00\ \mu C$, están colocadas simétricamente alrededor de Q, como se muestra en la figura P24.19. Determine el flujo eléctrico a través de una cara del cubo.
20. Una carga puntual Q se localiza en el centro de un cubo de lado L. De manera adicional, otras seis cargas puntuales idénticas, negativas, están colocadas simétricamente alrededor de Q, como en la figura P24.19. Determine el flujo eléctrico a través de una cara del cubo.

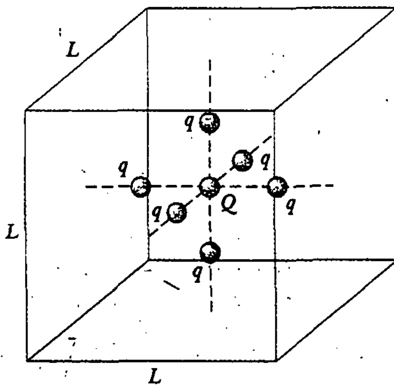


Figura P24.19 Problemas 19 y 20.

21. Considere una línea de carga infinitamente larga que tiene una carga uniforme por unidad de longitud λ. Determine el flujo eléctrico total a través de un cilindro circular recto cerrado de longitud L y radio R que está paralelo a la línea de carga, si la distancia entre el eje del cilindro y la línea de carga es d. (*Sugerencia*: considere tanto cuando $R < d$ como cuando $R > d$.)
22. Una carga de $10.0\ \mu C$ localizada en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas está rodeada por una esfera hueca no conductora de 10.0 cm de radio. Una broca con un radio de 1.00 mm se alinea a lo largo del eje z, y se perfora un agujero en la esfera. Calcule el flujo eléctrico a través del agujero.
23. Una carga de $170\ \mu C$ se encuentra en el centro de un cubo de 80.0 cm de lado. a) Determine el flujo total a través de cada cara del cubo. b) Encuentre el flujo a través de toda la superficie del cubo. c) ¿Sus respuestas a los incisos a) o b) cambiarían si la carga no estuviera en el centro? Explique.
24. El flujo eléctrico total que pasa por una superficie cerrada en la forma de un cilindro es de $8.60 \times 10^4\ N \cdot m^2/C$. a) ¿Cuál es la carga neta dentro del cilindro? b) A partir de la información proporcionada, ¿cuál es su comentario acerca de la carga dentro del cilindro? c) ¿Cómo cambiarían sus respuestas a los incisos a) y b) si el flujo neto fuera $-8.60 \times 10^4\ N \cdot m^2/C$?
25. La línea ag en la figura P24.25 es una diagonal de un cubo. Una carga puntual q se localiza en la extensión de ag muy cerca del vértice a del cubo. Determine el flujo eléctrico a través de cada lado del cubo que se encuentra en el punto a.

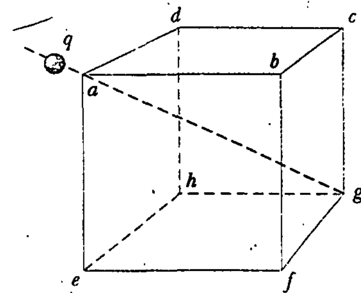


Figura P24.25

Sección 24.3 Aplicación de la ley de Gauss a aislantes cargados

26. Determine la magnitud del campo eléctrico en la superficie de un núcleo de plomo-208, el cual contiene 82 protones y 126 neutrones. Suponga que el núcleo de plomo tiene un volumen 208 veces el de un protón, y considere un protón como una esfera de radio 1.20×10^{-15} m.
27. Una esfera sólida de 40.0 cm de radio tiene una carga positiva total de $26.0\ \mu C$ distribuida uniformemente por todo su volumen. Calcule la magnitud del campo eléctrico de a) 0 cm, b) 10.0 cm, c) 40.0 cm, y d) 60.0 cm del centro de la esfera.
28. Un cascarón cilíndrico de 7.00 cm de radio y 240 cm de largo tiene su carga distribuida uniformemente sobre su superficie curva. La magnitud del campo eléctrico en un punto a 19.0 cm radialmente hacia afuera de su eje (medido desde el punto medio del cascarón) es de 36.0 kN/C. Use relaciones aproximadas para encontrar a) la carga neta sobre el cascarón y b) el campo eléctrico en un punto a 4.00 cm del eje, medido radialmente hacia afuera desde el punto medio del cascarón.

WEB 29. Considere una larga distribución de carga cilíndrica de radio R con densidad de carga uniforme ρ. Encuentre el campo eléctrico a una distancia r del eje donde $r < R$.

30. Una pared no conductora tiene una densidad de carga uniforme de 8.60 μC/cm^2. ¿Cuál es el campo eléctrico a 7.00 cm frente a la pared? ¿Obtiene otro resultado cuando varía la distancia desde la pared?

31. Considere un delgado cascarón esférico de 14.0 cm de radio con una carga total de 32.0 μC distribuida uniformemente sobre su superficie. Encuentre el campo eléctrico de a) 10.0 cm y b) 20.0 cm del centro de la distribución de carga.

32. En la fisión nuclear un núcleo de uranio-238, el cual contiene 92 protones, se divide en dos pequeñas esferas, cada una de las cuales tiene 46 protones y un radio de 5.90×10^{-15} m. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza eléctrica repulsiva que aparta a las dos esferas?

33. Llene dos globos de hule con aire. Suspéndalos del mismo punto sobre cuerdas de igual longitud. Frote cada globo con lana o su cabello, de modo que cuelguen aparte con una notable separación entre los dos. Realice estimaciones de orden de magnitud de a) la fuerza en cada uno de los globos, b) la carga en ellos, c) el campo que crea cada uno de los mismos en el centro del otro, y d) el flujo total del campo eléctrico creado por cada globo. En su respuesta establezca las cantidades que tomó como datos y los valores que midió o estimó para ellos.

34. Una esfera aislante de 8.00 cm de diámetro tiene una carga de 5.70 μC distribuida de manera uniforme por todo su volumen interior. Calcule la carga encerrada por una superficie esférica concéntrica con radio a) $r =$ 2.00 cm, y b) $r =$ 6.00 cm.

35. Un filamento recto de 7.00 m de largo está cargado uniformemente con una carga positiva total de 2.00 μC. Un cilindro de cartón descargado de 2.00 cm de longitud y 10.0 cm de radio rodea el filamento en su centro, con el filamento como el eje del cilindro. Utilizando aproximaciones razonables encuentre a) el campo eléctrico en la superficie del cilindro, y b) el flujo eléctrico total a través del cilindro.

36. La carga por unidad de longitud en un filamento recto y largo es de −90.0 μC/m. Encuentre el campo eléctrico de a) 10.0 cm, b) 20.0 cm, y c) 100 cm del filamento, donde las distancias se miden perpendiculares a la longitud del filamento.

37. Una larga lámina plana de carga tiene una carga por unidad de área de 9.00 μC/m^2. Determine la intensidad de campo eléctrico justo arriba de la superficie de la lámina, medida desde su punto medio.

Sección 24.4 Conductores en equilibrio electrostático

38. En un día claro y soleado, un campo eléctrico vertical de aproximadamente 130 N/C apunta hacia abajo sobre suelo plano. ¿Cuál es la densidad de carga superficial sobre el suelo en estas condiciones?

39. Una larga barra metálica recta tiene un radio de 5.00 cm y una carga por unidad de longitud de 30.0 nC/m. Encuentre el campo eléctrico a a) 3.00 cm, b) 10.0 cm, y c) 100 cm del eje de la barra, donde las distancias se miden perpendiculares a la barra.

40. Una placa de aluminio muy larga, delgada y plana tiene un área A y una carga total Q distribuida uniformemente sobre su superficie. Si la misma carga está extendida de manera uniforme sobre la superficie *superior* de una placa de vidrio idéntica, compare los campos eléctricos justo arriba del centro de la superficie superior de cada placa.

41. Una placa de cobre cuadrada, con lados de 50.0 cm, no tiene carga neta y está colocada en una región donde existe un campo eléctrico uniforme de 80.0 kN/C dirigido perpendicularmente hacia la placa. Encuentre a) la densidad de carga de cada cara de la placa y b) la carga total en cada cara.

42. Una esfera conductora hueca está rodeada por un cascarón conductor esférico concéntrico y más grande. La esfera interior tiene una carga $-Q$, y la esfera exterior tiene una carga $3Q$. Las cargas están en equilibrio electrostático. Con la ley de Gauss encuentre las cargas y los campos eléctricos en todo punto.

43. Dos esferas conductoras idénticas, cada una con un radio de 0.500 cm están conectadas por medio de un ligero alambre conductor de 2.00 m de largo. Determine la tensión en el alambre si se ponen 60.0 μC en uno de los conductores. (*Sugerencia:* suponga que la distribución superficial de carga sobre cada esfera es uniforme.)

44. El campo eléctrico sobre la superficie de un conductor de forma irregular varía desde 56.0 kN/C hasta 28.0 kN/C. Calcule la densidad de carga superficial local en el punto sobre la superficie donde el radio de curvatura de la superficie es a) el más grande y b) el más pequeño.

45. Un alambre largo y recto está rodeado por un cilindro metálico hueco cuyo eje coincide con el del alambre. El alambre tiene una carga por unidad de longitud de λ y el cilindro tiene una carga neta por unidad de longitud de 2λ. De acuerdo con esta información, utilice la ley de Gauss para encontrar a) la carga por unidad de longitud en las superficies interior y exterior del cilindro, y b) el campo eléctrico afuera del cilindro, a una distancia r del eje.

46. Un cascarón esférico conductor de 15.0 cm de radio tiene una carga neta de −6.40 μC distribuida uniformemente sobre la superficie. Encuentre el campo eléctrico en puntos a) justo fuera del cascarón y b) dentro del cascarón.

WEB 47. Una delgada placa conductora de 50.0 cm de lado se encuentra en el plano xy. Si una carga total de 4.00×10^{-8} C se pone sobre la placa, encuentre a) la densidad de carga sobre la placa, b) el campo eléctrico justo arriba de la placa, y c) el campo eléctrico justo debajo de la placa.

48. Un cascarón esférico conductor que tiene un radio interior a y radio exterior b tiene una carga neta Q. Si una carga puntual q se pone en el centro de este cascarón, determine la densidad de carga superficial sobre a) la superficie interior, y b) la superficie exterior del cascarón.

49. Una esfera conductora sólida de 2.00 cm de radio tiene una carga de 8.00 μC. Un cascarón esférico conductor de radio interior igual a 4.00 cm y de radio exterior de 5.00 cm es concéntrico con la esfera sólida y tiene una carga de −4.00 μC. Encuentre el campo eléctrico en a) $r =$ 1.00 cm, b) $r =$ 3.00 cm, c) $r =$ 4.50 cm, y d) $r =$ 7.00 cm desde el centro de esta configuración de carga.

50. Una carga puntual positiva está a una distancia de $R/2$ desde el centro de un delgado cascarón esférico conductor descargado de radio R. Bosqueje las líneas de campo eléctrico establecidas por este arreglo tanto en el interior como en el exterior del cascarón.

(Opcional)
Sección 24.5 Verificación experimental de las leyes de Gauss y de Coulomb

(Opcional)
Sección 24.6 Deducción formal de la ley de Gauss

51. Una esfera de radio R rodea a una carga puntual Q, localizada en su centro. a) Demuestre que el flujo eléctrico a través de un casquete circular de medio ángulo θ (Fig. P24.51) es

$$\Phi_E = \frac{Q}{2\epsilon_0}(1 - \cos\theta)$$

¿Cuál es el flujo por b) $\theta = 90°$ y c) $\theta = 180°$?

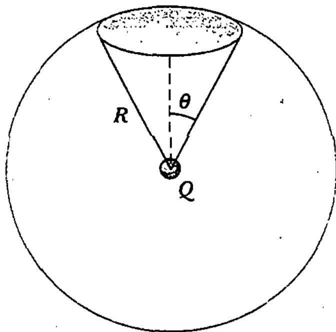


Figura P24.51

PROBLEMAS ADICIONALES

52. Un campo eléctrico no uniforme está dado por la expresión $\mathbf{E} = ay\mathbf{i} + bz\mathbf{j} + cx\mathbf{k}$, donde a, b y c son constantes. Determine el flujo eléctrico a través de una superficie rectangular en el plano xy, que se extiende de $x = 0$ a $x = w$ y de $y = 0$ a $y = h$.

53. Una esfera aislante sólida de radio a tiene una carga positiva neta $3Q$, distribuida de manera uniforme a través de su volumen. Concéntrico con esta esfera está un cascarón esférico conductor de radio interior b y radio exterior c, y que tiene una carga negativa neta $-Q$, como se muestra en la figura P24.53. a) Construya una superficie gaussiana esférica de radio $r > c$ y determine la carga neta encerrada por esta superficie. b) ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en $r > c$? c) Encuentre el campo eléctrico en $r > c$. d) encuentre el campo eléctrico en la región con radios r donde $c > r > b$. e) Construya una superficie gaussiana esférica de radio r, donde $c > r > b$, y determine la carga neta encerrada por esta superficie. f) Construya una superficie gaussiana esférica de radio r, donde $b > r > a$ y encuentre la carga neta encerrada por esta superficie. g) Determine el campo eléctrico en la región $b > r > a$. h) Construya una superficie gaussiana esférica de radio $r < a$ y encuentre una expresión para la carga neta dentro de esa superficie como una función de r. Observe que la carga dentro de esta superficie es menor que $3Q$. i) Encuentre el campo eléctrico en la región $r < a$. j) Determine la carga en la superficie interior del cascarón conductor. k) Determine la carga sobre la superficie exterior del cascarón conductor. l) Dibuje una gráfica de la magnitud del campo eléctrico *versus* r.

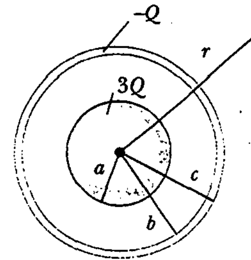


Figura P24.53

54. Considere dos esferas conductoras idénticas cuyas superficies están separadas por una corta distancia. A una esfera se le da una gran carga positiva neta mientras que a la otra se le proporciona una pequeña carga positiva neta. Se encuentra que la fuerza entre ellas es atractiva aun cuando ambas esferas tienen cargas netas del mismo signo. Explique cómo es esto posible.

WEB 55. Una esfera aislante sólida de radio a tiene una densidad de carga uniforme ρ y una carga total Q. Concéntrica con ella está una esfera hueca conductora descargada cuyos radios interior y exterior son b y c, como se muestra en la figura P24.55. a) Determine la magnitud del campo eléctrico en las regiones $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$, y $r > c$. b) Determine la carga inducida por unidad de área en las superficies interior y exterior de la esfera hueca.

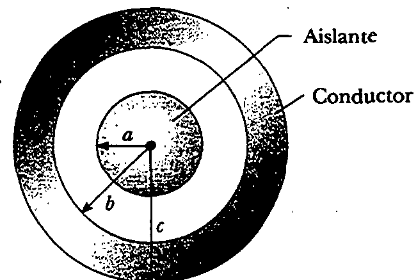


Figura P24.55 Problemas 55 y 56.

56. Para la configuración mostrada en la figura P24.55, suponga que $a = 5.00$ cm, $b = 20.0$ cm, y $c = 25.0$ cm. Suponga también que el campo eléctrico en un punto a 10.0 cm del centro es de 3.60×10^3 N/C radialmente hacia adentro, en tanto que el campo eléctrico en un punto a 50.0 cm del centro es 2.00×10^2 N/C radialmente hacia afuera. A partir de esta información encuentre a) la carga sobre la esfera aislante, b) la carga neta sobre

la esfera conductora hueca, y c) la carga total sobre las superficies interior y exterior de la esfera conductora hueca.

57. Un cascarón aislante cilíndrico e infinitamente largo, de radio interior a y radio exterior b, tiene una densidad volumétrica de carga uniforme ρ (C/m^3). Una línea de densidad de carga λ (C/m) se sitúa a lo largo del eje del cascarón. Determine la intensidad del campo eléctrico en cualquier punto.

58. Dos láminas de carga no conductoras infinitas son paralelas entre sí como se ve en la figura P24.58. La lámina de la izquierda tiene una densidad de carga superficial uniforme σ y la de la derecha tiene una densidad de carga uniforme $-\sigma$. Calcule el valor del campo eléctrico en puntos a) a la izquierda, b) entre, y c) a la derecha de las dos láminas. (*Sugerencia*: véase el ejemplo 24.8.)

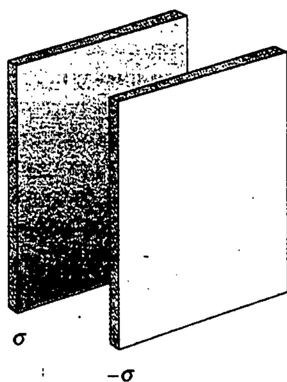


Figura P24.58

WEB 59. Repita los cálculos del problema 58 cuando ambas láminas tienen densidades de carga superficial uniforme *positivas* con valor σ.

60. Una esfera de radio $2a$ está hecha de un material no conductor que tiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ. (Suponga que el material no afecta el campo eléctrico.) Una cavidad esférica de radio a se separa después de la esfera, como se indica en la figura P24.60. Demuestre que el campo eléctrico dentro de la cavidad es uniforme y está dado por $E_x = 0$ y $E_y = \rho a/3\epsilon_0$. (*Sugerencia*: el campo dentro de la cavidad es la superposición del campo debido a la esfera original sin corte, más el campo debido a una esfera del tamaño de la cavidad con una densidad de carga negativa uniforme $-\rho$.)

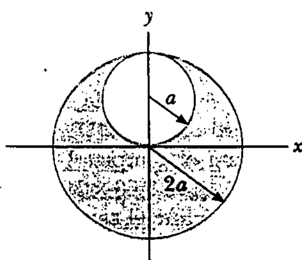


Figura P24.60

61. **Problema de repaso.** Un primer (incorrecto) modelo del átomo de hidrógeno, sugerido por J. J. Thomson, proponía que una nube de carga positiva $+e$ se distribuía uniformemente por todo el volumen de una esfera de radio R, con el electrón como una carga puntual negativa de igual magnitud $-e$ en el centro. a) Utilizando la ley de Gauss, demuestre que el electrón estaría en equilibrio en el centro y, si se desplazara del centro una distancia $r < R$, experimentaría una fuerza restauradora de la forma $F = -Kr$, donde K es una constante. b) Muestre que $K = k_e e^2/R^3$. c) Encuentre una expresión para la frecuencia f de oscilaciones armónicas simples que experimentaría un electrón de masa m_e si se desplazara una corta distancia ($<R$) del centro y se liberara. d) Calcule un valor numérico para R que produciría una frecuencia de vibración del electrón de 2.47×10^{15} Hz, la frecuencia de la luz en la línea más intensa en el espectro del hidrógeno.

62. Una superficie cerrada con dimensiones $a = b = 0.400$ m y $c = 0.600$ m se localiza como se muestra en la figura P24.62. El campo eléctrico por toda la región no es uniforme y está dado por $\mathbf{E} = (3.0 + 2.0x^2)\mathbf{i}$ N/C, donde x está en metros. Calcule el flujo eléctrico neto que sale de la superficie cerrada. ¿Cuál es la carga neta encerrada por la superficie?

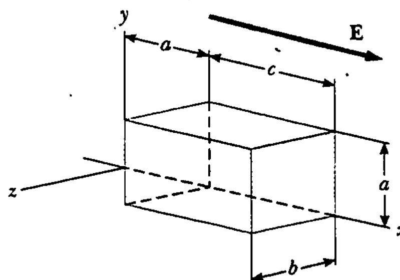


Figura P24.62

63. Una esfera aislante sólida de radio R tiene una densidad de carga no uniforme que varía con r de acuerdo con la expresión $\rho = Ar^2$, donde A es una constante y $r < R$ se mide desde el centro de la esfera. a) Demuestre que el campo eléctrico exterior a la esfera ($r > R$) es $E = AR^5/5\epsilon_0 r^2$. b) Muestre que el campo eléctrico interior ($r < R$) de la esfera es $E = Ar^3/5\epsilon_0$. (*Sugerencia*: advierta que la carga total Q sobre la esfera es igual a la integral de $\rho\, dV$, donde r se extiende de 0 a R; observe también que la carga q dentro de un radio $r < R$ es menor que Q. Para evaluar las integrales advierta que el elemento de volumen dV para un cascarón esférico de radio r y espesor dr es igual a $4\pi r^2\, dr$.)

64. Una carga puntual Q se localiza en el eje de un disco de radio R a una distancia b del plano del disco (Fig. P24.64). Muestre que si un cuarto del flujo eléctrico de la carga pasa por el disco, entonces $R = \sqrt{3}b$.

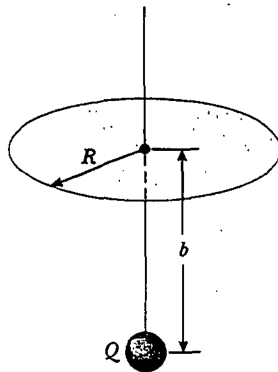


Figura P24.64

65. Una distribución de carga simétrica esféricamente tiene una densidad de carga dada por $\rho = a/r$, donde a es constante. Encuentre el campo eléctrico como función de r. (*Sugerencia*: advierta que la carga en la esfera ~~de radio~~ R es igual a la integral de $\rho\ dV$, donde r se extiende de 0 a R. Para evaluar la integral, note que el elemento de volumen dV para un cascarón esférico de radio r y espesor dr es igual a $4\pi r^2\ dr$.)

66. Un cilindro aislante infinitamente largo de radio R tiene una densidad de carga volumétrica que varía con el radio como

$$\rho = \rho_0\left(a - \frac{r}{b}\right)$$

donde ρ_0, a y b son constantes positivas, y r es la distancia desde el eje del cilindro. Utilice la ley de Gauss para determinar la magnitud del campo eléctrico a distancias radiales a) $r < R$, y b) $r > R$.

67. **Problema de repaso.** Una placa de material aislante (infinita en dos de sus tres dimensiones) tiene una densidad de carga positiva uniforme ρ. Una vista de canto de la placa se muestra en la figura P24.67. a) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico a una distancia x de su centro y en el interior de la placa es $E = \rho x/\epsilon_0$. b) Suponga que un electrón de carga $-e$ y masa m_e se coloca dentro de la placa. Si se suelta desde el reposo a una distancia x del centro, demuestre que el electrón exhibe movimiento armónico simple con una frecuencia descrita por la expresión

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho e}{m_e\epsilon_0}}$$

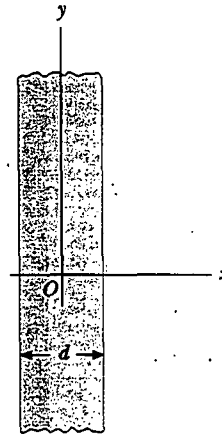


Figura P24.67 Problemas 67 y 68.

68. Una placa de material aislante tiene una densidad de carga positiva no uniforme $\rho = Cx^2$, donde x se mide desde el centro de la placa como se muestra en la figura P24.67, y C es una constante. La placa es infinita en las direcciones y y z. Obtenga expresiones para el campo eléctrico en a) las regiones exteriores y b) la región interior de la placa $(-d/2 < x < d/2)$.

69. a) A partir de que la ley de gravitación de Newton es matemáticamente similar a la ley de Coulomb, demuestre que la ley de Gauss para la gravitación puede escribirse como

$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi G m_{\text{in}}$$

donde m_{in} es la masa neta dentro de la superficie gaussiana, y $\mathbf{g} = \mathbf{F}_g/m$ representa al campo gravitacional en cualquier punto sobre la superficie gaussiana. b) Determine el campo gravitacional en un punto a una distancia r del centro de la Tierra, donde $r < R_E$, suponiendo que la densidad de masa de la Tierra es uniforme.

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

24.1 Cero, porque no existe carga neta dentro de la superficie.

24.2 b) y d). El enunciado a) no necesariamente es cierto porque un igual número de cargas positivas y negativas podría estar presente dentro de la superficie. El enunciado c) no necesariamente es cierto, como se puede ver en la figura 24.8: Existe un campo eléctrico diferente de cero en cualquier lugar sobre la superficie, pero la carga no está encerrada dentro de la superficie; por tanto, el flujo neto es cero.

24.3 Cualquier superficie gaussiana que rodee el sistema encierra la misma cantidad de carga, sin importar cómo se muevan los componentes del sistema. En consecuencia, el flujo a través de la superficie gaussiana sería el mismo que cuando la esfera y el cascarón fuesen concéntricos.



ACERTIJO

Fátima sostiene una esfera cargada que alcanza un potencial eléctrico de casi 100 000 volts. El dispositivo que genera este alto potencial recibe el nombre de *generador Van de Graaff.* ¿Qué causa que el cabello de Fátima se mantenga parado como las espinas de un puerco espín? ¿Por qué ella está segura en esta situación en vista del hecho de que 110 V de un tomacorriente de pared pueden matarla? *(Henry Leap y Jim Lehman)*

capítulo

25 Potencial eléctrico

Líneas generales del capítulo

El concepto de energía potencial se presentó en el capítulo 8 en conexión con fuerzas conservativas como la fuerza de gravedad y la fuerza elástica ejercida por un resorte. Al emplear la ley de la conservación de la energía, con frecuencia se puede evitar trabajar directamente con fuerzas cuando se resuelven diversos problemas en mecánica. En este capítulo se verá que el concepto de energía potencial también es muy valioso en el estudio de la electricidad. Ya que la fuerza electrostática dada por la ley de Coulomb es conservativa, los fenómenos electrostáticos pueden describirse convenientemente en términos de energía potencial eléctrica. Esta idea permite definir una cantidad escalar conocida como *potencial eléctrico.* Porque el potencial eléctrico en cualquier punto en un campo eléctrico es una función escalar, éste se puede emplear para describir los fenómenos electrostáticos de manera más simplificada que si se confiara sólo en los conceptos de campo y fuerzas eléctricas. En capítulos posteriores se verá que el concepto de potencial eléctrico es de gran valor práctico.



25.1 DIFERENCIA DE POTENCIAL Y POTENCIAL ELÉCTRICO

11.8 Cuando una carga de prueba q_0 se coloca en un campo eléctrico **E** creado por algún otro objeto cargado, la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga de prueba es $q_0\mathbf{E}$. (Si el campo es producido por más de un objeto cargado, esta fuerza que actúa sobre la carga de prueba es el vector suma de las fuerzas individuales ejercidas sobre ella por los otros varios objetos cargados.) La fuerza $q_0\mathbf{E}$ es conservativa debido a que las fuerzas individuales descritas por la ley de Coulomb son conservativas. Cuando la carga de prueba se mueve dentro de un campo eléctrico por un agente externo, el trabajo hecho por el campo eléctrico sobre la carga es igual al negativo del trabajo hecho por el agente externo que produce el desplazamiento. Para un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{s}$, el trabajo hecho por el campo eléctrico sobre la carga es $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = q_0\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$. Como esta cantidad de trabajo es realizada por el campo, la energía potencial del sistema campo-carga se reduce en una cantidad $dU = -q_0\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$. Para un desplazamiento finito de la carga entre los puntos A y B, el cambio de energía potencial del sistema $\Delta U = U_B - U_A$ es

$$\Delta U = -q_0\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \qquad \textbf{(25.1)}$$

Cambio en energía potencial

La integración se efectúa a lo largo de la trayectoria que sigue q_0 cuando se mueve de A a B, y la integral recibe el nombre de *integral de trayectoria* o *integral de línea* (los dos términos son sinónimos). Puesto que la fuerza $q_0\mathbf{E}$ es conservativa, **esta integral de línea no depende de la trayectoria seguida de A a B.**

Pregunta sorpresa 25.1

Si la trayectoria entre A y B no hace alguna diferencia en la ecuación 25.1, ¿por qué no sólo se usa la expresión $\Delta U = -q_0Ed$, donde d es la distancia en línea recta entre A y B?

La energía potencial por unidad de carga U/q_0 es independiente del valor de q_0, y tiene un valor único en cada punto en un campo eléctrico. La cantidad U/q_0 recibe el nombre de **potencial eléctrico** (o simplemente el **potencial**) V. De este modo, el potencial eléctrico en cualquier punto en un campo eléctrico es

$$V = \frac{U}{q_0} \qquad \textbf{(25.2)}$$

El hecho de que la energía potencial sea una cantidad escalar significa que el potencial eléctrico es también una cantidad escalar.

La **diferencia de potencial** $\Delta V = V_B - V_A$ entre cualesquiera dos puntos A y B en un campo eléctrico se define como el cambio en la energía potencial del sistema dividida por la carga de prueba q_0:

Diferencia de potencial

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \qquad \textbf{(25.3)}$$

La diferencia de potencial no debe confundirse con la diferencia de energía potencial. La diferencia de potencial es proporcional al cambio de energía potencial, y se ve de la ecuación 25.3 que las dos se relacionan por medio de $\Delta U = q_0 \Delta V$.

El potencial eléctrico es una característica escalar del campo eléctrico, independiente de las cargas que pueden ponerse en el campo. Sin embargo, cuando se habla de energía potencial, se está haciendo referencia al sistema carga-campo. Ya que por lo general se está interesado en conocer el potencial eléctrico en la posición de una carga, así como la energía potencial causada por la interacción de la carga con el campo, se sigue la convención común de hablar de la energía potencial como si perteneciera a la carga.

Puesto que el cambio en la energía potencial de una carga es el negativo del trabajo realizado por el campo eléctrico sobre la carga (como se hace evidente en la ecuación 25.1), la diferencia de potencial ΔV entre los puntos A y B es igual al trabajo por unidad de carga que un agente externo debe efectuar para mover una carga de prueba de A a B sin un cambio en la energía cinética de la carga de prueba.

Lo mismo que con la energía potencial, sólo son significativas las *diferencias* en el potencial eléctrico. Sin embargo, para evitar tener que trabajar con diferencias de potencial, con frecuencia se puede tomar el valor del potencial eléctrico como cero en algún punto conveniente en un campo eléctrico. Esto es lo que se hace aquí: fijar de manera arbitraria el potencial eléctrico igual a cero en un punto que está infinitamente lejos de las cargas que producen el campo. Una vez hecha esta elección, se puede afirmar que el **potencial eléctrico en un punto arbitrario en un campo eléctrico es igual al trabajo requerido por unidad de carga para llevar una carga de prueba positiva desde el infinito hasta ese punto.** Así, si se considera el punto A en el infinito en la ecuación 25.3, entonces el potencial eléctrico en cualquier punto P es

$$V_P = -\int_\infty^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \qquad \textbf{(25.4)}$$

En realidad, V_P representa la diferencia de potencial ΔV entre el punto P y un punto en el infinito. (La ecuación 25.4 es un caso especial de la ecuación 25.3.)

Puesto que el potencial eléctrico es una medida de la energía potencial por unidad de carga, la unidad del SI tanto del potencial eléctrico como de la diferencia de potencial es joules por coulomb, definido como un **volt** (V):

Definición de volt

$$1\text{ V} \equiv 1\frac{\text{J}}{\text{C}}$$

Es decir, debe efectuarse 1 J de trabajo para mover una carga de 1 C a través de una diferencia de potencial de 1 V.

La ecuación 25.3 muestra que la diferencia de potencial también tiene unidades de campo eléctrico por distancia. A partir de esto se deduce que la unidad del SI de campo eléctrico (N/C) también puede expresarse como volts por metro:

$$1\frac{\text{N}}{\text{C}} = 1\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Una unidad de energía utilizada comúnmente en la física atómica y nuclear es el **electrón volt** (eV), el cual se define como **la energía que un electrón (o protón) gana o pierde al moverse a través de una diferencia de potencial de 1 V.** Puesto que 1 V = 1 J/C, y puesto que la carga fundamental es de aproximadamente 1.60×10^{-19} C, el electrón volt se relaciona con el joule de la manera siguiente:

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J} \qquad \textbf{(25.5)}$$

El electrón volt

Por ejemplo, un electrón en el haz de un tubo de imagen de televisión típico puede tener una rapidez de 3.5×10^7 m/s. Esto corresponde a una energía cinética de 5.6×10^{-16} J, que es equivalente a 3.5×10^3 eV. Un electrón con estas características tiene que acelerarse desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 3.5 kV para alcanzar esta rapidez.



25.2 DIFERENCIAS DE POTENCIAL EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

Las ecuaciones 25.1 y 25.3 son válidas en todos los campos eléctricos, sin importar si son uniformes o variables, aunque pueden ser simplificadas para un campo uniforme. En primer lugar, considere un campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo del eje y negativo, como se muestra en la figura 25.1a. Calcule la diferencia de potencial entre dos puntos A y B, separados por una distancia d, donde d se mide paralela a las líneas de campo. La ecuación 25.3 produce

$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_A^B E \cos 0° ds = -\int_A^B E ds$$

Puesto que E es constante, puede eliminarse del signo integral, lo que produce

$$\Delta V = -E \int_A^B ds = -Ed \qquad \textbf{(25.6)}$$

Diferencia de potencial en un campo eléctrico uniforme

El signo menos indica que el punto B está a un potencial eléctrico menor que el punto A; es decir, $V_B < V_A$. **Las líneas de campo eléctrico siempre apuntan en la dirección de potencial eléctrico decreciente,** como se muestra en la figura 25.1a.

Suponga ahora que una carga de prueba q_0 se mueve de A a B. El cambio en su energía potencial puede encontrarse de las ecuaciones 25.3 y 25.6:

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 Ed \qquad \textbf{(25.7)}$$

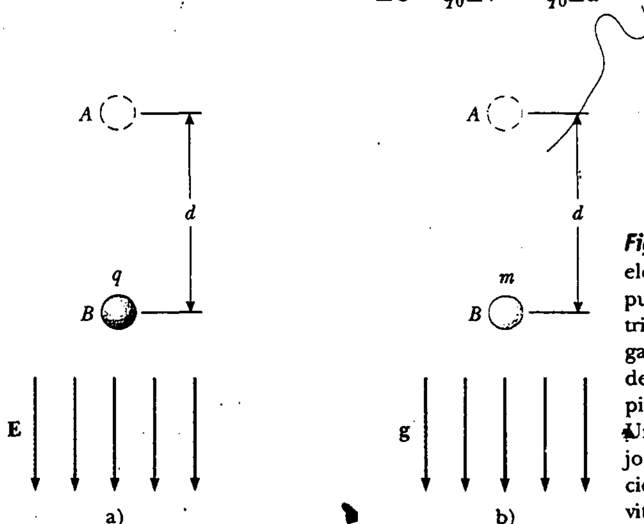


Figura 25.1 a) Cuando el campo eléctrico **E** se dirige hacia abajo, el punto B está en un potencial eléctrico menor que el punto A. Una carga de prueba positiva que se mueve desde el punto A hasta el punto B pierde energía potencial eléctrica. b) Una masa m que se mueve hacia abajo en la dirección del campo gravitacional **g** pierde energía potencial gravitacional.

Experimento sorpresa

Se requiere un campo eléctrico de casi 30 000 V/cm para provocar una chispa en aire seco. Camine arrastrando los pies sobre una alfombra y diríjase hacia la cerradura de una puerta. Mediante la estimación de la longitud de la chispa determine la diferencia de potencial eléctrico entre su dedo y la cerradura después de arrastrar sus pies pero antes de tocar la manija. (Si intenta hacer esto en un día muy húmedo no funcionará. ¿A qué cree que se deba esto?)

A partir de este resultado se ve que si q_0 es positiva, entonces ΔU es negativa. Se concluye que **una carga positiva pierde energía potencial eléctrica cuando ésta se mueve en la dirección del campo eléctrico.** Esto significa que un campo eléctrico realiza trabajo sobre una carga positiva cuando la carga se mueve en la dirección del campo eléctrico. (Esto es análogo al trabajo efectuado por el campo gravitacional sobre una masa que cae, como se muestra en la figura 25.1b.) Si una carga de prueba positiva se libera desde el reposo en este campo eléctrico, experimentará una fuerza eléctrica $q_0\mathbf{E}$ en la dirección de $\mathbf{E}$ (hacia abajo en la figura 25.1a). Por tanto, se acelera hacia abajo, ganando energía cinética. **Conforme la partícula gana energía cinética, pierde una cantidad igual de energía potencial.**

Si q_0 es negativa, entonces ΔU es positivo y la situación se invierte: **Una carga negativa gana energía potencial eléctrica cuando se mueve en la dirección del campo eléctrico.** Si una carga negativa se libera desde el reposo en el campo **E**, ésta se acelera en una dirección opuesta a la dirección de campo.

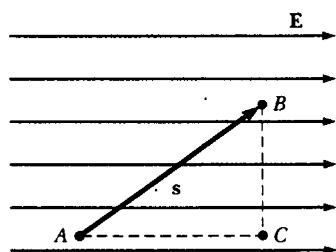


Figura 25.2 Campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo del eje x positivo. El punto B está a un potencial eléctrico menor que el punto A. Los puntos B y C están al *mismo* potencial eléctrico.

Considere ahora el caso más general de una partícula cargada que se mueve libre entre dos puntos cualesquiera en un campo eléctrico uniforme dirigido a lo largo del eje x, como se muestra en la figura 25.2. (En esta situación la carga no se mueve por un agente externo, como antes.) Si **s** representa el vector desplazamiento entre los puntos A y B, la ecuación 25.3 produce

$$\Delta V = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\mathbf{E}\cdot\int_A^B d\mathbf{s} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{s} \quad \textbf{(25.8)}$$

donde de nuevo se está en posibilidad de sacar **E** de la integral, puesto que es constante. El cambio de energía potencial de la carga es

$$\Delta U = q_0\Delta V = -q_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{s} \quad \textbf{(25.9)}$$

11.9 Por último, se concluye a partir de la ecuación 25.8 que todos los puntos en un plano perpendicular a un campo eléctrico uniforme están al mismo potencial eléctrico. Esto puede verse en la figura 25.2, donde la diferencia de potencial $V_B - V_A$ es igual a la diferencia de potencial $V_C - V_A$. (Pruebe esto por usted mismo trabajando sobre el producto punto $\mathbf{E}\cdot\mathbf{s}$ para $\mathbf{s}_{A\rightarrow B}$, donde el ángulo θ entre **E** y **s** es arbitrario, como se muestra en la figura 25.2, y el producto punto para $\mathbf{s}_{A\rightarrow C}$, donde $\theta = 0$.) Por tanto, $V_B = V_C$. **El nombre superficie equipotencial se da a cualquier superficie compuesta de una distribución continua de puntos que tienen el mismo potencial eléctrico.**

Una superficie equipotencial

Advierta que ya que $\Delta U = q_0\Delta V$, no se realiza trabajo al mover una carga de prueba entre dos puntos cualesquiera en una superficie equipotencial. Las superficies equipotenciales de un campo eléctrico uniforme se componen de una familia de planos que en su totalidad son perpendiculares al plano. Las superficies equipotenciales para campos con otras simetrías se describen en secciones siguientes.

Pregunta sorpresa 25.2

Los puntos marcados en la figura 25.3 están sobre una serie de superficies equipotenciales asociadas con un campo eléctrico. Ordene (de mayor a menor) el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una partícula cargada positivamente que se mueve de A a B, de B a C, de C a D, de D a E.

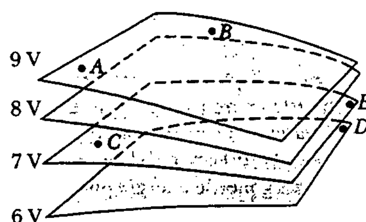


Figura 25.3 Cuatro superficies equipotenciales.

EJEMPLO 25.1 El campo eléctrico entre dos placas paralelas de carga opuesta

Una batería produce una diferencia de potencial especificada entre los conductores unidos a las terminales de la batería. Una batería de 12 V se conecta entre dos placas paralelas, como se ve en la figura 25.4. La separación entre las placas es $d = 0.30$ cm, y se supone uniforme el campo eléctrico entre las placas.

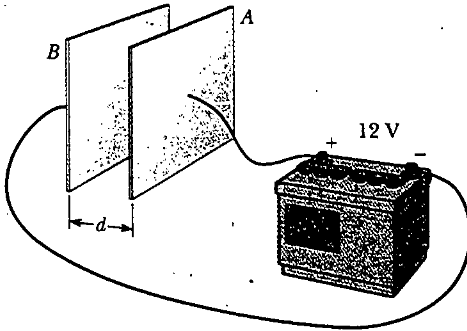


Figura 25.4 Una batería de 12 V conectada a dos placas paralelas. El campo eléctrico entre las placas tiene una magnitud dada por la diferencia de potencial ΔV dividida por la separación de las placas d.

(Esta suposición es razonable si la separación de las placas es pequeña comparada con el tamaño de las placas y si no se consideran puntos cerca de los bordes de las placas.) Determine la magnitud del campo eléctrico entre las placas.

Solución El campo eléctrico está dirigido de la placa positiva (A) hacia la placa negativa (B), y la placa positiva está a un potencial eléctrico mayor que la placa negativa. La diferencia de potencial entre las placas debe ser igual a la diferencia de potencial entre las terminales de la batería. Esto puede entenderse observando que todos los puntos en un conductor en equilibrio están al mismo potencial eléctrico;[1] no hay diferencia de potencial entre una terminal y cualquier parte de la placa a la que está conectada. Por tanto, la magnitud del campo eléctrico entre las placas es, de la ecuación 25.6,

$$E = \frac{|V_B - V_A|}{d} = \frac{12\text{ V}}{0.30 \times 10^{-2}\text{ m}} = 4.0 \times 10^3\text{ V/m}$$

Esta configuración, la cual se muestra en la figura 25.4 y se conoce como *capacitor de placas paralelas*, se examina con mayor detalle en el capítulo 26.

EJEMPLO 25.2 Movimiento de un protón en un campo eléctrico uniforme

Un protón se suelta desde el reposo en un campo eléctrico uniforme que tiene una magnitud de 8.0×10^4 V/m y está dirigido a lo largo del eje x positivo (Fig. 25.5). El protón se desplaza 0.50 m en la dirección de **E**. a) Encuentre el cambio en potencial eléctrico entre los puntos A y B.

Solución Ya que el protón (el cual, como usted recordará, porta una carga positiva) se mueve en la dirección del campo, se espera que se mueva a una posición de menor potencial eléctrico. De acuerdo con la ecuación 25.6 se tiene

$$\Delta V = -Ed = -(8.0 \times 10^4\text{ V/m})(0.50\text{ m})$$

$$= -4.0 \times 10^4\text{ V}$$

b) Determine el cambio de energía potencial del protón para este desplazamiento.

Solución

$$\Delta U = q_0 \Delta V = e\Delta V$$

$$= (1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(-4.0 \times 10^4\text{ V})$$

$$= -6.4 \times 10^{-15}\text{ J}$$

El signo negativo significa que la energía potencial del protón disminuye cuando éste se mueve en dirección del campo eléctrico. Cuando el protón acelera en la dirección del campo, gana energía cinética y al mismo tiempo pierde energía potencial eléctrica (porque la energía se conserva).

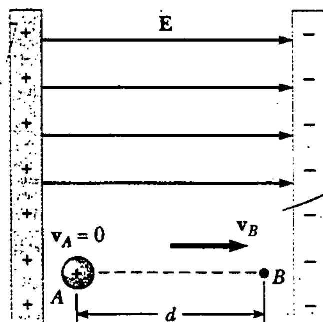


Figura 25.5 Un protón se acelera desde A hacia B en la dirección del campo eléctrico.

Ejercicio Use el concepto de conservación de la energía para determinar la rapidez del protón en el punto B.

Respuesta 2.77×10^6 m/s

[1] El campo eléctrico se desvanece dentro de un conductor en equilibrio electrostático; por tanto, la integral de trayectoria $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ entre dos puntos cualesquiera dentro del conductor debe ser cero. En la sección 25.6 se proporciona un análisis más amplio de este punto.



POTENCIAL ELÉCTRICO Y ENERGÍA POTENCIAL DEBIDOS A CARGAS PUNTUALES

Considere una carga puntual positiva aislada q. Recuerde que este tipo de carga produce un campo eléctrico que apunta radialmente hacia afuera desde la carga. Para determinar el potencial eléctrico en un punto localizado a una distancia r de la carga, se comienza con la expresión general para la diferencia de potencial:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

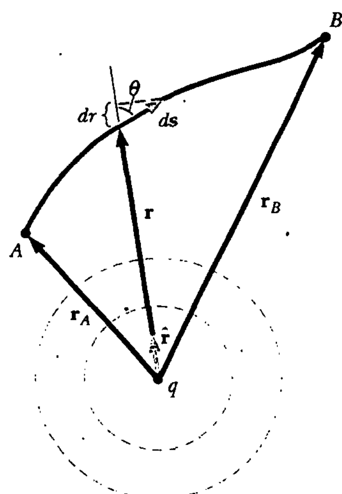


Figura 25.6 La diferencia de potencial entre los puntos A y B debida a una carga puntual q depende *sólo* de las coordenadas radiales inicial y final, r_A y r_B. Los dos círculos punteados representan cortes transversales de superficies equipotenciales esféricas.

donde A y B son los dos puntos arbitrarios mostrados en la figura 25.6. En cualquier punto del campo, el campo eléctrico debido a la carga puntual es $\mathbf{E} = k_e q\hat{\mathbf{r}} / r^2$ (Ec. 23.4), donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario dirigido desde la carga al punto del campo. La cantidad $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ puede expresarse como

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s}$$

Puesto que la magnitud de $\hat{\mathbf{r}}$ es 1, el producto punto $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = ds \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre $\hat{\mathbf{r}}$ y $d\mathbf{s}$. Asimismo, $ds \cos \theta$ es la proyección de $d\mathbf{s}$ sobre $\mathbf{r}$; en consecuencia, $ds \cos \theta = dr$. Esto significa que cualquier desplazamiento $d\mathbf{s}$ a lo largo de la trayectoria desde el punto A hasta el punto B produce un cambio dr en la magnitud de $\mathbf{r}$, la distancia radial a la carga que crea el campo. Con estas sustituciones, se encuentra que $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (k_e q/r^2) dr$, de modo que la expresión para la diferencia de potencial se vuelve

$$V_B - V_A = -\int E_r dr = -k_e q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{k_e q}{r}\Bigg]_{r_A}^{r_B}$$

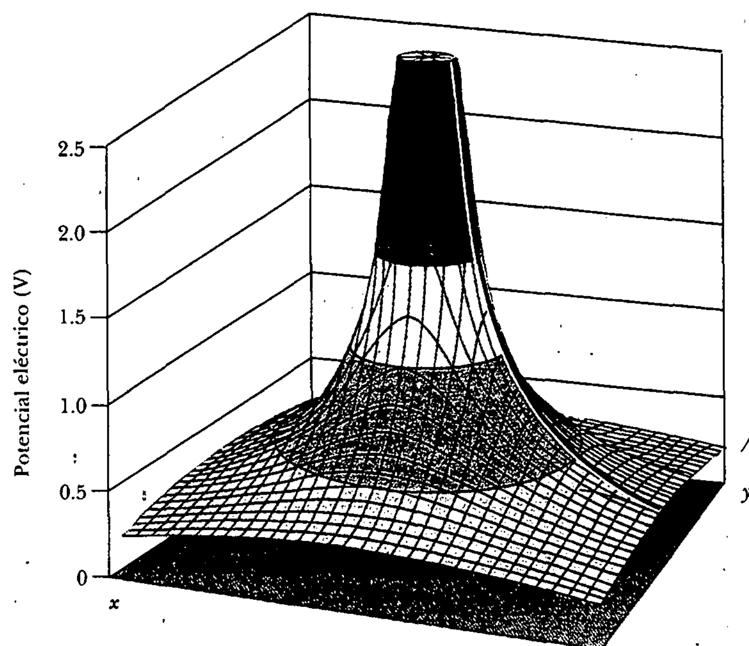
$$V_B - V_A = k_e q\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \qquad \textbf{(25.10)}$$

La integral de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ es *independiente* de la trayectoria entre los puntos A y B —como debe ser, porque el campo eléctrico de una carga puntual es conservativo—. Además, la ecuación 25.10 expresa el importante resultado de que la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera A y B en un campo creado por una carga puntual depende sólo de las coordenadas radiales r_A y r_B. Es común elegir la referencia de potencial eléctrico igual a cero en $r_A = \infty$. Con esta elección el potencial eléctrico debido a una carga puntual a cualquier distancia r de la carga es

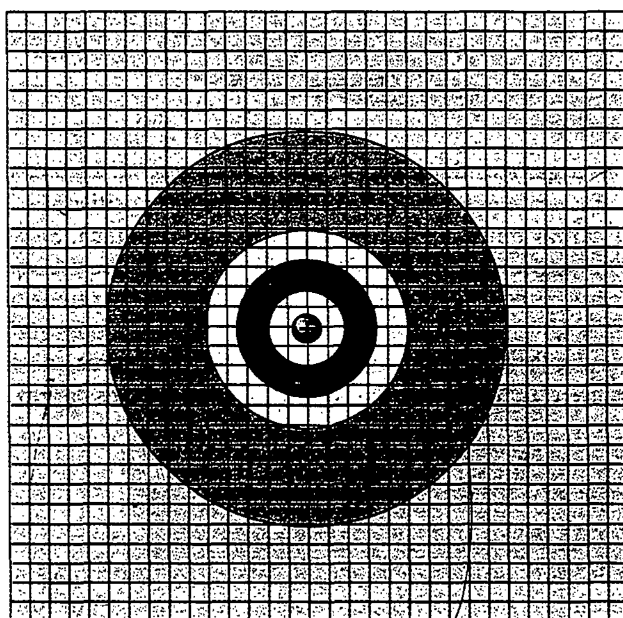
Potencial eléctrico creado por una carga puntual

$$V = k_e \frac{q}{r} \qquad \textbf{(25.11)}$$

El potencial eléctrico se grafica en la figura 25.7 como una función de r, la distancia radial desde una carga positiva en el plano xy. Considere la siguiente analogía con el potencial gravitacional: Imagínese intentando hacer rodar una canica hacia la cima de un promontorio como el mostrado en la figura 25.7a. La fuerza gravitacional experimentada por la canica es análoga a la fuerza repulsiva experimentada por un objeto cargado positivamente conforme se acerca otro objeto cargado en la misma forma. De manera similar, la gráfica del potencial eléctrico de la región que rodea una carga negativa es similar a un "hoyo" con respecto a cualesquiera objetos con carga positiva que se acerquen. Un objeto cargado debe estar infinitamente distante de otra carga antes de que la superficie se "aplane" y tenga un potencial eléctrico cero.



a)



b)

Figura 25.7 a) El potencial eléctrico en el plano alrededor de una carga positiva individual se grafica sobre el eje vertical. (La función de potencial eléctrico para una carga negativa se vería como un hoyo en lugar de un promontorio.) La línea roja muestra la naturaleza $1/r$ del potencial eléctrico, como está dado por la ecuación 25.11. b) Vista inferior desde el eje vertical de la gráfica en la parte a), mostrando círculos concéntricos donde el potencial eléctrico es constante. Estos círculos son secciones transversales de esferas equipotenciales que tienen la carga en el centro.

Pregunta sorpresa 25.3

Un globo esférico contiene un objeto con carga positiva en su centro. Conforme el globo se infla a un volumen mayor mientras el objeto cargado permanece en su centro, ¿el potencial eléctrico en la superficie del globo aumenta, disminuye o permanece igual? ¿Qué hay acerca de la magnitud del campo eléctrico? ¿Del flujo eléctrico?

El potencial eléctrico de dos o más cargas puntuales se obtiene aplicando el principio de superposición. Es decir, el potencial eléctrico total en algún punto P debido a varias cargas puntuales es la suma de los potenciales debidos a las cargas individuales. Para un grupo de cargas puntuales se puede escribir el potencial eléctrico total en P en la forma

Potencial eléctrico debido a varias cargas puntuales

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad \textbf{(25.12)}$$

donde el potencial se considera otra vez igual a cero en el infinito y r_i es la distancia del punto P a la carga q_i. Advierta que la suma en la ecuación 25.12 es una suma algebraica de escalares en lugar de una suma vectorial (la cual se utiliza para calcular el campo eléctrico de un grupo de cargas). Así pues, es mucho más sencillo evaluar V que evaluar **E**. El potencial eléctrico alrededor de un dipolo se ilustra en la figura 25.8.

Considere ahora la energía potencial de un sistema de dos partículas cargadas. Si V_1 es el potencial eléctrico en el punto P debido a la carga q_1, entonces el trabajo que un agente externo debe realizar para llevar una segunda carga q_2 del infinito al punto P sin aceleración es q_2V_1. Por definición, este trabajo es igual a la energía potencial U del sistema de dos partículas cuando éstas están separadas por una distancia r_{12} (Fig. 25.9). En consecuencia, se puede expresar la energía potencial como[2]

Energía potencial eléctrica debida a dos cargas

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}} \quad \textbf{(25.13)}$$

Observe que si las cargas son del mismo signo, U es positiva. Esto es consistente con el hecho de que un agente externo debe efectuar trabajo positivo sobre el sistema para acercar las dos cargas entre sí (porque las cargas se repelen). Si las cargas son de signo opuesto, U es negativa; esto significa que debe realizarse trabajo negativo contra la fuerza atractiva entre las cargas distintas para que se las pueda acercar entre sí.

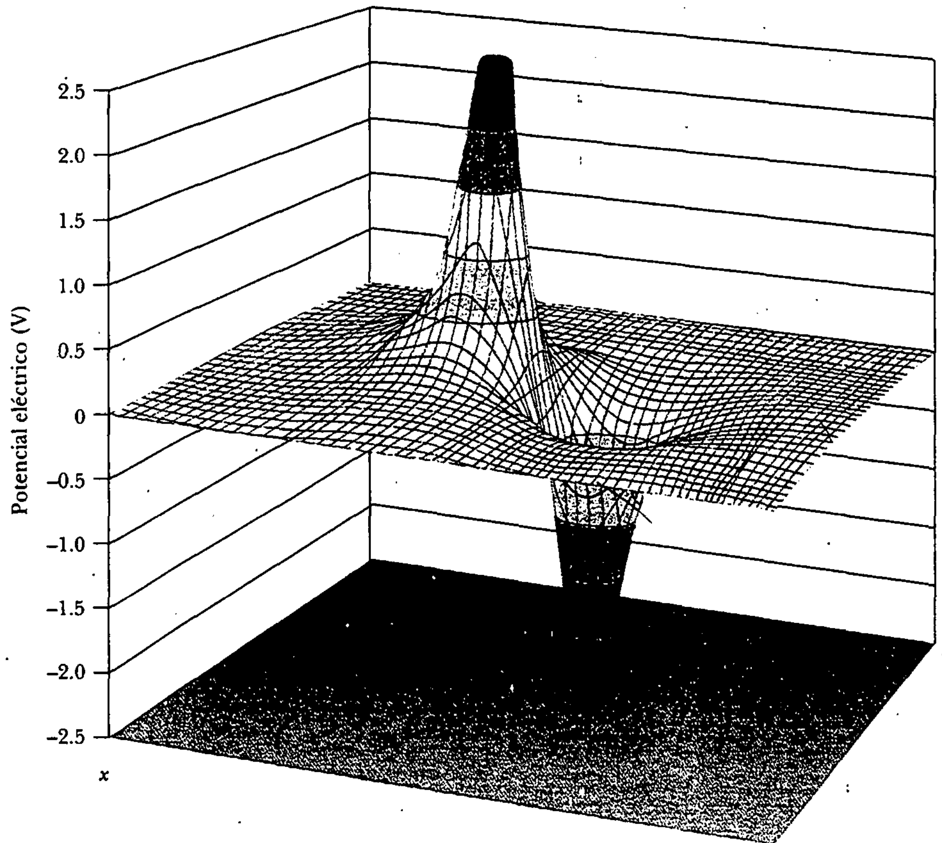
Si en el sistema hay más de dos partículas cargadas, la energía potencial total puede obtenerse calculando U para cada par de cargas y sumando los términos algebraicamente. Por ejemplo, la energía potencial total de tres cargas mostrada en la figura 25.10 es

$$U = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \quad \textbf{(25.14)}$$

Físicamente esto se puede interpretar como sigue. Imagine que q_1 está fija en la posición indicada en la figura 25.10, pero que q_2 y q_3 están en el infinito. El trabajo que un agente externo debe efectuar para llevar q_2 desde el infinito hasta su posición cerca de q_1 es $k_e q_1 q_2/r_{12}$, que es el primer término en la ecuación 25.14. Los últimos dos términos representan el trabajo requerido para llevar q_3 del infinito hasta su posición cerca de q_1 y de q_2. (El resultado es independiente del orden en el cual se transportan las cargas.)

---

[2] La expresión para la energía potencial eléctrica de un sistema constituido por dos cargas puntuales, ecuación 25.13, es de la *misma* forma que la ecuación para la energía potencial gravitacional de un sistema integrado con dos masas puntuales, Gm_1m_2/r (véase el capítulo 14). La similitud no es sorprendente en vista de que ambas se deducen de una ley de fuerza del cuadrado inverso.



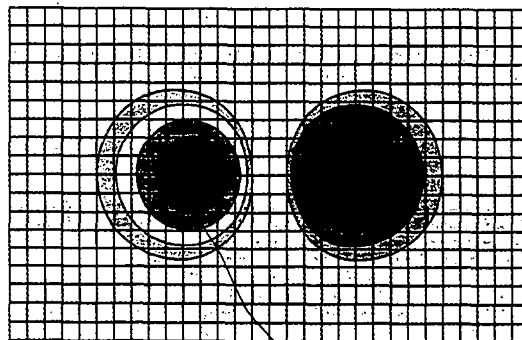


Figura 25.8 a) Potencial eléctrico en el plano que contiene un dipolo. b) Vista superior de la función graficada en la parte a).

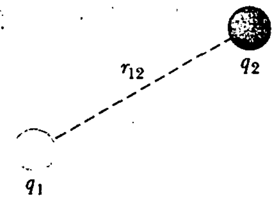


Figura 25.9 Si dos cargas puntuales están separadas por una distancia r_{12}, la energía potencial del par de cargas está dada por $k_e q_1 q_2 / r_{12}$.

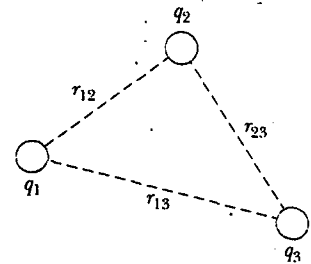


Figura 25.10 Tres cargas puntuales están fijas en las posiciones mostradas. La energía potencial de este sistema de cargas está dada por la ecuación 25.14.

EJEMPLO 25.3 El potencial eléctrico debido a dos cargas puntuales

Una carga $q_1 = 2.00\ \mu C$ se localiza en el origen, y una carga $q_2 = -6.00\ \mu C$ se encuentra en (0, 3.00) m, como se muestra en la figura 25.11a. a) Encuentre el potencial eléctrico total debido a estas cargas en el punto *P*, cuyas coordenadas son (4.00, 0) m.

Solución Para dos cargas, la suma en la ecuación 25.12 produce

$$V_P = k_e\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$

$$= 8.99 \times 10^9\ \frac{N \cdot m^2}{C^2}\left(\frac{2.00 \times 10^{-6} C}{4.00\ m} + \frac{-6.00 \times 10^{-6} C}{5.00\ m}\right)$$

$$= -6.29 \times 10^3 V$$

b) Encuentre el cambio en energía potencial de una carga de 3.00 μC que se mueve desde el infinito hasta el punto *P* (Fig. 25.11b).

Solución Cuando la carga está en el infinito, $U_i = 0$, y cuando la carga está en *P*, $U_f = q_3 V_P$; por tanto,

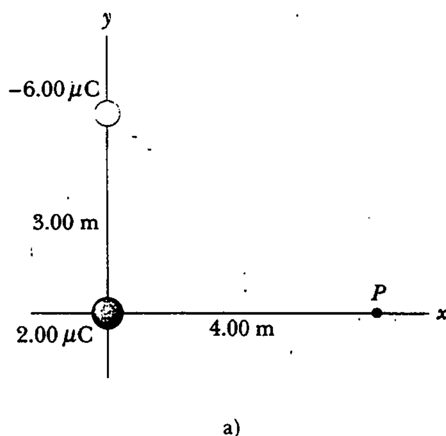
$$\Delta U = q_3 V_P - 0 = (3.00 \times 10^{-6} C)\ (-6.29 \times 10^3\ V)$$

$$= -18.9 \times 10^{-3}\ J$$

Por consiguiente, puesto que $W = -\Delta U$, tendría que efectuarse trabajo positivo por un agente externo para quitar la carga desde el punto *P* de regreso al infinito.

Ejercicio Encuentre la energía potencial total del sistema mostrado en la figura 25.11b.

Respuesta -5.48×10^{-2} J



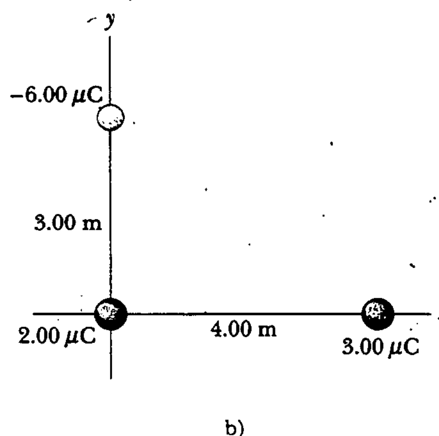


Figura 25.11 a) El potencial eléctrico en *P* debido a las dos cargas es la suma algebraica de los potenciales debidos a las cargas individuales. b) ¿Cuál es la energía potencial del sistema de tres cargas?

25.4 OBTENCIÓN DEL VALOR DEL CAMPO ELÉCTRICO A PARTIR DEL POTENCIAL ELÉCTRICO

En la ecuación 25.3 se indicó cómo se relacionan el campo eléctrico **E** y el potencial eléctrico *V*. Ahora se mostrará cómo calcular el valor del campo eléctrico si se conoce el potencial eléctrico en una cierta región.

A partir de la ecuación 25.3 se puede expresar la diferencia de potencial *dV* entre dos puntos separados una distancia *ds* como

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \qquad \textbf{(25.15)}$$

Si el campo eléctrico tiene sólo una componente E_x, entonces $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_x dx$. Por tanto, la ecuación 25.15 se transforma en $dV = -E_x dx$, o

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \qquad \textbf{(25.16)}$$

Es decir, la magnitud del campo eléctrico en la dirección de alguna coordenada es igual al negativo de la derivada del potencial eléctrico en relación con dicha coordenada. Recuerde del análisis que siguió a la ecuación 25.8 que el potencial eléctrico no cambia para cualquier desplazamiento perpendicular al campo eléctrico. Esto es consistente con la noción, desarrollada en la sección 25.2, de que las superficies equipotenciales son perpendiculares al campo, como se puede ver en la figura 25.12. Una pequeña carga positiva colocada en reposo sobre una línea de campo eléctrico comienza a moverse a lo largo de la dirección de **E**, porque esa es la dirección de la fuerza ejercida sobre la carga por la distribución de carga que crea el campo eléctrico (y, por ende, es la dirección de **a**). Puesto que la carga parte con velocidad cero, se mueve en la dirección del cambio en velocidad —es decir, en la dirección de **a**. En las figuras 25.12a y 25.12b la carga se mueve en una línea recta porque su vector aceleración siempre es paralelo a su vector velocidad. La magnitud de **v** aumenta, pero su dirección no cambia. La situación es diferente en la figura 25.12c. Una carga positiva colocada en algún punto cerca del dipolo primero se mueve en una dirección paralela a **E** en dicho punto. Sin embargo, como la dirección del campo eléctrico es diferente en distintas ubicaciones, la fuerza que actúa sobre la carga cambia de dirección, y **a** ya no es paralela a lo largo de **v**. Esto provoca que la carga en movimiento cambie de dirección y rapidez, pero no necesariamente sigue las líneas de campo eléctrico. Recuerde que no es el vector velocidad sino el vector aceleración el que es proporcional a la fuerza.

Si la distribución de carga que crea un campo eléctrico tiene simetría esférica, donde la densidad de carga volumétrica depende sólo de la distancia radial r, entonces el campo eléctrico es radial. En este caso, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_r dr$, de modo que dV se puede expresar en la forma $dV = -E_r dr$. Por tanto,

$$E_r = -\frac{dV}{dr} \quad \textbf{(25.17)}$$

Por ejemplo, el potencial eléctrico de una carga puntual es $V = k_e q/r$. Puesto que V es una función sólo de r, la función potencial tiene simetría esférica. Al aplicar la ecuación 25.17 se encuentra que el campo eléctrico debido a una carga puntual es $E_r = k_e q/r^2$, un resultado familiar. Advierta que el potencial cambia únicamente en

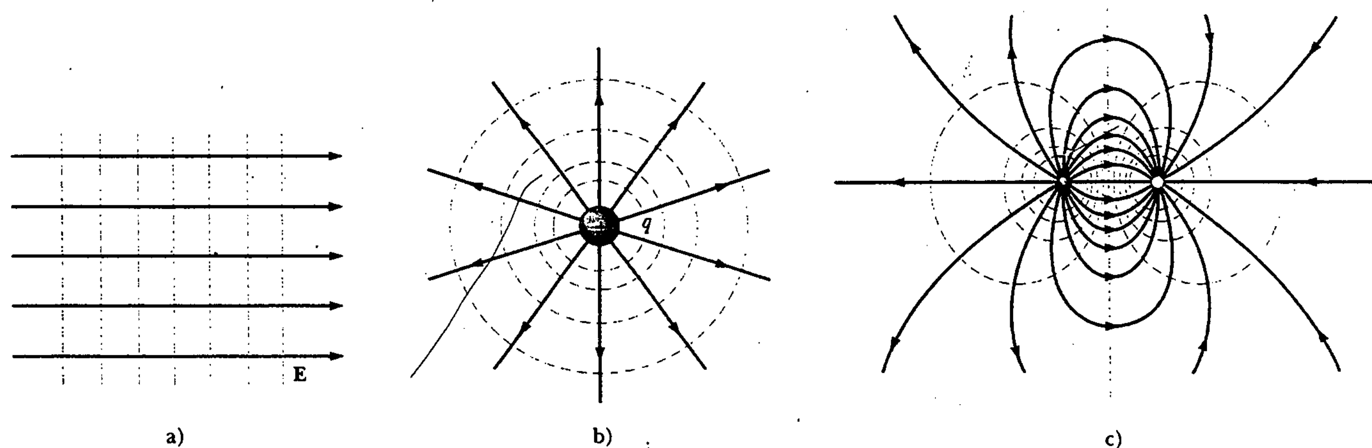


Figura 25.12 Superficies equipotenciales (líneas punteadas azules) y líneas de campo eléctrico (líneas rojas) para a) un campo eléctrico uniforme producido por una lámina infinita de carga, b) una carga puntual, y c) un dipolo eléctrico. En todos los casos las superficies equipotenciales son *perpendiculares* a las líneas de campo eléctrico en cada punto. Compare estos dibujos con las figuras 25.2, 25.7b y 25.8b.

Las superficies equipotenciales siempre son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico

la dirección radial, no en cualquier dirección perpendicular a r. De modo que V (al igual que E_r) es una función sólo de r. De nuevo, esto es consistente con la idea de que **las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo.** En este caso las superficies equipotenciales son una familia de esferas concéntricas con la distribución de carga simétrica esféricamente (Fig. 25.12b).

Las superficies equipotenciales para un dipolo eléctrico se dibujan en la figura 25.12c. Cuando una carga de prueba se somete a un desplazamiento ds a lo largo de una superficie equipotencial, entonces $dV = 0$, puesto que el potencial es constante a lo largo de una superficie equipotencial. A partir de la ecuación 25.15, entonces, $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$; por tanto, $\mathbf{E}$ debe ser perpendicular al desplazamiento a lo largo de la superficie equipotencial. Esto muestra que las superficies equipotenciales *siempre* deben ser *perpendiculares* a las líneas de campo eléctrico.

En general, el potencial eléctrico es una función de las tres coordenadas espaciales. Si $V(r)$ está dada en términos de coordenadas cartesianas, las componentes del campo eléctrico E_x, E_y y E_z pueden encontrarse fácilmente a partir de $V(x, y, z)$ como las siguientes derivadas parciales[3]

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Por ejemplo, si $V = 3x^2y + y^2 + yz$, entonces

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y + y^2 + yz) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y) = 3y\frac{d}{dx}(x^2) = 6xy$$

EJEMPLO 25.4 El potencial eléctrico debido a un dipolo

Un dipolo eléctrico se compone de dos cargas de igual magnitud y signo opuesto, separadas por una distancia $2a$, como se ve en la figura 25.13. El dipolo está a lo largo del eje x y centrado en el origen. a) Calcule el potencial eléctrico en el punto P.

Solución Para el punto P en la figura 25.13,

$$V = k_e\sum\frac{q_i}{r_i} = k_e\left(\frac{q}{x-a} - \frac{q}{x+a}\right) = \frac{2k_eqa}{x^2 - a^2}$$

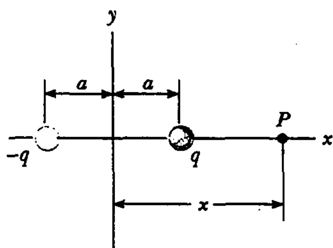


Figura 25.13 Un dipolo eléctrico ubicado sobre el eje x.

(¿Cómo cambiaría este resultado si el punto P estuviese localizado a la izquierda de la carga negativa?)

b) Calcule V y E_x en un punto alejado del dipolo.

Solución Si el punto P está lejos del dipolo, de modo que $x \gg a$, entonces a^2 puede ignorarse en el término $x^2 - a^2$ y V se convierte en

$$V \approx \frac{2k_eqa}{x^2} \qquad (x \gg a)$$

Con este resultado y con la ecuación 25.16 se puede calcular el campo eléctrico en un punto alejado del dipolo:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{4k_eqa}{x^3} \qquad (x \gg a)$$

c) Calcule V y E_x si el punto P está ubicado en cualquier parte entre las dos cargas.

Solución

$$V = k_e\sum\frac{q_i}{r_i} = k_e\left(\frac{q}{a-x} - \frac{q}{x+a}\right) = -\frac{2k_eqx}{x^2 - a^2}$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{2k_eqx}{x^2 - a^2}\right) = 2k_eq\left(\frac{-x^2 - a^2}{(x^2 - a^2)^2}\right)$$

[3] En notación vectorial $\mathbf{E}$ a menudo se escribe

$$\mathbf{E} = \nabla V = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)V$$

donde ∇ recibe el nombre de *operador gradiente.*

Se puede verificar este resultado considerando la situación en el centro del dipolo, donde $x = 0$, $V = 0$ y $E_x = -2k_eq/a^2$.

Ejercicio Compruebe el campo eléctrico resultante en la parte c) calculando la suma de los vectores individuales de campo eléctrico en el origen, debidos a las dos cargas.

25.5 POTENCIAL ELÉCTRICO DEBIDO A DISTRIBUCIONES DE CARGA CONTINUAS

El potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua puede calcularse de dos maneras. Si conoce la distribución de carga puede empezar con la ecuación 25.11 para el potencial eléctrico de una carga puntual. A continuación se considera el potencial debido a un pequeño elemento de carga dq, tratando a este elemento como una carga puntual (Fig. 25.14). El potencial eléctrico dV en algún punto P debido al elemento de carga dq es

$$dV = k_e \frac{dq}{r} \qquad \textbf{(25.18)}$$

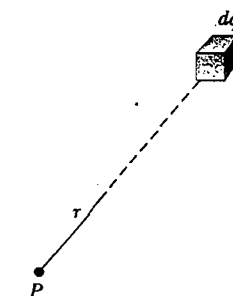


Figura 25.14 El potencial eléctrico en el punto P debido a una distribución de carga continua se puede calcular al dividir el cuerpo cargado en segmentos de carga dq y sumando las contribuciones de potencial eléctrico sobre todos los segmentos.

donde r es la distancia desde el elemento de carga al punto P. Para obtener el potencial total en P se integra la ecuación 25.18 con el fin de incluir las contribuciones de todos los elementos de la distribución de carga. Puesto que cada elemento está, en general, a una distancia diferente de P, y como k_e es constante, puede expresar V como

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} \qquad \textbf{(25.19)}$$

En efecto, se ha sustituido la suma en la ecuación 25.12 por una integral. Observe que esta expresión para V emplea una referencia particular: El potencial eléctrico se considera igual a cero cuando P está infinitamente lejos de la distribución de carga.

Si el campo eléctrico ya se conoce a partir de otras consideraciones, como la ley de Gauss, se puede calcular el potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua empleando la ecuación 25.3. Si la distribución de carga es altamente simétrica, evalúe primero **E** en cualquier punto usando la ley de Gauss y después sustituya el valor obtenido en la ecuación 25.3 para determinar la diferencia de potencial ΔV entre dos puntos cualesquiera. Después elija el potencial eléctrico V igual a cero en algún punto conveniente.

Ambos métodos se ilustran con algunos ejemplos.

EJEMPLO 25.5 Potencial eléctrico debido a un anillo con carga uniforme

a) Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en un punto P localizado sobre el eje central perpendicular de un anillo con carga uniforme de radio a y carga total Q.

Solución Oriente el anillo de tal modo que su plano sea perpendicular a un eje x y su centro esté en el origen. Entonces se puede considerar que P se encuentra a una distancia x del centro del anillo, como se muestra en la figura 25.15. El elemento de carga dq está a una distancia igual a $\sqrt{x^2 + a^2}$ del punto P. Por tanto, se puede expresar V como

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Puesto que cada elemento dq está a la misma distancia del punto P, el término $\sqrt{x^2 + a^2}$ puede quitarse de la integral, y V se reduce a

$$V = \frac{k_e}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq = \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad \textbf{(25.20)}$$

La única variable en esta expresión para V es x. Esto no es una sorpresa, puesto que este cálculo es válido sólo para puntos a lo largo del eje x, donde tanto y como z son cero.

b) Encuentre una expresión para la magnitud del campo eléctrico en el punto P.

Solución De acuerdo con la simetría, se ve que **E** a lo largo del eje x puede tener sólo una componente x. Por consiguiente, es posible usar la ecuación 25.16:

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -k_eQ\frac{d}{dx}(x^2 + a^2)^{-1/2}$$

$$= -k_eQ(-\tfrac{1}{2})(x^2 + a^2)^{-3/2}(2x)$$

$$= \frac{k_eQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad \textbf{(25.21)}$$

Este resultado concuerda con el obtenido por integración directa (véase el ejemplo 23.8). Advierta que $E_x = 0$ en $x = 0$ (el centro del anillo). ¿Se podría pronosticar lo anterior a partir de la ley de Coulomb?

Ejercicio ¿Cuál es el potencial eléctrico en el centro del anillo? ¿Qué le dicen los valores del campo en el centro acerca del valor de V en el centro?

Respuesta $V = k_eQ/a$. Debido a que $E_x = -dV/dx = 0$ en el centro, V debe tener un valor máximo o mínimo; éste es, en realidad, un máximo.

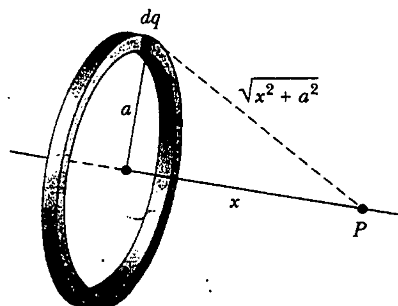


Figura 25.15 Un anillo de radio a, cargado de manera uniforme, colocado sobre un plano perpendicular al eje x. Todos los segmentos dq del anillo están a la misma distancia de cualquier punto P sobre el eje x.

EJEMPLO 25.6 Potencial eléctrico debido a un disco con carga uniforme

Encuentre a) el potencial eléctrico y b) la magnitud del campo eléctrico a lo largo del eje central perpendicular de un disco con carga uniforme de radio a y densidad de carga superficial σ.

Solución a) De nuevo se elige el punto P a una distancia x del centro del disco y se considera el plano del disco perpendicular al eje x. El problema se simplifica dividiendo el disco en una serie de anillos cargados. El potencial eléctrico de cada anillo está dado por la ecuación 25.20. Considere uno de dichos anillos de radio r y ancho dr, como se indica en la figura 25.16. El área superficial del anillo es $dA = 2\pi r\,dr$; a partir de la definición de la densidad de carga superficial (véase la sección 23.5), se sabe que la carga en el anillo es $dq = \sigma\, dA = \sigma 2\pi r\, dr$. Por tanto, el potencial en el punto P debido al anillo es

$$dV = \frac{k_e dq}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{k_e\sigma 2\pi r\,dr}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

Para encontrar el potencial eléctrico *total* en P se suma sobre todos los anillos que integran el disco. Es decir, se integra dV de $r = 0$ a $r = a$:

$$V = \pi k_e\sigma\int_0^a \frac{2r\,dr}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \pi k_e\sigma\int_0^a (r^2 + x^2)^{-1/2}\,2r\,dr$$

Esta integral es de la forma $u^n\,du$ y tiene el valor $u^{n+1}/(n + 1)$, donde $n = -\frac{1}{2}$ y $u = r^2 + x^2$. De esto resulta

$$V = 2\pi k_e\sigma[(x^2 + a^2)^{1/2} - x] \quad \textbf{(25.22)}$$

b) Como en el ejemplo 25.5, se puede encontrar el campo eléctrico en cualquier punto axial a partir de

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = 2\pi k_e\sigma\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) \quad \textbf{(25.23)}$$

El cálculo de V y **E** para un punto arbitrario fuera del eje es más difícil de realizar, y no se tratará dicha situación en este texto.

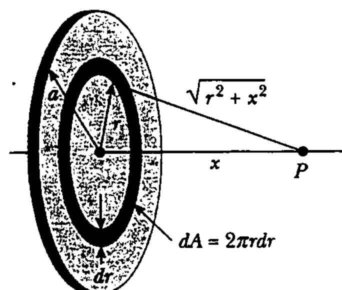


Figura 25.16 Un disco de radio a, cargado de manera uniforme, colocado sobre un plano perpendicular al eje x. El cálculo del potencial eléctrico en cualquier punto P sobre el eje x se simplifica al dividir el disco en muchos anillos, cada uno de área $2\pi r\,dr$.

EJEMPLO 25.7 Potencial eléctrico debido a una línea de carga finita

Una barra de longitud ℓ localizada a lo largo del eje x tiene una carga total Q y densidad de carga lineal uniforme $\lambda = Q/\ell$. Encuentre el potencial eléctrico localizado en el punto P a lo largo del eje y a una distancia a del origen (Fig. 25.17).

Solución El elemento de longitud dx tiene una carga $dq = \lambda\, dx$. Puesto que este elemento está a una distancia $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ del punto P, el potencial en P debido a este elemento se puede expresar como

$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Para obtener el potencial total en P se integra esta expresión sobre los límites $x = 0$ a $x = \ell$. Si advierte que k_e y λ son constantes, se encuentra que

$$V = k_e\lambda \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = k_e \frac{Q}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Esta integral tiene el siguiente valor (véase el apéndice B):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

Al evaluar V se encuentra que

$$V = \frac{k_e Q}{\ell} \ln\left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + a^2}}{a}\right) \tag{25.24}$$

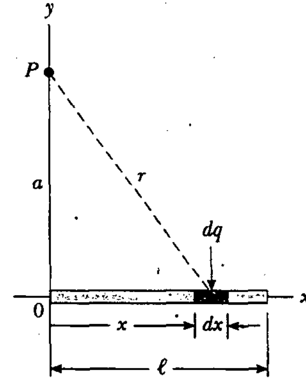


Figura 25.17 Una línea de carga uniforme, de longitud ℓ, se ubica a lo largo del eje x. Para calcular el potencial eléctrico en P, la línea de carga es dividida en segmentos, cada uno de longitud dx y con carga $dq = \lambda\, dx$.

EJEMPLO 25.8 Potencial eléctrico de una esfera con carga uniforme

Una esfera sólida aislante de radio R tiene una densidad de carga volumétrica positiva uniforme con carga total Q. a) Determine el potencial eléctrico en un punto fuera de la esfera, es decir, en $r > R$. Considere el potencial igual a cero en $r = \infty$.

Solución En el ejemplo 24.5 se encontró que la magnitud del campo eléctrico afuera de una esfera con carga uniforme de radio R es

$$E_r = k_e \frac{Q}{r^2} \qquad (\text{para } r > R)$$

donde el campo está dirigido radialmente hacia afuera cuando Q es positiva. En este caso, para obtener el potencial eléctrico en un punto exterior, como B en la figura 25.18, se usa la ecuación 25.4 y la expresión para E_r dada en líneas anteriores:

$$V_B = -\int_{\infty}^{r} E_r dr = -k_e Q \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2}$$

$$V_B = k_e \frac{Q}{r} \qquad (\text{para } r > R)$$

Observe que el resultado es idéntico a la expresión para el potencial eléctrico debido a una carga puntual (Ec. 25.11).

En vista de que el potencial debe ser continuo en $r = R$, se puede usar esta expresión para obtener el potencial en la superficie de la esfera. Esto es, el potencial en un punto como C en la figura 25.18 es

$$V_C = k_e \frac{Q}{R} \qquad (\text{para } r = R)$$

b) Encuentre el potencial en un punto dentro de la esfera, es decir, para $r < R$.

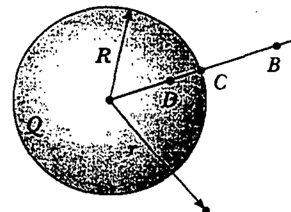


Figura 25.18 Esfera aislante de radio R y cargada de manera uniforme con una carga total Q. Los potenciales eléctricos en los puntos B y C son equivalentes a los producidos por una carga puntual Q ubicada en el centro de la esfera, pero esto no es cierto para el punto D.

Solución En el ejemplo 24.5 se encontró que el campo eléctrico dentro de una esfera aislante con carga uniforme es

$$E_r = \frac{k_eQ}{R^3}r \qquad (\text{para } r < R)$$

Se puede utilizar este resultado y la ecuación 25.3 para evaluar la diferencia de potencial $V_D - V_C$, en algún punto interior *D*:

$$V_D - V_C = -\int_R^r E_r\,dr = -\frac{k_eQ}{R^3}\int_R^r r\,dr = \frac{k_eQ}{2R^3}(R^2 - r^2)$$

Sustituyendo $V_C = k_eQ/R$ dentro de esta expresión y al despejar V_D, se obtiene

$$V_D = \frac{k_eQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (\text{para } r < R) \qquad \textbf{(25.25)}$$

En $r = R$ esta expresión proporciona un resultado que concuerda con el potencial en la superficie, esto es, V_C. En la figura 25.19 se presenta una gráfica de V contra r para esta distribución de carga.

Ejercicio ¿Cuáles son las magnitudes del campo eléctrico y del potencial eléctrico en el centro de la esfera?

Respuesta $E = 0$; $V_0 = 3k_eQ/2R$.

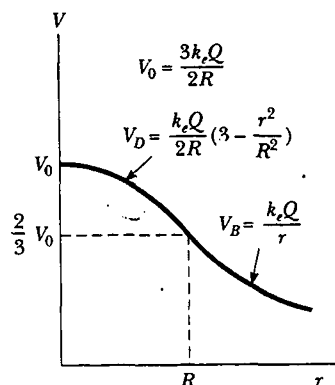


Figura 25.19 Gráfica del potencial eléctrico V *versus* distancia *r* desde el centro de una esfera aislante con carga uniforme de radio *R*. La curva para V_D dentro de la esfera es parabólica y se une suavemente con la curva para V_B en el exterior de la esfera, que es una hipérbola. El potencial tiene un valor máximo V_0 en el centro de la esfera. Se puede hacer esta gráfica en tres dimensiones (parecida a las Figs. 25.7a y 25.8a) girándola alrededor del eje vertical.

25.6 POTENCIAL ELÉCTRICO DEBIDO A UN CONDUCTOR CARGADO

En la sección 24.4 se encontró que, cuando un conductor sólido en equilibrio tiene una carga neta, la carga reside sobre la superficie exterior del conductor. Además, se mostró que el campo eléctrico afuera de la superficie de un conductor es perpendicular a la superficie y que el campo interior es cero.

Ahora se mostrará que **cada punto sobre la superficie de un co[illegible] cargado en equilibrio está al mismo potencial eléctrico.** Considere dos pun[illegible]re la superficie de un conductor cargado, como se muestra en la figura 25.20. A lo largo de la trayectoria de la superficie que une a estos puntos, **E** siempre es perpendicu-

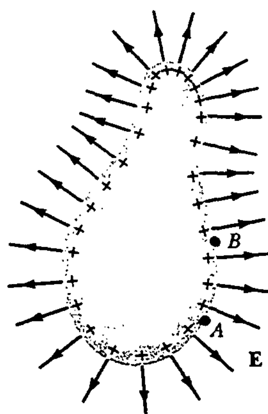


Figura 25.20 Un conductor de forma arbitraria porta una carga positiva. Cuando el conductor está en equilibrio electrostático, toda la carga reside en la superficie, **E** = 0 dentro del conductor y la dirección de *E* justo afuera del conductor es perpendicular a la superficie. El potencial eléctrico es constante dentro del conductor y es igual al potencial en la superficie. Advierta del espaciamiento de los signos más que la densidad de carga superficial no es uniforme.

lar al desplazamiento ds; por tanto, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$. Con este resultado y la ecuación 25.3 se concluye que la diferencia de potencial entre A y B necesariamente es cero:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Este resultado se aplica a cualesquiera dos puntos sobre la superficie. Por tanto, V es constante en todos los puntos sobre la superficie de un conductor cargado en equilibrio. Esto es,

la superficie de cualquier conductor cargado en equilibrio electrostático es una superficie equipotencial. Además, puesto que el campo eléctrico es cero dentro del conductor, se concluye de la relación $E_r = -dV/dr$, que el potencial eléctrico es constante en todos lados en el interior del conductor e igual a su valor en la superficie.

La superficie de un conductor cargado es una superficie equipotencial

Como esto es cierto para el potencial eléctrico, no se requiere trabajo para mover una carga de prueba del interior de un conductor cargado a su superficie.

Considere una esfera conductora metálica sólida de radio R y carga positiva total Q, como se muestra en la figura 25.21a. El campo eléctrico fuera de la esfera es k_eQ/r^2 y apunta radialmente hacia afuera. Siguiendo el ejemplo 25.8, se sabe que el potencial eléctrico en el interior y en la superficie de la esfera debe ser k_eQ/R en relación con el infinito. El potencial afuera de la esfera es k_eQ/r. La figura 25.21b es una gráfica del potencial eléctrico como una función de r, y la figura 25.21c muestra las variaciones del campo eléctrico con r.

Cuando una carga neta se coloca sobre un conductor esférico, la densidad de carga superficial es uniforme, como se indica en la figura 25.21a. Sin embargo, si el conductor no es esférico, como en la figura 25.20, la densidad de carga superficial es más alta donde el radio de curvatura es pequeño y convexo (como se notó en la sección 24.4) y baja donde el radio de curvatura es pequeño y la superficie es cóncava. Puesto que el campo eléctrico afuera de un conductor es proporcional a la densidad de carga superficial, se ve que **el campo eléctrico es más grande cerca de puntos convexos que tienen pequeños radios de curvatura y alcanza valores muy altos en puntos afilados.**

La figura 25.22 muestra las líneas de campo eléctrico alrededor de dos conductores esféricos: uno con una carga neta Q y uno más grande con carga neta cero. En este caso la densidad de carga superficial no es uniforme sobre ninguno de los conductores. La esfera con carga neta cero tiene cargas negativas inducidas sobre su lado que se encuentra frente a la esfera cargada, y cargas positivas inducidas sobre su

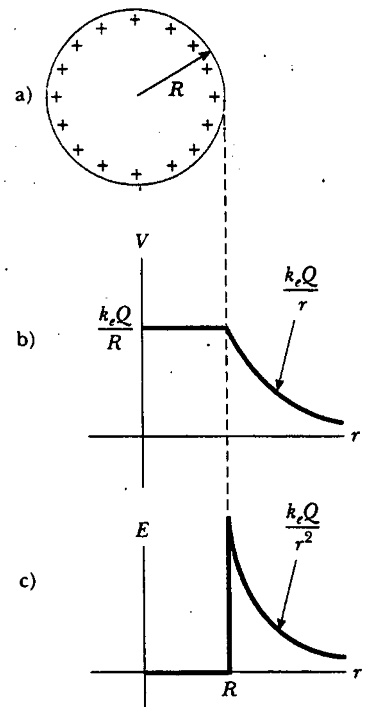
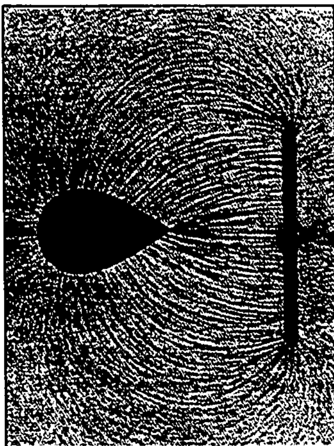


Figura 25.21 a) El exceso de carga en una esfera conductora de radio R es uniformemente distribuida sobre su superficie. b) Potencial eléctrico *versus* la distancia r desde el centro de la esfera conductora cargada. c) Magnitud de campo eléctrico contra distancia r desde el centro de la esfera conductora cargada.



Patrón de campo eléctrico de una placa conductora cargada, colocada cerca de un conductor puntiagudo con carga opuesta. Pequeños pedazos de hilo suspendidos en aceite se alinean con las líneas de campo eléctrico. El campo que rodea al conductor puntiagudo es más intenso cerca del extremo en punta y en otros lugares donde el radio de curvatura es pequeño. *(Cortesía de Harold M. Waage, Princeton University)*

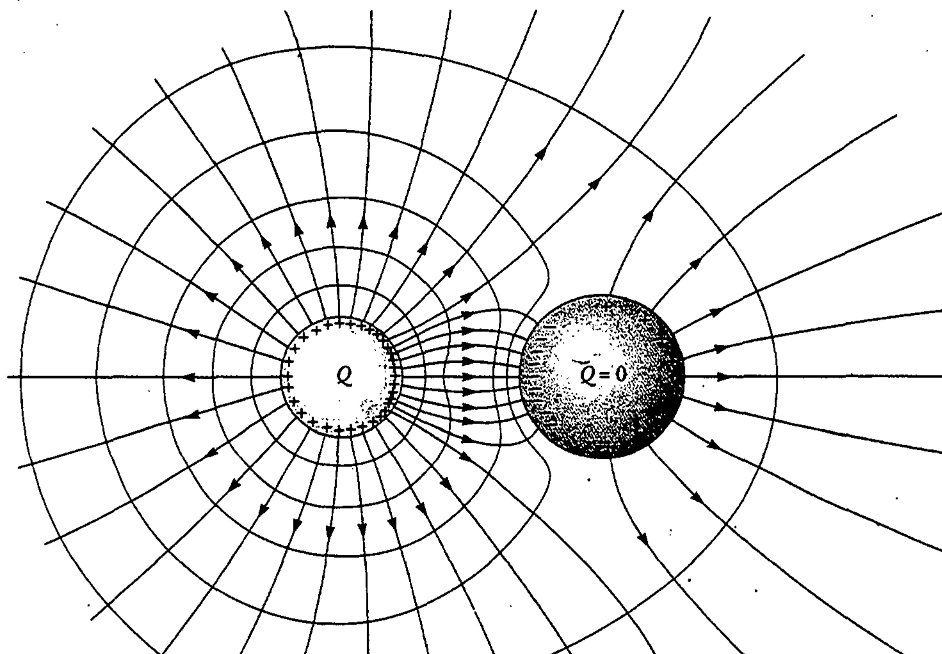


Figura 25.22 Líneas de campo eléctrico (en rojo) alrededor de dos conductores esféricos. La esfera pequeña tiene una carga neta Q, y la grande tiene una carga neta cero. Las curvas azules son secciones transversales de superficies equipotenciales.

lado opuesto a la esfera cargada. Las curvas azules en la figura representan las secciones transversales de las superficies equipotenciales para esta configuración de carga. Como es usual, las líneas de campo son perpendiculares a las superficies conductoras en todos los puntos, y las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo en todo sitio. Intentar mover una carga positiva en la región de estos conductores sería como mover una canica sobre una colina que está plana en su cima (representado por el conductor a la izquierda) y tiene otra área plana parcialmente hacia abajo del lado de la colina (representado por el conductor a la derecha).

EJEMPLO 25.9 Dos esferas cargadas unidas

Dos conductores esféricos de radios r_1 y r_2 están separados por una distancia mucho mayor que el radio de cualquiera de las esferas. Éstas están unidas por medio de un alambre conductor, como se ve en la figura 25.23. Las cargas sobre las esferas en equilibrio son q_1 y q_2, respectivamente, y están cargadas de manera uniforme. Encuentre la proporción de las magnitudes de los campos eléctricos en las superficies de las esferas.

Solución Puesto que las esferas están conectadas por un alambre conductor, deben estar al mismo potencial eléctrico:

$$V = k_e \frac{q_1}{r_1} = k_e \frac{q_2}{r_2}$$

Por tanto, la razón de cargas es

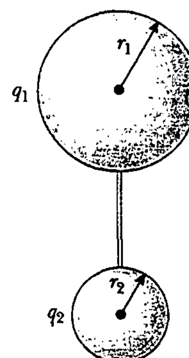


Figura 25.23 Dos conductores esféricos cargados conectados por un alambre conductor. Las esferas están al *mismo* potencial eléctrico V.

$$1) \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

En vista de que las esferas están muy alejadas y sus superficies están cargadas de manera uniforme, se puede expresar la magnitud de los campos eléctricos en sus superficies como

$$E_1 = k_e \frac{q_1}{r_1^2} \quad \text{y} \quad E_2 = k_e \frac{q_2}{r_2^2}$$

Tomando la razón de estos dos campos, y utilizando la ecuación 1), se encuentra que

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Por consiguiente, el campo es más intenso en la vecindad de la esfera más pequeña aun cuando los potenciales eléctricos de ambas esferas sean iguales.

Una cavidad dentro de un conductor

Considere ahora un conductor de forma arbitraria que contiene una cavidad, como se muestra en la figura 25.24. Suponga que no hay cargas dentro de la cavidad. **En este caso el campo eléctrico dentro de la cavidad debe ser cero**, independientemente de la distribución de carga sobre la superficie exterior del conductor. Además, el campo en la cavidad es cero, incluso si existe un campo eléctrico afuera del conductor.

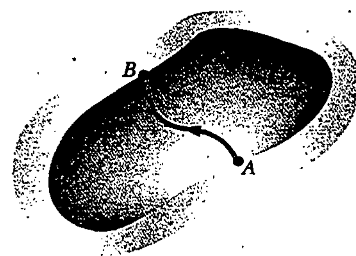


Figura 25.24 Un conductor en equilibrio electrostático que contiene una cavidad. El campo eléctrico en la cavidad es cero, sin importar la carga sobre el conductor.

Para probar este punto aproveche el hecho de que todo punto sobre un conductor se encuentra al mismo potencial eléctrico y, por ello, dos puntos cualesquiera A y B sobre la superficie de la cavidad deben estar al mismo potencial. Imagine ahora que el campo $\mathbf{E}$ existe en la cavidad, y evalúe la diferencia de potencial $V_B - V_A$ definida por la ecuación 25.3:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Si $\mathbf{E}$ es diferente de cero, siempre puede existir una trayectoria entre A y B para la cual $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ sea un número positivo; por tanto, la integral debe ser positiva. Sin embargo, puesto que $V_B - V_A = 0$, la integral de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ debe ser cero para todas las trayectorias entre cualesquiera dos puntos sobre el conductor, lo cual implica que $\mathbf{E}$ es cero en todas partes. Esta contradicción puede reconciliarse sólo si $\mathbf{E} = 0$ dentro de la cavidad. Así, se concluye que una cavidad rodeada por paredes conductoras es una región libre de campo siempre y cuando no haya cargas dentro de la cavidad.

Descarga en corona

Un fenómeno conocido como **descarga en corona** se observa cerca de un conductor tal como una línea de potencia de alto voltaje. Cuando el campo eléctrico en la vecindad del conductor es suficientemente intenso, las moléculas de aire son despojadas de electrones. Esto provoca que las moléculas se ionicen, con lo cual se incrementa la capacidad conductora del aire. El brillo observado (o descarga de corona) resulta de la recombinación de los electrones libres con las moléculas de aire ionizadas. Si un conductor tiene una forma irregular, el campo eléctrico puede ser muy alto cerca de puntos o bordes filosos del conductor; en consecuencia, es más probable que ocurran el proceso de ionización y la descarga en corona alrededor de tales puntos.

Pregunta sorpresa 25.4

a) ¿Es posible que la magnitud del campo eléctrico sea cero en una posición donde el potencial eléctrico no es cero? b) ¿El potencial eléctrico puede ser cero donde el campo eléctrico sea diferente de cero?

Sección opcional



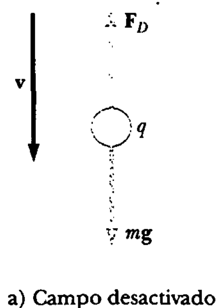
25.7 EL EXPERIMENTO DE LA GOTA DE ACEITE DE MILLIKAN

Durante el periodo que va de 1909 a 1913, Robert Millikan desarrolló un brillante conjunto de experimentos en los cuales midió e, la carga elemental en un electrón, y demostró la naturaleza cuantizada de esta carga. El aparato utilizado por Millikan, representado por el esquema en la figura 25.25, incluye dos placas metálicas paralelas. Gotas de aceite cargadas que salen de un atomizador pasan a través de un pequeño agujero en la placa superior. Un haz luminoso dirigido horizontalmente (no mostrado en el diagrama) se usa para iluminar las gotas de aceite, las cuales se observan mediante un telescopio cuyo eje está en ángulo recto con el haz de luz. Cuando las gotas se ven de esta manera, aparecen como estrellas brillantes contra un fondo oscuro, y se puede determinar la rapidez de caída de las gotas individuales.[4]

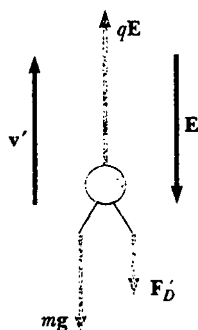
Suponga que se está observando una gota individual de masa m, que tiene una carga q, y que su carga es negativa. Si no hay campo eléctrico presente entre las placas, las dos fuerzas que actúan sobre la carga son la gravedad $m\mathbf{g}$, que actúa hacia abajo, y la fuerza de arrastre viscosa hacia arriba $\mathbf{F}_D$, como se indica en la figura 25.26a. La fuerza de arrastre es proporcional a la rapidez de la gota. Cuando la gota alcanza su rapidez terminal v, las dos fuerzas se equilibran entre sí ($mg = F_D$).

Suponga ahora que un campo eléctrico se establece entre las placas al conectar una batería de manera tal que la placa superior está a un potencial eléctrico más alto. En este caso una tercera fuerza $q\mathbf{E}$ actúa en la gota cargada. Puesto que q es negativa y $\mathbf{E}$ es hacia abajo, esta fuerza eléctrica está dirigida hacia arriba, como se muestra en la figura 25.26b. Si esta fuerza es suficientemente grande, la gota se mueve hacia arriba y la fuerza de arrastre $\mathbf{F}_D'$ actúa hacia abajo. Cuando la fuerza eléctrica hacia arriba $q\mathbf{E}$ equilibra la suma de la fuerza de gravedad y la fuerza de arrastre hacia abajo $\mathbf{F}_D'$, la gota alcanza una nueva rapidez terminal v' en dirección ascendente.

Con el campo activado una gota se mueve lentamente hacia arriba, a rapidez característica de centésimas de centímetro por segundo. La rapidez de caída en ausencia de un campo es comparable. Por consiguiente, uno puede observar durante horas cómo una gota individual asciende y cae de manera alternada, activando y desactivando el campo eléctrico.



a) Campo desactivado



b) Campo activado

Figura 25.26 Fuerzas que actúan sobre una gota de aceite cargada negativamente en el experimento de Millikan.

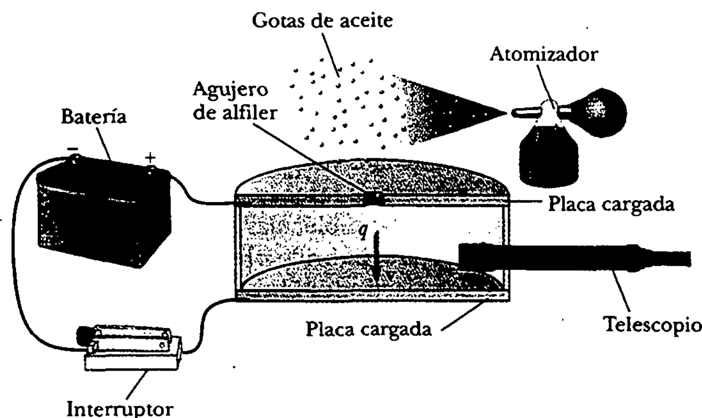


Figura 25.25 Diagrama esquemático del aparato de la gota de aceite de Millikan.

[4] Durante algún tiempo las gotas de aceite se denominaron "Estrellas brillantes de Millikan". Quizá esta descripción se haya vuelto menos popular debido a que generaciones de estudiantes de física han experimentado alucinaciones, han estado cerca de la ceguera, han sufrido dolores de cabeza, y cosas por el estilo, ¡mientras repiten el experimento de Millikan!

Después de hacer mediciones sobre miles de gotas, Millikan y sus colaboradores encontraron que todas las gotas, hasta dentro de una precisión de aproximadamente 1%, tenían una carga igual a un múltiplo entero de la carga elemental e:

$$q = ne \qquad n = 0, -1, -2, -3, \ldots$$

donde $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C. El experimento de Millikan establece evidencia concluyente de que la carga está cuantizada. Por este trabajo Millikan fue honrado con el Premio Nobel de Física en 1923.

Sección opcional

25.8 APLICACIONES DE LA ELECTROSTÁTICA

La aplicación práctica de la electrostática está representada por dispositivos como barras luminosas y precipitadores electrostáticos, así como por la xerografía y la pintura de automóviles. Los dispositivos científicos basados en los principios de la electrostática incluyen generadores electrostáticos, el microscopio de campo-ion y los motores cohetes conducidos por iones.

El generador Van de Graaff

11.10 En la sección 24.5 se describió un experimento que demuestra un método para transferir carga a un conductor hueco (el experimento del balde de hielo de Faraday). Cuando un conductor cargado se pone en contacto con el interior de un conductor hueco, toda la carga del primer conductor se transfiere al conductor hueco. En principio, la carga en el conductor hueco y su potencial eléctrico pueden incrementarse sin límite repitiendo el proceso.

En 1929 Robert J. Van de Graaff (1901-1967) utilizó este principio para diseñar y construir un generador electrostático. Este tipo de generador se usa de manera extensa en la investigación de física nuclear. Una representación esquemática del generador se presenta en la figura 25.27. Se entrega carga de manera continua a un electrodo de alto voltaje mediante una banda móvil de material aislante. El electrodo de alto voltaje es un conductor hueco montado sobre una columna aislante. La banda se carga en A por medio de una descarga en corona entre las agujas metálicas similares a un peine y la rejilla conectada a tierra. Las agujas se mantienen a un potencial positivo típico de 10^4 V. La carga positiva sobre la banda móvil se transfiere al conductor hueco por medio de un segundo peine de agujas en el punto B. Puesto que el campo eléctrico dentro del conductor hueco es despreciable, la carga positiva sobre la banda se transfiere fácilmente al conductor sin tomar en cuenta su potencial. En la práctica es posible aumentar el potencial eléctrico de un conductor hueco hasta que la descarga eléctrica ocurra a través del aire. Puesto que el campo eléctrico "de ruptura" en el aire es aproximadamente 3×10^6 V/m, una esfera de 1 m de radio puede elevarse a un potencial máximo de 3×10^6 V. El potencial puede aumentarse aún más al incrementar el radio del conductor hueco y al poner todo el sistema en un recipiente lleno con un gas a presión elevada.

Los generadores Van de Graaff pueden producir diferencias de potencial tan altas como 20 millones de volts. Los protones acelerados a través de estas diferencias de potencial tan grandes reciben suficiente energía para iniciar reacciones nucleares entre ellos mismos y varios núcleos blanco. En museos y laboratorios en las escuelas se pueden ver pequeños generadores. Si una persona aislada de tierra toca la esfera de un generador Van de Graaff, su cuerpo puede alcanzar un gran potencial eléctrico. El cabello adquiere una carga positiva neta y cada mechón es repelido por todos los demás. El resultado es una escena tal como la que se muestra en la fotografía al principio de este capítulo. Además de estar aislada de tierra, la persona que

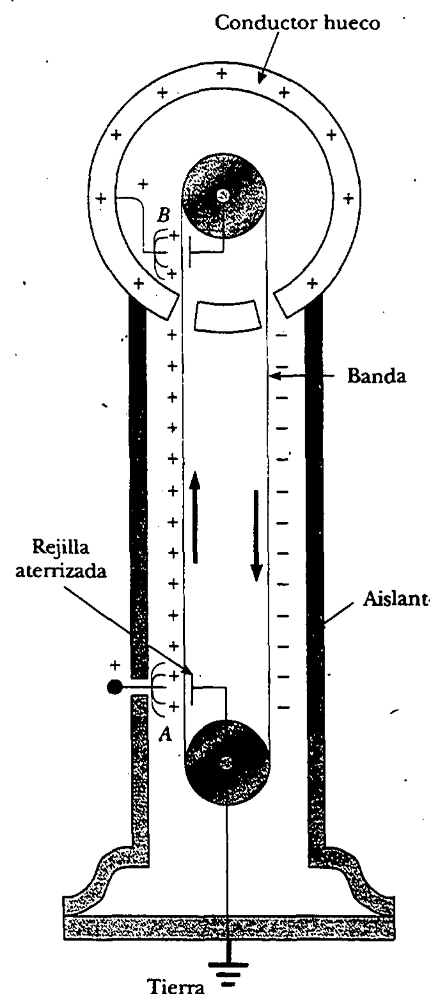


Figura 25.27 Diagrama esquemático de un generador Van de Graaff. La carga es transferida al conductor hueco en la parte superior mediante una banda móvil. La carga se deposita sobre la banda en el punto A y se transfiere al conductor hueco en el punto B.

sostiene la esfera está segura en esta demostración porque la carga total sobre la esfera es muy pequeña (del orden de 1 μC). Si esta cantidad de carga pasara accidentalmente de la esfera a la tierra a través de la persona, la corriente correspondiente no lastimaría.

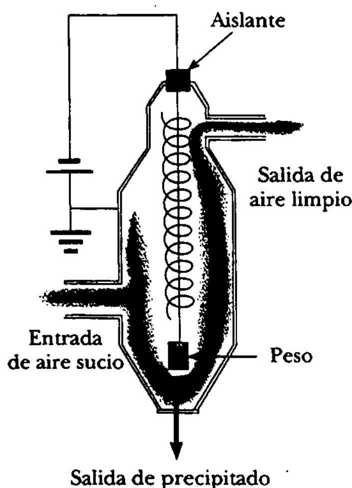
El precipitador electrostático

Una importante aplicación de la descarga eléctrica en gases es el *precipitador electrostático.* Este aparato se utiliza para eliminar partículas de materia de los gases de combustión, reduciendo de ese modo la contaminación del aire. Los precipitadores son especialmente útiles en las centrales carboeléctricas y en operaciones industriales que generan grandes cantidades de humo. Los sistemas actuales son capaces de eliminar más del 99% de la ceniza del humo.

La figura 25.28a muestra un diagrama esquemático de un precipitador electrostático. Se mantiene una alta diferencia de potencial (por lo común de 40 a 100 kV) entre el alambre que corre hacia abajo por el centro de un ducto y las paredes del mismo, la cual está conectada a tierra. El alambre se mantiene a un potencial eléctrico negativo respecto de las paredes, de modo que el campo eléctrico está dirigido hacia el alambre. El campo eléctrico cerca del alambre alcanza valores suficientemente altos para producir una descarga en corona alrededor del alambre; la descarga ioniza algunas moléculas de aire para formar iones positivos, electrones y iones negativos como O_2^-. El aire a ser limpiado ingresa al ducto y se mueve cerca del alambre. Cuando los electrones y los iones negativos creados por la descarga se aceleran hacia la pared exterior por medio de un campo eléctrico, las partículas de polvo en el aire se cargan a partir de los choques y la captura de iones. Puesto que la mayor parte de las partículas de polvo cargadas son negativas, pueden ser extraídas hacia la pared exterior mediante un campo eléctrico. Al sacudir el ducto de manera periódica, las partículas se desprenden, caen y se colectan en el fondo.

Experimento sorpresa

Espolvoree algo de sal y pimienta sobre un plato y mézclelos. Ahora pase un peine a través de su cabello varias veces y acérquelo a 1 cm de la mezcla de sal y pimienta. ¿Qué ocurre? ¿Cómo se relaciona este suceso con la operación de un precipitador electrostático?



a)



b)



c)

Figura 25.28 a) Diagrama esquemático de un precipitador electrostático. El elevado potencial eléctrico negativo mantenido sobre el alambre enrollado central crea una descarga eléctrica en la vecindad del mismo. Compare la contaminación del aire cuando el precipitador electrostático está b) operando y c) apagado. *(b, Rei O'Hara/Black Star/PNI; c, Greig Cranna Stock, Boston/PNI)*

Además de reducir el nivel de partículas de materia en la atmósfera (compare las figuras 25.28b y c), el precipitador electrostático recupera materiales valiosos en forma de óxidos metálicos.

Xerografía e impresoras láser

La idea básica del proceso de xerografía[5] fue desarrollada por Chester Carlson, quien por ello obtuvo una patente para el proceso xerográfico en 1940. La principal idea que hace único al proceso es el empleo de un material fotoconductor para formar una imagen. (Un *fotoconductor* es un material que es mal conductor en la oscuridad pero que se vuelve un buen conductor eléctrico cuando se expone a la luz.)

El proceso xerográfico se ilustra en la figura 25.29a a d. Primero se recubre la superficie de una placa o tambor con una película delgada del material fotoconductor (en general, selenio o algún compuesto de selenio), y se le proporciona una carga electrostática positiva en la oscuridad. La imagen de la página que se va a copiar se proyecta entonces, con una lente, sobre la superficie cargada. La superficie fotoconductora se vuelve conductora sólo en áreas donde la luz incide. En estas áreas la luz produce portadores de carga en el fotoconductor, los cuales mueven la carga positiva del tambor. Sin embargo, las cargas positivas permanecen en aquellas áreas del

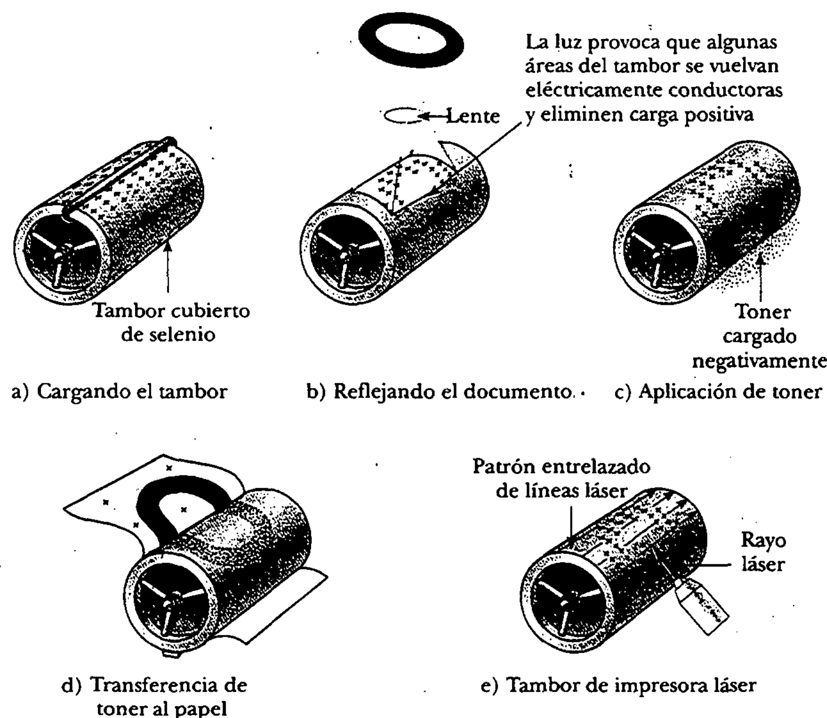


Figura 25.29 El proceso de xerografía: a) La superficie fotoconductiva del tambor se carga positivamente. b) Mediante el uso de una fuente de luz y lentes, una imagen se forma sobre la superficie en la forma de cargas positivas. c) La superficie que contiene la imagen se cubre con un polvo con carga negativa, el cual se adhiere sólo al área de la imagen. d) Un pedazo de papel se coloca sobre la superficie y se le da una carga positiva. Esto transfiere la imagen al papel conforme las partículas del polvo cargado negativamente emigran al papel. Luego el papel se trata con calor para "fijar" el polvo. e) Una impresora láser opera de manera similar, excepto que la imagen se produce al hacer que un rayo láser se encienda y apague conforme barre un tambor cubierto de selenio.

[5] El prefijo *xero-* es una palabra griega que significa "seco". Advierta que no se usa tinta líquida en ninguna parte de la xerografía.

fotoconductor no expuestas a la luz, lo que deja una imagen latente del objeto en la forma de una distribución de carga superficial positiva.

Luego, un polvo con carga negativa llamado *toner* se esparce sobre la superficie fotoconductora. El polvo cargado se adhiere sólo a aquellas áreas de la superficie que contienen la imagen con carga positiva. En este punto la imagen se vuelve visible. El toner (y, por tanto, la imagen) se transfiere después a la superficie de una hoja de papel cargado positivamente.

Por último, el toner se "fija" a la superficie del papel conforme el toner se funde mientras pasa a través de cilindros a alta temperatura. Esto produce una copia permanente del original.

Una impresora láser (Fig. 25.29e) opera por el mismo principio, con la excepción de que se usa un rayo láser dirigido por computadora para iluminar el fotoconductor, en lugar de una lente.

RESUMEN

Cuando una carga de prueba positiva q_0 se mueve entre los puntos A y B en un campo eléctrico **E**, el **cambio en la energía potencial** es

$$\Delta U = -q_0\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \tag{25.1}$$

El **potencial eléctrico** $V = U/q_0$ es una cantidad escalar y tiene unidades de joules por coulomb (J/C), donde 1 J/C ≡ 1 V.

La **diferencia de potencial** ΔV entre los puntos A y B en un campo eléctrico **E** se define como

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \tag{25.3}$$

La diferencia de potencial entre dos puntos A y B en un campo eléctrico uniforme **E** es

$$\Delta V = -Ed \tag{25.6}$$

donde d es la magnitud del desplazamiento en la dirección paralela a **E**.

Una **superficie equipotencial** es aquella en la cual todos los puntos están al mismo potencial eléctrico. Las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico.

Si se define $V = 0$ en $r_A = \infty$, el potencial eléctrico debido a una carga puntual a cualquier distancia r de la carga es

$$V = k_e\frac{q}{r} \tag{25.11}$$

Se puede obtener el potencial eléctrico asociado con un grupo de cargas puntuales al sumar los potenciales debidos a las cargas individuales.

La **energía potencial asociada con un par de cargas puntuales** separadas por una distancia r_{12} es

$$U = k_e\frac{q_1q_2}{r_{12}} \tag{25.13}$$

Esta energía representa el trabajo requerido para llevar las cargas desde una separación infinita hasta una separación r_{12}. La energía potencial de una distribución de cargas puntuales se obtiene sumando términos como la ecuación 25.13 sobre todos los pares de partículas.

TABLA 25.1 Potencial eléctrico debido a varias distribuciones de carga

Distribución de carga	Potencial eléctrico	Ubicación
Anillo de radio a cargado de manera uniforme	$V = k_e \dfrac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	A lo largo del eje central perpendicular del anillo, a una distancia x del centro del anillo
Disco de radio a cargado de manera uniforme	$V = 2\pi k_e \sigma[(x^2 + a^2)^{1/2} - x]$	A lo largo del eje central perpendicular del disco, a una distancia x del centro del disco
Esfera sólida *aislante* de radio R, cargada de manera uniforme con una carga total Q	$V = k_e \dfrac{Q}{r}$ $V = \dfrac{k_e Q}{2R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$	$r \geq R$ $r < R$
Esfera *conductora* aislada, de radio R y carga total Q	$V = k_e \dfrac{Q}{r}$ $V = k_e \dfrac{Q}{R}$	$r > R$ $r \leq R$

Si se conoce el potencial eléctrico como una función de las coordenadas x, y, z, las componentes del campo eléctrico pueden obtenerse tomando la derivada negativa del potencial eléctrico respecto de las coordenadas. Por ejemplo, la componente x del campo eléctrico es

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \tag{25.16}$$

El **potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua** es

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} \tag{25.19}$$

Todo punto sobre la superficie de un conductor cargado en equilibrio electrostático se encuentra al mismo potencial eléctrico. El potencial es constante en todos los puntos dentro del conductor e igual a su valor en la superficie.

La tabla 25.1 registra potenciales eléctricos debidos a varias distribuciones de carga.

Sugerencias para resolver problemas

Cálculo del potencial eléctrico

- Recuerde que el potencial eléctrico es una cantidad escalar, por tanto, no hay que preocuparse por componentes. En consecuencia, al usar el principio de superposición para evaluar el potencial eléctrico en cualquier punto debido a un sistema de cargas puntuales, simplemente se toma la suma algebraica de los potenciales debidos a las varias cargas. Sin embargo, es necesario que cuide los signos. El potencial es positivo para cargas positivas, y negativo para cargas negativas.

- Al igual que con la energía potencial gravitacional en mecánica, sólo los *cambios* en el potencial eléctrico son importantes; por tanto, el punto donde se elige el potencial igual a cero es arbitrario. Cuando se trabaje con cargas puntuales o una distribución de carga de tamaño finito, suele definirse $V = 0$ en un punto infinitamente alejado de las cargas.
- El potencial eléctrico en algún punto P debido a una distribución continua de carga puede evaluarse al dividir la distribución de carga en elementos infinitesimales de carga dq localizados a una distancia r desde el punto P. Después se trata este elemento de carga como una carga puntual, de manera que el potencial en P debido al elemento es $dV = K_e dq/r$. El potencial total en P se obtiene al integrar dV sobre toda la distribución de carga. Al realizar la integración en la mayor parte de los problemas es necesario expresar dq y r en función de una sola variable. Para simplificar la integración considere con cuidado la geometría implicada en el problema. Revise los ejemplos del 25.5 al 25.7 como guías.
- Otro método que puede emplearse para obtener el potencial eléctrico debido a una distribución de carga continua y finita es empezar con la definición de diferencia de potencial dada por la ecuación 25.3. Si $\mathbf{E}$ se conoce o puede obtenerse con facilidad (de la ley de Gauss), entonces usted puede evaluar la integral de línea $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$. Un ejemplo de este método se proporciona en el ejemplo 25.8.
- Una vez que conozca el potencial eléctrico en un punto, podrá obtener el campo eléctrico en dicho punto recordando que la componente del campo eléctrico en una dirección específica es igual al negativo de la derivada del potencial eléctrico respecto de esa dirección. El ejemplo 25.4 ilustra este procedimiento.

PREGUNTAS

1. Establezca la distinción entre potencial eléctrico y energía potencial eléctrica.
2. Una carga negativa se mueve en dirección de un campo eléctrico uniforme. ¿La energía potencial de la carga aumenta o disminuye? ¿Ésta se mueve a una posición de potencial mayor o menor?
3. Proporcione una explicación física del hecho de que la energía potencial de un par de cargas iguales es positiva mientras que la potencial de un par de cargas diferentes es negativa.
4. Un campo eléctrico uniforme es paralelo al eje x. ¿En qué dirección puede desplazarse una carga en este campo sin que se haga ningún trabajo externo sobre la misma?
5. Explique por qué las superficies equipotenciales son siempre perpendiculares a las líneas de campo eléctrico.
6. Describa las superficies equipotenciales para a) una línea infinita de carga y b) una esfera con carga uniforme.
7. Explique por qué, en condiciones estáticas, todos los puntos en un conductor deben estar al mismo potencial eléctrico.
8. El campo eléctrico dentro de una esfera hueca con carga uniforme es cero. ¿Esto significa que el potencial es cero en el interior de la esfera? Explique.
9. El potencial de una carga puntual se define igual a cero a una distancia infinita. ¿Por qué no se puede definir el potencial de una línea de carga infinita igual a cero en $r = \infty$?
10. Dos esferas conductoras cargadas de diferentes radios se conectan por medio de un alambre conductor, como se muestra en la figura 25.23. ¿Cuál de las esferas tiene la mayor densidad de carga?
11. ¿Qué determina el máximo potencial al cual el domo de un generador Van de Graaff puede aumentarse?
12. Explique el origen del brillo que se observa algunas veces alrededor de los cables de alto voltaje de una línea de transmisión eléctrica.
13. ¿Por qué es importante evitar los bordes o puntos afilados sobre los conductores utilizados en equipo de alto voltaje?
14. ¿Cómo protegería un circuito electrónico o laboratorio de campos eléctricos parásitos? ¿Por qué funciona esto?
15. ¿Por qué es relativamente seguro permanecer en un automóvil con una carrocería metálica durante una intensa tormenta eléctrica?
16. Caminar sobre la alfombra y después tocar a alguien puede producir una descarga eléctrica. Explique por qué ocurre lo anterior.

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** = use computadora para resolver el problema = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 25.1 Diferencia de potencial y potencial eléctrico

1. ¿Cuánto trabajo se realiza (por una batería, generador u otra fuente de energía eléctrica) al mover un número de Avogadro de electrones a partir de un punto inicial donde el potencial eléctrico es 9.00 V hasta un punto donde el potencial es –5.00 V? (El potencial en cada caso se mide en relación con un punto de referencia común.)
2. Un ion acelerado mediante una diferencia de potencial de 115 V experimenta un aumento en su energía cinética de 7.37×10^{-17} J. Calcule la carga en el ion.
3. a) Calcule la rapidez de un protón que es acelerado desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 120 V. b) Calcule la rapidez de un electrón que se acelera a través de la misma diferencia de potencial.
4. **Problema de repaso.** ¿A través de qué diferencia de potencial se necesitaría acelerar un electrón para que alcanzara el 40% de la rapidez de la luz empezando desde el reposo? La rapidez de la luz es $c = 3.00 \times 10^8$ m/s; revise la sección 7.7.
5. ¿Qué diferencia de potencial se necesita para frenar un electrón que tiene una rapidez inicial de 4.20×10^5 m/s?

Sección 25.2 Diferencias de potencial en un campo eléctrico uniforme

6. Un campo eléctrico uniforme de 250 V/m de magnitud está dirigido en la dirección x positiva. Una carga de +12.0 μC se mueve desde el origen hacia el punto (x, y) = (20.0 cm, 50.0 cm). a) ¿Cuál fue el cambio en la energía potencial de esta carga? b) ¿A través de qué diferencia de potencial se movió la carga?
7. La diferencia en potencial entre las placas aceleradoras de una TV es de casi 25 000 V. Si la distancia entre dichas placas es de 1.50 cm, encuentre la magnitud del campo eléctrico uniforme en esta región.
8. Suponga que un electrón es liberado desde el reposo en un campo eléctrico uniforme cuya magnitud es de 5.90×10^3 V/m. a) ¿A través de qué diferencia de potencial habrá pasado después de moverse 1.00 cm? b) ¿Cuán rápido estará moviéndose el electrón después de que haya viajado 1.00 cm?
9. WEB Un electrón que se mueve paralelo al eje x tiene una rapidez inicial de 3.70×10^6 m/s en el origen. Su rapidez se reduce a 1.40×10^5 m/s en el punto $x = 2.00$ cm. Calcule la diferencia de potencial entre el origen y este punto. ¿Cuál punto está a mayor potencial?
10. Un campo eléctrico uniforme de 325 V/m de magnitud está dirigido en la dirección *y negativa*, como se muestra en la figura P25.10. Las coordenadas del punto A son (–0.200, –0.300) m, y las del punto B son (0.400, 0.500) m. Calcule la diferencia de potencial $V_B - V_A$ usando la trayectoria azul.

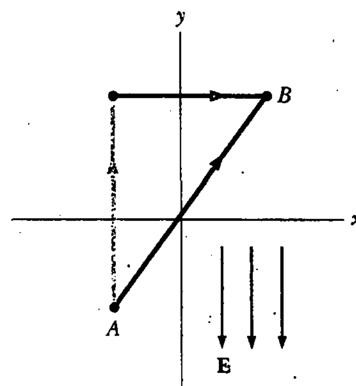


Figura P25.10

11. Un bloque de 4.00 kg con una carga $Q = 50.0$ μC se conecta a un resorte para el cual $k = 100$ N/m. El bloque está sobre una pista horizontal sin fricción, y el sistema está inmerso en un campo eléctrico uniforme de magnitud $E = 5.00 \times 10^5$ V/m, dirigido como se indica en la figura P25.11. Si el bloque se suelta desde el reposo cuando el resorte está sin estirar (en $x = 0$), a) ¿cuál es la cantidad máxima a la que se alarga el resorte? b) ¿Cuál será la posición de equilibrio del bloque? c) Muestre que el movimiento del bloque es armónico simple y determine su periodo. d) Repita el inciso a) si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es 0.200.
12. Un bloque de masa m y carga Q se conecta a un resorte de constante k. El bloque está sobre una pista horizontal sin fricción y el sistema está inmerso en un campo eléctrico uniforme de magnitud E, dirigido como se indica en la figura P25.11. Si el bloque se suelta desde el reposo cuando el resorte está sin estirar (en $x = 0$), a) ¿en qué cantidad máxima se alarga el resorte? b) ¿Cuál será la posición de equilibrio del bloque? c) Muestre que el movimiento del bloque es armónico simple y determine su periodo. d) Repita el inciso a) si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es μ_k.

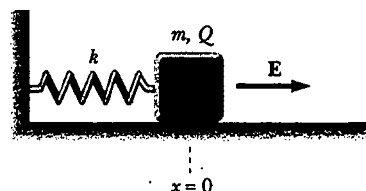


Figura P25.11 Problemas 11 y 12.

13. La aceleración debido a la gravedad del planeta Tehar es igual que la de la Tierra, pero en Tehar hay también un intenso campo eléctrico que apunta hacia abajo y es uniforme cerca de la superficie del planeta. Una bola de 2.00 kg que tiene una carga de 5.00 μC se lanza hacia arriba a una rapidez de 20.1 m/s y golpea el suelo después de un intervalo de 4.10 s. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre el punto de inicio y el punto más alto de la trayectoria?

14. Una barra aislante que tiene una densidad de carga lineal λ = 40.0 μC/m y densidad de masa lineal μ = 0.100 kg/m se suelta desde el reposo en un campo eléctrico uniforme E = 100 V/m dirigida en forma perpendicular a la barra (Fig. P25.14). a) Determine la rapidez de la barra después de que ésta se ha desplazado 2.00 m. b) ¿Cómo cambia su respuesta al inciso a) si el campo eléctrico no es perpendicular a la barra? Explique.

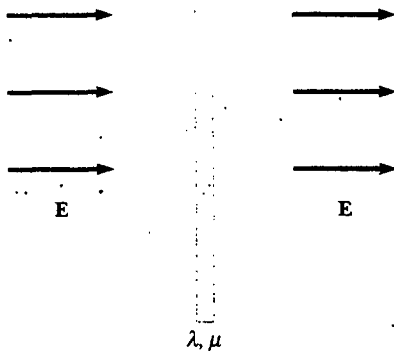
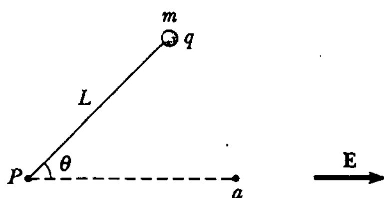


Figura P25.14

15. Una partícula que tiene carga q = +2.00 μC y masa m = 0.010 0 kg está conectada a una cuerda cuya longitud es L = 1.50 m y que a su vez está amarrada al punto pivote P que se ve en la figura P25.15. La partícula, la cuerda y el punto de pivote todos se encuentran sobre una mesa horizontal. La partícula se suelta desde el reposo cuando la cuerda forma un ángulo θ = 60.0° con un campo eléctrico uniforme de magnitud E = 300 V/m. Determine la rapidez de la partícula cuando la cuerda es paralela al campo eléctrico (punto a en la figura P25.15).



Vista superior

Figura P25.15

Sección 25.3 Potencial eléctrico y energía potencial debidos a cargas puntuales

Nota: a menos que se establezca de otro modo, suponga un nivel de referencia de potencial V = 0 en $r = \infty$.

16. a) Encuentre el potencial a una distancia de 1.00 cm de un protón. b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre dos puntos que están a 1.00 cm y 2.00 cm de un protón? c) Repita las partes a) y b) para un electrón.

17. Dadas dos cargas de 2.00 μC, como se muestra en la figura P25.17, y una carga de prueba positiva q = 1.28 × 10^{-18} C en el origen, a) ¿cuál es la fuerza neta ejercida sobre q por las dos cargas de 2.00 μC? b) ¿Cuál es el campo eléctrico en el origen debido a las dos cargas de 2.00 μC? c) ¿Cuál es el potencial eléctrico en el origen debido a las dos cargas de 2.00 μC?

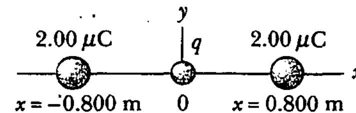


Figura P25.17

18. Una carga $+q$ se encuentra en el origen. Una carga $-2q$ está en x = 2.00 m sobre el eje x. ¿Para qué valor(es) finito(s) de x es a) el campo eléctrico cero?, b) el potencial eléctrico cero?

[19] El modelo de Bohr del átomo de hidrógeno establece que el electrón puede existir sólo en ciertas órbitas permitidas alrededor del protón. El radio de cada órbita de Bohr es $r = n^2$(0.052 9 nm) donde n = 1, 2, 3, . . . Calcule la energía potencial eléctrica de un átomo de hidrógeno cuando el electrón está en a) la primera órbita permitida, n = 1; b) la segunda órbita permitida, n = 2; y c) cuando el electrón ha escapado del átomo ($r = \infty$). Exprese sus respuestas en electrón volts.

20. Dos cargas puntuales, Q_1 = +5.00 nC y Q_2 = −3.00 nC, están separadas 35.0 cm. a) ¿Cuál es la energía potencial del par? ¿Cuál es la importancia del signo algebraico de su respuesta? b) ¿Cuál es el potencial eléctrico en un punto a la mitad entre las cargas?

[21] Las tres cargas de la figura P25.21 están en los vértices de un triángulo isósceles. Calcule el potencial eléctrico en el punto medio de la base, considerando q = 7.00 μC.

22. *Compare este problema con el problema 55 del capítulo 23.* Cuatro cargas puntuales idénticas (q = +10.0 μC) están ubicadas en las esquinas de un rectángulo, como se muestra en la figura P23.55. Las dimensiones del rectángulo son L = 60.0 cm y W = 15.0 cm. Calcule la energía potencial eléctrica de la carga en la esquina inferior izquierda debida a las otras tres cargas.

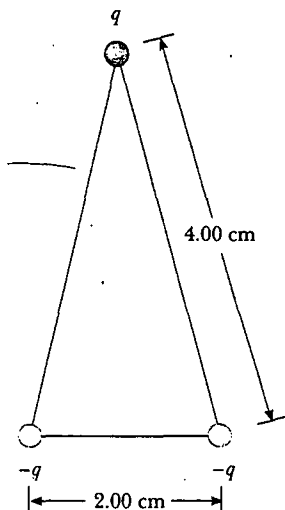


Figura P25.21

WEB 23. Demuestre que la cantidad de trabajo necesario para agrupar cuatro cargas puntuales idénticas de magnitud Q en las esquinas de un cuadrado de lado s es $5.41k_eQ^2/s$.

24. *Compare este problema con el problema 18 del capítulo 23.* Dos cargas puntuales, cada una de 2.00 μC de magnitud, están colocadas en el eje x. Una está en x = 1.00 m, y la otra está en x = −1.00 m. a) Determine el potencial eléctrico sobre el eje y en y = 0.500 m. b) Calcule la energía potencial eléctrica de una tercera carga, de −3.00 μC, ubicada sobre el eje y en y = 0.500 m.

25. *Compare este problema con el problema 22 del capítulo 23.* Cinco cargas puntuales negativas iguales $-q$ están colocadas simétricamente alrededor de un círculo de radio R. Calcule el potencial eléctrico en el centro del círculo.

26. *Compare este problema con el problema 17 del capítulo 23.* Tres cargas positivas iguales q están ubicadas en las esquinas de un triángulo equilátero de lado a, como se muestra en la figura P23.17. a) ¿En qué punto, si es que existe alguno, en el plano de las cargas el potencial eléctrico es cero? ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto P debido a las dos cargas en la base del triángulo?

27. **Problema de repaso.** Dos esferas aislantes con radios de 0.300 cm y 0.500 cm, masas de 0.100 kg y 0.700 kg y cargas de −2.00 μC y 3.00 μC se liberan desde el reposo cuando sus centros están separados 1.00 m. a) ¿A qué velocidad se mueve cada una cuando chocan? (*Sugerencia*: considere la conservación de la energía y la del momento lineal.) b) Si las esferas fuesen conductoras, ¿la rapidez sería mayor o menor que la calculada en la parte a)? Explique.

28. **Problema de repaso.** Dos esferas aislantes con radios r_1 y r_2, masas m_1 y m_2 y cargas $-q_1$ y q_2 se liberan desde el reposo cuando sus centros están separados por una distancia d. a) ¿A qué velocidad se mueve cada una cuando chocan? (*Sugerencia*: considere la conservación de la energía y la del momento lineal.) b) Si las esferas fuesen conductoras, ¿la rapidez sería mayor o menor que la calculada en la parte a)?

29. Un pequeño objeto esférico tiene una carga de 8.00 nC. ¿A qué distancia desde el centro del objeto el potencial es igual a 100 V? ¿50.0 V? ¿25.0 V? ¿El espaciamiento de las equipotenciales es proporcional al cambio en el potencial?

30. Dos cargas puntuales de igual magnitud se localizan a lo largo del eje y a distancias iguales sobre y debajo del eje x, como se muestra en la figura P25.30. a) Dibuje una gráfica del potencial en puntos a lo largo del eje x sobre el intervalo $-3a < x < 3a$. Debe graficar el potencial en unidades de k_eQ/a. b) Deje que la carga localizada en $-a$ sea negativa y grafique el potencial a lo largo del eje y sobre el intervalo $-4a < y < 4a$.

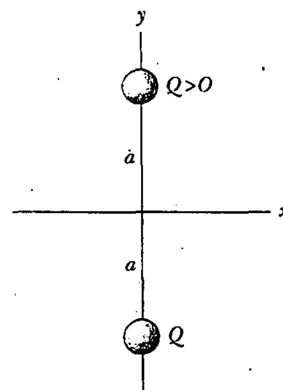


Figura P25.30

31. En los famosos experimentos de dispersión de Rutherford, que llevaron al modelo planetario del átomo, las partículas alfa (carga $+2e$, masa = 6.64×10^{-27} kg) fueron disparadas a un núcleo de oro (carga $+79e$). Una partícula alfa, al principio muy alejada del núcleo de oro, se dispara a una velocidad de 2.00×10^7 m/s directamente hacia el centro del núcleo. ¿Qué tanto se acerca la partícula alfa a este centro antes de regresarse? Suponga que el núcleo de oro permanece estacionario.

32. Un electrón parte desde el reposo a 3.00 cm del centro de una esfera aislante cargada de manera uniforme cuyo radio es de 2.00 cm y su carga total es de 1.00 nC. ¿Cuál es la rapidez del electrón cuando llega a la superficie de la esfera?

33. Calcule la energía requerida para conformar el arreglo de cargas que se muestra en la figura P25.33, donde a = 0.200 m, b = 0.400 m, y q = 6.00 μC.

34. Cuatro partículas idénticas tienen cada una carga q y masa m. Se liberan desde el reposo en los vértices de un cuadro de lado L. ¿Qué tan rápido se mueve cada carga cuando su distancia desde el centro del cuadro se duplica?

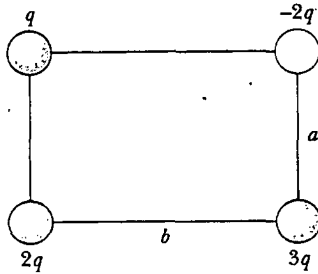


Figura P25.33

35. ¿Cuánto trabajo se requiere para juntar ocho cargas puntuales idénticas, cada una de magnitud q en las esquinas de un cubo de lado s?

Sección 25.4 Obtención del valor del campo eléctrico a partir del potencial eléctrico

36. El potencial en una región entre $x = 0$ y $x = 6.00$ m es $V = a + bx$, donde $a = 10.0$ V y $b = -7.00$ V/m. Determine a) el potencial en $x = 0$, 3.00 m y 6.00 m, y b) la magnitud y dirección del campo eléctrico en $x = 0$, 3.00 m y 6.00 m.

WEB 37. Sobre cierta región del espacio, el potencial eléctrico es $V = 5x - 3x^2y + 2yz^2$. Encuentre las expresiones para las componentes x, y y z del campo eléctrico sobre esa región. ¿Cuál es la magnitud del campo en el punto P, el cual tiene coordenadas (1, 0, −2) m?

38. El potencial eléctrico dentro de un conductor esférico cargado de radio R está dado por $V = k_eQ/R$ y en el exterior el potencial está dado por $V = k_eQ/r$. Utilizando $E_r = -dV/dr$, obtenga el campo eléctrico a) en el interior y b) afuera de esta distribución de carga.

39. En el ejemplo 25.7 se demostró que el potencial en un punto P a una distancia a sobre un extremo de una barra de longitud ℓ cargada uniformemente que se encuentra a lo largo del eje x es

$$V = \frac{k_eQ}{\ell}\ln\left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + a^2}}{a}\right)$$

Utilice este resultado para obtener la expresión correspondiente a la componente y del campo eléctrico en P. (*Sugerencia*: sustituya a con y.)

40. Cuando una esfera conductora descargada de radio a se coloca en el origen de un sistema de coordenadas xyz que está en un campo eléctrico inicialmente uniforme $\mathbf{E} = E_0\mathbf{k}$, el potencial eléctrico resultante es

$$V(x, y, z) = V_0 - E_0z + \frac{E_0a^3z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

para los puntos afuera de la esfera, donde V_0 es el potencial eléctrico (constante) en el conductor. Utilice esta ecuación para determinar las componentes x, y y z del campo eléctrico resultante.

Sección 25.5 Potencial eléctrico debido a distribuciones de carga continuas

41. Considere un anillo de radio R con carga total Q distribuida uniformemente sobre su perímetro. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre el punto en el centro del anillo y un punto sobre su eje a una distancia $2R$ del centro?

42. *Compare este problema con el problema 33 del capítulo 23.* Una barra aislante de 14.0 cm de longitud cargada de manera uniforme se dobla en la forma de un semicírculo, como se muestra en la figura P23.33. Si la barra tiene una carga total de −7.50 μC, encuentre el potencial eléctrico en O, el centro del semicírculo.

43. Una barra de longitud L (Fig. P25.43) se encuentra a lo largo del eje x con su extremo izquierdo en el origen y tiene una densidad de carga no uniforme $\lambda = \alpha x$ (donde α es una constante positiva). a) ¿Cuáles son las unidades de α? b) Calcule el potencial eléctrico en A.

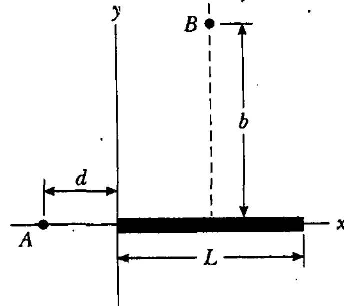


Figura P25.43 Problemas 43 y 44.

44. Para el arreglo descrito en el problema anterior calcule el potencial eléctrico en un punto B que está sobre el bisector perpendicular de la barra a una distancia b encima del eje x.

45. Calcule el potencial eléctrico en el punto P sobre el eje del anillo mostrado en la figura P25.45, el cual tiene una densidad de carga uniforme σ.

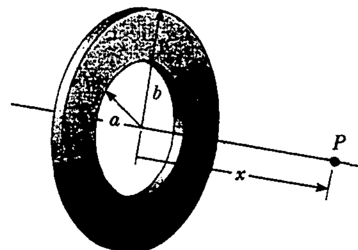


Figura P25.45

46. Un alambre de longitud finita, que tiene una densidad de carga lineal uniforme λ, se dobla en la forma indicada en la figura P25.46. Encuentre el potencial eléctrico en el punto O.

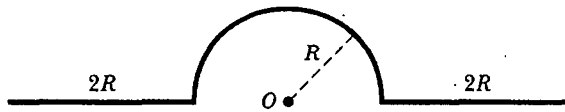


Figura P25.46

Sección 25.6 Potencial eléctrico debido a un conductor cargado

47. ¿Cuántos electrones deberían extraerse de un conductor esférico, inicialmente descargado, de 0.300 m de radio, para producir un potencial de 7.50 kV en la superficie?
48. Dos conductores esféricos cargados se conectan mediante un largo alambre conductor, y una carga de 20.0 μC se pone en la combinación. a) Si una esfera tiene un radio de 4.00 cm y el radio de la otra es de 6.00 cm, ¿cuál es el campo eléctrico cerca de la superficie de cada esfera? b) ¿Cuál es el potencial eléctrico de cada esfera?

WEB 49. Un conductor esférico tiene un radio de 14.0 cm y una carga de 26.0 μC. Calcule el campo eléctrico y el potencial eléctrico en a) $r = 10.0$ cm, b) $r = 20.0$ cm, y c) $r = 14.0$ cm del centro.

50. Dos cascarones conductores esféricos y concéntricos de radios $a = 0.400$ m y $b = 0.500$ m están conectados por medio de un alambre delgado, como se muestra en la figura P25.50. Si una carga total $Q = 10.0$ μC se pone en el sistema, ¿cuánta carga queda sobre cada esfera?

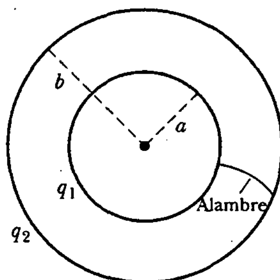


Figura P25.50

(Opcional)
Sección 25.7 El experimento de la gota de aceite de Millikan

(Opcional)
Sección 25.8 Aplicaciones de la electrostática

51. Considere un generador Van de Graaff con un domo de 30.0 cm de diámetro que opera en aire seco. a) ¿Cuál es el potencial máximo del domo? b) ¿Cuál es la carga máxima sobre el domo?
52. El domo esférico de un generador Van de Graaff puede elevarse a un potencial máximo de 600 kV; entonces carga adicional se fuga en chispas, al presentarse fallas del aire seco circundante. Determine a) la carga sobre el domo y b) el radio del domo.

PROBLEMAS ADICIONALES

53. El modelo de gota líquida del núcleo sugiere que oscilaciones de alta energía de ciertos núcleos pueden dividir el núcleo en dos fragmentos distintos más unos cuantos neutrones. Los fragmentos adquieren energía cinética de su mutua repulsión de Coulomb. Calcule la energía potencial eléctrica (en electrón volts) de dos fragmentos esféricos de un núcleo de uranio que tiene las siguientes cargas y radios: $38e$ y 5.50×10^{-15} m; $54e$ y 6.20×10^{-15} m. Suponga que la carga está distribuida de manera uniforme por todo el volumen de cada fragmento esférico y que sus superficies están inicialmente en contacto en reposo. (Los electrones que rodean el núcleo pueden ignorarse.)
54. En un día seco de invierno usted arrastra sus zapatos con suela de cuero sobre una alfombra y recibe una descarga cuando extiende la punta de su dedo hacia una manija metálica. En un cuarto oscuro usted ve una chispa quizá de 5 mm de largo. Realice estimaciones de orden de magnitud de a) su potencial eléctrico y b) la carga sobre su cuerpo antes de que usted toque la manija. Explique sus razonamientos.
55. La distribución de carga que se muestra en la figura P25.55 se conoce como cuadrupolo lineal. a) Demuestre que el potencial en un punto sobre el eje x, donde $x > a$, es

$$V = \frac{2k_eQa^2}{x^3 - xa^2}$$

b) Muestre que la expresión obtenida en a) cuando $x \gg a$ se reduce a

$$V = \frac{2k_eQa^2}{x^3}$$

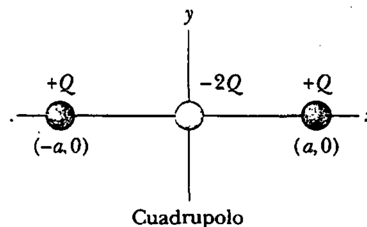


Figura P25.55

56. a) Emplee el resultado exacto del problema 55 para determinar el campo eléctrico en cualquier punto a lo largo del eje del cuadrupolo lineal para $x > a$. b) Evalúe E en $x = 3a$ si $a = 2.00$ mm y $Q = 3.00$ μC.
57. A una cierta distancia de una carga puntual, la magnitud del campo eléctrico es de 500 V/m, y el potencial eléctrico es igual a −3.00 kV. a) ¿Cuál es la distancia a la carga? b) ¿Cuál es la magnitud de la carga?
58. Un electrón es liberado desde el reposo sobre el eje de un anillo uniforme cargado positivamente, a 0.100 m del

centro del anillo. Si la densidad de carga lineal del anillo es de +0.100 μC/m y el radio del anillo es de 0.200 m, ¿cuán rápido se moverá el electrón cuando alcance el centro del anillo?

59. a) Considere un cascarón cilíndrico cargado uniformemente que tiene una carga total Q, radio R y altura h. Determine el potencial electrostático en un punto a una distancia d del lado derecho del cilindro, como se muestra en la figura P25.59. (*Sugerencia*: emplee el resultado del ejemplo 25.5 tratando al cilindro como una colección de anillos de carga.) b) Utilice el resultado del ejemplo 25.6 para resolver el mismo problema en el caso de un cilindro sólido.

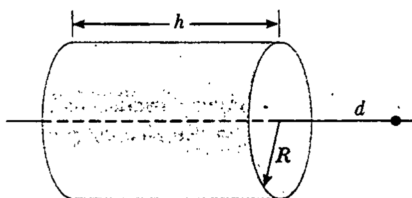


Figura P25.59

60. Dos placas paralelas que tienen carga de igual magnitud pero signos opuestos están separadas 12.0 cm. Cada placa tiene una densidad de carga superficial de 36.0 nC/m². Un protón se libera desde el reposo en la placa positiva. Determine a) la diferencia de potencial entre las placas, b) la energía del protón cuando llega a la placa negativa, c) la rapidez del protón antes de incidir en la placa negativa, d) la aceleración del protón, y e) la fuerza sobre el protón. f) A partir de la fuerza encuentre la magnitud del campo eléctrico y muestre que es igual a la encontrada a partir de las densidades de carga sobre las placas.

61. Calcule el trabajo que debe efectuarse para cargar un cascarón esférico de radio R hasta una carga total Q.

62. Un contador Geiger-Müller es un detector de radiación que se compone de un cilindro hueco (el cátodo) de radio interior r_a y un alambre cilíndrico coaxial (el ánodo) de radio r_b (Fig. P25.62). La carga por unidad de longitud del ánodo es λ, en tanto que la carga por unidad de longitud del cátodo es $-\lambda$. a) Muestre que la magnitud de la diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro en la región sensible del detector es

$$\Delta V = 2k_e\lambda \ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)$$

b) Muestre que la magnitud del campo eléctrico sobre esa región está dada por

$$\Delta E = \frac{V}{\ln(r_a/r_b)}\left(\frac{1}{r}\right)$$

donde r es la distancia desde el centro del ánodo al punto donde se va a calcular el campo.

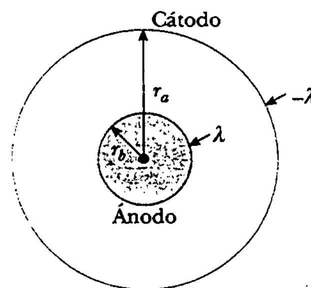


Figura P25.62

WEB 63. Según la ley de Gauss, el campo eléctrico establecido por una línea de carga uniforme es

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\right)\hat{\mathbf{r}}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario que apunta radialmente alejándose de la línea y λ es la carga por unidad de longitud a lo largo de la línea. Obtenga una expresión para la diferencia de potencial entre $r = r_1$ y $r = r_2$.

64. Una carga puntual q se localiza en $x = -R$, y una carga puntual $-2q$ se encuentra en el origen. Demuestre que la superficie equipotencial que tiene potencial cero es una esfera centrada en $(-4R/3, 0, 0)$ y tiene un radio $r = 2R/3$.

65. Considere dos cascarones esféricos delgados y conductores, como los que se muestran en la vista transversal de la figura P25.65. El cascarón interno tiene un radio r_1 = 15.0 cm y una carga de 10.0 nC. El cascarón exterior tiene un radio r_2 = 30.0 cm y una carga de −15.0 nC. Encuentre a) el campo eléctrico **E** y b) el potencial eléctrico V en las regiones A, B y C, con $V = 0$ en $r = \infty$.

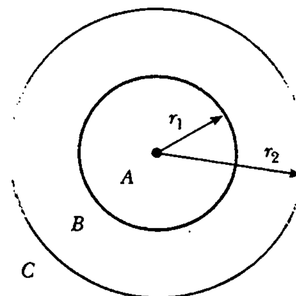


Figura P25.65

66. El eje x es el eje de simetría de un anillo con carga uniforme, de radio R y carga Q (Fig. P25.66). Una carga puntual Q de masa M se localiza en el centro del anillo. Cuando éste se desplaza ligeramente la carga puntual se

acelera a lo largo del eje x hacia el infinito. Demuestre que la rapidez final de la carga puntual es

$$v = \left(\frac{2k_eQ^2}{MR}\right)^{1/2}$$

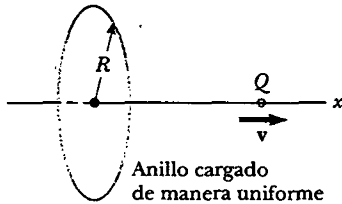


Figura P25.66

67. Una hoja infinita de carga que tiene una densidad de carga superficial de 25.0 nC/m^2 colocada en el plano yz, pasa a través del origen y está a un potencial de 1.00 kV en el punto $y = 0$, $z = 0$. Un alambre largo que tiene una densidad de carga lineal de 80.0 nC/m está paralelo al eje y y cruza al eje x en $x = 3.00$ m. a) Determine, como una función de x, el potencial a lo largo del eje x entre el alambre y la hoja. b) ¿Cuál es la energía potencial de una carga de 2.00 nC colocada en $x = 0.800$ m?

68. La delgada barra cargada uniformemente que se muestra en la figura P25.68 tiene una densidad de carga lineal λ. Encuentre una expresión para el potencial eléctrico en P.

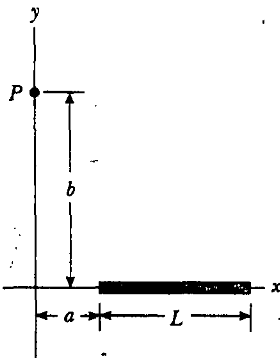


Figura P25.68

69. Un dipolo se localiza a lo largo del eje y como se muestra en la figura P25.69. a) En el punto P, el cual está alejado del dipolo ($r >> a$), el potencial eléctrico es

$$V = k_e \frac{p\cos\theta}{r^2}$$

donde $p = 2qa$. Calcule las componentes radial E_r y perpendicular E_θ del campo eléctrico asociado. Advierta que $E_\theta = -(1/r)(\partial V/\partial \theta)$. ¿Estos resultados parecen razonables para $\theta = 90°$ y 0°?, ¿para $r = 0$?

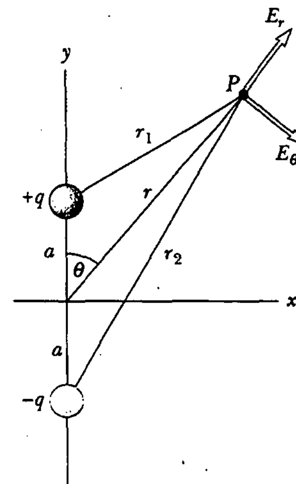


Figura P25.69

b) Para el arreglo de dipolo mostrado, exprese V en función de coordenadas cartesianas usando $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ y

$$\cos\theta = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

Con estos resultados, y considerando $r >> a$, calcule las componentes de campo E_x y E_y.

70. La figura P25.70 muestra varias líneas equipotenciales, cada una marcada por su potencial en volts. La distancia entre líneas de cuadriculado representa 1.00 cm. a) ¿La magnitud del campo es más grande en A o en B? ¿Por qué? b) ¿Cuál es el valor de **E** en B? c) Represente cómo se observa el campo dibujando al menos ocho líneas de campo.

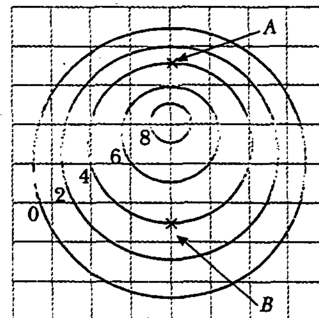


Figura P25.70

71. Un disco de radio R tiene una densidad de carga superficial no uniforme $\sigma = Cr$, donde C es una constante y r se mide desde el centro del disco (Fig. P25.71). Encuentre (por integración directa) el potencial en P.

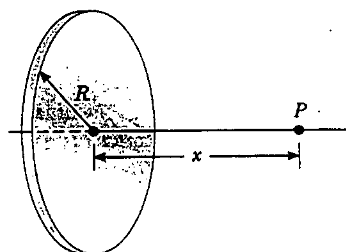


Figura P25.71

72. Una esfera sólida de radio R tiene una densidad de carga uniforme ρ y una carga total Q. Derive una expresión para su energía potencial eléctrica total. (*Sugerencia:* imagine que la esfera se construye añadiendo capas sucesivas de cascarones concéntricos de carga $dq = (4\pi r^2\,dr)\rho$ y use $dU = V\,dq$.)

73. Los resultados del problema 62 se aplican también a un precipitador electrostático (véanse las Figs. 25.28a y P25.62). Un voltaje aplicado $\Delta V = V_a - V_b = 50.0$ kV produce un campo eléctrico de 5.50 MV/m de magnitud en la superficie del alambre central. La pared cilíndrica exterior tiene un radio uniforme $r_a = 0.850$ m. a) ¿Cuál sería el radio r_b del alambre central? Usted necesitará resolver una ecuación trascendental. b) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en la pared exterior?

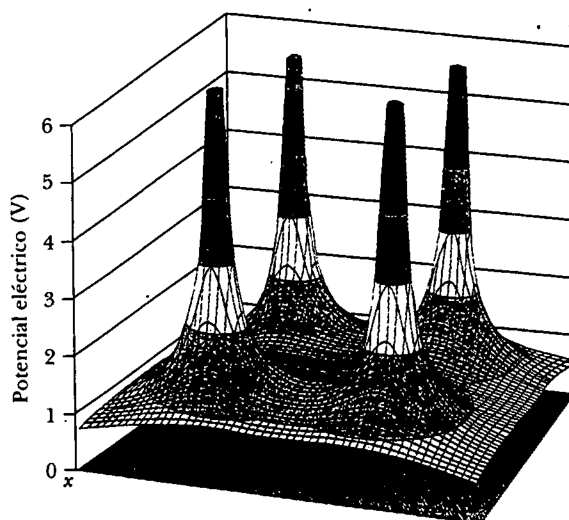
RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

25.1 Esto se hace si el campo eléctrico es uniforme. (Esto es precisamente lo que se hace en la siguiente sección.) Sin embargo, en general, un campo eléctrico cambia de un lugar a otro.

25.2 $B \to C$, $C \to D$, $A \to B$, $D \to E$. Moverse de B a C disminuye el potencial eléctrico por 2 V, de modo que el campo eléctrico realiza 2 J de trabajo sobre cada coulomb de carga que se mueve. Moverse de C a D disminuye el potencial eléctrico en 1 V, por lo que se realiza 1 J de trabajo sobre el campo. No se realiza trabajo para mover la carga de A a B porque el potencial eléctrico no cambia. Moverse de D a E incrementa el potencial eléctrico en 1 V, y, en consecuencia, el campo realiza −1 J de trabajo, al igual que elevar una masa a una elevación mayor provoca que el campo gravitacional efectúe trabajo negativo sobre la masa.

25.3 El potencial eléctrico disminuye en proporción inversa al radio (véase la Ec. 25.11). La magnitud del campo eléctrico disminuye como el recíproco del radio al cuadrado (véase la Ec. 23.4). Dado que el área de la superficie se incrementa como r^2 mientras la magnitud del campo eléctrico disminuye con $1/r^2$, el flujo eléctrico a través de la superficie permanece constante (véase la Ec. 24.1).

25.4 a) Sí. Considere cuatro cargas iguales colocadas en las esquinas de un cuadrado. La gráfica de potencial eléctrico para esta situación se muestra en la figura. En el centro del cuadrado, el campo eléctrico es cero porque los campos individuales de las cuatro cargas se cancelan, pero el potencial no es cero. Ésta también es la situación dentro de un conductor cargado. b) Sí de nuevo. En la figura 25.8, por ejemplo, el potencial eléctrico es cero en el centro del dipolo, pero la magnitud del campo en dicho punto no es cero. (Las dos cargas en un dipolo son, por definición, de signo opuesto; por ende, las líneas de campo eléctrico creadas por las dos cargas se extienden desde la carga positiva a la negativa y no se cancelan en ningún sitio.) Ésta es la situación presentada en el ejemplo 25.4c, en el cual las ecuaciones obtenidas dan $V = 0$ y $E_x \neq 0$.





ACERTIJO

Muchos componentes electrónicos portan una etiqueta de advertencia como ésta. ¿Qué contienen estos dispositivos que los hace tan peligrosos? ¿Por qué no estaría seguro si no se desconectara el equipo antes de abrir la cubierta? *(George Semple)*

capítulo

26

Capacitancia y dieléctricos

Líneas generales del capítulo

En este capítulo se analizan los *capacitores* —dispositivos que almacenan carga eléctrica—. Los capacitores se utilizan por lo común en una variedad muy amplia de circuitos eléctricos. Por ejemplo, se usan para sintonizar la frecuencia de receptores de radio, como filtros en suministro de energía eléctrica, para eliminar chispas en los sistemas de encendido de automóviles y como dispositivos de almacenamiento de energía en unidades de destellos electrónicas.

Un capacitor se compone de dos conductores separados por un aislante. Se verá que la capacitancia de un capacitor dado depende de su geometría y del material —llamado *dieléctrico*— que separa a los conductores.

26.1 DEFINICIÓN DE CAPACITANCIA

13.5 Considere dos conductores que tienen cargas de igual magnitud pero de signo opuesto, como se muestra en la figura 26.1. Tal combinación de dos conductores se denomina **capacitor**. Los conductores se conocen como *placas*. Debido a la presencia de las cargas existe una diferencia de potencial ΔV entre los conductores. Puesto que la unidad de diferencia de potencial es el volt, una diferencia de potencial suele ser llamada **voltaje**. Se usará este término para describir la diferencia de potencial a través de un elemento de circuito o entre dos puntos en el espacio.

¿Qué determina cuánta carga está sobre las placas del capacitor para un voltaje determinado? En otras palabras, ¿cuál es la *capacidad* del dispositivo para almacenar carga a un valor particular de ΔV? Los experimentos muestran que la cantidad de carga Q sobre un capacitor[1] es linealmente proporcional a la diferencia de potencial entre los conductores; es decir, $Q \propto \Delta V$. La constante de proporcionalidad depende de la forma y separación de los conductores.[2] Esta relación se puede escribir como $Q = C\,\Delta V$ si se define a la capacitancia como sigue:

Definición de capacitancia

La **capacitancia** C de un capacitor es la razón entre la magnitud de la carga en cualquiera de los dos conductores y la magnitud de la diferencia de potencial entre ellos:

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V} \qquad \textbf{(26.1)}$$

Advierta que, por definición, la *capacitancia siempre es una cantidad positiva*. Además, la diferencia de potencial ΔV siempre se expresa en la ecuación 26.1 como una cantidad positiva. Puesto que la diferencia de potencial aumenta linealmente con la carga almacenada, la proporción $Q/\Delta V$ es constante para un capacitor dado. En consecuencia, la capacitancia es una medida de la capacidad del capacitor para almacenar carga y energía potencial eléctrica.

En la ecuación 26.1 se ve que la capacitancia se expresa en el SI con las unidades coulomb por volt. La unidad de capacitancia del SI es el **farad** (F), denominada así en honor a Michael Faraday:

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$$

El farad es una unidad de capacitancia muy grande. En la práctica los dispositivos comunes tienen capacitancias que varían de microfarads (10^{-6} F) a picofarads (10^{-12} F). Para propósitos prácticos los capacitores casi siempre se marcan con "mF" para microfarads y "mmF" para micromicrofarads o, de manera equivalente, "pF" para picofarads.

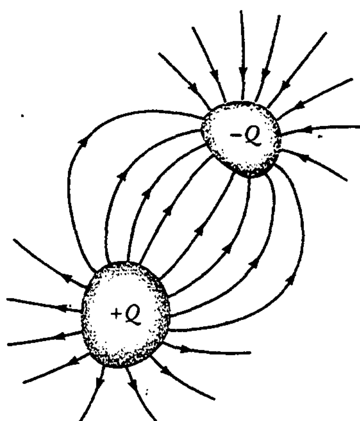
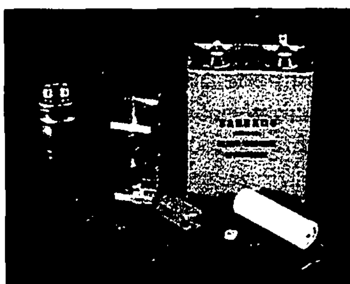


Figura 26.1 Un capacitor consiste de dos conductores que conducen cargas de igual magnitud pero signos opuestos.

[1] Aunque la carga total en los capacitores es cero (porque existe tanto exceso de carga positiva en un conductor como exceso de carga negativa en el otro), es una práctica común referirse a la magnitud de la carga sobre cualquiera de los dos conductores como "la carga en el capacitor".

[2] La proporcionalidad entre ΔV y Q puede probarse a partir de la ley de Coulomb o por medio de experimentos.



Colección de capacitores empleados en una variedad de aplicaciones. *(Henry Leap y Jim Lehman)*

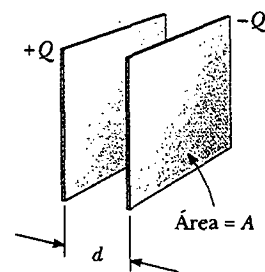


Figura 26.2 Un capacitor de placas paralelas consta de dos placas conductoras paralelas, cada una de área A, separadas por una distancia d. Cuando el capacitor se carga, las placas transportan iguales cantidades de carga. Una placa conduce carga positiva, y la otra conduce carga negativa.

Considere un capacitor formado a partir de un par de placas paralelas como se muestra en la figura 26.2. Cada placa está conectada a la terminal de una batería (no mostrada en la Fig. 26.2), que actúa como fuente de diferencia de potencial. Si el capacitor inicialmente está descargado, la batería establece un campo eléctrico en los alambres conectores cuando se realizan las conexiones. Centre la atención sobre la placa conectada a la terminal negativa de la batería. El campo eléctrico aplica una fuerza sobre los electrones en el alambre afuera de esta placa; esta fuerza provoca que los electrones se muevan hacia la placa. Este movimiento continúa hasta que la placa, el alambre y la terminal están todos al mismo potencial eléctrico. Una vez alcanzado este punto de equilibrio, ya no existe más una diferencia de potencial entre la terminal y la placa, y como resultado no existe un campo eléctrico en el alambre, por tanto, el movimiento de los electrones se detiene. La placa ahora porta una carga negativa. Un proceso similar ocurre en la otra placa del capacitor, con los electrones moviéndose desde la placa hacia el alambre, dejando la placa cargada positivamente. En esta configuración final la diferencia de potencial a través de las placas del capacitor es la misma que la que existe entre las terminales de la batería.

Suponga que se tiene un capacitor especificado en 4 pF. Esta clasificación significa que el capacitor puede almacenar 4 pC de carga por cada volt de diferencia de potencial entre los dos conductores. Si una batería de 9 V se conecta a través de este capacitor, uno de los conductores terminará con una carga neta de −36 pC y el otro finalizará con una carga neta de +36 pC.

26.2 CÁLCULO DE LA CAPACITANCIA

La capacitancia de un par de conductores con cargas opuestas se puede calcular de la siguiente manera: se supone una carga de magnitud Q, y la diferencia de potencial se calcula usando las técnicas descritas en el capítulo anterior. Entonces se usa la expresión $C = Q/\Delta V$ para evaluar la capacitancia. Como se podría esperar, el cálculo se efectúa con relativa facilidad si la geometría del capacitor es simple.

Se puede calcular la capacitancia de un conductor esférico aislado de radio R y carga Q si se supone que el segundo conductor que forma al capacitor es una esfera hueca concéntrica de radio infinito. El potencial eléctrico de la esfera de radio R es simplemente k_eQ/R, y $V = 0$ se establece en el infinito, como de costumbre, con lo que se tiene

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{k_eQ/R} = \frac{R}{k_e} = 4\pi\epsilon_0 R \qquad \textbf{(26.2)}$$

Esta expresión muestra que la capacitancia de una esfera cargada aislada es proporcional a su radio y es independiente tanto de la carga sobre la esfera como de la diferencia de potencial.

Experimento sorpresa

Enrolle algunos calcetines en pelotitas y rellene con ellos una caja de zapatos. ¿Qué determina cuántos calcetines caben en la caja? Relacione cuán fuerte empuja los calcetines con ΔV para un capacitor. ¿Cómo influye el tamaño de la caja en su "capacidad calcetinera"?

La capacitancia de un par de conductores depende de la geometría de los mismos. Se ilustra esto con tres geometrías familiares, es decir, placas paralelas, cilindros concéntricos y esferas concéntricas. En estos ejemplos se supone que los conductores cargados están separados por el vacío. El efecto de un material dieléctrico colocado entre los conductores se trata en la sección 26.5.

Capacitor de placas paralelas

Dos placas metálicas paralelas de igual área A están separadas por una distancia d, como se muestra en la figura 26.2. Una placa tiene una carga Q; la otra, carga $-Q$. Considere cómo influye la geometría de estos conductores en la capacidad de la combinación para almacenar carga. Recuerde que las cargas de signos iguales se repelen entre sí. Conforme un capacitor se carga por una batería, los electrones fluyen a la placa negativa y fuera de la placa positiva. Si las placas del capacitor son grandes, las cargas acumuladas se pueden distribuir sobre un área sustancial, y la cantidad de carga que se puede almacenar sobre una placa para una diferencia de potencial dada se incrementa conforme aumenta el área de la placa. En consecuencia, se espera que la capacitancia sea proporcional al área de la placa A.

Ahora considere la región que separa a las placas. Si la batería tiene una diferencia de potencial constante entre sus terminales, entonces el campo eléctrico entre las placas debe incrementarse conforme disminuye d. Imagine que las placas se mueven para acercarlas y considere la situación antes de que alguna carga haya tenido oportunidad de moverse en respuesta a este cambio. Puesto que ninguna carga se ha movido, el campo eléctrico entre las placas tiene el mismo valor, pero se extiende sobre una distancia más corta. Por ende, la magnitud de la diferencia de potencial entre las placas $\Delta V = Ed$ (Ec. 25.6) ahora es más pequeña. La diferencia entre este nuevo voltaje de capacitor y el voltaje de terminal de la batería ahora existe como una diferencia de potencial a través de los alambres que conectan la batería al capacitor. Esta diferencia de potencial resulta en un campo eléctrico en los alambres que conducen más carga a las placas, incrementando la diferencia de potencial entre las placas. Cuando la diferencia de potencial entre las placas de nuevo se empareja con la de la batería, la diferencia de potencial a través de los alambres cae de vuelta a cero, y el flujo de carga se detiene. En consecuencia, mover las placas para que se acerquen provoca que aumente la carga sobre el capacitor. Si d aumenta, la carga disminuye. Como resultado, se espera que la capacitancia del dispositivo sea inversamente proporcional a d.

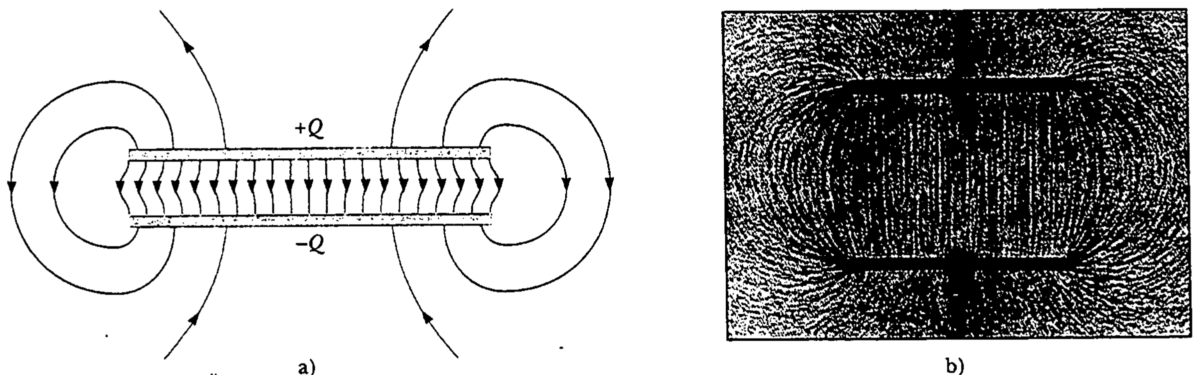


Figura 26.3 a) El campo eléctrico entre las placas de un capacitor de placas paralelas es uniforme cerca del centro pero no lo es cerca de los extremos. b) Patrón de campo eléctrico de dos placas paralelas conductoras cargadas de manera opuesta. Pequeñas piezas de hilo sobre una superficie de aceite se alinean con el campo eléctrico. *(b, Cortesía de Harold M. Waage, Princeton University)*

Estos argumentos físicos se pueden verificar con la siguiente derivación. La densidad de carga superficial sobre cualquier placa es $\sigma = Q/A$. Si las placas están muy cercanas una de la otra (en comparación con su longitud y ancho), se puede suponer que el campo eléctrico es uniforme entre las placas y cero en cualquier otra parte. De acuerdo con el último párrafo del ejemplo 24.8, el valor del campo eléctrico entre las placas es

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Puesto que el campo eléctrico entre las placas es uniforme, la magnitud de la diferencia de potencial entre las placas es igual a Ed (véase la Ec. 25.6); por tanto,

$$\Delta V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación 26.1 se encuentra que la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Qd/\epsilon_0 A}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \textbf{(26.3)}$$

Es decir, **la capacitancia de un capacitor de placas paralelas es proporcional al área de sus placas e inversamente proporcional a la separación de éstas**, tal como se esperaba a partir del argumento conceptual.

Un examen cuidadoso de las líneas del campo eléctrico de un capacitor de placas paralelas revela que el campo es uniforme en la región central entre las placas, como se muestra en la figura 26.3a. Sin embargo, el campo no es uniforme en los bordes de las placas. La figura 26.3b es una fotografía del patrón del campo eléctrico de un capacitor de placas paralelas. Advierta la naturaleza no uniforme del campo eléctrico en los extremos de las placas. Tales efectos de borde se pueden despreciar si la separación de la placa es pequeña en comparación con la longitud de las placas.

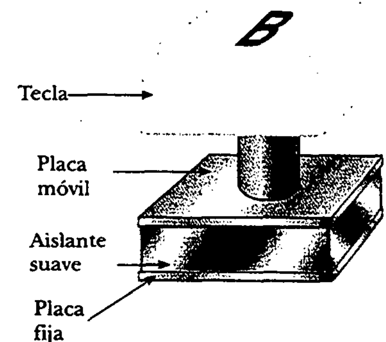


Figura 26.4 Un tipo de botón de un teclado de computadora.

Pregunta sorpresa 26.1

Muchos botones del teclado de una computadora están construidos de capacitores, como se muestra en la figura 26.4. Cuando las teclas se oprimen, el aislante suave entre las placas móviles y las fijas se comprime. Cuando la tecla se presiona, la capacitancia a) aumenta, b) disminuye o c) cambia en una forma que no se puede determinar debido a que el complicado circuito eléctrico conectado al botón del teclado puede provocar un cambio en ΔV.

EJEMPLO 26.1 Capacitor de placas paralelas

Un capacitor de placas paralelas tiene un área $A = 2.00 \times 10^{-4}$ m^2 y una separación de placa $d = 1.00$ mm. Encuentre su capacitancia.

Solución De la ecuación 26.3 se encuentra que

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)\left(\frac{2.00 \times 10^{-4}\text{m}^2}{1.00 \times 10^{-3}\text{m}}\right)$$

$$= 1.77 \times 10^{-12}\ \text{F} = 1.77\ \text{pF}$$

Ejercicio ¿Cuál es la capacitancia para una separación de placa de 3.00 mm?

Respuesta 0.590 pF.

Capacitores cilíndricos y esféricos

A partir de la definición de capacitancia es posible, en principio, encontrar la capacitancia de cualquier arreglo geométrico de conductores. Los siguientes ejemplos demuestran el uso de esta definición para calcular la capacitancia de las otras geometrías familiares que se han mencionado: cilindros y esferas.

EJEMPLO 26.2 El capacitor cilíndrico

Un conductor cilíndrico sólido de radio a y carga Q es coaxial con un cascarón cilíndrico de grosor despreciable, radio $b > a$ y carga $-Q$ (Fig. 26.5a). Encuentre la capacitancia de este capacitor cilíndrico si su longitud es ℓ.

Solución Es difícil aplicar argumentos físicos a esta configuración, aunque se puede esperar razonablemente que la capacitancia sea proporcional a la longitud del cilindro ℓ por la misma razón que la capacitancia de placas paralelas es proporcional al área de las placas: las cargas almacenadas tienen más espacio en las cuales ser distribuidas. Si se supone que ℓ es grande comparada con a y b, se puede ignorar los efectos de borde. En este caso el campo eléctrico es perpendicular a los ejes largos de los cilindros y está confinado a la región entre ellos (Fig. 26.5b). Debe calcular primero la diferencia de potencial entre los dos cilindros, la cual en general está dada por

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico en la región $a < r < b$. En el capítulo 24 se demostró, mediante la ley de Gauss, que la magnitud del campo eléctrico de una distribución de carga cilíndrica que tiene densidad de carga lineal λ es $E_r = 2k_e\lambda/r$ (Ec. 24.7). El mismo resultado se aplica aquí debido a que, de acuerdo con la ley de Gauss, la carga sobre el cilindro exterior no contribuye al campo eléctrico dentro de él. Con este resultado, y notando que en la figura 26.5b $\mathbf{E}$ está a lo largo de r, se encuentra que

$$V_b - V_a = -\int_a^b E_r dr = -2k_e\lambda\int_a^b \frac{dr}{r} = -2k_e\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Al sustituir este resultado en la ecuación 26.1, y utilizar el hecho de que $\lambda = Q/\ell$, se obtiene

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{2k_eQ}{\ell}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{\ell}{2k_e\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \qquad \textbf{(26.4)}$$

donde ΔV es la magnitud de la diferencia de potencial, dada por $\Delta V = |V_b - V_a| = 2k_e\lambda \ln(b/a)$, una cantidad positiva. Como se predijo, la capacitancia es proporcional a la longitud de los cilindros. Como podría esperarse, la capacitancia depende también de los radios de los dos cilindros conductores. De acuerdo con la ecuación 26.4 se ve que la capacitancia por unidad de longitud de una combinación de conductores cilíndricos concéntricos es

$$\frac{C}{\ell} = \frac{1}{2k_e\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \qquad \textbf{(26.5)}$$

Un ejemplo de este tipo de arreglo geométrico es un *cable coaxial*, el cual consta de dos conductores cilíndricos concéntricos separados por un aislante. El cable conduce señales eléctricas en los conductores interior y exterior. Tal geometría es especialmente útil para proteger las señales de cualquier posible influencia externa.

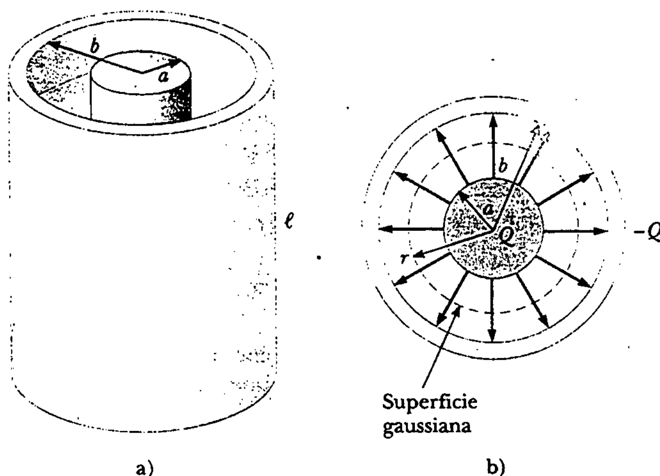


Figura 26.5 a) Un capacitor cilíndrico consta de un conductor cilíndrico sólido de radio a y longitud ℓ rodeado por un cascarón cilíndrico coaxial de radio b. b) Vista transversal. Las líneas punteadas representan la frontera de la superficie gaussiana cilíndrica de radio r y longitud ℓ.

EJEMPLO 26.3 El capacitor esférico

Un capacitor esférico consta de un cascarón conductor esférico de radio b y carga $-Q$ concéntrico con una esfera conductora más pequeña de radio a y carga Q (Fig. 26.6). Encuentre la capacitancia de este dispositivo.

Solución Como se demostró en el capítulo 24, el campo afuera de una distribución de carga simétrica esféricamente es radial y está dado por la expresión k_eQ/r^2. En es[illegible] el resultado se aplica al campo entre las esferas ($a <$ [illegible]

acuerdo con la ley de Gauss sólo la esfera interior contribuye a este campo. De este modo, la diferencia de potencial entre las esferas es

$$V_b - V_a = -\int_a^b E_r dr = -k_e Q \int_a^b \frac{dr}{r^2} = k_e Q\left[\frac{1}{r}\right]_a^b$$

$$= k_e Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

La magnitud de la diferencia de potencial es

$$\Delta V = |V_b - V_a| = k_e Q \frac{(b-a)}{ab}$$

Sustituyendo este valor por ΔV en la ecuación 26.1 se obtiene

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{ab}{k_e(b-a)} \qquad \textbf{(26.6)}$$

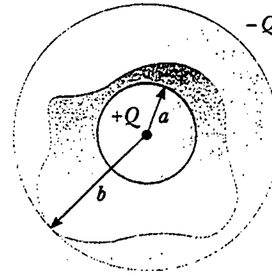


Figura 26.6 Un capacitor esférico consta de una esfera interior de radio a rodeada por un cascarón esférico concéntrico de radio b. El campo eléctrico entre las esferas está dirigido radialmente hacia afuera cuando la esfera interior tiene carga positiva.

Ejercicio Demuestre que conforme el radio b de la esfera exterior se acerca al infinito, la capacitancia tiende al valor $a/k_e = 4\pi\epsilon_0 a$.

Pregunta sorpresa 26.2

¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en la región afuera del capacitor esférico descrito en el ejemplo 26.3?

26.3 COMBINACIONES DE CAPACITORES

13.5 Es común que dos o más capacitores se combinen en circuitos eléctricos. La capacitancia equivalente de ciertas combinaciones puede calcularse utilizando los métodos descritos en esta sección. Los símbolos de circuitos para capacitores y baterías, junto con sus códigos de color usados en este texto, se proporcionan en la figura 26.7. El símbolo para el capacitor refleja la geometría del modelo más común para un capacitor —un par de placas paralelas—. La terminal positiva de la batería está al potencial más alto y se representa en el símbolo del circuito por la línea vertical más larga.

Combinación en paralelo

Dos capacitores conectados como se muestra en la figura 26.8a se conocen como una *combinación en paralelo* de capacitores. La figura 26.8b muestra un diagrama de circuito para esta combinación de capacitores. Las placas de la izquierda de los capacitores se conectan por un alambre conductor en la terminal positiva de la batería y están, por tanto, al mismo potencial eléctrico que la terminal positiva. De igual modo, las placas de la derecha están conectadas a la terminal negativa de la batería y, por ello, se encuentran al mismo potencial que la terminal negativa. De este modo, **las diferencias de potencial individuales a través de los capacitores conectados en paralelo son todas las mismas y son iguales a la diferencia de potencial aplicada a través de la combinación.**

En un circuito como el mostrado en la figura 26.8 el voltaje aplicado a través de la combinación es el voltaje terminal de la batería. Pueden ocurrir situaciones en las

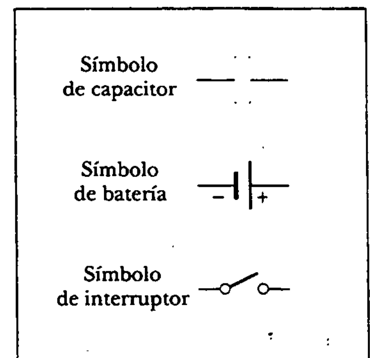


Figura 26.7 Símbolos de circuito para capacitores, baterías e interruptores. Advierta que los capacitores están en azul y las baterías e interruptores están en rojo.

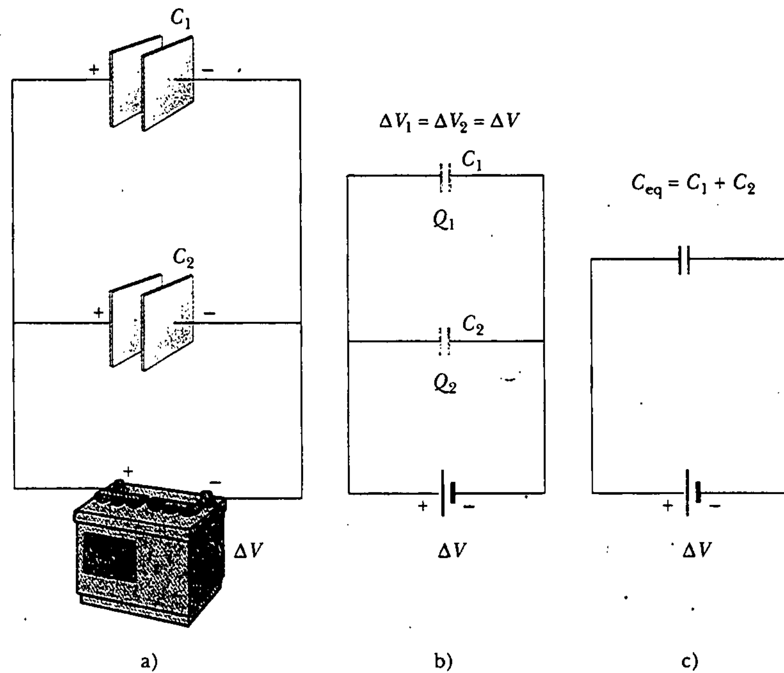


Figura 26.8 a) Combinación en paralelo de dos capacitores en un circuito eléctrico en el cual la diferencia de potencial a través de las terminales de la batería es ΔV. b) El diagrama de circuito para la combinación en paralelo. c) La capacitancia equivalente es $C_{eq} = C_1 + C_2$.

cuales la combinación en paralelo esté en un circuito con otros elementos de circuito; en tales situaciones se debe determinar la diferencia de potencial a través de la combinación mediante el análisis del circuito completo.

Cuando los capacitores se conectan primero en el circuito mostrado en la figura 26.8, los electrones se transfieren entre los alambres y las placas; esta transferencia deja las placas de la izquierda cargadas positivamente y a las placas derechas cargadas negativamente. La fuente de energía para esta transferencia de carga es la energía química interna almacenada en la batería, la cual se convierte en energía potencial eléctrica asociada con la separación de las cargas. El flujo de carga cesa cuando el voltaje a través de los capacitores es igual al que cruza las terminales de la batería. Los capacitores alcanzan su carga máxima cuando se interrumpe el flujo de carga. Denomine a las cargas máximas en los dos capacitores como Q_1 y Q_2. La *carga total* Q almacenada por los dos capacitores es

$$Q = Q_1 + Q_2 \qquad \textbf{(26.7)}$$

Esto es, **la carga total en los capacitores conectados en paralelo es la suma de las cargas en los capacitores individuales.** Puesto que los voltajes a través de los capacitores son los mismos, las cargas que ellos conducen son

$$Q_1 = C_1\Delta V \qquad Q_2 = C_2\Delta V$$

Suponga que desea sustituir estos dos capacitores por un *capacitor equivalente* con una capacitancia C_{eq}, como se muestra en la figura 26.8c. Este capacitor equivalente debe tener exactamente el mismo efecto sobre el circuito que el efecto de la combinación de los dos capacitores individuales. Es decir, el capacitor equivalente debe almacenar Q unidades de carga cuando esté conectado a la batería. Se puede ver en la figura 26.8c que el voltaje a través del capacitor equivalente también es ΔV por-

que el capacitor equivalente está conectado en forma directa a través de las terminales de la batería. En consecuencia, para el capacitor equivalente,

$$Q = C_{eq}\Delta V$$

La sustitución de estas tres relaciones para la carga en la ecuación 26.7 produce

$$C_{eq}\Delta V = C_1\Delta V + C_2\Delta V$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \quad \begin{pmatrix}\text{combinación}\\ \text{en paralelo}\end{pmatrix}$$

Si se extiende este tratamiento a tres o más capacitores conectados en paralelo, se encuentra que la capacitancia equivalente es

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots \quad \text{(combinación en paralelo)} \qquad \textbf{(26.8)}$$

Así pues, **la capacitancia equivalente de una combinación de capacitores en paralelo es mayor que cualesquiera de las capacitancias individuales.** Esto tiene sentido porque, en esencia, se están combinando las áreas de todas las placas de los capacitores cuando se conectan con alambre conductor.

Combinación en serie

Dos capacitores conectados como se muestra en la figura 26.9a se conocen como *combinación en serie* de capacitores. La placa izquierda del capacitor 1 y la placa derecha del capacitor 2 están conectadas a las terminales de una batería. Las otras dos placas están conectadas entre sí y a nada más; en consecuencia, forman un conductor aislado que inicialmente está descargado y debe continuar así para tener carga cero. Para analizar esta combinación comience por considerar los capacitores descargados y vea qué sucede después de que una batería se conecta al circuito. Cuan-

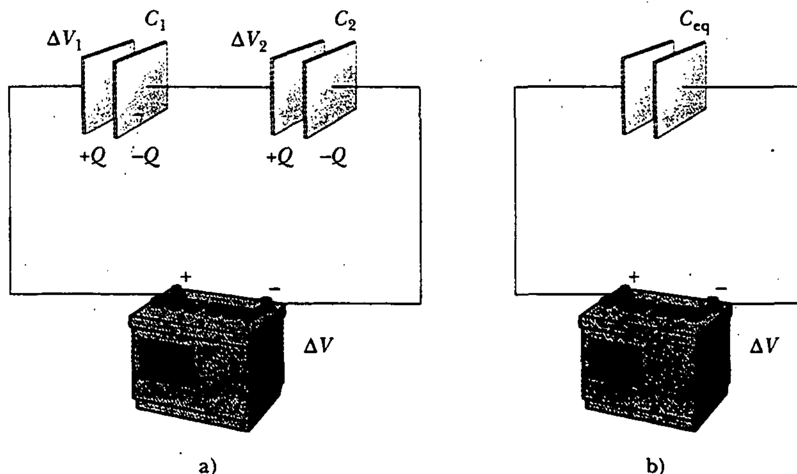


Figura 26.9 a) Combinación en serie de dos capacitores. Las cargas en los dos capacitores son las mismas. b) Los capacitores reemplazados por un capacitor individual equivalente. La capacitancia equivalente se puede calcular a partir de la relación

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

do la batería se conecta se transfieren electrones de la placa izquierda de C_1 a la placa derecha de C_2. A medida que esta carga negativa se acumula en la placa derecha de C_2, una cantidad equivalente de carga negativa es obligada a salir de la placa izquierda de C_2, y deja a ésta con un exceso de carga positiva. La carga negativa que sale de la placa izquierda de C_2 viaja a través del alambre conductor y se acumula en la placa derecha de C_1. Como resultado, todas las placas derechas ganan una carga $-Q$, mientras que todas las placas izquierdas tienen una carga $+Q$. De esta manera, **las cargas en los capacitores conectados en serie son las mismas.**

A partir de la figura 26.9a se ve que el voltaje ΔV a través de las terminales de la batería está dividido entre los dos capacitores:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \tag{26.9}$$

donde ΔV_1 y ΔV_2 son las diferencias de potencial a través de los capacitores C_1 y C_2, respectivamente. En general, **la diferencia de potencial total a través de cualquier número de capacitores conectados en serie es la suma de las diferencias de potencial a través de los capacitores individuales.**

Suponga que un capacitor equivalente tiene el mismo efecto sobre el circuito que la combinación en serie. Después de que está cargado completamente, el capacitor equivalente debe tener una carga de $-Q$ en su placa derecha y de $+Q$ en su placa izquierda. Aplicando la definición de capacitancia al circuito mostrado en la figura 26.9b se tiene

$$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}}$$

Puesto que la expresión $Q = C\Delta V$ puede aplicarse a cada capacitor mostrado en la figura 26.9a, la diferencia de potencial a través de cada uno de ellos es

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación 26.9, y observar que $\Delta V = Q/C_{eq}$, se tiene

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Cancelando Q se llega a la relación

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \begin{pmatrix}\text{combinación}\\ \text{en serie}\end{pmatrix}$$

Cuando este análisis se aplica a tres o más capacitores conectados en serie, la relación para la capacitancia equivalente es

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \quad \begin{pmatrix}\text{combinación}\\ \text{en serie}\end{pmatrix} \tag{26.10}$$

Esto demuestra que **la capacitancia equivalente de una combinación en serie siempre es menor que cualquier capacitancia individual en la combinación.**

EJEMPLO 26.4 Capacitancia equivalente

Encuentre la capacitancia equivalente entre *a* y *b* para la combinación de capacitores que se muestra en la figura 26.10a. Todas las capacitancias están en microfarads.

Solución Con las ecuaciones 26.8 y 26.10 se reduce la combinación paso a paso, como se indica en la figura. Los capacitores de 1.0 μF y 3.0 μF están en paralelo y se combinan de

acuerdo con la expresión $C_{eq} = C_1 + C_2 = 4.0\ \mu F$. Los capacitores de 2.0 μF y 6.0 μF también están en paralelo y tienen una capacitancia equivalente de 8.0 μF. En consecuencia, la rama superior en la figura 26.10b consta ahora de dos capacitores de 4.0 μF en serie, los cuales se combinan como sigue:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{4.0\ \mu F} + \frac{1}{4.0\ \mu F} = \frac{1}{2.0\ \mu F}$$

$$C_{eq} = \frac{1}{1/2.0\ \mu F} = 2.0\ \mu F$$

La rama inferior en la figura 26.10b se compone de dos capacitores de 8.0 μF en serie, la cual produce una capacitancia equivalente de 4.0 μF. Por último, los capacitores de 2.0 μF y 4.0 μF de la figura 26.10c están en paralelo y tienen, por tanto, una capacitancia equivalente de 6.0 μF.

Ejercicio Considere tres capacitores con capacitancias de 3.0 μF, 6.0 μF y 12 μF. Encuentre su capacitancia equivalente cuando se conectan a) en paralelo y b) en serie.

Respuesta a) 21 μF, b) 1.7 μF.

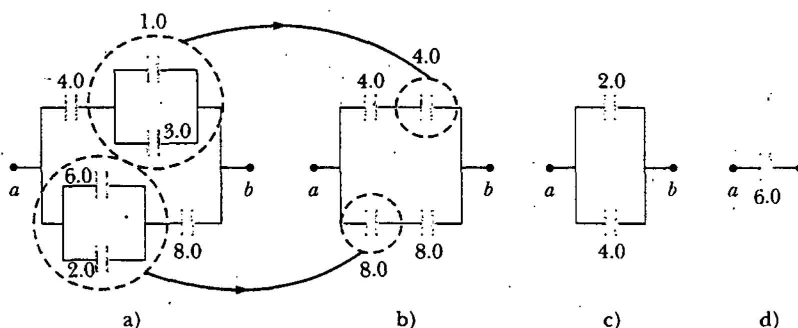


Figura 26.10 Para encontrar la capacitancia equivalente de los capacitores en la parte a) se reducen las varias combinaciones en pasos como se indican en las partes b), c) y d) usando las reglas para paralelos y series descritas en el texto.

26.4 ENERGÍA ALMACENADA EN UN CAPACITOR CARGADO

Casi todos quienes trabajan con equipo electrónico han comprobado en alguna ocasión que un capacitor puede almacenar energía. Si las placas de un capacitor cargado se conectan por medio de un conductor, como un alambre, la carga se mueve entre las placas y el alambre de conexión hasta que el capacitor se descarga. A menudo la descarga puede observarse como una chispa visible. Si usted toca accidentalmente las placas opuestas de un capacitor cargado, sus dedos actúan como una vía por la cual el capacitor podría descargarse, y el resultado es un choque eléctrico. El grado del choque que usted recibe depende de la capacitancia y del voltaje aplicado al capacitor. Dicho choque sería fatal si se presentaran altos voltajes, como en la alimentación eléctrica de un aparato de televisión. Puesto que las cargas se pueden almacenar en un capacitor aunque el aparato esté apagado, no basta con desconectar la televisión para que sea más seguro abrir la cubierta y tocar los componentes internos.

13.5

Considere un capacitor de placas paralelas inicialmente descargado, por lo que la diferencia de potencial inicial entre las placas es cero. Ahora imagine que el capacitor está conectado a una batería y adquiere una carga máxima Q. (Suponga que el capacitor se carga poco a poco de modo que el problema puede considerarse como un sistema electrostático.) Cuando el capacitor está conectado a la batería, los electrones en el alambre afuera de la placa conectada a la terminal negativa se mueven hacia la placa para darle una carga negativa. Los electrones en la placa conectada a la terminal positiva se mueven afuera de la placa hacia el alambre para dar a la placa una carga positiva. Por tanto, las cargas sólo se mueven una pequeña distancia en los alambres.

Para calcular la energía del capacitor se supondrá un proceso diferente —uno que de hecho no ocurre pero que proporciona el mismo resultado final. Se puede

Experimento sorpresa

He aquí cómo encontrar si su calculadora tiene un capacitor para proteger valores o programas durante cambios de batería. Almacene un número en la memoria de su calculadora, saque la batería de la calculadora durante un momento y a continuación vuélvala a poner de inmediato. ¿El número que almacenó permaneció mientras la batería estaba afuera de la calculadora? (¡Tal vez deba respaldar cualquier número o programa que esté almacenado en su calculadora antes de intentar esto!)

hacer esta suposición porque la energía en la configuración final no depende del proceso real de transferencia de carga. Suponga que se entrega y se captura una pequeña cantidad de carga positiva en la placa conectada a la terminal negativa y se aplica una fuerza que causa que esta carga positiva se mueva sobre la placa conectada a la terminal positiva. De este modo, se efectúa trabajo sobre la carga conforme ésta se transfiere desde una placa a la otra. Al principio no se requiere trabajo para transferir una pequeña cantidad de carga dq desde una placa a la otra.[3] Sin embargo, una vez que se ha transferido esta carga, existe una pequeña diferencia de potencial entre las placas. Por tanto, se debe realizar trabajo para mover carga adicional a través de esta diferencia de potencial. Mientras más y más carga se transfiera de una placa a la otra, la diferencia de potencial se incrementa en la misma proporción, y se requiere más trabajo.

Suponga que q es la carga en el capacitor en cierto instante durante el proceso de carga. En el mismo instante la diferencia de potencial en el capacitor es $\Delta V = q/C$. A partir de la sección 25.2 se sabe que el trabajo necesario para transferir un incremento de carga dq de la placa que porta la carga $-q$ a la placa que tiene la carga q (la cual está a mayor potencial eléctrico) es

$$dW = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq$$

Esto se ilustra en la figura 26.11. El trabajo total requerido para cargar el capacitor de $q = 0$ hasta cierta carga final $q = Q$ es

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q\, dq = \frac{Q^2}{2C}$$

El trabajo hecho al cargar el capacitor aparece como energía potencial eléctrica U almacenada en el capacitor. Por tanto, se puede expresar la energía potencial almacenada en un capacitor cargado en las siguientes formas:

Energía almacenada en un capacitor cargado

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2} Q \Delta V = \tfrac{1}{2} C(\Delta V)^2 \qquad \textbf{(26.11)}$$

Este resultado se aplica a cualquier capacitor, sin que importe su geometría. Se ve que para una capacitancia dada, la energía almacenada aumenta a medida que la

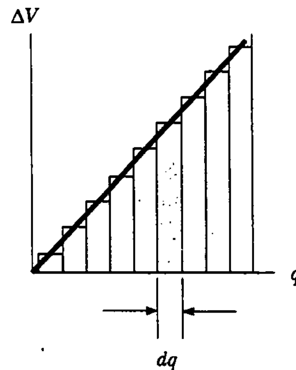


Figura 26.11 La gráfica de diferencia de potencial *versus* carga para un capacitor es una línea recta que tiene una pendiente $1/C$. El trabajo requerido para mover la carga dq a lo largo de la diferencia de potencial ΔV a través de las placas del capacitor está dado por el área del rectángulo sombreado. El trabajo total requerido para cargar el capacitor a una carga final Q es el área triangular bajo la línea recta, $W = \frac{1}{2} Q \Delta V$. (No olvide que 1 V = 1 J/C; por tanto, la unidad para el área es el joule.)

[3] Se usará la q minúscula para la carga variable en el capacitor mientras se está cargando, para distinguirla de la Q mayúscula, que es la carga total en el capacitor después de que está completamente cargado.

carga se incrementa y conforme crece la diferencia de potencial. En la práctica hay un límite para la energía (o carga) máxima que puede almacenarse porque, a un valor suficientemente grande de ΔV, al final ocurre una descarga entre las placas. Por esta razón los capacitores suelen etiquetarse con un voltaje de operación máximo.

Pregunta sorpresa 26.3

Usted tiene tres capacitores y una batería. ¿Cómo combinaría los capacitores y la batería en un circuito de modo que los capacitores almacenaran la máxima energía posible?

La energía almacenada en un capacitor puede considerarse como si se estuviera almacenando en el campo eléctrico creado entre las placas cuando se carga el capacitor. Esta descripción es razonable en vista del hecho de que el campo eléctrico es proporcional a la carga en el capacitor. Para un capacitor de placas paralelas la diferencia de potencial se relaciona con el campo eléctrico por medio de la relación $\Delta V = Ed$. Asimismo, su capacitancia es $C = \epsilon_0 A/d$ (Ec. 26.3) La sustitución de estas expresiones en la ecuación 26.11 produce

$$U = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}(E^2 d^2) = \frac{1}{2}(\epsilon_0 Ad)E^2 \qquad \textbf{(26.12)}$$

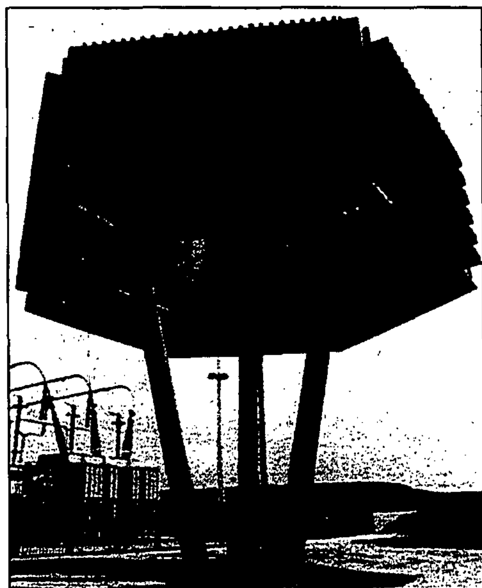
Energía almacenada en un capacitor de placas paralelas

Ya que el volumen V (volumen, ¡no voltaje!) ocupado por el campo eléctrico es Ad, la *energía por unidad de volumen* $u_E = U/V = U/Ad$, llamada *densidad de energía*, es

$$u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad \textbf{(26.13)}$$

Densidad de energía en un campo eléctrico

Aunque la ecuación 26.13 se obtuvo para un capacitor de placas paralelas, en general la expresión es válida. Es decir, la **densidad de energía en cualquier campo eléctrico es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico en un punto dado.**



Este banco de capacitores almacena energía eléctrica para ser usada en el acelerador de partículas en FermiLab, ubicado en las afueras de Chicago. Como la compañía eléctrica no puede proveer una cantidad de energía tan grande como para operar el equipo, estos capacitores se cargan lentamente de energía, la cual luego se "descarga" con rapidez en el acelerador. En este sentido la estructura es muy parecida al tanque de agua contra incendios en la parte alta de un edificio. El tanque colecta agua y la almacena para situaciones en las cuales sea necesario suministrar una gran cantidad de agua en corto tiempo. *(FermiLab Visual Media Services)*

EJEMPLO 26.5 Canalización eléctrica de dos capacitores cargados

Dos capacitores C_1 y C_2 (donde $C_1 > C_2$) están cargados a la misma diferencia de potencial inicial ΔV_i, pero con polaridad opuesta. Los capacitores cargados se separan de la batería y sus placas se conectan como se indica en la figura 26.12a. Los interruptores S_1 y S_2 se cierran después, como se muestra en la figura 26.12b. a) Determine la diferencia de potencial final ΔV_f entre a y b después de que se cierran los interruptores.

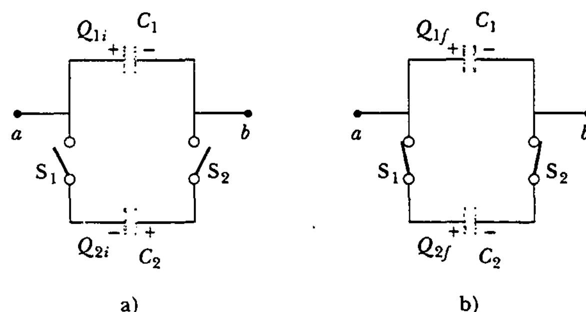


Figura 26.12

Solución Identifique las placas del lado izquierdo de los capacitores como un sistema aislado porque no están conectadas por conductores a las placas del lado derecho. Las cargas en las placas de la izquierda de los capacitores antes de que los interruptores se cierren son

$$Q_{1i} = C_1 \Delta V_i \qquad \text{y} \qquad Q_{2i} = -C_2 \Delta V_i$$

El signo negativo de Q_{2i} es necesario porque la carga sobre la placa izquierda del capacitor C_2 es negativa. La carga total Q en el sistema es

$$1) \qquad Q = Q_{1i} + Q_{2i} = (C_1 - C_2)\Delta V_i$$

Después de que se cierran los interruptores, la carga total en el sistema permanece sin cambio:

$$2) \qquad Q = Q_{1f} + Q_{2f}$$

Las cargas se redistribuyen hasta que el sistema entero está al mismo potencial ΔV_f. En consecuencia, la diferencia de potencial final a través de C_1 debe ser la misma que la diferencia de potencial final a través de C_2. Para satisfacer este requerimiento las cargas en los capacitores después de que los interruptores se cierran son

$$Q_{1f} = C_1 \Delta V_f \qquad \text{y} \qquad Q_{2f} = C_2 \Delta V_f$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda se tiene

$$\frac{Q_{1f}}{Q_{2f}} = \frac{C_1 \Delta V_f}{C_2 \Delta V_f} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$3) \qquad Q_{1f} = \frac{C_1}{C_2} Q_{2f}$$

Combinando las ecuaciones 2) y 3) se obtiene

$$Q = Q_{1f} + Q_{2f} = \frac{C_1}{C_2} Q_{2f} + Q_{2f} = Q_{2f}\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right)$$

$$Q_{2f} = Q\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)$$

Usando la ecuación 3) para encontrar Q_{1f} en términos de Q se tiene

$$Q_{1f} = \frac{C_1}{C_2} Q_{2f} = \frac{C_1}{C_2} Q\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right) = Q\left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)$$

Finalmente, usando la ecuación 26.1 para encontrar el voltaje a través de cada capacitor se encuentra que

$$\Delta V_{1f} = \frac{Q_{1f}}{C_1} = \frac{Q\left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)}{C_1} = \frac{Q}{C_1 + C_2}$$

$$\Delta V_{2f} = \frac{Q_{2f}}{C_2} = \frac{Q\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)}{C_2} = \frac{Q}{C_1 + C_2}$$

Como se notó con anterioridad, $\Delta V_{1f} = \Delta V_{2f} = \Delta V_f$.

Para expresar ΔV_f en términos de las cantidades dadas C_1, C_2 y ΔV_i se sustituye el valor de Q de la ecuación 1) para obtener

$$\Delta V_f = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)\Delta V_i$$

b) Encuentre la energía total almacenada en los capacitores antes y después de que los interruptores se cierran y la proporción de la energía final a la energía inicial.

Solución Antes de cerrar los interruptores la energía total almacenada en los capacitores es

$$U_i = \tfrac{1}{2} C_1 (\Delta V_i)^2 + \tfrac{1}{2} C_2 (\Delta V_i)^2 = \tfrac{1}{2} (C_1 + C_2) (\Delta V_i)^2$$

Después de que los interruptores se cierran, la energía total almacenada en los capacitores es

$$U_i = \tfrac{1}{2} C_1 (\Delta V_i)^2 + \tfrac{1}{2} C_2 (\Delta V_i)^2 = \tfrac{1}{2} (C_1 + C_2) (\Delta V_i)^2$$

$$= \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\left(\frac{Q}{C_1 + C_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1 + C_2}$$

Usando la ecuación 1) esto se puede expresar como

$$U_f = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{(C_1 + C_2)} = \frac{1}{2}\frac{(C_1 - C_2)^2(\Delta V_i)^2}{(C_1 + C_2)}$$

Por tanto, la proporción entre las energías almacenadas final e inicial es

$$\frac{U_f}{U_i} = \frac{\frac{1}{2}\frac{(C_1 - C_2)^2(\Delta V_i)^2}{(C_1 + C_2)}}{\frac{1}{2}(C_1 - C_2)(\Delta V_i)^2} = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)^2$$

Esta proporción es menor que la unidad, lo cual indica que la energía final es menor que la energía inicial. En principio se podría pensar que se ha violado la ley de conservación de la energía, pero éste no es el caso. La energía "faltante" se radia en forma de ondas electromagnéticas, como se verá en el capítulo 34.

Pregunta sorpresa 26.4

Usted carga un capacitor de placas paralelas, lo quita de la batería y evita que los alambres conectados a las placas se toquen entre sí. Cuando usted separa las placas, ¿las siguientes cantidades se incrementan, disminuyen o permanecen iguales? a) C; b) Q; c) E entre las placas; d) ΔV; e) la energía almacenada en el capacitor.

Pregunta sorpresa 26.5

Repita la pregunta sorpresa 26.4, pero en esta ocasión responda los cuestionamientos para la situación en la cual la batería permanece conectada al capacitor mientras usted separa las placas.

Un dispositivo en el cual los capacitores desempeñan un importante papel es el *desfibrilador* (Fig. 26.13). Cuando está completamente cargado, se almacenan hasta 360 J en el campo eléctrico de un gran capacitor en el desfibrilador. El aparato puede entregar toda esta energía a un paciente en aproximadamente 2 ms. (¡Esto es poco más o menos el equivalente a 3 000 veces la potencia de salida de un foco de 60 W!) El repentino choque eléctrico detiene la fibrilación (contracciones aleatorias) del corazón que con frecuencia acompaña los ataques cardiacos y ayuda a restaurar el ritmo correcto.

web Para aprender más acerca de la desfibrilación visite **www.physiocontrol.com**

La unidad de destello de una cámara también usa un capacitor, aunque la cantidad total de energía almacenada es mucho menor que la almacenada en un desfibrilador. Después de que el capacitor de la unidad de destello se ha cargado, activar el disparador de la cámara provoca que la energía almacenada sea enviada a través de un foco especial que ilumina brevemente al sujeto que será fotografiado.



Figura 26.13 En un hospital o en una escena de emergencia, usted podrá ver a un paciente mientras es revivido con un desfibrilador. Las paletas del desfibrilador se aplican al pecho del paciente y se envía un choque eléctrico al corazón a través de la cavidad torácica. El objetivo de esta técnica es restaurar el ritmo cardiaco normal. *(Adam Hart-Davis/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.)*



CAPACITORES CON DIELÉCTRICOS

Un **dieléctrico** es un material no conductor, como el caucho, el vidrio o el papel encerado. Cuando un material dieléctrico se inserta entre las placas de un capacitor aumenta la capacitancia. Si el dieléctrico llena por completo el espacio entre las placas, la capacitancia aumenta en un factor adimensional κ, conocido como **constante dieléctrica**. La constante dieléctrica es una propiedad del material y varía de un material a otro. En esta sección se analiza este cambio en capacitancia en términos de parámetros eléctricos tales como carga eléctrica, campo eléctrico y diferencia de potencial; en la sección 26.7 se estudiará el origen microscópico de estos cambios.

Es posible efectuar el siguiente experimento para ilustrar el efecto de un dieléctrico en un capacitor. Considere un capacitor de placas paralelas que sin un dieléctrico tiene carga Q_0 y capacitancia C_0. La diferencia de potencial en el capacitor es $\Delta V_0 = Q_0/C_0$. La figura 26.14a ilustra esta situación. La diferencia de potencial se mide mediante un *voltímetro*, aparato que se estudiará con mayor detalle en el capítulo 28. Advierta que no se muestra ninguna batería en la figura; además, debe suponer que no puede fluir carga a través de un voltímetro ideal, como se aprenderá en la sección 28.5. En consecuencia, no existe una trayectoria por la cual pueda fluir la carga y alterar la carga en el capacitor. Si ahora se inserta un dieléctrico entre las placas, como se muestra en la figura 26.14b, el voltímetro indica que el voltaje entre las placas disminuye a un valor ΔV. Los voltajes con y sin dieléctrico se relacionan mediante el factor κ del modo siguiente:

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\kappa}$$

Puesto que $\Delta V < \Delta V_0$, se ve que $\kappa > 1$.

En vista de que la carga Q_0 en el capacitor no cambia, se concluye que la capacitancia debe cambiar hacia el valor

$$C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{Q_0}{\Delta V_0/\kappa} = \kappa\frac{Q_0}{\Delta V_0}$$

La capacitancia de un capacitor lleno es más grande que la de uno vacío por un factor κ.

$$C = \kappa C_0 \tag{26.14}$$

Es decir, la capacitancia *aumenta* en el factor κ cuando el dieléctrico llena por completo la región entre las placas.[4] Para un capacitor de placas paralelas, donde $C_0 = \epsilon_0 A/d$ (Ec. 26.3), se puede expresar la capacitancia cuando el capacitor está lleno con un dieléctrico como

$$C = \kappa\frac{\epsilon_0 A}{d} \tag{26.15}$$

De acuerdo con las ecuaciones 26.3 y 26.15, parecería que la capacitancia puede hacerse muy grande mediante la reducción de d, la distancia entre las placas. En la práctica el valor más bajo de d está limitado por la descarga eléctrica que puede ocurrir a través del medio dieléctrico que separa las placas. Para cualquier separación dada d, el máximo voltaje que puede aplicarse a un capacitor sin producir una descarga depende de la **resistencia dieléctrica** (campo eléctrico máximo) del dieléctrico. Si la magnitud del campo eléctrico en el dieléctrico supera a la resistencia dieléctrica, las propiedades aislantes se deterioran y el dieléctrico empieza a conducir. Los materiales aislantes tienen valores de κ más grandes que la unidad y resistencias

[4] Si el dieléctrico se introduce mientras la diferencia de potencial permanece constante por me[illegible] una batería, la carga aumenta hasta un valor $Q = \kappa Q_0$. La carga adicional la proporciona la b[illegible] y la capacitancia seguirá aumentando por el factor κ.

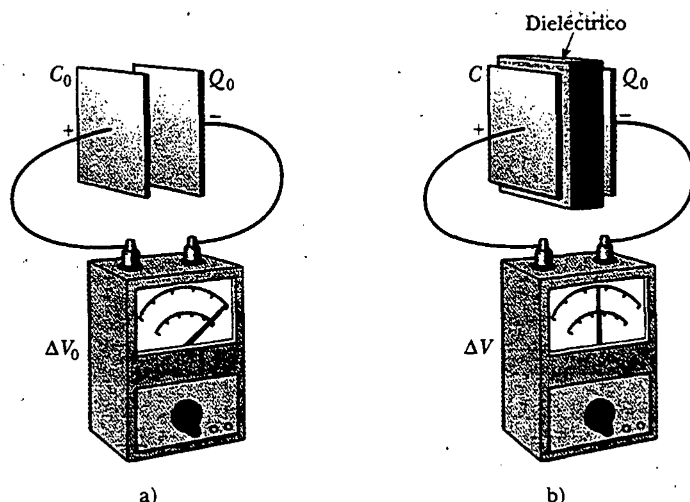


Figura 26.14 Un capacitor cargado a) antes y b) después de la inserción de un dieléctrico entre las placas. La carga en las placas permanece invariable, pero la diferencia de potencial disminuye desde ΔV_0 hasta $\Delta V = \Delta V_0/\kappa$. Por tanto, la capacitancia *aumenta* de C_0 a κC_0.

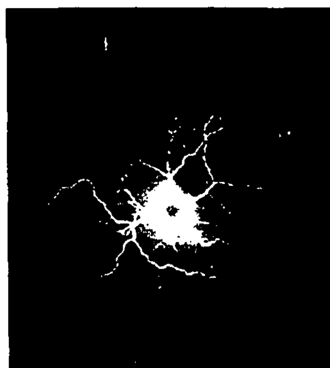
dieléctricas mayores que las del aire, como indica la tabla 26.1. De este modo, se ve que un dieléctrico brinda las siguientes ventajas:

- Aumenta la capacitancia
- Aumenta el voltaje de operación máximo
- Posible soporte mecánico entre las placas, lo cual permite que las placas estén muy juntas sin tocarse, de este modo d disminuye y C aumenta

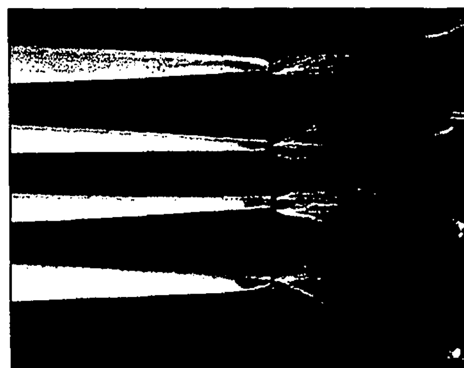
TABLA 26.1 Constantes y resistencias dieléctricas de varios materiales a temperatura ambiente

Material	Constante dieléctrica κ	Resistencia dieléctrica[a] (V/m)
Aire (seco)	1.000 59	3×10^6
Baquelita	4.9	24×10^6
Vidrio de cuarzo	3.78	8×10^6
Goma de neopreno	6.7	12×10^6
Nailon	3.4	14×10^6
Papel	3.7	16×10^6
Poliestireno	2.56	24×10^6
Cloruro de polivinilo	3.4	40×10^6
Porcelana	6	12×10^6
Vidrio pyrex	5.6	14×10^6
Aceite de silicio	2.5	15×10^6
Titanato de estroncio	233	8×10^6
Teflón	2.1	60×10^6
Vacío	1.000 00	—
Agua	80	—

[a] La resistencia dieléctrica es igual al campo eléctrico máximo que puede existir en un dieléctrico sin ruptura eléctrica. Advierta que estos valores dependen enormemente de la presencia de impurezas e imperfecciones en los materiales.



a)



b)

a) Fotografía Kirlian creada al dejar caer una bola de acero en un campo eléctrico de alta energía. La fotografía Kirlian también se conoce como *electrofotografía*. b) Chispas de una descarga de electricidad estática entre un tenedor y cuatro electrodos. Para crear esta imagen se usaron muchas chispas, pues sólo se forma una chispa para una descarga dada. Observe que el diente inferior descarga a los dos electrodos en la parte inferior derecha. La luz de cada chispa es creada por la excitación de los átomos de gas a lo largo de su trayectoria. *(a, Henry Dakin/Science Photo Library; b, Adam Hart-Davis/Science Photo Library)*

Tipos de capacitores

Los capacitores comerciales suelen fabricarse utilizando láminas metálicas intercaladas con delgadas hojas de papel impregnado de parafina o Mylar, los cuales sirven como material dieléctrico. Estas capas alternadas de hoja metálica y dieléctrico después se enrollan en un cilindro para formar un pequeño paquete (Fig. 26.15a). Los capacitores de alto voltaje por lo común constan de varias placas metálicas entrelazadas inmersas en aceite de silicio (Fig. 26.15b). Los capacitores pequeños en muchas ocasiones se construyen a partir de materiales cerámicos. Los capacitores variables (por lo común de 10 a 500 pF) suelen estar compuestos de dos conjuntos de placas metálicas entrelazadas, uno fijo y el otro móvil, con aire como dieléctrico.

Un *capacitor electrolítico* se usa con frecuencia para almacenar grandes cantidades de carga a voltajes relativamente bajos. Este dispositivo, mostrado en la figura 26.15c, consta de una hoja metálica en contacto con un *electrólito* —una solución que conduce electricidad debido al movimiento de iones contenidos en la solución. Cuando se aplica un voltaje entre la hoja y el electrólito, una delgada capa de óxido metálico (un aislante) se forma en la hoja y esta capa sirve como el dieléctrico. Se

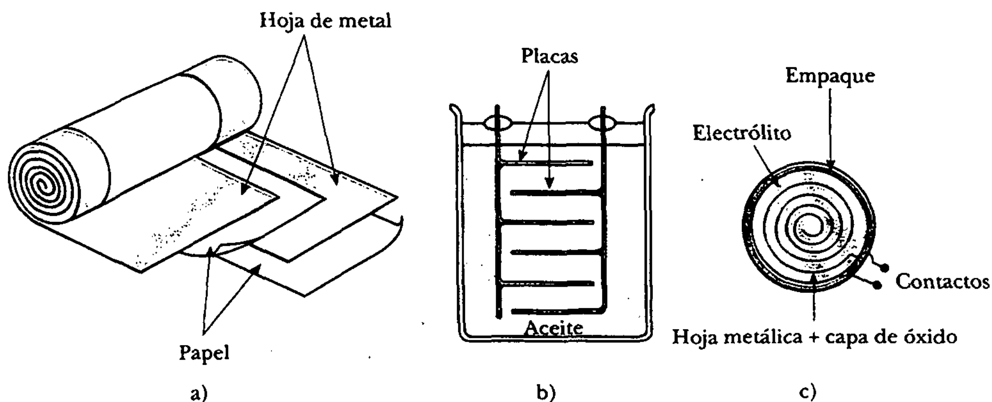


Figura 26.15 Tres diseños de capacitores comerciales. a) Un capacitor tubular, con las placas separadas por papel y enrolladas en un cilindro. b) Un capacitor de alto voltaje consta de muchas placas paralelas separadas por aceite aislante. c) Un capacitor electrolítico.

pueden obtener valores muy grandes de capacitancia en un capacitor electrolítico debido a que la capa dieléctrica es muy delgada y por ello la separación de placas es muy pequeña.

Los capacitores electrolíticos no son reversibles, como lo son muchos otros capacitores —éstos tienen polaridad, lo cual está indicado por signos positivo y negativo marcados sobre el dispositivo. Cuando se utilizan capacitores electrolíticos en circuitos, la polaridad debe alinearse de manera apropiada. Si la polaridad del voltaje aplicado es opuesta a la que se pretende, la capa de óxido se elimina y el capacitor conduce electricidad en lugar de almacenar carga.

Pregunta sorpresa 26.6

Si usted ha intentado en alguna ocasión colgar un cuadro, sabe que puede ser difícil localizar un taquete de madera en el cual colocar su clavo o tornillo. El buscador de taquete de un carpintero básicamente es un capacitor con sus placas arregladas lado a lado en lugar de enfrentarse una a la otra, como se muestra en la figura 26.16. Cuando el dispositivo se mueve sobre un taquete, ¿la capacitancia se incrementa o disminuye?

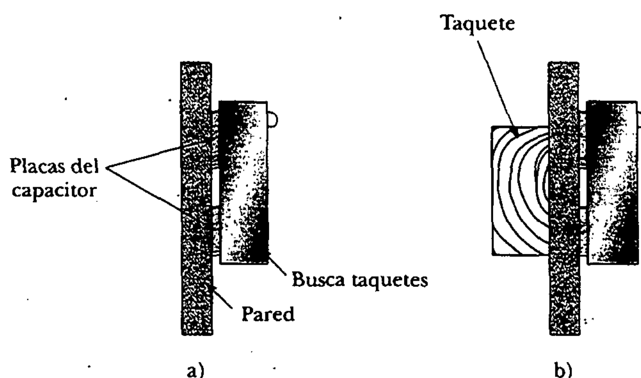


Figura 26.16 Un busca taquetes. a) Los materiales entre las placas del capacitor son la pared y el aire. b) Cuando el capacitor se mueve a través de un taquete en la pared, los materiales entre las placas son la pared y la madera. El cambio en la constante dieléctrica provoca que una luz de señalización se ilumine.

EJEMPLO 26.6 Un capacitor relleno de papel

Las placas de un capacitor de placas paralelas miden 2.0 cm por 3.0 cm y están separadas por un espesor de papel de 1.0 mm. a) Determine la capacitancia.

Solución Puesto que $\kappa = 3.7$ para el papel (véase la tabla 26.1), se tiene

$$C = \kappa\frac{\epsilon_0 A}{d} = 3.7(8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})\left(\frac{6.0\times10^{-4}\mathrm{m}^2}{1.0\times10^{-3}\mathrm{m}}\right)$$

$$= 20\times10^{-12}\ \mathrm{F} = 20\ \mathrm{pF}$$

b) ¿Cuál es la carga máxima que se puede colocar en el capacitor?

Solución A partir de la tabla 26.1 se ve que la resistencia dieléctrica del papel es 16×10^6 V/m. Como el espesor del papel es de 1.0 mm, el máximo voltaje que se puede aplicar antes de la ruptura es

$$\Delta V_{\text{máx}} = E_{\text{máx}} d = (16\times10^6\,\mathrm{V/m})(1.0\times10^{-3}\,\mathrm{m})$$

$$= 16\times10^3\,\mathrm{V}$$

Por tanto, la carga máxima es

$$Q_{\text{máx}} = C\Delta V_{\text{máx}} = (20\times10^{-12}\ \mathrm{F})(16\times10^3\ \mathrm{V}) = 0.32\ \mu\mathrm{C}$$

Ejercicio ¿Cuál es la máxima energía que puede almacenarse en el capacitor?

Respuesta 2.6×10^{-3} J.

EJEMPLO 26 Energía almacenada antes y después

Un capacitor de placas paralelas se carga con una batería hasta una carga Q_0, como se muestra en la figura 26.17a. Después se elimina la batería y se inserta entre las placas una lámina de material que tiene una constante dieléctrica κ, como se muestra en la figura 26.17b. Encuentre la energía almacenada en el capacitor antes y después de insertar el dieléctrico.

Solución La energía almacenada en ausencia del dieléctrico es (véase la Ec. 26.11):

$$U_0 = \frac{Q_0^2}{2C_0}$$

Después de que se quita la batería y se inserta el dieléctrico, la *carga en el capacitor permanece igual.* Por consiguiente, la energía almacenada en presencia del dieléctrico es

$$U = \frac{Q_0^2}{2C}$$

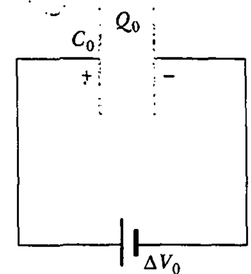
Pero la capacitancia en presencia del dieléctrico es $C = \kappa C_0$, por tanto, U se convierte en

$$U = \frac{Q_0^2}{2\kappa C_0} = \frac{U_0}{\kappa}$$

Puesto que $\kappa > 1$, la energía final es menor que la energía inicial. Esta energía "faltante" puede explicarse observando que, cuando se inserta el dieléctrico, éste es atraído hacia el interior del dispositivo (véase el siguiente análisis y la figura 26.18). Un agente externo debe efectuar trabajo negativo para evitar que el dieléctrico acelere. Este trabajo es simplemente la diferencia $U - U_0$. (De manera alternativa, el trabajo positivo hecho por el sistema sobre el agente externo es $U_0 - U$.)

Ejercicio Suponga que la capacitancia en ausencia de un dieléctrico es 8.50 pF y que el capacitor se carga hasta una diferencia de potencial de 12.0 V. Si la batería se desconecta y se inserta una lámina de poliestireno entre las placas, ¿cuál es $U_0 - U$?

Respuesta 373 pJ.



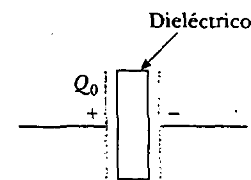


Figura 26.17

Como se expuso, la energía de un capacitor no conectado a una batería se reduce cuando se inserta un dieléctrico entre las placas, lo que significa que el agente externo que inserta el dieléctrico en el capacitor efectúa trabajo negativo sobre el dieléctrico. Esto, a su vez, supone que debe funcionar en el dieléctrico una fuerza que lo atrae hacia el interior del capacitor. Esta fuerza se origina de la naturaleza no uniforme del campo eléctrico del capacitor cerca de sus bordes, como se indica en la figura 26.18. La componente horizontal de este *campo del borde* actúa sobre las cargas inducidas en la superficie del dieléctrico produciendo una fuerza horizontal neta dirigida hacia el espacio entre las placas del capacitor.

Pregunta sorpresa 26.7

Un capacitor de placas paralelas completamente cargado permanece conectado a una batería mientras usted desliza un dieléctrico entre las placas. ¿Las siguientes cantidades se incrementan, disminuyen o permanecen iguales? a) C; b) Q; c) E entre las placas; d) ΔV; e) la energía almacenada en el capacitor.

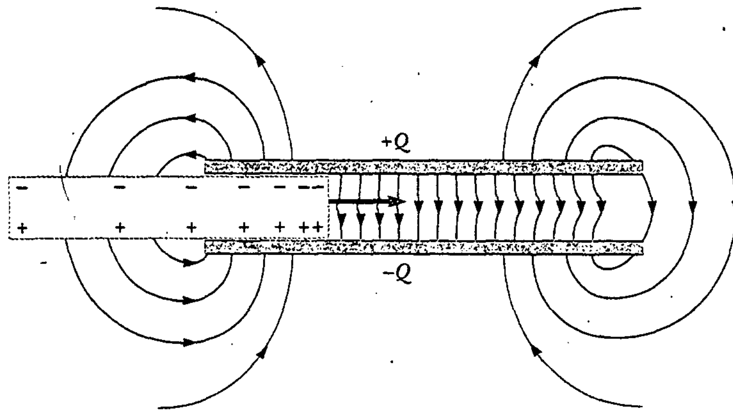


Figura 26.18 El campo eléctrico no uniforme cerca de los extremos de un capacitor de placas paralelas provoca que un dieléctrico sea atraído hacia el capacitor. Advierta que el campo actúa sobre las cargas superficiales inducidas en el dieléctrico, las cuales están distribuidas de manera no uniforme.

Sección opcional

26.6 DIPOLO ELÉCTRICO EN UN CAMPO ELÉCTRICO

Se ha analizado el efecto sobre la capacitancia de colocar un dieléctrico entre las placas de un capacitor. En la sección 26.7 se describirá el origen microscópico de este efecto. Sin embargo, antes de hacerlo, es necesario abundar en el estudio del dipolo eléctrico que se comenzó en la sección 23.4 (véase el ejemplo 23.6). El dipolo eléctrico consta de dos cargas de igual magnitud pero signo opuesto separadas por una distancia $2a$, como se muestra en la figura 26.19. El **momento de dipolo eléctrico** de esta configuración se define como el vector **p** que está dirigido de $-q$ a $+q$ a lo largo de la línea que une las cargas, y cuya magnitud es $2aq$:

$$p \equiv 2aq \tag{26.16}$$

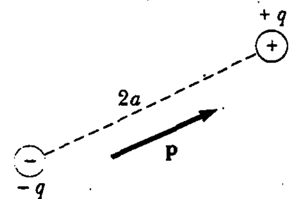


Figura 26.19 Un dipolo eléctrico consta de dos cargas de igual magnitud pero signo opuesto separadas por una distancia de $2a$. El momento de dipolo eléctrico **p** está dirigido de $-q$ a $+q$.

Suponga ahora que se pone un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme **E** como se ilustra en la figura 26.20. Se identifica **E** como el campo *externo* al dipolo, distinguiéndolo del campo *debido* al dipolo, el cual se analizó en la sección 23.4. El campo **E** es establecido por alguna otra distribución de carga, y el dipolo se coloca en este campo. Imagine que el momento de dipolo forma un ángulo θ con el campo.

Las fuerzas eléctricas que actúan sobre las dos cargas son iguales en magnitud pero opuestas en dirección, como se indica en la figura 26.20 (cada una tiene una magnitud $F = qE$). Así, la fuerza neta sobre el dipolo es cero. Sin embargo, las dos fuerzas producen un momento de torsión neto sobre el dipolo; como resultado, el dipolo tiende a girar en la dirección que proporciona al vector momento de dipolo la mayor alineación con el campo. El momento de torsión debido a la fuerza sobre la carga positiva en torno de un eje que pasa por O en la figura 26.20 es Fa sen θ, donde a sen θ es el brazo de momento de F alrededor de O. Esta fuerza tiende a producir una rotación en la dirección de las manecillas del reloj. El momento de torsión alrededor de O sobre la carga negativa es también Fa sen θ; aquí, de nuevo, la fuerza tiende a producir una rotación en la dirección de las manecillas del reloj. Por tanto, el momento de torsión neto respecto de O es

$$\tau = 2Fa \text{ sen } \theta$$

Ya que $F = qE$ y $p = 2aq$, se puede expresar τ como

$$\tau = 2aqE \text{ sen } \theta = pE \text{ sen } \theta \tag{26.17}$$

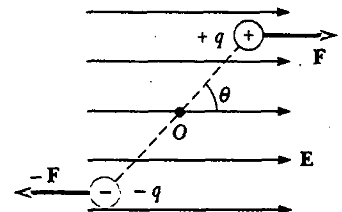


Figura 26.20 Un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme. El momento de dipolo **p** está a un ángulo θ al campo, lo que provoca que el dipolo experimente un momento de torsión.

Es conveniente expresar el momento de torsión en forma vectorial como el producto cruz de los vectores **p** y **E**:

Momento de torsión sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo.

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad \textbf{(26.18)}$$

Se puede determinar la energía potencial del sistema de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo como una función de su orientación respecto del campo. Para hacerlo debe tenerse en cuenta que un agente externo debe realizar trabajo para rotar el dipolo un ángulo tal que haga que el vector del momento de dipolo se vuelva menos alineado con el campo. El trabajo efectuado se almacena como energía potencial en el sistema, el cual se compone del dipolo y el campo externo. El trabajo dW requerido para rotar el dipolo a través de un ángulo $d\theta$ es $dW = \tau\, d\theta$ (Ec. 10.22). Ya que $\tau = pE \text{ sen } \theta$, y en vista de que el trabajo se transforma en energía potencial U, se encuentra que, para una rotación de θ_i a θ_f, el cambio de la energía potencial es

$$U_f - U_i = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} pE \text{ sen } \theta\, d\theta = pE \int_{\theta_i}^{\theta_f} \text{sen } \theta\, d\theta$$

$$= pE\left[-\cos\theta\right]_{\theta_i}^{\theta_f} = pE(\cos\theta_i - \cos\theta_f)$$

El término que contiene cos θ_i es una constante que depende de la orientación inicial del dipolo. Es conveniente elegir $\theta_i = 90°$, de modo que cos θ_i = cos 90° = 0. Además, elija $U_i = 0$ en $\theta_i = 90°$ como la energía potencial de referencia. En consecuencia, se puede expresar un valor general de $U = U_f$ como

$$U = -pE \cos\theta \quad \textbf{(26.19)}$$

Esta expresión para la energía potencial de un dipolo en un campo eléctrico se puede escribir como el producto punto de los vectores **p** y **E**:

Energía potencial de un dipolo en un campo eléctrico

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad \textbf{(26.20)}$$

Para desarrollar una interpretación conceptual de la ecuación 26.19 compare esta expresión con la que se describe la energía potencial de un objeto en el campo gravitacional de la Tierra, $U = mgh$ (véase el capítulo 8). La expresión gravitacional incluye un parámetro asociado con el objeto que se coloca en el campo —su masa m. De manera similar, la ecuación 26.19 incluye un parámetro del objeto en el campo eléctrico— su momento de dipolo p. La expresión gravitacional incluye la magnitud del campo gravitacional g. De igual modo, la ecuación 26.19 incluye la magnitud del campo eléctrico E. Hasta aquí estas dos contribuciones a las expresiones de la energía potencial aparecen análogas. Sin embargo, la contribución final es algo diferente en los dos casos. En la expresión gravitacional la energía potencial depende de cuán alto se eleve al objeto medido por h. En la ecuación 26.19 la energía potencial depende del ángulo θ a través del cual se gira el dipolo. En ambos casos se está haciendo un cambio en el sistema. En el caso gravitacional el cambio involucra mover un objeto en un sentido *traslacional*, mientras que en el caso eléctrico el cambio involucra mover un objeto en un sentido *rotacional*. Sin embargo, en ambos casos, una vez realizado el cambio, el sistema tiende a regresar a su configuración original cuando el objeto es liberado: el objeto de masa m cae de vuelta al suelo, y el dipolo comienza a rotar de regreso hacia la configuración en la cual estaba alineado con el campo. En consecuencia, aparte del tipo de movimiento, las expresiones para la energía potencial en estos dos casos son similares.

Se afirma que las moléculas están *polarizadas* cuando hay una separación entre la posición promedio de las cargas negativas y la posición promedio de las cargas positivas en la molécula. En algunas moléculas, como el agua, esta condición siempre está presente. Tales moléculas se conocen como **moléculas polares.** Las moléculas que no poseen una polarización permanente se llaman **moléculas no polares.**

Se puede comprender la polarización permanente del agua al examinar la geometría de la molécula del agua. Ésta se encuentra arreglada de modo que el átomo de oxígeno está ligado a los átomos de hidrógeno con un ángulo de 105° entre los dos enlaces (Fig. 26.21). El centro de la distribución de carga negativa está cerca del átomo de oxígeno, y el centro de la distribución de carga positiva está en un punto a la mitad de la línea que une los átomos de hidrógeno (el punto marcado con × en la figura 26.21). Se puede modelar la molécula de agua y otras moléculas polares como dipolos porque las posiciones promedio de las cargas positiva y negativa actúan como cargas puntuales. Como resultado, se puede aplicar el análisis de los dipolos al comportamiento de las moléculas polares.

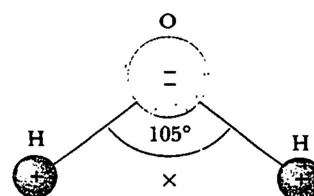


Figura 26.21 La molécula de agua H_2O tiene una polarización permanente debido a su geometría curva. El centro de la distribución de carga positiva está en el punto ×.

Los hornos de microondas sacan ventaja de la naturaleza polar de la molécula del agua. Cuando están funcionando, los hornos de microondas generan un campo eléctrico que cambia rápidamente, lo cual provoca que las moléculas polares se balanceen hacia atrás y hacia adelante absorbiendo energía del campo en el proceso. Puesto que las moléculas amontonadas chocan una con otra, la energía que absorben del campo se convierte en energía interna, lo cual corresponde a un incremento en la temperatura de la comida.

Otro escenario casero en el cual se explota la estructura dipolar del agua es al lavar con agua y jabón. La grasa y el aceite están hechos de moléculas no polares, las cuales generalmente no son atraídas hacia el agua. El agua del grifo no es muy útil para remover este tipo de mugre. El jabón contiene grandes moléculas denominadas *surfactantes*. En una gran molécula las características de polaridad de un extremo de la molécula pueden ser diferentes de las características en el otro extremo. En una molécula surfactante un extremo actúa como una molécula no polar y el otro actúa como una molécula polar. El extremo no polar puede unirse a una molécula de grasa o aceite, y el extremo polar puede unirse a una molécula de agua. En consecuencia, el jabón funciona como una cadena que enlaza las moléculas de mugre y agua. Cuando el agua se hace correr, la grasa y el aceite se van con ella.

Una molécula simétrica (Fig. 26.22a) no tiene polarización permanente, aunque se podría inducir una polarización al colocar la molécula en un campo eléctrico. Un campo dirigido hacia la izquierda, como se ilustra en la figura 26.22b, ocasionaría que el centro de la distribución de carga positiva se desplazara hacia la izquierda desde su posición inicial, y que el centro de la distribución de carga negativa se moviera hacia la derecha. Esta ***polarización inducida*** es el efecto que predomina en la mayor parte de los materiales usados como dieléctricos en capacitores.

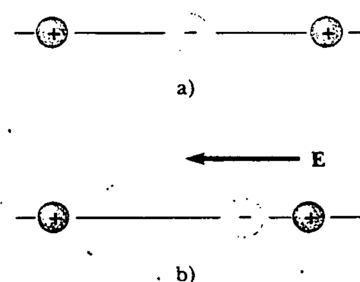


Figura 26.22 a) Una molécula simétrica no tiene polarización permanente. b) Un campo eléctrico externo induce una polarización en la molécula.

EJEMPLO 26.8 La molécula de H_2O

La molécula de agua (H_2O) tiene un momento de dipolo eléctrico de 6.3×10^{-30} C·m. Una muestra contiene 10^{21} moléculas de agua, cuyos momentos de dipolo están orientados en su totalidad en la dirección de un campo eléctrico de 2.5×10^5 N/C de magnitud. ¿Cuánto trabajo se requiere para girar los dipolos a partir de esta orientación ($\theta = 0°$) hasta una en la cual todos los momentos de dipolo son perpendiculares al campo ($\theta = 90°$)?

Solución El trabajo necesario para girar una molécula en 90° es igual a la diferencia de energía potencial entre la orientación de 90° y la orientación de 0°. Con la ecuación 26.19 se obtiene

$$W = U_{90} - U_0 = (-pE\cos 90°) - (-pE\cos 0°)$$
$$= pE = (6.3 \times 10^{-30}\,\text{C}\cdot\text{m})(2.5 \times 10^5\,\text{N/C})$$
$$= 1.6 \times 10^{-24}\,\text{J}$$

Puesto que hay 10^{21} moléculas en la muestra, el trabajo *total* requerido es

$$W_{\text{total}} = (10^{21})(1.6 \times 10^{-24}\,\text{J}) = 1.6 \times 10^{-3}\,\text{J}$$

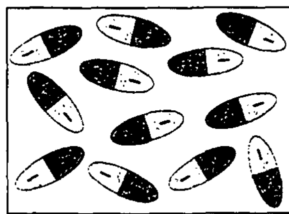
Sección opcional



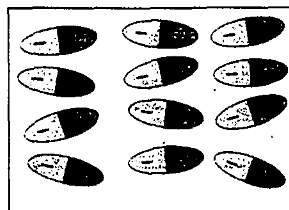
UNA DESCRIPCIÓN ATÓMICA DE LOS DIELÉCTRICOS

En la sección 26.5 se encontró que la diferencia de potencial ΔV_0 entre las placas de un capacitor se reduce a $\Delta V_0/\kappa$ cuando se introduce un dieléctrico. Puesto que la diferencia de potencial entre las placas es igual al producto del campo eléctrico y la separación d, el campo eléctrico también se reduce. De este modo, si $\mathbf{E}_0$ es el campo eléctrico sin el dieléctrico, el campo en presencia del dieléctrico es

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{\kappa} \quad \textbf{(26.21)}$$



a)



b)

Figura 26.23 a) Las moléculas polares están orientadas de manera aleatoria en ausencia de un campo eléctrico externo. b) Cuando se aplica un campo externo, las moléculas se alinean parcialmente con el campo.

Considere primero un dieléctrico hecho de moléculas polares colocadas en el campo eléctrico entre las placas de un capacitor. Los dipolos (es decir, las moléculas polares que configuran el dieléctrico) se orientan aleatoriamente en ausencia de campo eléctrico, como se muestra en la figura 26.23a. Cuando se aplica un campo externo $\mathbf{E}_0$ debido a las cargas en las placas del capacitor, se ejerce un momento de torsión sobre los dipolos, lo que origina que éstos estén parcialmente alineados con el campo, como se muestra en la figura 26.23b. Ahora se puede describir el dieléctrico como polarizado. El grado de alineación de las moléculas con el campo eléctrico depende de la temperatura y de la magnitud del campo. En general, el alineamiento aumenta con la reducción de temperatura y con el aumento de la intensidad del campo eléctrico.

Si las moléculas del dieléctrico son no polares, entonces el campo eléctrico debido a las placas produce cierta separación de carga y un *momento de dipolo inducido*. Dichos momentos de dipolo inducidos tienden a alinearse con el campo externo, y el dieléctrico está polarizado. Por tanto, se puede polarizar un dieléctrico con un campo externo sin importar si las moléculas son polares o no polares.

A partir de estas ideas, considere una lámina de material dieléctrico colocada entre las placas de un capacitor de modo que esté en un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}_0$, como se muestra en la figura 26.24a. El campo eléctrico debido a las placas está dirigido hacia la derecha y polariza al dieléctrico. El efecto neto en el dieléctrico es la formación de una densidad de carga superficial positiva *inducida* σ_{ind} sobre la cara derecha y una densidad de carga superficial negativa igual $-\sigma_{ind}$ sobre la cara izquierda, como se ilustra en la figura 26.24b. Estas cargas superficiales inducidas en el dieléctrico producen el aumento hasta un campo eléctrico inducido $\mathbf{E}_{ind}$ que se opone al campo externo $\mathbf{E}_0$. Por consiguiente, el campo eléctrico neto $\mathbf{E}$ en el dieléctrico tiene una magnitud

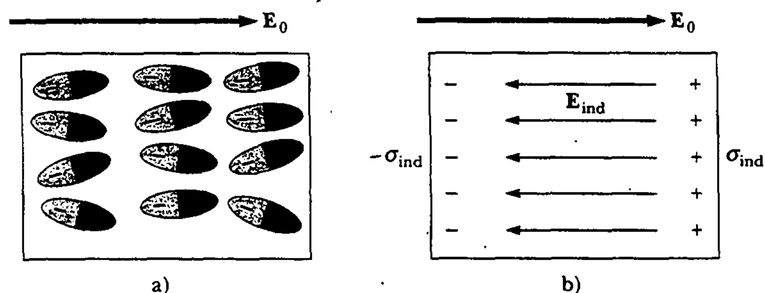


Figura 26.24 a) Cuando un dieléctrico se polariza, los momentos de dipolo de las moléculas en el dieléctrico están parcialmente alineadas con el campo externo $\mathbf{E}_0$. b) Esta polarización causa una carga superficial inducida negativa sobre un lado del dieléctrico y una carga superficial inducida positiva igual sobre el lado opuesto. Esta separación de carga resulta en una reducción en el campo eléctrico neto en el dieléctrico.

$$E = E_0 - E_{\text{ind}} \tag{26.22}$$

En el capacitor de placas paralelas mostrado en la figura 26.25 el campo externo E_0 se relaciona con la densidad de carga σ sobre las placas por medio de la relación $E_0 = \sigma/\epsilon_0$. El campo eléctrico inducido en el dieléctrico se relaciona con la densidad de carga inducida σ_{ind} por medio de la relación $E_{\text{ind}} = \sigma_{\text{ind}}/\epsilon_0$. Puesto que $E = E_0/\kappa = \sigma/\kappa\epsilon_0$, la sustitución en la ecuación 26.22 produce

$$\frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{\text{ind}}}{\epsilon_0}$$

$$\sigma_{\text{ind}} = \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa}\right)\sigma \tag{26.23}$$

Ya que $\kappa > 1$, esta expresión muestra que la densidad de carga σ_{ind} inducida en el dieléctrico es menor que la densidad de carga σ sobre las placas. Por ejemplo, si $\kappa = 3$, se ve que la densidad de carga inducida es dos tercios de la densidad de carga sobre las placas. Si no hay dieléctrico presente, $\kappa = 1$ y $\sigma_{\text{ind}} = 0$, como se esperaba. Sin embargo, si el dieléctrico se sustituye por un conductor eléctrico, para el cual $E = 0$, entonces la ecuación 26.22 muestra que $E_0 = E_{\text{ind}}$; esto corresponde a $\sigma_{\text{ind}} = \sigma$. Es decir, la carga superficial inducida sobre el conductor es igual en magnitud pero opuesta en signo a la correspondiente a las placas, lo que produce un campo eléctrico neto de cero en el conductor.

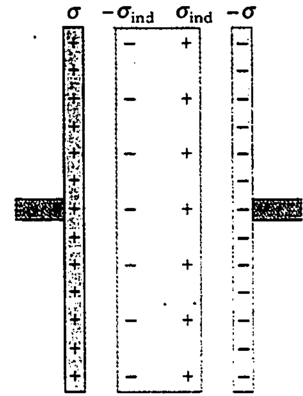


Figura 26.25 Carga inducida en un dieléctrico colocado entre las placas de un capacitor cargado. Advierta que la densidad de carga inducida en el dieléctrico es *menor* que la densidad de carga en las placas.

EJEMPLO 26.9 Efecto de una lámina metálica

Un capacitor de placas paralelas tiene una separación de placa d y un área de placa A. Una lámina metálica descargada de espesor a se inserta en la parte media entre las dos placas. (a) Determine la capacitancia del dispositivo.

Solución Este problema puede resolverse al observar que cualquier carga que aparezca sobre una placa del capacitor debe inducir una carga de igual magnitud pero signo opuesto sobre el lado más cercano de la lámina metálica, como se muestra en la figura 26.26a. En consecuencia, la carga neta sobre la lámina metálica permanece igual a cero, y el campo eléctrico dentro de la misma es cero. Por tanto, el capacitor es equivalente a dos capacitores en serie, cada uno con una separación de placas $(d - a)/2$, como se ilustra en la figura 26.26b.

Al usar la regla para sumar dos capacitores en serie (Ec. 26.10) se obtiene

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\dfrac{\epsilon_0 A}{(d-a)/2}} + \frac{1}{\dfrac{\epsilon_0 A}{(d-a)/2}}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d - a}$$

Advierta que C tiende al infinito cuando a se acerca a d. ¿Por qué?

b) Muestre que el hecho de que la lámina metálica sea infinitesimalmente delgada no afecta a la capacitancia.

Solución En el resultado de la parte a) se hace que $a \to 0$:

$$C = \lim_{a\to 0} \frac{\epsilon_0 A}{d - a} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

que es la capacitancia original.

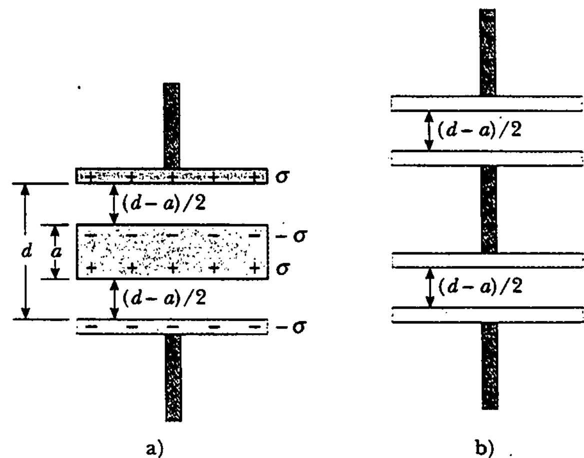


Figura 26.26 a) Un capacitor de placas paralelas cuya separación de placa d está parcialmente llena con una lámina metálica de espesor a. b) El circuito equivalente del dispositivo de la parte a) consta de dos capacitores en serie, cada uno con una separación de placa igual a $(d - a)/2$.

c) Muestre que la respuesta a la parte a) no depende de dónde se inserte la lámina.

Solución Imagine que la lámina en la figura 26.26a se mueve hacia arriba de modo que la distancia entre el extremo superior de la lámina y la placa superior es b. Entonces, la distancia entre el extremo inferior de la lámina y la placa inferior es $d - b - a$. La capacitancia total de la combinación en serie se encuentra como en la parte a):

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{b}} + \frac{1}{\frac{\epsilon_0 A}{d-b-a}}$$

$$= \frac{b}{\epsilon_0 A} + \frac{d-b-a}{\epsilon_0 A} = \frac{d-a}{\epsilon_0 A}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d-a}$$

Éste es el mismo resultado que el de la parte a), y es independiente del valor de b, así que no importa dónde esté ubicada la lámina.

Ejemplo 26.10 Un capacitor parcialmente lleno

Un capacitor de placas paralelas con una separación de placas d tiene una capacitancia C_0 en ausencia de un dieléctrico. ¿Cuál es la capacitancia cuando una lámina de material dieléctrico de constante dieléctrica κ y espesor $\frac{1}{3}d$ se inserta entre las placas (Fig. 26.27a)?

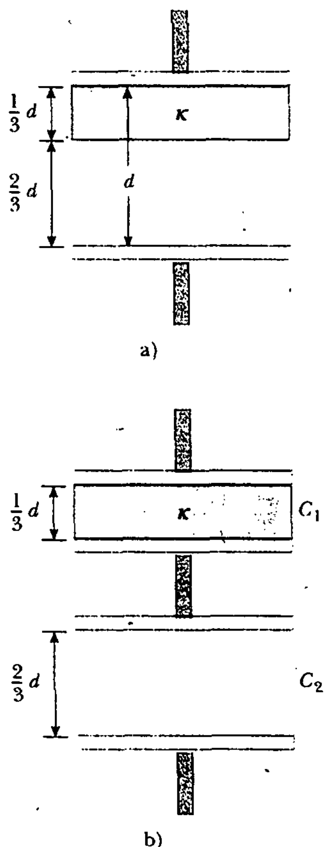


Figura 26.27 a) Un capacitor de placas paralelas de separación de placas d lleno parcialmente con un dieléctrico de espesor $d/3$. b) El circuito equivalente del capacitor se compone de dos capacitores conectados en serie.

Solución En el ejemplo 26.9 se encontró que se podía insertar una lámina metálica entre las placas de un capacitor y considerar la combinación como dos capacitores en serie. La capacitancia resultante fue independiente de la ubicación de la lámina. Además, si el espesor de la lámina tiende a cero, entonces la capacitancia del sistema tiende a la capacitancia cuando la lámina está ausente. A partir de esto se concluye que se puede insertar una lámina metálica infinitesimalmente delgada en cualquier parte entre las placas de un capacitor sin afectar la capacitancia. En consecuencia, imagine que desliza una lámina metálica infinitesimalmente delgada a lo largo de la cara inferior del dieléctrico mostrado en la figura 26.27a. Entonces se puede considerar este sistema como la combinación en serie de los dos capacitores mostrados en la figura 26.27b: uno con una separación de placa $d/3$ y lleno con un dieléctrico, y el otro con una separación de placas $2d/3$ y aire entre las placas.

De las ecuaciones 26.15 y 26.3, las dos capacitancias son

$$C_1 = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d/3} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{2d/3}$$

Al emplear la ecuación 26.10 para los dos capacitores combinados en serie se obtiene

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d/3}{\kappa\epsilon_0 A} + \frac{2d/3}{\epsilon_0 A}$$

$$= \frac{d}{3\epsilon_0 A}\left(\frac{1}{\kappa} + 2\right) = \frac{d}{3\epsilon_0 A}\left(\frac{1+2\kappa}{\kappa}\right)$$

$$C = \left(\frac{3\kappa}{2\kappa+1}\right)\frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Puesto que la capacitancia sin el dieléctrico es $C_0 = \epsilon_0 A/d$, se ve que

$$C = \left(\frac{3\kappa}{2\kappa+1}\right)C_0$$

RESUMEN

Un **capacitor** se compone de dos conductores que tienen cargas de igual magnitud pero signo opuesto. La **capacitancia** C de cualquier capacitor es la relación entre la carga Q en cualquiera de los conductores y la diferencia de potencial ΔV entre ellos:

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V} \quad \textbf{(26.1)}$$

Esta relación se puede usar en situaciones en las cuales se conozca cualesquiera dos de las tres variables. Es importante recordar que esta proporción es constante para una configuración dada de conductores porque la capacitancia depende sólo de la geometría de los conductores y no de una fuente de carga externa o diferencia de potencial.

La unidad de capacitancia del SI es el coulomb por volt, o el **farad** (F), y 1 F = 1 C/V.

Se resumen expresiones de la capacitancia para varias geometrías en la tabla 26.2.

Si dos o más capacitores están conectados en paralelo, entonces la diferencia de potencial es la misma a través de todos ellos. La capacitancia equivalente de una combinación de capacitores en paralelo es

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots \quad \textbf{(26.8)}$$

Si dos o más capacitores están conectados en serie, la carga es la misma en todos ellos, y la capacitancia equivalente de la combinación en serie está dada por

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots \quad \textbf{(26.10)}$$

Estas dos ecuaciones le permitirán simplificar muchos circuitos eléctricos al reemplazar capacitores múltiples con un solo capacitor equivalente.

Se necesita trabajo para cargar un capacitor en virtud de que el proceso de carga equivale a la transferencia de cargas de un conductor a un potencial eléctrico menor a otro conductor a un potencial más alto. El trabajo efectuado al cargar el capacitor hasta una carga Q es igual a la energía potencial eléctrica U almacenada en el capacitor, donde

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2}Q\Delta V = \tfrac{1}{2}C(\Delta V)^2 \quad \textbf{(26.11)}$$

TABLA 26.2 Capacitancia y geometría

Geometría	Capacitancia	Ecuación
Esfera cargada aislada de radio R (segundo conductor cargado supuesto en el infinito)	$C = 4\pi\epsilon_0 R$	26.2
Capacitor de placas paralelas con área de placa A y separación de placa d	$C = \epsilon_0 \dfrac{A}{d}$	26.3
Capacitor cilíndrico de longitud ℓ y radios interior y exterior a y b, respectivamente	$C = \dfrac{\ell}{2k_e \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$	26.4
Capacitor esférico con radios interior y exterior a y b, respectivamente	$C = \dfrac{ab}{k_e(b-a)}$	26.6

Cuando un material dieléctrico se inserta entre las placas de un capacitor, la capacitancia aumenta en un factor adimensional κ, conocido como **constante dieléctrica**:

$$C = \kappa C_0 \tag{26.14}$$

donde C_0 es la capacitancia en ausencia del dieléctrico. El incremento en la capacitancia se debe a una reducción en la magnitud del campo eléctrico en presencia del dieléctrico y a una disminución correspondiente en la diferencia de potencial entre las placas —suponiendo que la batería de carga se elimina del circuito antes de que se inserte el dieléctrico. La reducción de la magnitud de **E** surge de un campo eléctrico interno producido por dipolos alineados en el dieléctrico. Este campo interno producido por los dipolos se opone al campo aplicado debido a las placas del capacitor, y el resultado es una reducción del campo eléctrico neto.

El **momento de dipolo eléctrico p** de un dipolo eléctrico tiene una magnitud

$$p \equiv 2aq \tag{26.16}$$

La dirección del vector de momento de dipolo eléctrico es desde la carga negativa hacia la carga positiva.

El momento de torsión que actúa sobre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme **E** es

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \tag{26.18}$$

La energía potencial de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico externo uniforme **E** es

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \tag{26.20}$$

Sugerencias para resolver problemas

Capacitores

- Sea cuidadoso con las unidades. Cuando calcule capacitancia en farads, cerciórese de que las distancias están en metros y use el valor del SI de ϵ_0. Cuando verifique la consistencia de las unidades, recuerde que las unidades para los campos eléctricos pueden ser N/C o V/m.
- Cuando dos o más capacitores están conectados en paralelo, la diferencia de potencial a través de cada uno es la misma. La carga de cada capacitor es proporcional a su capacitancia; por tanto, las capacitancias se suman directamente para dar la capacitancia equivalente de la combinación en paralelo. La capacitancia equivalente siempre es mayor que las capacitancias individuales.
- Cuando dos o más capacitores están conectados en serie, tienen la misma carga, y la suma de las diferencias de potencial es igual a la diferencia de potencial total aplicada a la combinación. La suma de los recíprocos de las capacitancias es igual al recíproco de la capacitancia equivalente, la cual siempre es menor que la capacitancia del capacitor individual más pequeño.
- Un dieléctrico incrementa la capacitancia de un capacitor en un factor κ (la constante dieléctrica) sobre su capacitancia cuando tiene aire entre sus placas.
- Para problemas en los cuales se está conectando o desconectando una batería, advierta si se hacen modificaciones al capacitor mientras está conectado a la batería o después de que la misma se haya desconectado. Si el capacitor permanece conectado a la batería, el voltaje a través del capacitor permanece invariable (igual al voltaje de la batería), y la carga es proporcional a la capaci-

tancia, aunque pueda ser modificada (por ejemplo, insertando un dieléctrico). Si usted desconecta el capacitor de la batería antes de hacer cualquier modificación al capacitor, entonces su carga permanece fija. En este caso, cuando usted varía la capacitancia, el voltaje entre las placas cambia de acuerdo con la expresión $\Delta V = Q/C$.

PREGUNTAS

1. Si se le pidiera diseñar un capacitor para una situación en la cual se requiriese de tamaño pequeño y gran capacitancia, ¿qué factores serían importantes en su diseño?
2. Las placas de un capacitor están conectadas a una batería. ¿Qué ocurre con la carga en las placas si los alambres de conexión se quitan de la batería? ¿Qué pasa con la carga si los alambres se quitan de la batería y se conectan entre sí?
3. Un farad es una unidad muy grande de capacitancia. Calcule la longitud de un lado de un capacitor cuadrado lleno de aire que tiene una separación de placa de 1 m. Suponga que tiene una capacitancia de 1 F.
4. Un par de capacitores se conectan en paralelo mientras un par idéntico se conecta en serie. ¿Qué par sería más peligroso de manejar después de haberse conectado a la misma fuente de voltaje? Explique.
5. Si a usted se le dan tres capacitores diferentes C_1, C_2, C_3, ¿cuántas combinaciones diferentes de capacitancia puede usted producir?
6. ¿Qué ventaja habría al usar dos capacitores idénticos en paralelo conectados en serie con otro par en paralelo idéntico, en lugar de usar un solo capacitor?
7. ¿Siempre es posible reducir una combinación de capacitores a un capacitor equivalente con las reglas que se han desarrollado? Explique.
8. Puesto que la carga neta en un capacitor siempre es cero, ¿qué almacena un capacitor?
9. En vista de que las cargas sobre las placas de un capacitor de placas paralelas son de signos opuestos, se atraen entre sí. En consecuencia, se requeriría trabajo positivo para aumentar la separación de placas. ¿Qué sucede con el trabajo externo efectuado en este proceso?
10. Explique por qué el trabajo necesario para mover una carga Q a través de una diferencia de potencial ΔV es $W = Q\Delta V$, en tanto que la energía almacenada en un capacitor cargado es $U = \frac{1}{2}Q\Delta V$. ¿De dónde proviene el factor $\frac{1}{2}$?
11. Si la diferencia de potencial a través de un capacitor se duplica, ¿en qué factor cambia la energía almacenada?
12. ¿Por qué es peligroso tocar las terminales de un capacitor de alto voltaje incluso después de que el voltaje aplicado se ha eliminado? ¿Qué puede hacerse para lograr que un capacitor se maneje con seguridad después de que se ha quitado la fuente de voltaje?
13. Describa cómo puede aumentar el voltaje de operación máxima de un capacitor de placas paralelas para una separación de placa fija.
14. Un capacitor lleno de aire se carga, luego se desconecta del suministro de energía eléctrica, y por último se conecta a un voltímetro. Explique cómo y por qué las lecturas de voltaje cambian cuando se inserta un dieléctrico entre las placas del capacitor.
15. Con la descripción de la molécula polar de un dieléctrico, explique cómo un dieléctrico afecta el campo eléctrico en el interior de un capacitor.
16. Explique por qué un dieléctrico aumenta el voltaje de operación máximo de un capacitor aunque el tamaño físico de éste no cambie.
17. ¿Cuál es la diferencia entre resistencia dieléctrica y la constante dieléctrica?
18. Explique por qué una molécula de agua está polarizada permanentemente. ¿Qué tipo de molécula no tiene polarización permanente?
19. Si un capacitor lleno de dieléctrico se calienta, ¿cómo cambiará su capacitancia? (Ignore la expansión térmica y suponga que las orientaciones de dipolo dependen de la temperatura.)

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante ☐ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** ☐ = use computadora para resolver el problema ☐ = Física interactiva ☐ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 26.1 Definición de capacitancia

1. a) ¿Cuánta carga existe en cada placa de un capacitor de 4.00 μF cuando se conecta a una batería de 12.0 V? b) Si este mismo capacitor se conecta a una batería de 1.50 V, ¿qué carga se almacena?
2. Dos conductores con cargas netas de +10.0 μC y −10.0 μC tienen una diferencia de potencial de 10.0 V. Determine a) la capacitancia del sistema y b) la diferencia de potencial entre los dos conductores si las cargas en cada uno se incrementan hasta +100 μC y −100 μC.

Sección 26.2 Cálculo de la capacitancia

3. Una esfera conductora cargada y aislada de 12.0 cm de radio crea un campo eléctrico de 4.90×10^4 N/C a una distancia de 21.0 cm de su centro. a) ¿Cuál es su densidad de carga superficial? b) ¿Cuál es su capacitancia?

4. a) Si una gota de líquido tiene una capacitancia de 1.00 pF, ¿cuál es su radio? b) Si otra gota tiene un radio de 2.00 mm, ¿cuál es su capacitancia? c) ¿Cuál es la carga en la gota más pequeña si su potencial es de 100 V?

5. Dos esferas conductoras con diámetros de 0.400 m y 1.00 m están separadas por una distancia que es grande comparada con los diámetros. Las esferas están conectadas por medio de un alambre delgado y se cargan hasta 7.00 μC. a) ¿Cómo se comparte esta carga total entre las esferas? (Ignore cualquier carga en el alambre.) b) ¿Cuál es el potencial del sistema de esferas cuando el potencial de referencia se toma como $V = 0$ en $r = \infty$?

6. Considerando a la Tierra y una capa de nubes 800 m sobre la superficie terrestre como las "placas" de un capacitor, calcule la capacitancia si la capa de nubes tiene un área de 1.00 km^2. Suponga que el aire entre la nube y el suelo es puro y seco. Suponga que la carga acumulada en la nube y el suelo hasta un campo eléctrico uniforme con una magnitud de 3.00×10^6 N/C a través del espacio entre ellos hace que el aire se rompa y conduzca electricidad como un relámpago. ¿Cuál es la máxima carga que puede soportar la nube?

WEB 7. Un capacitor lleno de aire está compuesto de dos placas paralelas, cada una con un área de 7.60 cm^2, separadas por una distancia de 1.80 mm. Si se aplica una diferencia de potencial de 20.0 V a estas placas, calcule a) el campo eléctrico entre las mismas, b) la densidad de carga superficial, c) la capacitancia, y d) la carga sobre cada placa.

8. Un chip de memoria de computadora de un megabit contiene muchos capacitores de 60.0 fF. Cada capacitor tiene un área de placa de 21.0×10^{-12} m^2. Determine la separación de placas de tal capacitor (suponga una configuración de placas paralelas). El diámetro atómico característico es de 10^{-10} m = 0.100 nm. Exprese la separación de placas en nanómetros.

9. Cuando se aplica una diferencia de potencial de 150 V a las placas de un capacitor de placas paralelas, las placas tienen una densidad de carga superficial de 30.0 nC/cm^2. ¿Cuál es el espaciamiento entre las placas?

10. Un capacitor de aire variable que se usa en circuitos de sintonización está hecho de N placas semicirculares, cada una de radio R y separadas por una distancia d una de otra. Como se muestra en la figura P26.10, un segundo conjunto de placas idéntico, que tiene libertad para girar, se intercala con sus placas a la mitad entre aquellas del primer juego. El segundo conjunto puede rotar como unidad. Determine la capacitancia como una función del ángulo de rotación θ, donde $\theta = 0$ corresponde a la máxima capacitancia.

WEB 11. Un cable coaxial de 50.0 m de largo tiene un conductor interior con un diámetro de 2.58 mm que conduce una carga de 8.10 μC. El conductor circundante tiene un diámetro interior de 7.27 mm y una carga de -8.10 μC.

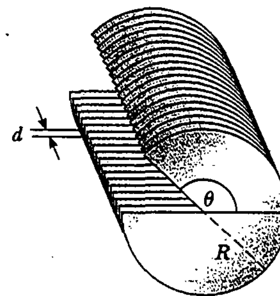


Figura P26.10

a) ¿Cuál es la capacitancia de este cable? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los dos conductores? Suponga que la región entre los conductores es aire.

12. Un capacitor esférico de 20.0 μF está compuesto de dos esferas metálicas, una con radio dos veces mayor que la otra. Si la región entre las esferas es el vacío, determine el volumen de esta región.

13. Un pequeño objeto con una masa de 350 mg tiene una carga de 30.0 nC y está suspendido por medio de un hilo entre las placas verticales de un capacitor de placas paralelas. La separación de las placas es de 4.00 cm. Si el hilo forma un ángulo de 15.0° con la vertical, ¿cuál es la diferencia de potencial entre las placas?

14. Un pequeño objeto con una masa m tiene una carga q y está suspendido por medio de un hilo entre las placas verticales de un capacitor de placas paralelas. La separación de las placas es d. Si el hilo forma un ángulo θ con la vertical, ¿cuál es la diferencia de potencial entre las placas?

15. Un capacitor esférico lleno de aire se construye con un cascarón interior y uno exterior de 7.00 y 14.0 cm de radio, respectivamente. a) Calcule la capacitancia del dispositivo. b) ¿Qué diferencia de potencial entre las esferas resulta en una carga de 4.00 μC sobre el capacitor?

16. Determine la capacitancia de la Tierra. (*Sugerencia:* el conductor exterior del "capacitor esférico" puede considerarse como una esfera conductora en el infinito donde V tiende a 0.)

Sección 26.3 Combinaciones de capacitores

17. Dos capacitores $C_1 = 5.00$ μF y $C_2 = 12.0$ μF están conectados en paralelo, y la combinación resultante está conectada a una batería de 9.00 V. a) ¿Cuál es el valor de la capacitancia equivalente de la combinación? ¿Cuáles son b) la diferencia de potencial a través de cada capacitor y c) la carga almacenada en cada capacitor?

18. Los dos capacitores del problema 17 ahora están conectados en serie y a una batería de 9.00 V. Encuentre a) el valor de la capacitancia equivalente de la combinación, b) el voltaje a través de cada capacitor y c) la carga en cada capacitor.

19. Dos capacitores, cuando están conectados en paralelo, producen una capacitancia equivalente de 9.00 pF, y una

capacitancia equivalente de 2.00 pF cuando se conectan en serie. ¿Cuál es la capacitancia de cada capacitor?

20. Dos capacitores, cuando están conectados en paralelo, producen una capacitancia equivalente C_p, y una capacitancia equivalente C_s cuando se conectan en serie. ¿Cuál es la capacitancia de cada capacitor?

WEB 21. Cuatro capacitores se conectan como se muestra en la figura P26.21. a) Encuentre la capacitancia equivalente entre los puntos *a* y *b*. b) Calcule la carga en cada capacitor si ΔV_{ab} = 15.0 V.

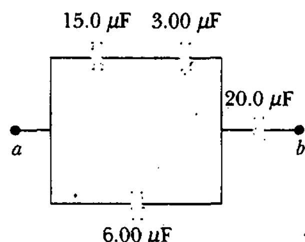


Figura P26.21

22. Evalúe la capacitancia equivalente de la configuración mostrada en la figura P26.22. Todos los capacitores son idénticos y cada uno tiene capacitancia *C*.

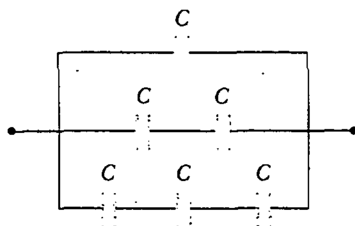


Figura P26.22

23. Considere el circuito mostrado en la figura P26.23, donde C_1 = 6.00 μF, C_2 = 3.00 μF y ΔV = 20.0 V. El capacitor C_1 se carga primero cerrando el interruptor S_1. Este interruptor se abre después, y el capacitor cargado se conecta al capacitor descargado al cerrar S_2. Calcule la carga inicial adquirida por C_1 y la carga final en cada uno.

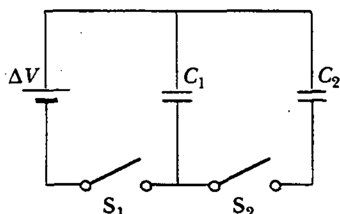


Figura P26.23

24. De acuerdo con sus especificaciones de diseño, el circuito de tiempo que retrasa el cerrado de la puerta de un elevador debe tener una capacitancia de 32.0 μF entre dos puntos *A* y *B*. a) Cuando se construye un circuito, se encuentra que el capacitor más barato instalado entre dichos dos puntos tiene 34.8 μF de capacitancia. Para satisfacer las especificaciones se puede colocar un capacitor adicional entre los dos puntos. ¿Éste debería estar en serie o en paralelo con el capacitor de 34.8 μF? ¿Cuál sería su capacitancia? b) El siguiente circuito baja la línea de montaje con capacitancia de 29.8 μF entre *A* y *B*. ¿Qué capacitor adicional debería instalarse, en serie o en paralelo, en dicho circuito para satisfacer la especificación?

25. El circuito en la figura P26.25 se compone de dos placas metálicas paralelas idénticas conectadas mediante resortes metálicos idénticos a una batería de 100 V. Con el interruptor abierto las placas están descargadas, se encuentran separadas por una distancia *d* = 8.00 mm y tienen una capacitancia *C* = 2.00 μF. Cuando se cierra el interruptor, la distancia entre las placas disminuye en un factor de 0.500. a) ¿Cuánta carga recoge cada placa, y b) cuál es la constante de fuerza de cada resorte? (*Sugerencia:* utilice el resultado del problema 35.)

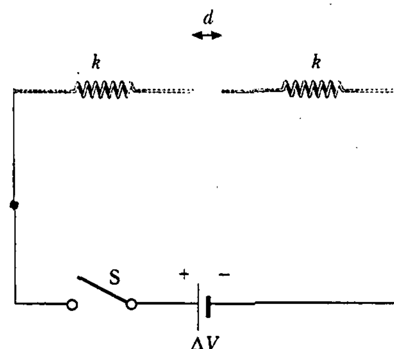


Figura P26.25

26. La figura P26.26 muestra seis esferas conductoras concéntricas, A, B, C, D, E y F, que tienen radios *R*, 2*R*, 3*R*, 4*R*, 5*R* y 6*R*, respectivamente. Las esferas B y C están conectadas mediante un alambre conductor, del mismo modo que las esferas D y E. Determine la capacitancia equivalente de este sistema.

27. Un grupo de capacitores idénticos se conectan primero en serie y después en paralelo. La capacitancia combinada en paralelo es 100 veces mayor que la correspondiente a la conexión en serie. ¿Cuántos capacitores están en el grupo?

28. Encuentre la capacitancia equivalente entre los puntos *a* y *b* para el grupo de capacitores conectados como se indica en la figura P26.28 si C_1 = 5.00 μF, C_2 = 10.0 μF y C_3 = 2.00 μF.

29. Para la red descrita en el problema previo, si la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* es de 60.0 V, ¿qué carga se almacena en C_3?

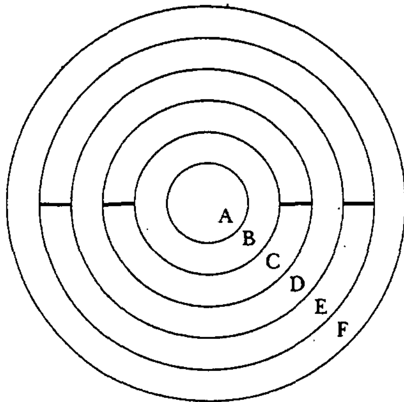


Figura P26.26

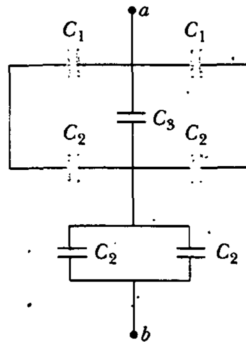


Figura P26.28 Problemas 28 y 29.

30. Encuentre la capacitancia equivalente entre los puntos a y b en la combinación de capacitores mostrada en la figura P26.30.

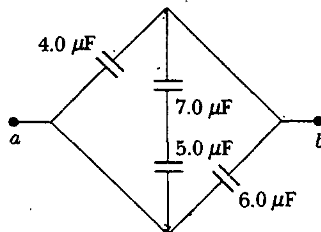


Figura P26.30

Sección 26.4 Energía almacenada en un capacitor cargado

31. a) Un capacitor de 3.00 μF está conectado a una batería de 12.0 V. ¿Cuánta energía se almacena en el capacitor? b) Si el capacitor hubiese estado conectado a una batería de 6.00 V, ¿cuánta energía se habría almacenado?

32. Dos capacitores, C_1 = 25.0 μF y C_2 = 5.00 μF, están conectados en paralelo y cargados con un suministro de potencia de 100 V. a) Dibuje un diagrama de circuito y calcule la energía total almacenada en los dos capacitores. b) ¿Qué diferencia de potencial se requeriría a través de los mismos dos capacitores conectados en serie de modo que la combinación almacene la misma energía que en la parte a)? Dibuje un diagrama de circuito de esta configuración.

33. Se carga un capacitor de placas paralelas y luego se desconecta de una batería. ¿En qué fracción cambia (incrementa o disminuye) la energía almacenada cuando la separación de las placas se duplica?

34. Un campo eléctrico uniforme E = 3 000 V/m existe dentro de cierta región. ¿Qué volumen de espacio contiene una energía igual a 1.00 × 10^{-7} J? Exprese su respuesta en metros cúbicos y en litros.

WEB 35. Un capacitor de placas paralelas tiene una carga Q y placas de área A. Demuestre que la fuerza ejercida en cada placa por la otra es $F = Q^2/2\epsilon_0 A$. (*Sugerencia:* deje que $C = \epsilon_0 A/x$ para una separación de placas arbitraria x; en ese caso se requiere que el trabajo efectuado en la separación de las dos placas cargadas sea $W = \int F\,dx$.)

36. La placa a de un capacitor de placas paralelas lleno de aire está conectada a un resorte de constante de fuerza k y la placa b está fija. Ambas descansan sobre la parte superior de una mesa, como se indica (vista de arriba) en la figura P26.36. Si una carga $+Q$ se pone en la placa a y una carga $-Q$ se pone en la placa b, ¿cuánto se estira el resorte?

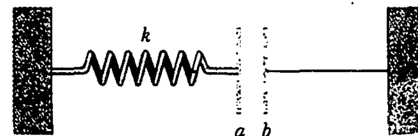


Figura P26.36

37. **Problema de repaso.** Cierto nubarrón tiene una diferencia de potencial de 1.00 × 10^8 V respecto de un árbol. Si durante una tormenta eléctrica 50.0 C de carga se transfieren a través de esta diferencia de potencial y 1.00% de la energía la absorbe el árbol, ¿cuánta agua (savia en el árbol) inicialmente a 30.0°C puede hervir? El agua tiene un calor específico de 4 186 J/kg·°C, un punto de ebullición de 100°C y un calor de evaporación de 2.26 × 10^6 J/kg.

38. Muestre que la energía asociada a una esfera conductora de radio R y carga Q rodeada por el vacío es $U = k_e Q^2/2R$.

39. Con su famosa relación $E = mc^2$, Einstein dijo que la energía está asociada a la masa. Calcule el radio de un electrón, suponiendo que su carga está distribuida de manera uniforme sobre la superficie de una esfera de radio R y que la masa–energía del electrón es igual a la energía total almacenada en el campo eléctrico diferente de cero que resulta entre R y el infinito. (Véase el problema 38. No obstante, de manera experimental, un electrón aparece como una partícula puntual. El campo eléctrico cerca del electrón debe ser descrito por electrodinámica cuántica en lugar de la electrodinámica clásica que aquí se estudia.)

Sección 26.5 Capacitores con dieléctricos

40. Encuentre la capacitancia de un capacitor de placas paralelas que usa baquelita como dieléctrico, si cada una de las placas tiene un área de 5.00 cm² y la separación de placas es de 2.00 mm.
41. Determine a) la capacitancia y b) el voltaje máximo que se puede aplicar a un capacitor de placas paralelas lleno de teflón, que tiene un área de placa de 1.75 cm² y separación de placa de 0.040 0 mm.
42. a) ¿Cuánta carga se puede colocar en un capacitor con aire entre las placas antes de que pierda la resistencia, si el área de cada una de las placas es de 5.00 cm²? b) Encuentre la máxima carga si se usa poliestireno en lugar de aire entre las placas.
43. Un capacitor comercial se construye como se muestra en la figura 26.15a. Este capacitor particular se en rolla a partir de dos tiras de aluminio separadas por dos tiras de papel cubierto de parafina. Cada tira de lámina y de papel mide 7.00 cm de ancho. La lámina tiene un espesor de 0.004 00 mm; el papel tiene un espesor de 0.025 0 mm y una constante dieléctrica de 3.70. ¿Qué longitud deben tener las tiras si se desea una capacitancia de 9.50×10^{-8} F? (Emplee la fórmula de placas paralelas.)
44. En el supermercado se venden rollos de papel aluminio, plástico para envolver y papel encerado. Describa un capacitor hecho con materiales de supermercado. Calcule una estimación del orden de magnitud para su capacitancia y su voltaje de ruptura.
45. Un capacitor que tiene aire entre sus placas se conecta a una diferencia de potencial de 12.0 V y almacena 48.0 μC de carga. Entonces se desconecta de la fuente mientras aún está cargado. a) Encuentre la capacitancia del capacitor. b) Una pieza de teflón se inserta entre las placas. Encuentre su nueva capacitancia. c) Encuentre el voltaje y la carga que existen ahora en el capacitor.
46. Un capacitor de placas paralelas en aire tiene una separación de placas de 1.50 cm y un área de placas de 25.0 cm². Las placas están cargadas a una diferencia de potencial de 250 V y se encuentran desconectadas de la fuente. Después se sumerge el capacitor en agua destilada. Determine a) la carga en las placas antes y después de la inmersión, b) la capacitancia y el voltaje después de la inmersión, y c) el cambio de la energía del capacitor. Ignore la conductancia del líquido.
47. Un cascarón esférico conductor tiene radios interior a y exterior c. El espacio entre las dos superficies se llena con un dieléctrico para el cual la constante dieléctrica es κ_1 entre a y b, y κ_2 entre b y c (Fig. P26.47). Determine la capacitancia de este sistema.
48. Una oblea de dióxido de titanio ($\kappa = 173$) tiene un área de 1.00 cm² y un espesor de 0.100 mm. Se evapora aluminio sobre las caras paralelas para formar un capacitor de placas paralelas. a) Calcule la capacitancia. b) Cuando el capacitor se carga con una batería de 12.0 V, ¿cuál es la magnitud de la carga entregada a cada placa? c) Para la situación en la parte b), ¿cuáles son las densidades de carga superficial libre e inducida? d) ¿Cuál es la magnitud E del campo eléctrico?

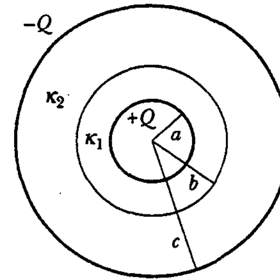


Figura P26.47

49. Cada capacitor en la combinación mostrada en la figura P26.49 tiene un voltaje de ruptura de 15.0 V. ¿Cuál es el voltaje de ruptura de la combinación?

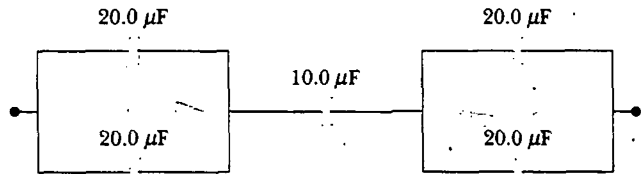


Figura P26.49

(Opcional)
Sección 26.6 Dipolo eléctrico en un campo eléctrico

50. Un pequeño objeto rígido porta cargas positiva y negativa de 3.50 nC. Está orientado de modo que la carga positiva está en el punto (−1.20 mm, 1.10 mm) y la carga negativa está en el punto (1.40 mm, −1.30 mm). a) Encuentre el momento de dipolo eléctrico del objeto. El objeto se coloca en un campo eléctrico $\mathbf{E} = (7\,800\mathbf{i} - 4\,900\mathbf{j})$ N/C. b) Encuentre el momento de torsión que actúa sobre el objeto. c) Encuentre la energía potencial del objeto en esta orientación. d) Si la orientación del objeto puede cambiar, encuentre la diferencia entre sus energías potenciales máxima y mínima.
51. Un pequeño objeto con momento de dipolo eléctrico $\mathbf{p}$ se coloca en un campo eléctrico no uniforme $\mathbf{E} = E(x)\mathbf{i}$. Es decir, el campo está en la dirección x y su magnitud depende de la coordenada x. Sea θ la representación del ángulo entre el momento de dipolo y la dirección x. a) Pruebe que el dipolo experimenta una fuerza neta $F = p(dE/dx)\cos\theta$ en la dirección hacia la cual se incrementa el campo. b) Considere el campo creado por un globo esférico centrado en el origen. El globo tiene un radio de 15.0 cm y porta una carga de 2.00 μC. Evalúe dE/dx en el punto (16 cm, 0, 0). Suponga que una gota de agua en este punto tiene un momento de dipolo inducido de $(6.30\mathbf{i})$ nC·m. Encuentre la fuerza sobre ella.

(Opcional)
Sección 26.7 Una descripción atómica de los dieléctricos

52. Un detector de radiación conocido como contador Geiger-Muller se compone de un cilindro conductor hueco

y cerrado con un alambre delgado a lo largo de su eje. Suponga que el diámetro interno del cilindro es de 2.50 cm y que el alambre a lo largo del eje tiene un diámetro de 0.200 mm. Si la resistencia dieléctrica del gas entre el alambre central y el cilindro es de 1.20×10^6 V/m, calcule el voltaje máximo que puede aplicarse entre el alambre y el cilindro antes de que ruptura dieléctrico ocurra en el gas.

53. La forma general de la ley de Gauss describe cómo se crea una carga en un campo eléctrico en un material, así como en el vacío. Esto es

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon}$$

donde $\epsilon = \kappa\epsilon_0$ es la permitividad del material. a) Una hoja con carga Q distribuida de manera uniforme sobre su área A es rodeada por un dieléctrico. Demuestre que la hoja crea un campo eléctrico uniforme con magnitud $E = Q/2A\epsilon$ en puntos cercanos. b) Dos grandes hojas de área A que portan cargas opuestas de igual magnitud Q están separadas una pequeña distancia d. Demuestre que ellas crean un campo eléctrico uniforme de magnitud $E = Q/A\epsilon$ entre ambas. c) Suponga que la placa negativa está a potencial cero. Demuestre que la placa positiva está a un potencial $Qd/A\epsilon$. d) Demuestre que la capacitancia del par de placas es $A\epsilon/d = \kappa A\epsilon_0/d$.

PROBLEMAS ADICIONALES

54. Para el sistema de capacitores mostrado en la figura P26.54, encuentre a) la capacitancia equivalente del sistema, b) la diferencia de potencial a través de cada capacitor, c) la carga sobre cada capacitor, y d) la energía total almacenada por el grupo.

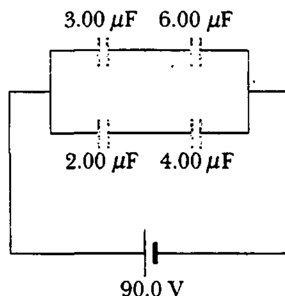


Figura P26.54

55. Considere dos *largos* alambres paralelos y con cargas opuestas, de radio d y con sus centros separados por una distancia D. Suponiendo que la carga se distribuye de manera uniforme sobre la superficie de cada alambre, muestre que la capacitancia por unidad de longitud de este par de alambres es

$$\frac{C}{\ell} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{D-d}{d}\right)}$$

56. Un capacitor de placas paralelas de 2.00 nF está cargado a una diferencia de potencial inicial $\Delta V_i = 100$ V y luego se aísla. El material dieléctrico entre las placas es mica ($\kappa = 5.00$). a) ¿Cuánto trabajo se requiere para retirar la mica? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial del capacitor después de que la mica se retira?

WEB 57. Se construye un capacitor de placas paralelas usando un material dieléctrico cuya constante dieléctrica es 3.00 y cuya resistencia dieléctrica es 2.00×10^8 V/m. La capacitancia deseada es igual a 0.250 μF, y el capacitor debe soportar una diferencia de potencial máxima de 4 000 V. Encuentre el área mínima de las placas del capacitor.

58. Se construye un capacitor de placas paralelas utilizando tres materiales dieléctricos, como se muestra en la figura P26.58. Suponga que $\ell \gg d$. a) Encuentre una expresión para la capacitancia del dispositivo en términos del área de placa A y d, κ_1, κ_2 y κ_3. b) Calcule la capacitancia utilizando los valores $A = 1.00$ cm^2, $d = 2.00$ mm, $\kappa_1 = 4.90$, $\kappa_2 = 5.60$ y $\kappa_3 = 2.10$.

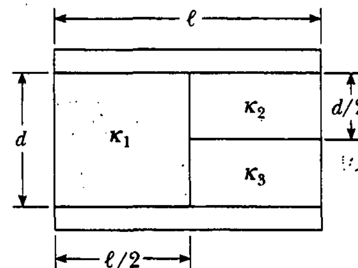


Figura P26.58

59. Una placa conductora de espesor d y área A se inserta dentro del espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas con espaciamiento s y área superficial A, como se muestra en la figura P26.59. La placa no necesariamente está a la mitad entre las placas del capacitor. ¿Cuál es la capacitancia del sistema?

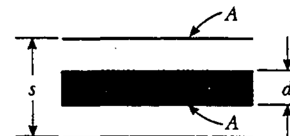


Figura P26.59

60. a) Dos esferas tienen radios a y b y sus centros están a una distancia d. Muestre que la capacitancia de este sistema es

$$C \approx \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d}}$$

siempre que d sea grande comparada con a y b. (*Sugerencia:* puesto que las esferas están muy alejadas, suponga

que la carga sobre una esfera no perturba la distribución de carga sobre la otra esfera. En consecuencia, el potencial de cada esfera es expresado como el de una distribución de carga simétrica, $V = k_e Q/r$, y el potencial total en cada esfera es la suma de los potenciales debidos a cada esfera. b) Muestre que cuando d se acerca al infinito, el resultado anterior se reduce al de dos esferas aisladas en serie.

61. Cuando cierto capacitor de placas paralelas lleno de aire se conecta a una batería, adquiere una carga (en cada placa) de q_0. Mientras se mantiene la conexión con la batería, se inserta una lámina dieléctrica y se llena la región entre las placas. Esto origina una acumulación de una carga *adicional* q en cada placa. ¿Cuál es la constante dieléctrica de la lámina?

62. Un capacitor se construye a partir de dos placas cuadradas de lados ℓ y separación d. Un material de constante dieléctrica κ se inserta una distancia x dentro del capacitor, como se ilustra en la figura P26.62. a) Encuentre la capacitancia equivalente del dispositivo. b) Calcule la energía almacenada en el capacitor si la diferencia de potencial es ΔV. c) Encuentre la dirección y magnitud de la fuerza ejercida sobre el dieléctrico, suponiendo una diferencia de potencial constante ΔV. Ignore la fricción. d) Obtenga un valor numérico para la fuerza suponiendo que $\ell = 5.00$ cm, $\Delta V = 2\ 000$ V, $d = 2.00$ mm, y que el dieléctrico es vidrio ($\kappa = 4.50$). (*Sugerencia*: el sistema puede considerarse como dos capacitores conectados en *paralelo*).

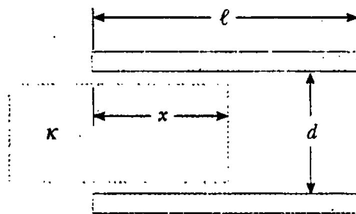


Figura P26.62 Problemas 62 y 63.

63. Un capacitor se construye a partir de dos placas cuadradas de lados ℓ y separación d, como se sugiere en la figura P26.62. Usted puede suponer que d es mucho menor que ℓ. Las placas portan cargas $+Q_0$ y $-Q_0$. Un bloque de metal tiene un ancho ℓ, un largo ℓ y un espesor ligeramente menor a d. Éste se inserta una distancia x en el capacitor. Las cargas sobre las placas no son perturbadas conforme el bloque se desliza. En una situación estática, un metal previene que un campo eléctrico lo penetre. El metal puede ser considerado como un dieléctrico perfecto, con $\kappa \to \infty$. a) Calcule la energía almacenada como función de x. b) Encuentre la dirección y magnitud de la fuerza que actúa sobre el bloque metálico. c) El área de la cara frontal del bloque que ingresa en primer lugar es, en esencia, igual a ℓd. Considerando que la fuerza sobre el bloque actúa sobre esta cara, encuentre la tensión (fuerza por área) sobre ella. d) Para comparación, exprese la densidad de energía en el campo eléctrico entre las placas del capacitor en términos de Q_0, ℓ, d y ϵ_0.

64. Cuando se considera el suministro de energía para un automóvil, la energía por unidad de masa de la fuente de energía es un parámetro importante. Utilizando los siguientes datos compare la energía por unidad de masa (J/kg) para la gasolina, baterías de plomo-ácido y capacitores. (El ampere A se introducirá en el capítulo 27 y es la unidad del SI de la corriente eléctrica, 1 A = 1 C/s.)
Gasolina: 126 000 Btu/gal; densidad = 670 kg/m^3
Batería de plomo-ácido: 12.0 V; 100 A·h; masa = 16.0 kg
Capacitor: diferencia de potencial a máxima carga = 12.0 V; capacitancia = 0.100 F; masa = 0.100 kg

65. Un capacitor aislado de capacitancia desconocida se ha cargado hasta una diferencia de potencial de 100 V. Cuando el capacitor cargado se conecta después en paralelo a un capacitor de 10.0 μF descargado, el voltaje a través de la combinación es igual a 30.0 V. Calcule la capacitancia desconocida.

66. Cierto circuito electrónico necesita un capacitor con 1.20 pF de capacitancia y un potencial de ruptura de 1 000 V. Si usted tiene una alimentación de capacitores de 6.00 pF, cada uno con un potencial de ruptura de 200 V, ¿cómo podría cubrir este requerimiento del circuito?

67. En el arreglo mostrado en la figura P26.67 se aplica una diferencia de potencial ΔV, y C_1 se ajusta de modo que el voltímetro entre los puntos b y d lea cero. Este "balance" ocurre cuando $C_1 = 4.00$ μF. Si $C_3 = 9.00$ μF y $C_4 = 12.0$ μF, calcule el valor de C_2.

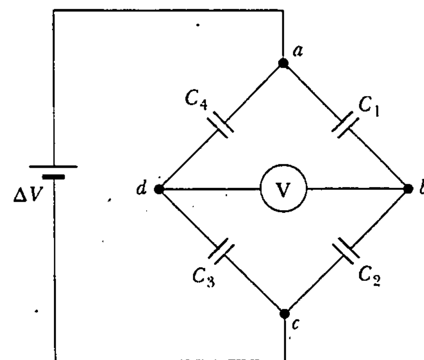


Figura P26.67

68. Es posible obtener grandes diferencias de potencial cargando primero un grupo de capacitores conectados en paralelo y activando después un arreglo de interruptores que en efecto desconecten los capacitores de la fuente de carga y unos de otros, y que los reconecte en un arreglo en serie. Luego el grupo de capacitores cargados se descarga en serie. ¿Cuál es la diferencia de potencial máxima que puede obtenerse de esta manera utilizando diez capacitores cada uno de 500 μF y una fuente de carga de 800 V?

69. Un capacitor de placas paralelas con separación de placas d se carga hasta una diferencia de potencial ΔV_0. Una

lámina dieléctrica de espesor d y constante dieléctrica κ se introduce entre las placas *mientras la batería permanece conectada a éstas.* a) Muestre que la proporción entre la energía almacenada después de que el dieléctrico se introduce y la energía almacenada en el capacitor vacío es $U/U_0 = \kappa$. Proporcione una explicación física para este aumento en la energía almacenada. b) ¿Qué sucede con la carga en el capacitor? (Advierta que esta situación no es la misma que la del ejemplo 26.7, en la cual la batería se quitó del circuito antes de introducir el dieléctrico.)

70. Un capacitor de placas paralelas con placas de área A y separación de placas d tiene la región entre éstas llena con dos materiales dieléctricos, como se ve en la figura P26.70. Suponga que $d \ll L$ y que $d \ll W$. a) Determine la capacitancia, y b) demuestre que cuando $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, su resultado se vuelve el mismo que el correspondiente a un capacitor que contiene un solo dieléctrico: $C = \kappa\epsilon_0 A/d$.

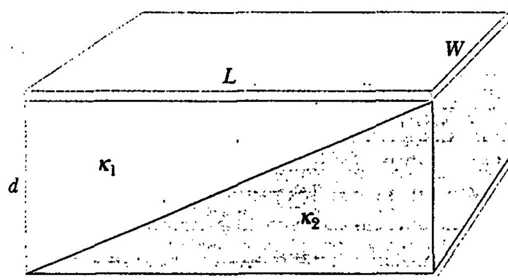


Figura P26.70

71. Un capacitor de placas paralelas vertical está lleno a la mitad con un dieléctrico para el cual la constante dieléctrica es 2.00 (Fig. P26.71a). Cuando este capacitor se pone horizontalmente, ¿qué fracción de éste debe llenarse con el mismo dieléctrico (Fig. P26.71b) de modo que los dos capacitores tengan igual capacitancia?

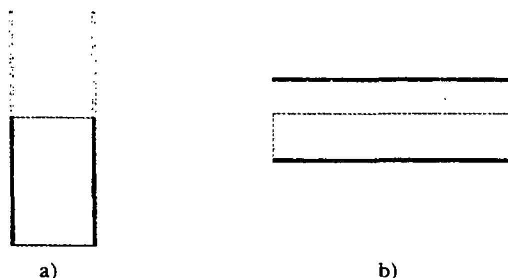


Figura P26.71

72. Los capacitores $C_1 = 6.00\ \mu F$ y $C_2 = 2.00\ \mu F$ están cargados como una combinación en paralelo conectada a una batería de 250 V. Los capacitores se desconectan de la batería y entre sí. Luego se conectan placa positiva a placa negativa y placa negativa a placa positiva. Calcule la carga resultante en cada capacitor.

73. El conductor interior de un cable coaxial tiene un radio de 0.800 mm y el radio interior del conductor exterior es igual a 3.00 mm. El espacio entre los conductores se llena con polietileno, el cual tiene una constante dieléctrica de 2.30 y una resistencia dieléctrica de 18.0×10^6 V/m. ¿Cuál es la diferencia de potencial máxima que este cable puede soportar?

74. Usted es responsable de mejorar el diseño de un cable coaxial para un gran fabricante. Demuestre que para un radio de conductor exterior dado b, la máxima capacidad de diferencia de potencial se alcanza cuando el radio del conductor interior es $a = b/e$, donde e es la base de los logaritmos naturales.

75. Calcule la capacitancia equivalente entre los puntos a y b en la figura P26.75. Advierta que esto no es una simple combinación en serie o en paralelo. (*Sugerencia:* suponga una diferencia de potencial ΔV entre los puntos a y b. Escriba expresiones para ΔV_{ab} en función de las cargas y las capacitancias para las diversas trayectorias posibles de a a b, y establezca conservación de carga para aquellas placas de capacitor que están conectadas entre sí.)

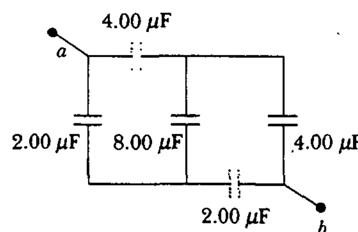


Figura P26.75

76. Determine la capacitancia efectiva de la combinación mostrada en la figura P26.76. (*Sugerencia:* ¡considere la simetría involucrada!)

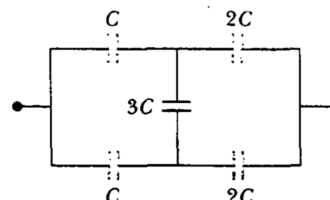


Figura P26.76

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

26.1 a) puesto que la separación de las placas está disminuyendo. La capacitancia depende sólo de cómo está construido un capacitor y no del circuito externo.

26.2 Cero. Si usted construye una superficie gaussiana esférica externa y concéntrica con el capacitor, la carga neta dentro de la superficie es cero. Al aplicar la ley de Gauss a esta configuración se encuentra que $E = 0$ en puntos exteriores al capacitor.

26.3 Para un voltaje dado, la energía almacenada en un capacitor es proporcional a C: $U = C(\Delta V)^2/2$. Por tanto, usted querrá maximizar la capacitancia equivalente. Usted logra esto al conectar los tres capacitores en paralelo, de modo que las capacitancias se suman.

26.4 a) C disminuye (Ec. 26.3). b) Q permanece igual porque ahí no hay lugar para que fluya la carga. c) E permanece constante (véanse la Ec. 24.8 y el párrafo que le sigue). d) ΔV se incrementa porque $\Delta V = Q/C$, Q es constante (parte b) y C disminuye (parte a). e) La energía almacenada en el capacitor es proporcional tanto a Q como a ΔV (Ec. 26.11) y, en consecuencia, aumenta. La energía adicional proviene del trabajo que usted realiza al jalar las dos placas para separarlas.

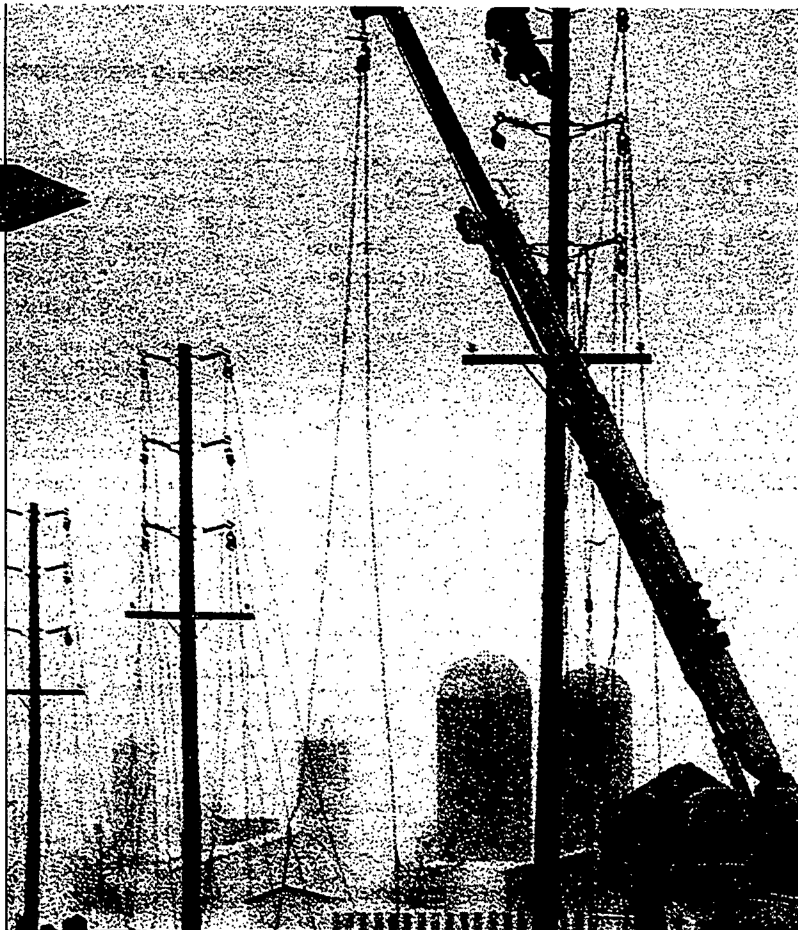
26.5 a) C disminuye (Ec. 26.3). b) Q disminuye. La batería suministra una diferencia de potencial ΔV constante; por tanto, la carga debe fluir hacia afuera del capacitor si $C = Q/\Delta V$ está disminuyendo. c) E disminuye porque la densidad de carga sobre las placas disminuye. d) ΔV permanece constante debido a la presencia de la batería. e) La energía almacenada en el capacitor disminuye (Ec. 26.11).

26.6 Incrementa. La constante dieléctrica de la madera (y de todos los otros materiales aislantes, para tal fin) es mayor que 1; por tanto, la capacitancia aumenta (Ec. 26.14). Este incremento es percibido por el circuito especial del busca taquetes, el cual provoca que se encienda un indicador en el dispositivo.

26.7 a) C aumenta (Ec. 26.14). b) Q aumenta. Puesto que la batería mantiene una ΔV constante, Q debe incrementar si $C(= Q/\Delta V)$ aumenta. c) E entre las placas permanece constante puesto que $\Delta V = Ed$ y ni ΔV ni d cambian. El campo eléctrico debido a las cargas sobre las placas se incrementa debido a que ha fluido más carga hacia las placas. Las cargas superficiales inducidas sobre el dieléctrico crean un campo que se opone al incremento en el campo causado por el mayor número de cargas sobre las placas. d) La batería mantiene una ΔV constante. e) La energía almacenada en el capacitor aumenta (Ec. 26.11). Usted tendría que empujar el dieléctrico dentro del capacitor, justo como usted tendría que realizar trabajo positivo para elevar una masa e incrementar su energía potencial gravitacional.

ACERTIJO

Trabajadores de la industria eléctrica reparando las líneas de transmisión en la ciudad de St. Isadore, al este de Ontario, la cual en enero de 1998 estuvo sin electricidad durante varios días a causa de una severa tormenta de hielo. Es muy peligroso tocar líneas de transmisión de energía caídas, debido a su alto potencial eléctrico, el cual puede tener cientos de miles de volts en comparación con la tierra. ¿Por qué se usa tan elevada diferencia de potencial en la transmisión de energía si es tan peligroso, y por qué las aves que se paran en los alambres no se electrocutan? *(AP/Wide World Photos/Fred Chartrand)*



capítulo

27 Corriente y resistencia

Líneas generales del capítulo

Hasta ahora el estudio de los fenómenos eléctricos se ha limitado a las cargas en reposo o *electrostáticas*. Ahora se considerarán situaciones que incluyen cargas eléctricas en movimiento. El término *corriente eléctrica*, o simplemente *corriente*, se emplea para describir la rapidez de flujo de carga que pasa por alguna región del espacio. La mayor parte de las aplicaciones prácticas de la electricidad tienen que ver con corrientes eléctricas. Por ejemplo, la batería de una luz de destellos suministra corriente al filamento de la bombilla cuando se conecta el interruptor. Una gran variedad de aparatos domésticos funciona con corriente alterna. En estas situaciones comunes, las cargas fluyen por un conductor, por ejemplo, un alambre de cobre. También es posible que existan corrientes fuera de un conductor. Por ejemplo, un haz de electrones en el tubo de imagen de una TV constituye una corriente.

Este capítulo comienza con las definiciones de corriente y densidad de corriente. Continúa con una descripción microscópica de corriente, y con el análisis de algunos de los factores que contribuyen a la resistencia al flujo de carga en conductores. Se utiliza un modelo clásico para describir la conducción eléctrica en metales, y se señalan algunas limitaciones de dicho modelo.

27.1 CORRIENTE ELÉCTRICA

13.2 Es instructivo bosquejar una analogía entre el flujo del agua y la corriente. En muchos lugares es práctica común instalar en los hogares regaderas de bajo consumo como una medida de conservación del agua. El flujo de agua se cuantifica a partir de estos dispositivos y de otros similares, al especificar la cantidad de agua que emerge durante un intervalo de tiempo dado, lo cual con frecuencia se mide en litros por minuto. A gran escala se puede caracterizar la corriente de un río para describir la rapidez a la cual el flujo de agua pasa por una ubicación particular. Por ejemplo, el flujo sobre el borde de las cataratas del Niágara se mantiene a proporciones de entre 1 400 m^3/s y 2 800 m^3/s.

Ahora considere un sistema de cargas eléctricas en movimiento. En cualquier parte donde existe un flujo de carga neto a través de alguna región, se dice que existe una **corriente**. Para definir la corriente de manera más precisa suponga que las cargas se mueven perpendiculares a una superficie de área A, como se muestra en la figura 27.1. (Ésta podría ser el área de la sección transversal de un alambre, por ejemplo.) **La corriente es la rapidez a la cual fluye la carga por esta superficie**. Si ΔQ es la cantidad de carga que pasa por esta área en un intervalo de tiempo Δt, la **corriente promedio** I_{prom} es igual a la carga que pasa por A por unidad de tiempo:

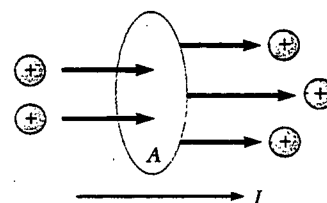


Figura 27.1 Cargas en movimiento a través de un área A. La rapidez en el tiempo a la cual la carga fluye a través del área se define como la corriente I. La dirección de la corriente es aquella en la cual las cargas positivas fluyen cuando están libres de hacerlo.

$$I_{\text{prom}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{27.1}$$

Si la rapidez a la cual fluye la carga varía en el tiempo, entonces la corriente varía en el tiempo, y la **corriente instantánea** I se define como el límite diferencial de la corriente promedio:

Corriente eléctrica

$$I \equiv \frac{dQ}{dt} \tag{27.2}$$

La unidad de corriente del SI es el **ampere** (A):

$$1\text{ A} = \frac{1\text{C}}{1\text{s}} \tag{27.3}$$

Esto es, 1 A de corriente es equivalente a 1 C de carga que pasa por el área de la superficie en 1 s.

Dirección de la corriente

Las cargas que pasan por la superficie en la figura 27.1 pueden ser positivas, negativas o ambas. **Es convencional asignar a la corriente la misma dirección que la del flujo de carga positiva**. En los conductores eléctricos, como el cobre o el aluminio,

la corriente se debe al movimiento de electrones con carga negativa. Por tanto, cuando se habla de corriente en un conductor ordinario, **la dirección de la corriente es opuesta a la dirección del flujo de electrones**. Sin embargo, si se considera un haz de protones con carga positiva en un acelerador, la corriente está en la dirección del movimiento de los protones. En algunos casos —como los que involucran gases y electrolitos, por ejemplo— la corriente es el resultado del flujo tanto de cargas positivas como negativas.

Si los extremos de un alambre conductor se conectan para formar una espira, todos los puntos sobre la espira están al mismo potencial eléctrico y, en consecuencia, el campo eléctrico es cero en el interior y en la superficie del conductor. Puesto que el campo eléctrico es cero, no existe transporte de carga a través del alambre, por tanto, no existe corriente. La corriente en el conductor es cero aun cuando el conductor tenga un exceso de carga sobre él. Sin embargo, si los extremos del alambre conductor se conectan a una batería, todos los puntos sobre la espira no están al mismo potencial. La batería coloca una diferencia de potencial entre los extremos de la espira, creando un campo eléctrico en el alambre. El campo eléctrico ejerce fuerzas en la conducción de electrones en el alambre, provocando que ellos se muevan alrededor de la espira y, por ende, generan una corriente.

Es común referirse a una carga en movimiento (ya sea positiva o negativa) como un **portador de carga** móvil. Por ejemplo, los portadores de carga en un metal son los electrones.

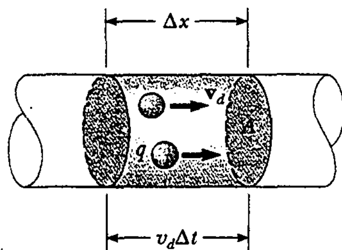


Figura 27.2 Una sección de un conductor uniforme de área transversal A. Los portadores de carga móvil se mueven a una rapidez v_d y la distancia que recorren en un tiempo Δt es $\Delta x = v_d\Delta t$. El número de portadores en la sección de longitud Δx es $nAv_d\Delta t$, donde n es el número de portadores por unidad de volumen.

Modelo microscópico de la corriente

Se puede relacionar la corriente con el movimiento de los portadores de carga para describir un modelo microscópico de conducción en un metal. Considere la corriente en un conductor de área de sección transversal A (Fig. 27.2) El volumen de una sección del conductor de longitud Δx (la región gris en la figura 27.2) es $A\ \Delta x$. Si n representa el número de portadores de carga móvil por unidad de volumen (en otras palabras, la densidad de portador de carga), entonces el número de portadores en la sección gris es $nA\ \Delta x$. Por tanto, la carga ΔQ en esta sección es

$$\Delta Q = \text{número de portadores en la sección} \times \text{carga por portador} = (nA\ \Delta x)q$$

donde q es la carga en cada portador. Si los portadores se mueven una rapidez v_d, la distancia que se mueven en un tiempo Δt es $\Delta x = v_d\ \Delta t$. En consecuencia, se puede escribir ΔQ en la forma

$$\Delta Q = (nAv_d\ \Delta t)q$$

Si se dividen ambos lados de esta ecuación por Δt, verá que la corriente promedio en el conductor es

Corriente promedio en un conductor

$$I_{\text{prom}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = nqv_dA \qquad \textbf{(27.4)}$$

La rapidez de los portadores de carga v_d es una rapidez promedio conocida como la **rapidez de arrastre deriva**. Para entender su significado considere un conductor en el cual los portadores de carga son electrones libres. Si el conductor está aislado —esto es, la diferencia de potencial a través de él es cero— entonces estos electrones se someten a movimiento aleatorio que es similar al de las moléculas de gas. Como se analizó antes, cuando una diferencia de potencial se aplica a través del conductor (por ejemplo, por medio de una batería), se establece un campo eléctrico en el conductor; este campo ejerce una fuerza eléctrica sobre los electrones produciendo una corriente. Sin embargo, los electrones no se mueven en líneas rectas a lo largo del conductor. En lugar de eso experimentan repetidos choques con los átomos del metal y el resultado es un complicado movimiento en zigzag (Figura 27.3). A pesar de los choques los electrones se mueven lentamente a lo largo del conductor (en una dirección opuesta a la de **E**) a la velocidad de arrastre $\mathbf{v}_d$.

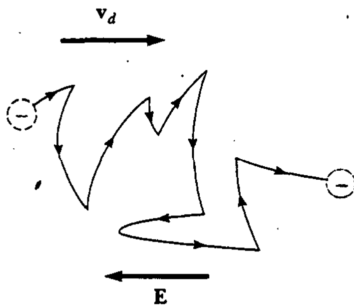


Figura 27.3 Representación esquemática del movimiento en zigzag de un electrón en un conductor. Los cambios en dirección son el resultado de colisiones entre el electrón y los átomos en el conductor. Advierta que el movimiento neto del electrón es opuesto a la dirección del campo eléctrico. Cada sección de la trayectoria zigzagueante es un segmento parabólico.

Uno puede considerar en conjunto las colisiones átomo-electrón dentro de un conductor como si fuera una fricción interna efectiva (o fuerza de arrastre) similar a la que experimentan las moléculas de un líquido que fluye a través de una tubería obstruida con virutas de acero. La energía transferida de los electrones a los átomos del metal durante las colisiones provoca un incremento en la energía vibratoria de los átomos y un correspondiente incremento en la temperatura del conductor.

Pregunta sorpresa 27.1

Considere cargas positivas y negativas moviéndose de manera horizontal a través de las cuatro regiones mostradas en la figura 27.4. Clasifique la corriente en estas cuatro regiones, de menor a mayor.

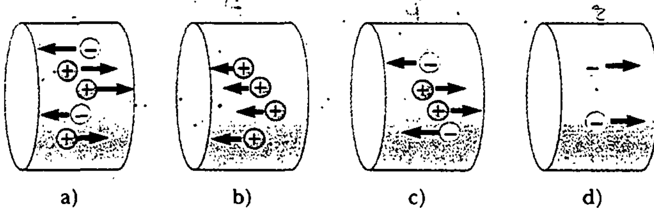


Figura 27.4

EJEMPLO 27.1 Rapidez de arrastre en un alambre de cobre

El alambre de cobre calibre 12 en una construcción residencial común tiene un área de sección transversal de 3.31×10^{-6} m^2. Si conduce una corriente de 10.0 A, ¿cuál es la rapidez de arrastre de los electrones? Suponga que cada átomo de cobre contribuye con un electrón libre a la corriente. La densidad del cobre es de 8.95 g/cm^3.

Solución A partir de la tabla periódica de los elementos en el apéndice C, se encuentra que la masa molar del cobre es de 63.5 g/mol. Recuerde que 1 mol de cualquier sustancia contiene un número de Avogadro de átomos (6.02×10^{23}). Conocer la densidad del cobre permite calcular el volumen ocupado por 63.5 g (= 1 mol) de cobre:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{63.5 \text{ g}}{8.95 \text{ g/cm}^3} = 7.09 \text{ cm}^3$$

Puesto que cada átomo de cobre aporta un electrón libre a la corriente, se tiene

$$n = \frac{6.02 \times 10^{23} \text{electrones}}{7.09 \text{ cm}^3}(1.00 \times 10^6 \text{cm}^3/\text{m}^3)$$

$$= 8.49 \times 10^{28} \text{electrones}/\text{m}^3$$

A partir de la ecuación 27.4 se encuentra que la rapidez de arrastre es

$$v_d = \frac{I}{nqA}$$

donde q es el valor absoluto de la carga en cada electrón. En consecuencia,

$$v_d = \frac{I}{nqA}$$

$$= \frac{10.0 \text{ C/s}}{(8.49 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(3.31 \times 10^{-6} \text{ m}^2)}$$

$$= 2.22 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

Ejercicio Si un alambre de cobre porta una corriente de 80.0 mA, ¿cuánto flujo de electrones pasa por una sección transversal dada del alambre en 10.0 min?

Respuesta 3.0×10^{20} electrones.

El ejemplo 27.1 muestra que la rapidez de arrastre común es muy pequeña. Por ejemplo, los electrones que viajan a una rapidez de 2.46×10^{-4} m/s ¡tardarían alrededor de 68 min para viajar 1 m! En vista de esto, tal vez le sorprenda por qué la luz se produce casi instantáneamente cuando se conecta un interruptor. En un conductor, el campo eléctrico que impulsa a los electrones libres viaja por el conductor a una velocidad cercana a la de la luz. Así, cuando usted oprime un interruptor de luz, el mensaje para que los electrones empiecen a moverse a través del alambre (el campo eléctrico) los alcanza a una rapidez del orden de 10^8 m/s.



27.2 RESISTENCIA Y LEY DE OHM

13.3 En el capítulo 24 se encontró que no puede haber campo eléctrico dentro de un conductor. Sin embargo, este enunciado es verdadero *sólo* si el conductor está en equilibrio estático. El propósito de esta sección es describir qué sucede cuando se deja que las cargas se muevan en el conductor.

Las cargas que se mueven en un conductor producen una corriente bajo la acción de un campo eléctrico, el cual es mantenido por la conexión de una batería a través del conductor. Un campo eléctrico puede existir en el conductor porque las cargas en este caso están en movimiento —es decir, se trata de una situación *no electrostática*.

Considere un conductor de área de sección transversal A que conduce una corriente I. La **densidad de corriente** J en el conductor se define como la corriente por unidad de área. Puesto que la corriente $I = nqv_dA$, la densidad de corriente es

$$J \equiv \frac{I}{A} = nqv_d \qquad \textbf{(27.5)}$$

donde J tiene unidades SI de A/m^2. La expresión es válida sólo si la densidad de corriente es uniforme, y sólo si la superficie del área de la sección transversal A es perpendicular a la dirección de la corriente. En general, la densidad de corriente es una cantidad vectorial:

Densidad de corriente

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d \qquad \textbf{(27.6)}$$

A partir de esta ecuación se ve que la densidad de corriente, al igual que la corriente, está en la dirección del movimiento de carga de los portadores de carga positiva y es opuesta a la dirección de movimiento de los portadores de carga negativa.

Una densidad de corriente J y un campo eléctrico E se establecen en un conductor cuando se mantiene una diferencia de potencial a través del conductor. Si la diferencia de potencial es constante, la corriente también lo es. En algunos materiales la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico:

Ley de Ohm

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \qquad \textbf{(27.7)}$$

donde la constante de proporcionalidad σ recibe el nombre de **conductividad** del conductor.[1] Los materiales que obedecen la ecuación 27.7 se dice que cumplen la **ley de Ohm**, llamada así en honor de George Simon Ohm (1787-1854). Más específicamente, la ley de Ohm establece que

> para muchos materiales (incluidos la mayor parte de los metales), la proporción entre la densidad de corriente y el campo eléctrico es una constante σ que es independiente del campo eléctrico productor de la corriente.

Los materiales que obedecen la ley de Ohm y que, en consecuencia, demuestran esta simple relación entre **E** y **J** se dice que son *óhmicos*. Sin embargo, experimental-

[1] No confundir la conductividad σ con la densidad de carga superficial, para la cual se emplea el mismo símbolo.

mente se encuentra que no todos los materiales tienen esta propiedad, y los materiales que no obedecen la ley de Ohm se dice que son *no óhmicos.* La ley de Ohm no es una ley fundamental de la naturaleza sino más bien una relación empírica válida sólo para ciertos materiales.

Pregunta sorpresa 27.2

Suponga que un alambre metálico óhmico que porta corriente tiene un área de sección transversal que gradualmente se vuelve más pequeña desde un extremo del alambre hacia el otro. ¿Cómo varían a lo largo del alambre la velocidad de arrastre, la densidad de corriente y el campo eléctrico? Advierta que la corriente debe tener el mismo valor en cualquier parte del alambre, de modo que la carga no se acumula en un punto exclusivo.

Una forma de la ley de Ohm útil en aplicaciones prácticas puede obtenerse considerando un segmento de un alambre recto de área de sección transversal A y longitud L, como se muestra en la figura 27.5. Una diferencia de potencial $\Delta V = V_b - V_a$ se mantiene a través del alambre, creando en el mismo un campo eléctrico y una corriente. Si el campo se supone uniforme, la diferencia de potencial se relaciona con el campo eléctrico por medio de la relación[2]

$$\Delta V = E\ell$$

Por tanto, la magnitud de la densidad de la corriente en el alambre se puede expresar como

$$J = \sigma E = \sigma \frac{\Delta V}{\ell}$$

Puesto que $J = I/A$, la diferencia de potencial puede escribirse como

$$\Delta V = \frac{\ell}{\sigma} J = \left(\frac{\ell}{\sigma A}\right) I$$

La cantidad $\ell/\sigma A$ se denomina la **resistencia** R del conductor. La resistencia se puede definir como la razón entre la diferencia de potencial a través del conductor y la corriente a través del mismo:

$$R \equiv \frac{\ell}{\sigma A} \equiv \frac{\Delta V}{I} \qquad \textbf{(27.8)}$$

Resistencia de un conductor

A partir de este resultado se ve que la resistencia tiene unidades SI de volts por ampere. Un volt por ampere se define como un **ohm** (Ω):

$$1\,\Omega \equiv \frac{1\,\text{V}}{1\,\text{A}} \qquad \textbf{(27.9)}$$

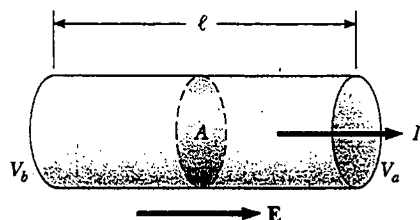
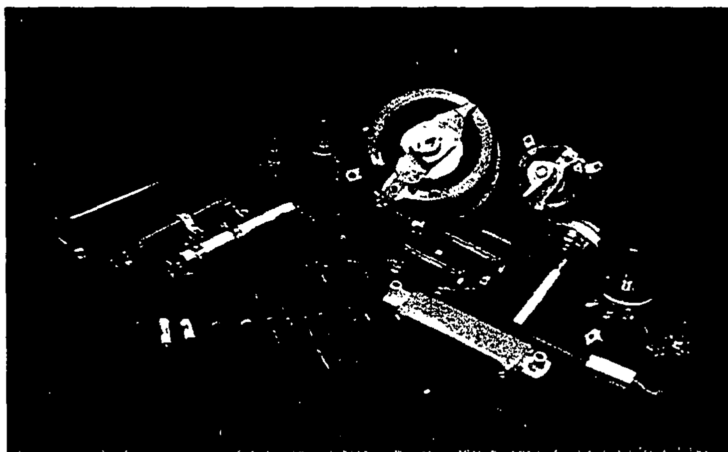


Figura 27.5 Un conductor uniforme de longitud ℓ y área de sección transversal A. Una diferencia de potencial $\Delta V = V_b - V_a$ mantenida a través del conductor establece un campo eléctrico **E** y este campo produce una corriente I que es proporcional a la diferencia de potencial.

[2] Este resultado se sigue de la definición de diferencia de potencial:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E\int_0^{\ell} dx = E\ell$$



Surtido de resistores usados en circuitos eléctricos. *(Henry Leap y Jim Lehman)*

Esta expresión muestra que si una diferencia de potencial de 1 V a través de un conductor produce una corriente de 1 A, la resistencia del conductor es 1 Ω. Por ejemplo, si un aparato eléctrico conectado a una fuente de 120 V de diferencia de potencial conduce una corriente de 6 A, su resistencia es de 20 Ω.

La ecuación 27.8 resuelta para la diferencia de potencial ($\Delta V = I\ell/\sigma A$) explica parte del acertijo con que se comenzó este capítulo: ¿cómo puede un ave posarse en una línea de transmisión de alto voltaje sin electrocutarse? Aun cuando la diferencia de potencial entre la tierra y el alambre pueda ser de cientos de miles de volts, la que existe entre los pies del ave (lo cual es lo que determina cuánta corriente fluye a través del ave) es muy pequeña.

El inverso de la conductividad es la **resistividad**[3] ρ:

Resistividad

$$\rho \equiv \frac{1}{\sigma} \qquad (27.10)$$

donde ρ tiene las unidades ohm-metro ($\Omega \cdot$ m). Se puede usar esta definición y la ecuación 27.8 para expresar la resistencia de un bloque de material uniforme como

Resistencia de un conductor uniforme

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \qquad (27.11)$$

Todo material óhmico tiene una resistividad característica que depende de las propiedades del material y la temperatura. Por otra parte, como usted puede ver en la ecuación 27.11, la resistencia de una sustancia depende de la geometría, así como de la resistividad. La tabla 27.1 presenta las resistividades de varios materiales a 20°C. Advierta la enorme gama de resistividades, desde valores muy bajos para buenos conductores, como el cobre y la plata, hasta valores muy altos para buenos aislantes, como el vidrio y el caucho. Un conductor ideal tendría resistividad cero, y un aislante ideal tendría resistividad infinita.

La ecuación 27.11 muestra que la resistencia de un conductor cilíndrico determinado es proporcional a su longitud e inversamente proporcional al área de su sección transversal. Si se duplica la longitud de un alambre, también se duplica su resistencia. Si el área de la sección transversal aumenta al doble, su resistencia se reduce a la mitad. La situación es análoga a la del flujo de un líquido por una tube-

[3] No confunda resistividad con densidad de masa o densidad de carga, para las cuales se emplea el mismo símbolo.

TABLA 27.1 Resistividades y coeficientes de temperatura de resistividad para varios materiales

Material	Resistividad[a] ($\Omega \cdot m$)	Coeficiente de temperatura $\alpha[(°C)^{-1}]$
Plata	1.59×10^{-8}	3.8×10^{-3}
Cobre	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Oro	2.44×10^{-8}	3.4×10^{-3}
Aluminio	2.82×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Tungsteno	5.6×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Hierro	10×10^{-8}	5.0×10^{-3}
Platino	11×10^{-8}	3.92×10^{-3}
Plomo	22×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Nicromo[b]	1.50×10^{-6}	0.4×10^{-3}
Carbono	3.5×10^{-5}	-0.5×10^{-3}
Germanio	0.46	-48×10^{-3}
Silicio	640	-75×10^{-3}
Vidrio	10^{10} a 10^{14}	
Hule duro	$\approx 10^{13}$	
Azufre	10^{15}	
Cuarzo (fundido)	75×10^{16}	

[a] Todos los valores a 20°C.
[b] Una aleación de níquel-cromo usada por lo común en elementos calefactores.

ría. Cuando la longitud de la tubería se incrementa, también lo hace la resistencia al flujo. Cuando aumenta el área de la sección transversal de la tubería, la cantidad de líquido que cruza una sección transversal dada de la tubería por unidad de tiempo también aumenta. En consecuencia, fluye más líquido para la misma presión diferencial aplicada a la tubería, y la resistencia a fluir disminuye.

La mayor parte de los circuitos eléctricos usan dispositivos llamados **resistores** para controlar el nivel de corriente en las diferentes partes del circuito. Dos tipos comunes de resistores son el *resistor de composición*, que contiene carbón, y el *resistor de cable enrollado*, el cual consta de una bobina de alambre. Los valores de los resistores en ohms normalmente se codifican por medio de colores, como se indica en la figura 27.6 y en la tabla 27.2.

Los materiales óhmicos tienen una relación lineal de corriente-diferencia de potencial en un largo intervalo de diferencias de potencial aplicadas (Fig. 27.7a). La pendiente de la curva *I-versus-*ΔV en la región lineal produce un valor para $1/R$. Los materiales no óhmicos tienen una relación corriente-diferencia de potencial no

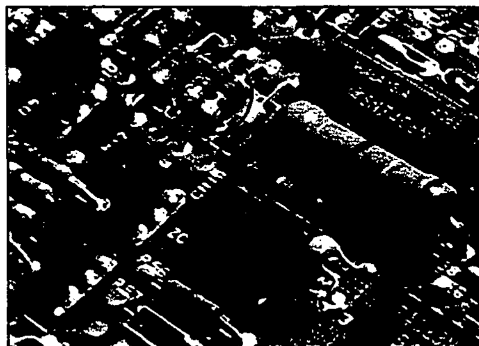


Figura 27.6 Las bandas de colores sobre un resistor representan un código para determinar su resistencia. Los primeros dos colores proporcionan los primeros dos dígitos en el valor de resistencia. El tercer color representa la potencia de diez para el multiplicador del valor de resistencia. El último color es la tolerancia del valor de resistencia. Como ejemplo, los cuatro colores sobre los resistores dentro del círculo son rojo (= 2), negro (= 0), anaranjado (= 10^3) y oro (= 5%), y así el valor de resistencia es $20 \times 10^3\ \Omega = 20\ k\Omega$ con un valor de tolerancia de 5% = 1 kΩ. (Los valores para los colores están tomados de la tabla 27.2.) *(SuperStock)*

TABLA 27.2 Código de colores para resistores

Color	Número	Multiplicador	Tolerancia
Negro	0	1	
Café	1	10^1	
Rojo	2	10^2	
Anaranjado	3	10^3	
Amarillo	4	10^4	
Verde	5	10^5	
Azul	6	10^6	
Violeta	7	10^7	
Gris	8	10^8	
Blanco	9	10^9	
Oro		10^{-1}	5%
Plata		10^{-2}	10%
Sin color			20%

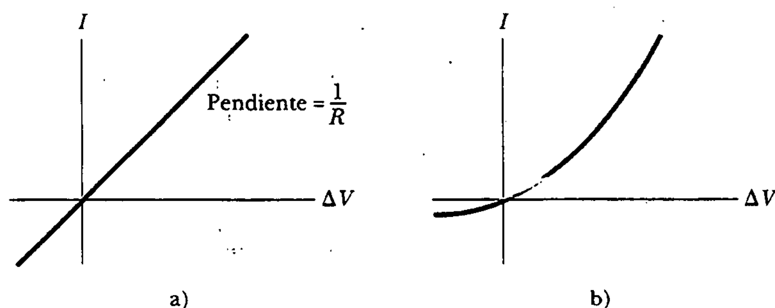


Figura 27.7 a) La curva corriente-diferencia de potencial para un material óhmico. La curva es lineal y la pendiente es igual al inverso de la resistencia del conductor. b) Una curva no lineal corriente-diferencia de potencial para un diodo semiconductor. Este dispositivo no obedece la ley de Ohm.

lineal. Un dispositivo semiconductor común que tiene características no lineales I *versus* ΔV es la *unión diodo* (Figura 27.7b). La resistencia de este dispositivo es baja para corrientes en una dirección (ΔV positivo) y alta para corrientes en la dirección opuesta (ΔV negativo). En realidad, casi todos los dispositivos electrónicos modernos, como los transistores, tienen relaciones corriente-diferencia de potencial no lineales; su operación adecuada depende de la manera particular en la cual violen la ley de Ohm.

Pregunta sorpresa 27.3

¿Qué representa la pendiente de la línea curva en la figura 27.7b?

Pregunta sorpresa 27.4

Su jefe le pide diseñar un cable pasacorriente de batería automotriz que tenga una baja resistencia. En vista de la ecuación 27.11, ¿qué factores debería considerar en su diseño?

Ejemplo 27.2 La resistencia de un conductor

Calcule la resistencia de un cilindro de aluminio que mide 10.0 cm de largo y tiene un área de sección transversal de 2.00×10^{-4} m^2. Repita el cálculo para un cilindro de vidrio de las mismas dimensiones con $3.0 \times 10^{10}\ \Omega \cdot$ m de resistividad.

Solución De la ecuación 27.11 y de la tabla 27.1 se puede calcular la resistencia del cilindro de aluminio como sigue:

$$R = \rho \frac{\ell}{A} = (2.82 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}) \left(\frac{0.100 \text{ m}}{2.00 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \right)$$

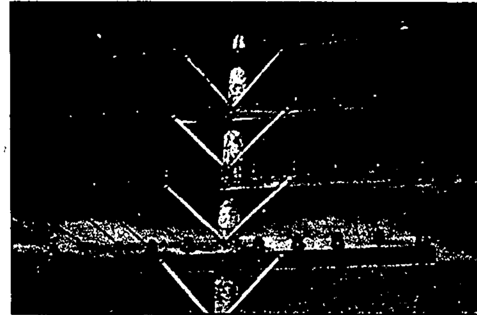
$$= 1.41 \times 10^{-5}\ \Omega$$

De manera similar, para el vidrio se encuentra que

$$R = \rho \frac{\ell}{A} = (3.0 \times 10^{10}\ \Omega \cdot \text{m}) \left(\frac{0.100 \text{ m}}{2.00 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \right)$$

$$= 1.5 \times 10^{13}\ \Omega$$

Como usted puede suponer a partir de la gran diferencia en resistividades, la resistencia de los cilindros idénticos de aluminio y vidrio difiere enormemente. La resistencia del cilindro de vidrio es 18 órdenes de magnitud más grande que la del cilindro de aluminio.



Los aislantes eléctricos sobre los postes telefónicos con frecuencia están hechos de vidrio debido a su baja conductividad eléctrica. *(J.H. Robinson/Photo Researchers, Inc.)*

Ejemplo 27.3 La resistencia de un alambre de nicromo

a) Calcule la resistencia por unidad de longitud de un alambre de nicromo de calibre 22, que tiene un radio de 0.321 mm.

Solución El área de la sección transversal de este alambre es

$$A = \pi r^2 = \pi(0.321 \times 10^{-3} \text{ m})^2 = 3.24 \times 10^{-7} \text{ m}^2$$

La resistividad del nicromo es $1.5 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot$ m (véase la tabla 27.1). De este modo, se puede usar la ecuación 27.11 para encontrar la resistencia por unidad de longitud:

$$\frac{R}{\ell} = \frac{\rho}{A} = \frac{1.5 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{m}}{3.24 \times 10^{-7} \text{ m}^2} = 4.6\ \Omega/\text{m}$$

b) Si se mantiene una diferencia de potencial de 10 V a través de un alambre de nicromo de 1.0 m de largo, ¿cuál es la corriente en el alambre?

Solución Puesto que una longitud de 1.0 m de este alambre tiene una resistencia de 4.6 Ω, la ecuación 27.8 produce

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{10 \text{ V}}{4.6\ \Omega} = 2.2 \text{ A}$$

Observe en la tabla 27.1 que la resistividad del alambre de nicromo es casi 100 veces la del cobre. Por tanto, un alambre de cobre del mismo radio tendría una resistencia por unidad de longitud de sólo 0.052 Ω/m. Un alambre de cobre de 1.0 m de largo del mismo radio conduciría la misma corriente (2.2 A) con una diferencia de potencial aplicada de sólo 0.11 V.

Debido a esta elevada resistividad y a su resistencia a la oxidación, el nicromo se emplea a menudo en elementos calefactores de tostadores, planchas y calefactores eléctricos.

Ejercicio ¿Cuál es la resistencia de un alambre de nicromo de 6.0 m de largo y calibre 22? ¿Cuánta corriente conduce el alambre cuando se conecta a una fuente de diferencia de potencial de 120 V?

Respuesta 28 Ω; 4.3 A.

Ejercicio Calcule la densidad de corriente y el campo eléctrico en el alambre cuando conduce una corriente de 2.2 A.

Respuesta 6.8×10^6 A/m^2; 10 N/C.

Ejemplo 27.4 La resistencia radial de un cable coaxial

Los cables coaxiales se usan de manera amplia para cables de televisión y otras aplicaciones electrónicas. Un cable coaxial consta de dos conductores cilíndricos. El espacio entre los conductores está lleno completamente de silicio, como muestra la figura 27.8a, y la fuga de corriente a través del silicio es indeseable. (El cable está diseñado para conducir corriente a

lo largo de su longitud.) El radio del conductor interno es $a = 0.500$ cm, el radio del externo es $b = 1.75$ cm, y su longitud es $L = 15.0$ cm. Calcule la resistencia del silicio entre los dos conductores.

Solución En este tipo de problema se debe dividir el objeto cuya resistencia se está calculando en elementos concéntricos de espesor infinitesimal dr (Fig. 27.8b). Comience empleando la forma diferencial de la ecuación 27.11, reemplazando ℓ con r para la distancia variable: $dR = \rho\, dr/A$, donde dR es la resistencia de un elemento de silicio de espesor dr y área superficial A. En este ejemplo se toma como elemento concéntrico representativo un cilindro de silicio hueco de radio r, espesor dr y longitud L, como se muestra en la figura 27.8. Cualquier corriente que pase entre los conductores interno y externo debe pasar radialmente a través de este elemento concéntrico, y el área a través de la cual pasa dicha corriente es $A = 2\pi rL$. (Ésta es el área curva superficial —circunferencia multiplicada por longitud— del cilindro de silicio hueco de espesor dr.) Por tanto, la resistencia del cilindro de silicio hueco se puede escribir como

$$dR = \frac{\rho}{2\pi rL}\, dr$$

Puesto que se desea conocer la resistencia total a través del espesor entero del silicio, necesita integrar esta expresión desde $r = a$ hasta $r = b$:

$$R = \int_a^b dR = \frac{\rho}{2\pi L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Al sustituir los valores dados, y usar $\rho = 640\ \Omega\cdot\text{m}$ para el silicio, se obtiene

$$R = \frac{640\ \Omega\cdot\text{m}}{2\pi(0.150\ \text{m})}\ln\left(\frac{1.75\ \text{cm}}{0.500\ \text{cm}}\right) = 851\ \Omega$$

Ejercicio Si una diferencia de potencial de 12.0 V se aplica entre los conductores interno y externo, ¿cuál es el valor de la corriente total que pasa entre ellos?

Respuesta 14.1 mA.

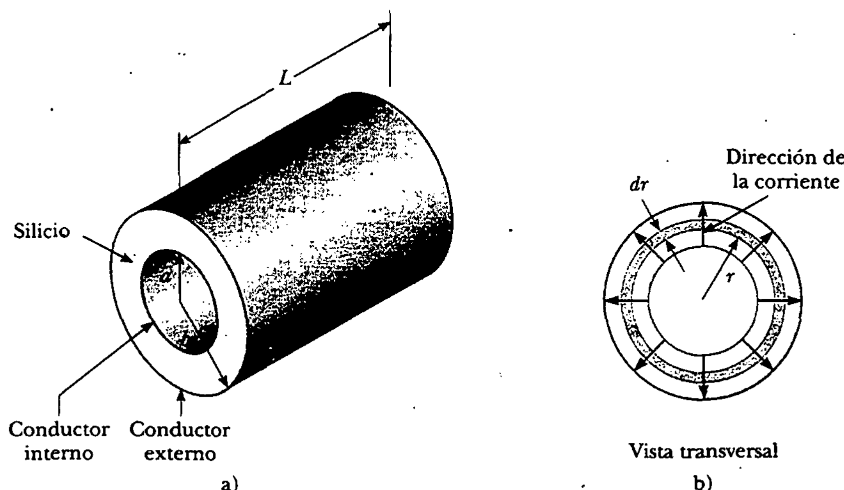


Figura 27.8 Un cable coaxial. a) El silicio llena el espacio entre los dos conductores. b) Vista transversal mostrando fuga de corriente.



27.3 UN MODELO PARA LA CONDUCCIÓN ELÉCTRICA

En esta sección se describe un modelo clásico de la conducción eléctrica en metales, el cual fue propuesto por primera ocasión por Paul Drude en 1900. Este modelo conduce a la ley de Ohm y demuestra que la resistividad puede relacionarse con el movimiento de electrones en metales. Aunque el modelo de Drude descrito aquí tiene limitaciones, introduce conceptos que todavía se aplican en tratamientos más elaborados.

Considere un conductor como un arreglo regular de átomos más una colección de electrones libres, llamados algunas veces electrones de *conducción*. Los electrones de conducción, aunque ligados a sus respectivos átomos cuando los átomos no son parte de un sólido, ganan movilidad cuando los átomos libres se condensan en un sólido. Cuando no hay campo eléctrico, los electrones de conducción se mueven en direcciones aleatorias a través del conductor a rapidez promedio del orden de 10^6 m/s. La situación es similar al movimiento de las moléculas de gas confinadas en un

recipiente. De hecho, algunos científicos se refieren a los electrones de conducción en un metal como un *gas de electrones.* No hay corriente a través de un conductor si no hay un campo eléctrico, puesto que la velocidad de arrastre de los electrones libres es cero. Es decir, en promedio, igual número de electrones se mueve en una dirección que en la dirección opuesta, por lo que no hay un flujo neto de carga.

La situación cambia cuando se aplica un campo eléctrico. Ahora, además del movimiento aleatorio que acaba de describirse, los electrones libres se mueven lentamente en dirección opuesta a la del campo eléctrico con una rapidez de arrastre promedio v_d que es mucho más pequeña (por lo general de 10^{-4} m/s) que su rapidez promedio entre choques (por lo común de 10^6 m/s).

La figura 27.9 proporciona una descripción burda del movimiento de los electrones libres en un conductor. Cuando no hay campo eléctrico, no hay desplazamiento neto después de muchos choques (Fig. 27.9a). Un campo eléctrico **E** modifica el movimiento aleatorio y ocasiona que los electrones se desplacen en una dirección opuesta a la de **E** (Figura 27.9b). La ligera curvatura en las trayectorias de la figura 27.9b es el resultado de la aceleración de los electrones entre colisiones causada por el campo aplicado.

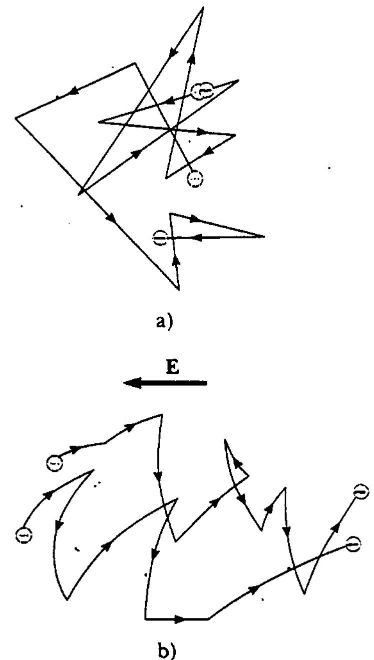


Figura 27.9 a) Diagrama esquemático del movimiento aleatorio de dos portadores de carga en un conductor en ausencia de un campo eléctrico. La velocidad de arrastre es cero. b) El movimiento de los portadores de carga en un conductor en la presencia de un campo eléctrico. Advierta que el movimiento aleatorio es modificado por el campo, y los portadores de carga tienen una velocidad de arrastre.

En este modelo se supone que el movimiento de un electrón después de una colisión es independiente de su movimiento antes de la colisión. También se supone que el exceso de energía adquirido por los electrones en el campo eléctrico se pierde en los átomos del conductor cuando los átomos y los electrones chocan. La energía dada a los átomos en los choques incrementa su energía vibratoria, lo que provoca el aumento de temperatura del conductor. Este aumento en la temperatura del conductor debido a la resistencia se utiliza en los tostadores eléctricos y en otros aparatos conocidos.

Ahora se está en una buena posición para obtener una expresión que represente la velocidad de arrastre. Cuando un electrón libre de masa m_e y carga q ($= -e$) se somete a un campo eléctrico **E**, experimenta una fuerza $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Puesto que $\sum \mathbf{F} = m_e\mathbf{a}$, se concluye que la aceleración del electrón es

$$\mathbf{a} = \frac{q\mathbf{E}}{m_e} \qquad \textbf{(27.12)}$$

Esta aceleración, la cual ocurre sólo durante un breve tiempo entre choques, permite al electrón adquirir una pequeña velocidad de arrastre. Si t es el tiempo desde la última colisión, y $\mathbf{v}_i$ es la velocidad inicial del electrón en el instante posterior a la colisión, entonces la velocidad del electrón después de un tiempo t es

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t = \mathbf{v}_i + \frac{q\mathbf{E}}{m_e}t \qquad \textbf{(27.13)}$$

Ahora se toma el valor promedio de **v** sobre todos los tiempos posibles t y todos los valores posibles de $\mathbf{v}_i$. Si se supone que las velocidades iniciales se distribuyen aleatoriamente sobre todos los posibles valores, se ve que el valor promedio de $\mathbf{v}_i$ es cero. El término $(q\mathbf{E}/m_e)t$ es la velocidad añadida por el campo durante un recorrido entre átomos. Si el electrón empieza con velocidad cero, el valor promedio del segundo término de la ecuación 27.13 es $(q\mathbf{E}/m_e)\tau$, donde τ es el *intervalo de tiempo promedio entre choques sucesivos.* Debido a que el valor promedio de $\mathbf{v}_f$ es igual a la velocidad de arrastre,[4] se tiene

Velocidad de arrastre

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_d = \frac{q\mathbf{E}}{m_e}\tau \qquad \textbf{(27.14)}$$

[4] Puesto que el proceso de choque es aleatorio, cada choque es *independiente* de lo que sucede antes. Esto es análogo al proceso aleatorio de lanzar un dado. La probabilidad de que se obtenga un número particular en un lanzamiento es independiente del resultado del lanzamiento previo. En promedio, serían necesarios seis lanzamientos para obtener ese número particular, empezando en cualquier tiempo arbitrario.

Se puede relacionar esta expresión para la velocidad de arrastre con la corriente en el conductor. Sustituyendo la ecuación 27.14 en la 27.6 se encuentra que la magnitud de la densidad de corriente es

Densidad de corriente

$$J = nqv_d = \frac{nq^2E}{m_e}\tau \qquad (27.15)$$

donde n es el número de portadores de carga por unidad de volumen. Comparando esta expresión con la ley de Ohm, $J = \sigma E$, se obtienen las siguientes relaciones para la conductividad y la resistividad:

Conductividad

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m_e} \qquad (27.16)$$

Resistividad

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e}{nq^2\tau} \qquad (27.17)$$

De acuerdo con este modelo clásico, la conductividad y la resistividad no dependen de la intensidad del campo eléctrico. Este rasgo es característico de un conductor que obedece la ley de Ohm.

El tiempo promedio entre las colisiones τ se relaciona con la distancia promedio entre colisiones ℓ (es decir, la *trayectoria libre media*; véase la sección 21.7) y con la rapidez promedio $\bar{v}$ por medio de la expresión

$$\tau = \frac{\ell}{\bar{v}} \qquad (27.18)$$

EJEMPLO 27.5 Choques de electrones en un alambre

a) Empleando los datos y resultados del ejemplo 27.1, y el modelo clásico de la conducción de electrones, calcule el tiempo promedio entre choques para electrones en un alambrado casero de cobre.

Solución En la ecuación 27.17 se ve que

$$\tau = \frac{m_e}{nq^2\rho}$$

donde $\rho = 1.7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$ para el cobre y la densidad de portadores es $n = 8.49 \times 10^{28}$ electrones/m^3 para el alambre descrito en el ejemplo 27.1. La sustitución de estos valores en la expresión anterior produce

$$\tau = \frac{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})}{(8.49 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1.7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})}$$

$$= 2.5 \times 10^{-14}\ \text{s}$$

b) Suponiendo que la rapidez promedio de los electrones libres en el cobre sea de 1.6×10^6 m/s, y utilizando el resultado del inciso a), calcule la trayectoria libre media para los electrones en el cobre.

Solución

$$\ell = \bar{v}\tau = (1.6 \times 10^6\ \text{m/s})(2.5 \times 10^{-14}\ \text{s})$$

$$= 4.0 \times 10^{-8}\ \text{m}$$

que es equivalente a 40 nm (comparada con los espaciamientos atómicos de aproximadamente 0.2 nm). Así, a pesar de que el tiempo entre colisiones es muy corto, un electrón en el alambre recorre cerca de 200 distancias atómicas antes de chocar.

Aunque este modelo de conducción clásico es consistente con la ley de Ohm, no es satisfactorio para explicar algunos fenómenos importantes. Por ejemplo, los valores clásicos para $\bar{v}$ calculados utilizando el modelo de gas ideal (véase la sección 21.6) son más pequeños que los valores reales en un factor cercano a 10. Además, si se sustituye $\ell/\bar{v}$ por τ en la ecuación 27.17, y se reacomodan los términos de modo que $\bar{v}$ aparezca en el numerador, se encuentra que la resistividad ρ es proporcional a $\bar{v}$. De acuerdo con el modelo de gas ideal, $\bar{v}$ es proporcional a $\sqrt{T}$; por tanto, también debería ser cierto que $\rho \propto \sqrt{T}$. Esto no concuerda con el hecho de que la resistividad depende linealmente de la temperatura en metales puros. Sólo es posible explicar estas observaciones mediante el modelo de la mecánica cuántica, el cual ahora se describirá a grandes rasgos.

Según la mecánica cuántica, los electrones tienen propiedades similares a las de las ondas. Si el arreglo de los átomos en un conductor está espaciado de manera regular (es decir, es periódico), entonces el carácter de similitud ondulatoria de los electrones les permite moverse libremente por el conductor, y una colisión con un átomo es improbable. En un conductor idealizado no habría colisiones, la trayectoria libre media sería infinita y la resistividad resultaría cero. Las ondas de electrones se dispersan sólo si el arreglo atómico es irregular (no periódico) como resultado de, por ejemplo, defectos estructurales o impurezas. A bajas temperaturas la resistividad de metales es dominada por la dispersión provocada por los choques entre los electrones y los defectos o impurezas. A elevadas temperaturas la resistividad es dominada por la dispersión que se produce debido a las colisiones entre los electrones y los átomos del conductor, los cuales son desplazados de manera continua del espacio arreglado regularmente como resultado de la agitación térmica. El movimiento térmico de los átomos hace que la estructura sea irregular (comparada con un arreglo atómico en reposo), razón por la que se reduce la trayectoria libre media de los electrones.

27.4 RESISTENCIA Y TEMPERATURA

En un intervalo limitado de temperatura, la resistividad de un metal varía aproximadamente de manera lineal con la temperatura, de acuerdo con la expresión

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \qquad (27.19)$$

Variación de ρ con la temperatura

donde ρ es la resistividad a cierta temperatura T (en grados Celsius), ρ_0 es la resistividad a determinada temperatura de referencia T_0 (que suele considerarse igual a 20°C) y α es el **coeficiente de temperatura de resistividad**. De acuerdo con la ecuación 27.19, se ve que el coeficiente de temperatura de resistividad puede expresarse como

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0}\frac{\Delta\rho}{\Delta T} \qquad (27.20)$$

Coeficiente de temperatura de resistividad

donde $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ es el cambio de resistividad en el intervalo de temperatura $\Delta T = T - T_0$.

Los coeficientes de temperatura de resistividad para diversos materiales se proporcionan en la tabla 27.1. Advierta que la unidad para α es grados Celsius^{-1} $[(°C)^{-1}]$. Puesto que la resistencia es proporcional a la resistividad (ecuación 27.11), la variación de la resistencia puede escribirse como

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)] \qquad (27.21)$$

El uso de esta propiedad permite hacer mediciones de temperatura precisas, como se demuestra en el siguiente ejemplo.

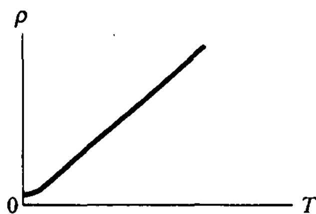
EJEMPLO 27.6 Un termómetro de resistencia de platino

Un termómetro de resistencia, que mide temperatura mediante la medición del cambio de resistencia de un conductor, está hecho de platino y tiene una resistencia de 50.0 Ω a 20.0°C. Cuando se sumerge en un recipiente que contiene indio fundido, su resistencia aumenta a 76.8 Ω. Calcule el punto de fusión del indio.

Solución Resolviendo la ecuación 27.21 para ΔT, y usando el valor de α para el platino proporcionado en la tabla 27.1, se obtiene

$$\Delta T = \frac{R - R_0}{\alpha R_0} = \frac{76.8\ \Omega - 50.0\ \Omega}{[3.92 \times 10^{-3}\ (°C)^{-1}](50.0\ \Omega)} = 137°C$$

Puesto que $T_0 = 20.0°C$, se encuentra que T, la temperatura de la muestra de indio fundido, es 157°C.



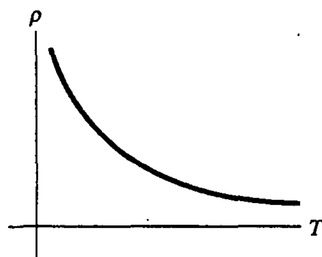


Figura 27.11 Resistividad *versus* temperatura para un semiconductor puro, como el silicio o el germanio.

Figura 27.10 Resistividad *versus* temperatura para un metal como el cobre. La curva es lineal sobre un amplio intervalo de temperaturas, y ρ aumenta conforme la temperatura se incrementa. Mientras T tiende al cero absoluto (inserción), la resistividad tiende a un valor finito ρ_0.

Para metales como el cobre, la resistividad es casi proporcional a la temperatura, como se indica en la figura 27.10. Sin embargo, siempre hay una región no lineal a temperaturas muy bajas, y la resistividad suele acercarse a cierto valor finito conforme la temperatura está cerca del cero absoluto. Esta resistividad residual cerca del cero absoluto se debe principalmente a choques de electrones con impurezas e imperfecciones en el metal. En contraste, la resistividad de alta temperatura (la región lineal) se caracteriza sobre todo por choques entre electrones y átomos metálicos.

Advierta que tres de los valores α en la tabla 27.1 son negativos; esto indica que la resistividad de dichos materiales disminuye con la temperatura creciente (Fig. 27.11). Este comportamiento se debe al incremento en la densidad de portadores de carga a las temperaturas más elevadas.

En vista de que los portadores de carga en un semiconductor a menudo se asocian con átomos de impurezas, la resistividad de estos materiales es muy sensible al tipo y concentración de dichas impurezas. Se volverá al estudio de los semiconductores en el capítulo 43 de la versión ampliada de este texto.

Pregunta sorpresa 27.5

¿Cuándo transporta más corriente un foco eléctrico —justo después de que se enciende y el brillo del filamento metálico está aumentando, o después de que ha estado encendido durante unos cuantos milisegundos y el brillo es estable?

Sección opcional



SUPERCONDUCTORES

Hay una clase de metales y compuestos cuya resistencia se vuelve cero debajo de cierta temperatura T_c, conocida como *temperatura crítica*. Estos materiales se conocen como **superconductores**. La gráfica resistencia-temperatura para un superconductor sigue la de un metal normal a temperaturas arriba de T_c (figura 27.12). Cuando la temperatura está en o debajo de T_c, la resistividad cae repentinamente hasta cero. Este fenómeno fue descubierto en 1911 por el físico holandés Heike Kamerlingh-Onnes (1853-1926) cuando trabajaba con mercurio, un material superconductor debajo de 4.2 K. Mediciones recientes han mostrado que las resistividades de superconductores debajo de sus valores de T_c son menores que $4 \times 10^{-25}\ \Omega \cdot m$ —aproximadamente 10^{17} veces más pequeños que la resistividad del cobre y en la práctica se consideran iguales a cero—.

En la actualidad se conocen miles de superconductores y, como se ilustra en la figura 27.13, las temperaturas críticas de los superconductores descubiertos hace poco son bastante más elevadas de lo que en principio se creyó posible. Se reconocen dos clases de superconductores. Los identificados más recientemente, como el $YBa_2Cu_3O_7$, son, en esencia, cerámicas con elevadas temperaturas críticas, mientras

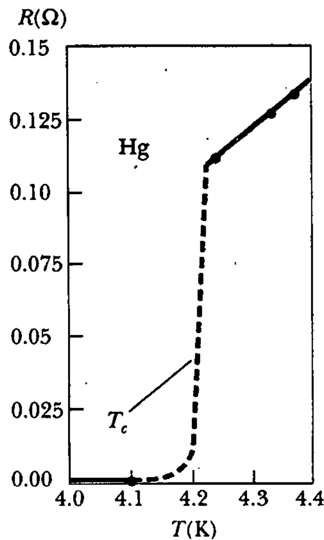
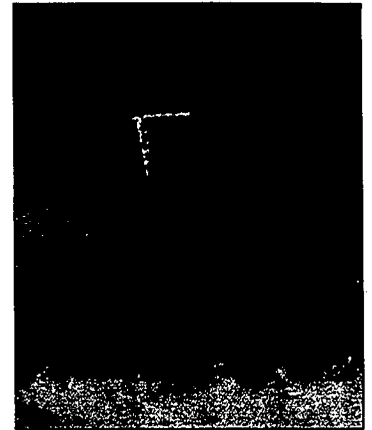


Figura 27.12 Resistencia *versus* temperatura para una muestra de mercurio (Hg). La gráfica comprende la de un metal normal sobre la temperatura crítica T_c. La resistencia cae a cero en T_c, la cual es de 4.2 K para el mercurio.



Un pequeño imán permanente levita sobre un disco del superconductor $YBa_2Cu_3O_7$, el cual está a 77 K. *(Cortesía de IBM Research Laboratory)*

que los materiales superconductores como los observados por Kamerlingh-Onnes son metales. Si alguna vez es identificado un superconductor a temperatura ambiente, el hecho tendría un tremendo impacto en la tecnología.

El valor de T_c es sensible a la composición química, la presión y la estructura molecular. Es interesante observar que el cobre, la plata y el oro, que son excelentes conductores, no presentan superconductividad.

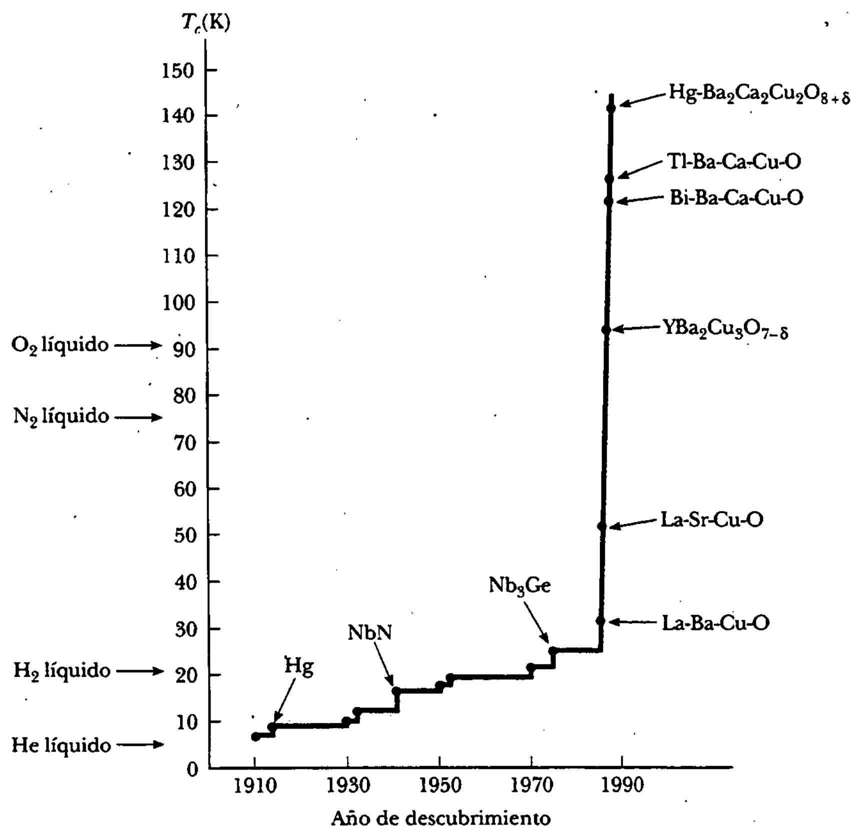


Figura 27.13 Evolución de la temperatura crítica de superconductividad a partir del descubrimiento del fenómeno.

Uno de los rasgos en verdad notables de los superconductores es que una vez que se establece en ellos una corriente, ésta persiste *sin ninguna diferencia de potencial aplicada* (puesto que $R = 0$). ¡Se han observado corrientes estables que persisten en anillos superconductores durante varios años sin decaimiento aparente!

Una aplicación importante y útil de la superconductividad ha sido la construcción de imanes superconductores, en los cuales las intensidades de campo magnético son casi 10 veces mayores que las producidas por los mejores electroimanes normales. Esos imanes superconductores se consideran como un medio para almacenar energía. Los imanes superconductores actualmente se utilizan en las unidades de imágenes de resonancia magnética médica (MRI, por sus siglas en inglés), las cuales producen imágenes de alta calidad de los órganos internos sin la necesidad de someter a los pacientes a una excesiva exposición de rayos X u otras radiaciones dañinas. Para mayor información sobre la superconductividad véase la sección 43.8.

27.6 ENERGÍA ELÉCTRICA Y POTENCIA

13.3 Si se utiliza una batería para establecer una corriente eléctrica en un conductor, hay una transformación continua de energía química almacenada en la batería en energía cinética de los portadores de carga. En los conductores, esta energía cinética se pierde rápidamente como consecuencia de los choques entre los portadores de carga y los átomos que integran al conductor, lo que produce un aumento en la temperatura del conductor. En otras palabras, la energía química almacenada en la batería se transforma de manera continua en energía interna asociada con la temperatura del conductor.

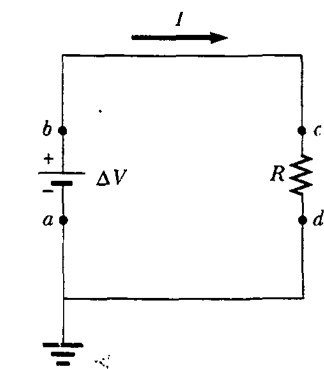


Figura 27.14 Un circuito que consta de un resistor de resistencia R y una batería que tiene una diferencia de potencial ΔV a través de sus terminales. La carga positiva fluye en la dirección de las manecillas del reloj. Los puntos a y d están aterrizados.

Considere un circuito sencillo compuesto por una batería cuyas terminales se conectan a un resistor, como se muestra en la figura 27.14. (Los resistores se designan por medio del símbolo —ʌʌʌ—.) Imagine ahora siguiendo una cantidad positiva de carga ΔQ que se mueve en el sentido de las manecillas del reloj por el circuito del punto a, a través de la batería y el resistor, y regresa a dicho punto a. Los puntos a y d están *aterrizados* (la tierra se designa por el símbolo ⏚); es decir, el potencial eléctrico en estos dos puntos se considera igual a cero. A medida que la carga se mueve de a a b a través de la batería, su energía potencial eléctrica U *aumenta* en una cantidad $\Delta V \Delta Q$ (donde ΔV es la diferencia de potencial entre b y a), mientras la energía potencial química en la batería *disminuye* en la misma cantidad. (Recuerde de la ecuación 25.9 que $\Delta U = q\Delta V$.) Sin embargo, cuando la carga se mueve de c a d a través del resistor, *pierde* esta energía potencial eléctrica al chocar con los átomos del resistor y, en consecuencia, se produce energía interna. Si se ignora la resistencia de los alambres de interconexión, no hay pérdida de energía en las trayectorias bc y da. Cuando la carga regresa al punto a, debe tener la misma energía potencial eléctrica (cero) que tenía al empezar.[5] Advierta que, puesto que la carga no se puede almacenar en punto alguno, la corriente es la misma en cualquier parte en el circuito.

La rapidez a la cual la carga ΔQ pierde energía potencial al atravesar el resistor es

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\Delta V = I\Delta V$$

donde I es la corriente en el circuito. En contraste, la carga vuelve a ganar esta energía cuando pasa a través de la batería. Puesto que la rapidez a la cual la carga pierde energía es igual a la potencia $\mathcal{P}$ entregada al resistor (la cual aparece como energía interna), se tiene

Potencia

$$\mathcal{P} = I\,\Delta V \qquad \textbf{(27.22)}$$

[5] Observe que cuando la corriente alcanza su valor de estado estable, *no* hay cambio en la energía cinética de los portadores de carga que generan la corriente.

En este caso la potencia es suministrada a un resistor por una batería. Sin embargo, la ecuación 27.22 puede usarse para determinar la potencia transferida a *cualquier* dispositivo que conduzca una corriente I y tenga una diferencia de potencial ΔV entre sus terminales.

Utilizando la ecuación 27.22 y el hecho de que $\Delta V = IR$ para un resistor, la potencia entregada al resistor se puede expresar en las formas alternativas

$$\mathcal{P} = I^2R = \frac{(\Delta V)^2}{R} \qquad \textbf{(27.23)}$$

Potencia entregada a un resistor

Cuando I está en amperes, ΔV en volts y R en ohms, la unidad de potencia del SI es el watt, como lo fue en el capítulo 7 en el análisis de la potencia mecánica. La potencia perdida como energía interna en un conductor de resistencia R se denomina *calentamiento de joule*;[6] a menudo esta transformación también se nombra como una pérdida I^2R.

Una batería o dispositivo que proporciona energía eléctrica se denomina como *fuente de fuerza electromotriz* o, de manera más común, como *fuente* fem. El concepto de *fem* se analiza con mayor detalle en el capítulo 28. (La frase *fuerza electromotriz* es desafortunada, puesto que no describe a una fuerza sino más bien a una diferencia de potencial en volts.) **Cuando se ignora la resistencia interna de la batería, la diferencia de potencial entre los puntos a y b en la figura 27.14 es igual a la fem $\mathcal{E}$ de la batería** —es decir, $\Delta V = V_b - V_a = \mathcal{E}$—. De ser esto cierto, se puede establecer que la corriente en el circuito es $I = \Delta V/R = \mathcal{E}/R$. Puesto que $\Delta V = \mathcal{E}$, la potencia suministrada por la fuente fem puede expresarse como $\mathcal{P} = I\mathcal{E}$, que es igual a la potencia entregada al resistor, I^2R.

Cuando se transporta energía eléctrica a través de las líneas de potencia, como las mostradas en la figura 27.15, las compañías proveedoras buscan minimizar la potencia transformada a energía interna en las líneas y maximizar la energía entregada al consumidor. Puesto que $\mathcal{P} = I\Delta V$, la misma cantidad de potencia se puede transportar, ya sea a altas corrientes y bajas diferencias de potencial o a bajas corrientes y altas diferencias de potencial. Las compañías proveedoras eligen transportar la energía eléctrica a bajas corrientes y altas diferencias de potencial primordialmente por razones económicas. El alambre de cobre es muy costoso, de modo que es más barato usar alambre de alta resistencia (es decir, alambre que tiene una pequeña área de sección transversal; véase la Ec. 27.11). De esta manera, en la expresión para la potencia entregada al resistor, $\mathcal{P} = I^2R$, la resistencia del alambre está fija a un valor relativamente alto para consideraciones económicas. La pérdida I^2R se puede reducir manteniendo la corriente I tan baja como sea posible. En algunos casos la potencia se transporta a diferencias de potencial tan grandes como 765 kV. Una vez que la electricidad alcanza su ciudad, la diferencia de potencial por lo común se reduce a 4 kV con un dispositivo llamado *transformador*. Otro transformador hace que la diferencia de potencial disminuya a 240 V antes de que la electricidad finalmente alcance su hogar. Desde luego, cada vez que la diferencia de potencial disminuye, la corriente aumenta por el mismo factor, y la potencia permanece constante. En el capítulo 33 se analizará a los transformadores de manera más detallada.

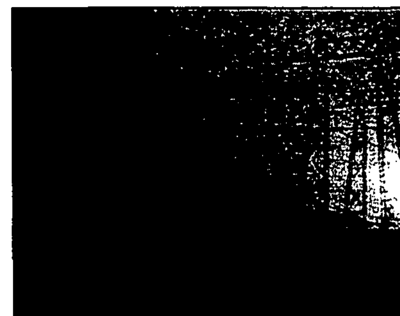


Figura 27.15 Las compañías de transmisión de potencia transfieren energía eléctrica a elevadas diferencias de potencial. *(Comstock)*

Pregunta sorpresa 27.6

A los dos focos eléctricos mostrados en la figura 27.16 se les aplica la misma diferencia de potencial. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) El foco de 30 W conduce la corriente más grande y tiene la mayor resistencia.
b) El foco de 30 W conduce la mayor corriente, pero el foco de 60 W tiene la mayor resistencia.

Experimento sorpresa

Si usted tiene acceso a un óhmmetro, verifique su respuesta a la pregunta sorpresa 27.6 probando la resistencia de unos cuantos focos eléctricos.

[6] Se denomina *calentamiento de joule* aun cuando el proceso de calentamiento no ocurre. Éste es otro ejemplo del uso incorrecto de la palabra *calor* que se ha atrincherado en el lenguaje.

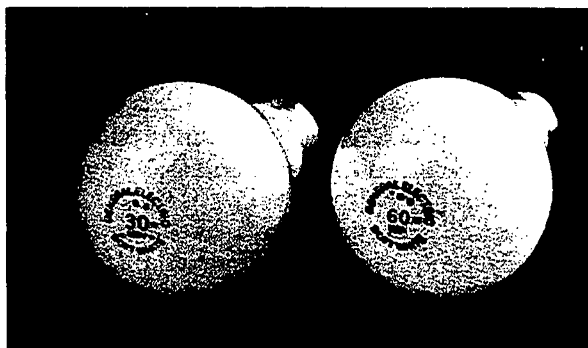


Figura 27.16 Estos focos eléctricos operan a su potencia nominal sólo cuando están conectados a una fuente de 120 V. *(George Semple)*

c) El foco de 30 W tiene la mayor resistencia, pero el de 60 W conduce la corriente más elevada.
d) El foco de 60 W conduce la mayor corriente y tiene la resistencia más elevada.

Experimento sorpresa

A partir de las etiquetas en los dispositivos caseros como secadoras de cabello, televisores y estéreos, estime el costo anual de utilizarlos.

Pregunta sorpresa 27.7

Para los dos focos mostrados en la figura 27.17, ordene los valores de corriente para los puntos del a al f, del mayor al menor.

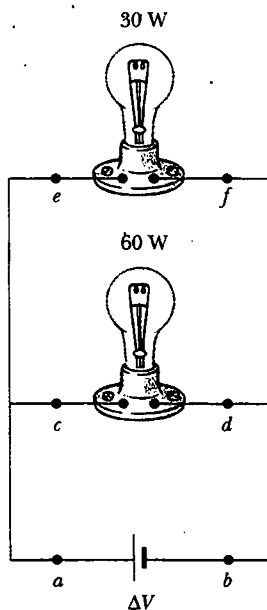


Figura 27.17 Dos focos eléctricos conectados a través de la misma diferencia de potencial. Los focos operan a sus potencias nominales sólo si están conectados a una batería de 120 V.

EJEMPLO 27.7 Potencia en un calefactor eléctrico

Un calefactor eléctrico se construye aplicando una diferencia de potencial de 120 V a un alambre de nicromo que tiene una resistencia total de 8.00 Ω. Encuentre la corriente conducida por el alambre y la potencia nominal del calefactor.

Solución Puesto que $\Delta V = IR$ se tiene

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{120\text{ V}}{8.00\ \Omega} = 15.0\text{ A}$$

Se puede encontrar la potencia nominal utilizando la expresión $\mathcal{P} = I^2R$:

$$\mathcal{P} = I^2R = (15.0\text{ A})^2(8.00\ \Omega) = 1.80\text{ kW}$$

Si se duplica la diferencia de potencial aplicada, la corriente se duplicaría pero la potencia se cuadruplicaría porque $\mathcal{P} = (\Delta V)^2/R$.

EJEMPLO 27.8 El costo de preparar la comida

Estime el costo de cocinar un pavo durante 4 h en un horno que opera de manera continua a 20.0 A y 240 V.

Solución La potencia usada por el horno es

$$\mathcal{P} = I\Delta V = (20.0 \text{ A})(240 \text{ V}) = 4\,800 \text{ W} = 4.80 \text{ kW}$$

Puesto que la energía consumida es igual a potencia × tiempo, la cantidad de energía por la cual usted debe pagar es

$$\text{Energía} = \mathcal{P}t = (4.80 \text{ kW})(4 \text{ h}) = 19.2 \text{ kWh}$$

Si la energía se adquiere a un precio estimado de 8.00 centavos de dólar por kilowatt hora, el costo es

$$\text{Costo} = (19.2 \text{ kWh})(\$0.080/\text{kWh}) = \$1.54$$

La demanda en los mermados suministros de energía ha hecho necesario que la gente tome en cuenta los requerimientos energéticos de sus aparatos eléctricos. Cada aparato eléctrico porta una etiqueta que contiene la información necesaria para calcular los requerimientos de potencia del aparato. En muchos casos el consumo de potencia en watts se establece de manera directa, como en los focos eléctricos. En otros casos la cantidad de corriente usada por el dispositivo y la diferencia de potencial a la cual opera están determinados. Esta información y la ecuación 27.22 son suficientes para calcular el costo de operación de cualquier dispositivo eléctrico.

Ejercicio ¿Cuál es el costo de utilizar un foco eléctrico de 100 W durante 24 h si el cargo de la compañía es de 0.08 dólares por kWh?

Respuesta 0.19 dólares.

EJEMPLO 27.9 Corriente en un haz de electrones

En cierto acelerador de partículas los electrones emergen con una energía de 40.0 MeV (1 MeV = 1.60×10^{-13} J). Los electrones no emergen en una corriente estable, sino en pulsos a una proporción de 250 pulsos/s. Esto corresponde a un tiempo entre pulsos de 4.00 ms (Fig. 27.18). Cada pulso dura 200 ns, y los electrones en el pulso constituyen una corriente de 250 mA. La corriente es cero entre pulsos. a) ¿Cuántos electrones son entregados por el acelerador por cada pulso?

Solución Se usa la ecuación 27.2 en la forma $dQ = I\,dt$ y se integra para encontrar la carga por pulso. Mientras el pulso está ocurriendo la corriente es constante; por tanto,

$$Q_{\text{pulso}} = I\int dt = I\Delta t = (250 \times 10^{-3} \text{ A})(200 \times 10^{-9} \text{ s})$$
$$= 5.00 \times 10^{-8} \text{ C}$$

Dividir esta cantidad de carga por pulso entre la carga electrónica da el número de electrones por pulso:

$$\text{Electrones por pulso} = \frac{5.00 \times 10^{-8} \text{ C/pulso}}{1.60 \times 10^{-19} \text{ C/electrón}}$$
$$= 3.13 \times 10^{11} \text{ electrones/pulso}$$

b) ¿Cuál es la corriente por pulso promedio entregada por el acelerador?

Solución La corriente promedio está dada por la ecuación 27.1, $I_{\text{prom}} = \Delta Q/\Delta t$. Puesto que el intervalo de tiempo entre pulsos es 4.00 ms, y como la carga por pulso se conoce del inciso a), se obtiene

$$I_{\text{prom}} = \frac{Q_{\text{pulso}}}{\Delta t} = \frac{5.00 \times 10^{-8} \text{ C}}{4.00 \times 10^{-3} \text{ s}} = 12.5\,\mu\text{A}$$

Esto representa sólo 0.005% de la corriente pico, que es de 250 mA.

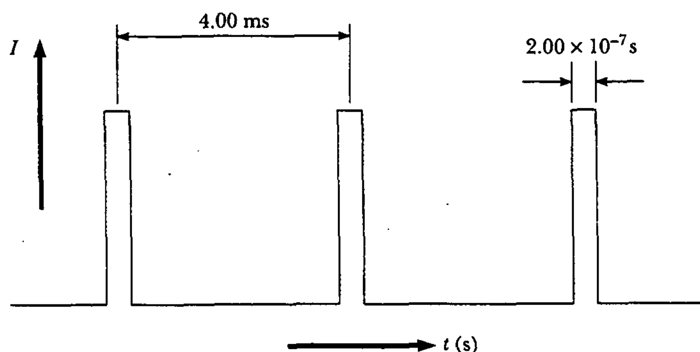


Figura 27.18 Corriente *versus* tiempo para un haz de electrones emitidos en pulsos.

c) ¿Cuál es la máxima potencia entregada por el haz de electrones?

Solución Por definición, la potencia es la energía entregada por unidad de tiempo. De este modo, la potencia máxima es igual a la energía entregada por un pulso dividida por la duración del pulso:

$$\mathcal{P} = \frac{E}{\Delta t}$$

$$= \frac{(3.13 \times 10^{11} \text{electrones/pulso})(40.0 \text{ MeV/electrón})}{2.00 \times 10^{-7} \text{s/pulso}}$$

$$= (6.26 \times 10^{19} \text{ MeV/s})(1.60 \times 10^{-13} \text{ J/MeV})$$

$$= 1.00 \times 10^7 \text{ W} = 10.0 \text{ MW}$$

También se podría calcular esta potencia de manera directa. Se supone que cada electrón tiene energía cero antes de ser acelerado. En consecuencia, por definición, cada electrón debe haber pasado a través de una diferencia de potencial de 40.0 MV para adquirir una energía final de 40.0 MeV. Por tanto, se tiene

$$\mathcal{P} = I\,\Delta V = (250 \times 10^{-3} \text{ A})(40.0 \times 10^6 \text{ V}) = 10.0 \text{ MW}$$

RESUMEN

La **corriente eléctrica** I en un conductor se define como

$$I \equiv \frac{dQ}{dt} \qquad \textbf{(27.2)}$$

donde dQ es la carga que pasa por una sección transversal del conductor en un tiempo dt. La unidad de corriente del SI es el **ampere** (A), donde 1 A = 1 C/s.

La corriente promedio en un conductor se relaciona con el movimiento de los portadores de carga por medio de la relación

$$I_{\text{prom}} = nqv_dA \qquad \textbf{(27.4)}$$

donde n es la densidad de portadores de carga, q es la carga en cada portador, v_d es la rapidez de arrastre, y A es el área de la sección transversal del conductor.

La magnitud de la **densidad de corriente** J en un conductor es la corriente por unidad de área:

$$J \equiv \frac{I}{A} = nqv_d \qquad \textbf{(27.5)}$$

La densidad de corriente en un conductor es proporcional al campo eléctrico de acuerdo con la expresión

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \qquad \textbf{(27.7)}$$

La constante de proporcionalidad σ se denomina **conductividad** del material del que está hecho el conductor. El inverso de σ se conoce como la **resistividad** ρ ($\rho = 1/\sigma$). La ecuación 27.7 se conoce como **ley de Ohm**, y se dice que un material obedece esta ley si la proporción de su densidad de corriente **J** a su campo eléctrico aplicado **E** es una constante que es independiente del campo aplicado.

La **resistencia** R de un conductor se define en términos de la longitud del conductor o en términos de la diferencia de potencial que lo atraviesa:

$$R \equiv \frac{\ell}{\sigma A} \equiv \frac{\Delta V}{I} \qquad \textbf{(27.8)}$$

donde ℓ es la longitud del conductor, σ es la conductividad del material del cual está hecho, A es su área de sección transversal, ΔV es la diferencia de potencial a través del mismo, e I es la corriente que conduce.

La unidad de resistencia en el SI es volts por ampere, lo cual se define como 1 **ohm** (Ω); es decir, 1 Ω = 1 V/A. Si la resistencia es independiente de la diferencia de potencial aplicada, el conductor obedece la ley de Ohm.

En un modelo clásico de la conducción eléctrica en metales, los electrones se tratan como moléculas de un gas. Cuando no hay un campo eléctrico, la velocidad promedio de los electrones es cero. Cuando se aplica un campo eléctrico, los electrones se mueven (en promedio) a una **velocidad de arrastre** $\mathbf{v}_d$, la cual es opuesta al campo eléctrico y está dada por la expresión

$$\mathbf{v}_d = \frac{q\mathbf{E}}{m_e}\tau \tag{27.14}$$

donde τ es el tiempo promedio entre choques electrón-átomo, m_e es la masa del electrón y q es su carga. De acuerdo con este modelo la resistividad del metal es

$$\rho = \frac{m_e}{nq^2\tau} \tag{27.17}$$

donde n es el número de electrones libres por unidad de volumen.

La resistividad de un conductor varía aproximadamente de manera lineal con la temperatura, de acuerdo con la expresión

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \tag{27.19}$$

donde α es el **coeficiente de temperatura de resistividad** y ρ_0 es la resistividad a cierta temperatura de referencia T_0.

Si una diferencia de potencial ΔV se mantiene a través de un resistor, la **potencia**, o rapidez a la cual se proporciona energía al resistor, es

$$\mathcal{P} = I\Delta V \tag{27.22}$$

Puesto que la diferencia de potencial a través de un resistor está dada por $\Delta V = IR$, la potencia entregada a un resistor se puede expresar en la forma

$$\mathcal{P} = I^2R = \frac{(\Delta V)^2}{R} \tag{27.23}$$

La energía eléctrica suministrada a un resistor aparece en la forma de energía interna en el resistor.

PREGUNTAS

1. Los artículos periodísticos con frecuencia contienen oraciones como "10 000 volts de electricidad recorrieron el cuerpo de la víctima", las cuales son erróneas. Explique por qué.
2. ¿Cuál es la diferencia entre resistencia y resistividad?
3. Los alambres A y B de sección transversal circular se elaboran del mismo metal y tienen igual longitud, pero la resistencia del alambre A es tres veces mayor que la del alambre B. ¿Cuál es la proporción entre sus áreas de sección transversal? ¿Cómo se comparan sus radios?
4. ¿Qué se requiere para mantener una corriente estable en un conductor?
5. ¿Todos los conductores obedecen la ley de Ohm? Dé ejemplos que justifiquen su respuesta.
6. Cuando se duplica el voltaje a través de cierto conductor, se observa que la corriente aumenta por un factor de tres. ¿Qué puede usted concluir acerca del conductor?
7. En la comparación del agua con un circuito eléctrico, ¿qué elemento corresponde a la alimentación eléctrica, al resistor, la carga y la diferencia de potencial?
8. ¿Por qué un "buen" conductor eléctrico también podría ser un "buen" conductor térmico?
9. Emplee la teoría atómica de la materia para explicar por qué la resistencia de un material debe aumentar cuando crece su temperatura.
10. ¿Cómo cambia con la temperatura la resistencia en el cobre y el silicio? ¿Por qué son diferentes los comportamientos de estos dos materiales?
11. Explique cómo una corriente puede persistir en un superconductor sin ningún voltaje aplicado.
12. ¿Qué único requerimiento experimental hace que el funcionamiento de los dispositivos superconductores resulte costoso? En principio, ¿se puede superar esta limitación?

13. ¿Qué pasaría con la velocidad de arrastre de los electrones en un alambre y con una corriente en el alambre si los electrones se movieran libremente sin resistencia a través del alambre?
[14.] Si las cargas fluyen de manera lenta por un metal, ¿por qué no se requieren varias horas para que la luz aparezca cuando usted activa un interruptor?
15. En un conductor el campo eléctrico que impulsa a los electrones a través de él se propaga con una rapidez cercana a la rapidez de la luz, aunque la velocidad de arrastre de los electrones es muy pequeña. Explique cómo puede ser cierto lo anterior. ¿El mismo electrón se mueve de un extremo del conductor al otro?
16. Dos conductores de la misma longitud y radio están conectados con la misma diferencia de potencial. Un conductor tiene dos veces más resistencia que el otro. ¿A cuál conductor se le entrega más potencia?
17. Las baterías de los carros con frecuencia están nominadas en amperes-hora. ¿Esto designa la cantidad de corriente, potencia, energía o carga que puede obtenerse de la batería?
18. Si usted fuese a diseñar un calefactor eléctrico utilizando alambre de nicromo como elemento calefactor, ¿qué parámetros del alambre variarían para lograr una salida de potencia específica, como 1 000 W?
19. Considere la siguiente estructura característica de las tarifas mensuales de una empresa eléctrica: 2.00 dólares para los primeros 16 kWh, 8.00 centavos de dólar/kWh para los siguientes 34 kWh, 6.50 centavos de dólar/kWh para los siguientes 50 kWh, 5.00 centavos de dólar/kWh para los siguientes 100 kWh, 4.00 centavos de dólar/kWh para los siguientes 200 kWh, y 3.50 centavos de dólar/kWh para todo lo que exceda a 400 kWh. Con base en estas tarifas, ¿cuál sería el cargo correspondiente para 327 kWh?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** □ = use computadora para resolver el problema □ = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 27.1 Corriente eléctrica

1. En un tubo de rayos catódicos particular, la corriente medida del haz es de 30.0 μA. ¿Cuántos electrones inciden sobre la pantalla del tubo cada 40.0 s?
2. Se va a platear tetera con un área superficial de 700 cm^2. Para este fin se une al electrodo negativo de una celda electrolítica que contiene nitrato de plata ($Ag^+NO_3^-$). Si la celda se potencia con una batería de 12.0 V y tiene una resistencia de 1.80 Ω, ¿cuánto tiempo tarda en formarse una capa de 0.133 mm de plata sobre la tetera? (La densidad de la plata es de 10.5×10^3 kg/m^3.)
WEB [3.] Suponga que la corriente que circula por un conductor disminuye exponencialmente con el tiempo de acuerdo con la expresión $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$, donde I_0 es la corriente inicial (en $t = 0$) y τ es una constante que tiene dimensiones de tiempo. Considere un punto de observación fijo dentro del conductor. a) ¿Cuánta carga pasa por este punto entre $t = 0$ y $t = \tau$? b) ¿Cuánta carga pasa por este punto entre $t = 0$ y $t = 10\tau$? c) ¿Cuánta carga pasa por este punto entre $t = 0$ y $t = \infty$?
4. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, un electrón en el estado de energía más bajo sigue una trayectoria circular a una distancia de 5.29×10^{-11} m del protón. a) Muestre que la rapidez del electrón es 2.19×10^6 m/s. b) ¿Cuál es la corriente efectiva asociada con este electrón orbital?
5. Una pequeña esfera que tiene una carga de 8.00 nC se hace girar en un círculo en el extremo de una corriente aislante. La frecuencia angular de rotación es 100π rad/s. ¿Qué corriente promedio representa esta carga rotatoria?
6. Una pequeña esfera que tiene una carga q se hace girar en un círculo en el extremo de una corriente aislante. La frecuencia angular de rotación es ω. ¿Qué corriente promedio representa esta carga rotatoria?
7. La cantidad de carga q (en coulombs) que pasa por una superficie de 2.00 cm^2 de área varía con el tiempo de acuerdo con $q = 4.00t^3 + 5.00t + 6.00$, donde t está en segundos. a) ¿Cuál es la corriente instantánea que pasa a través de la superficie en $t = 1.00$ s? b) ¿Cuál es el valor de la densidad de corriente?
8. Una corriente eléctrica está dada por $I(t) = 100 \operatorname{sen}(120\pi t)$, donde I está en amperes y t está en segundos. ¿Cuál es la carga total conducida por la corriente desde $t = 0$ hasta $t = 1/240$ s?
9. La figura P27.9 representa una sección de un conductor circular de diámetro no uniforme que conduce una corriente de 5.00 A. El radio de la sección transversal A_1 es 0.400 cm. a) ¿Cuál es la magnitud de la densidad de corriente a través de A_1? b) Si la densidad de corriente a través de A_2 es un cuarto del valor a través de A_1, ¿cuál es el radio del conductor en A_2?

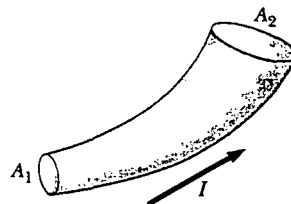


Figura P27.9

10. Un generador Van de Graaff produce un haz de 2.00 MeV de *deuterones*, los cuales son núcleos de hidrógeno pesado que contienen un protón y un neutrón. a) Si la corriente del haz es 10.0 μA, ¿qué tan separados están los deuterones? b) ¿Su repulsión electrostática es un factor en la estabilidad del haz? Explique.

11. El haz de electrones que surge de cierto acelerador de electrones de alta energía tiene una sección transversal circular de 1.00 mm de radio. a) Si la corriente del haz es de 8.00 μA, ¿cuál es la densidad de corriente en el mismo, suponiendo que es uniforme en todas partes? b) La rapidez de los electrones es tan cercana a la rapidez de la luz que puede tomarse como $c = 3.00 \times 10^8$ m/s con un error despreciable. Encuentre la densidad de electrones en el haz. c) ¿Cuánto tardaría en emerger del acelerador un número de Avogadro de electrones?

12. Un alambre de aluminio que tiene un área de sección transversal de 4.00×10^{-6} m^2 conduce una corriente de 5.00 A. Encuentre la rapidez de arrastre de los electrones en el alambre. La densidad del aluminio es de 2.70 g/cm^3. (Suponga que cada átomo proporciona un electrón.)

Sección 27.2 Resistencia y ley de Ohm

13. Un foco eléctrico tiene una resistencia de 240 Ω cuando opera a un voltaje de 120 V. ¿Cuál es la corriente a través del foco?

14. Un resistor se construye con una barra de carbón que tiene un área de sección transversal uniforme de 5.00 mm^2. Cuando se aplica una diferencia de potencial de 15.0 V entre los extremos de la barra, hay una corriente de 4.00×10^{-3} A en la barra. Encuentre a) la resistencia de la barra y b) su longitud.

WEB 15. Se mantiene una diferencia de potencial de 0.900 V a través de un alambre de tungsteno de 1.50 m de longitud que tiene un área de sección transversal de 0.600 mm^2. ¿Cuál es la corriente en el alambre?

16. Un conductor de 1.20 cm de radio uniforme conduce una corriente de 3.00 A producida por un campo eléctrico de 120 V/m. ¿Cuál es la resistividad del material?

17. Suponga que usted desea fabricar un alambre uniforme a partir de 1.00 g de cobre. Si el alambre va a tener una resistencia de $R = 0.500\ \Omega$ y se va a usar todo el cobre, ¿cuáles serán a) la longitud y b) el diámetro de este alambre?

18. a) Realice una estimación del orden de magnitud de la resistencia entre los extremos de una banda de caucho. b) Estime el orden de magnitud de la resistencia entre los lados "cara" y "cruz" de una moneda. En cada caso establezca qué cantidades consideró como datos y los valores que midió o estimó para ellos. c) ¿Cuál sería el orden de magnitud de la corriente que cada uno conduce si estuviesen conectados a un suministro de potencia de 120 V? (¡CUIDADO! ¡No intente hacer esto en casa!)

19. Un cubo sólido de plata (densidad = 10.5 g/cm^3) tiene una masa de 90.0 g. a) ¿Cuál es la resistencia entre caras opuestas del cubo? b) Si hay un electrón de conducción por cada átomo de plata, determine la rapidez de arrastre promedio de los electrones cuando una diferencia de potencial de 1.00×10^{-5} V se aplica a las caras opuestas. (El número atómico de la plata es 47, y su masa molar es 107.87 g/mol.)

20. Un alambre metálico de resistencia R se corta en tres pedazos iguales que luego se conectan extremo con extremo para formar un nuevo alambre, cuya longitud es igual a una tercera parte de la longitud original. ¿Cuál es la resistencia de este nuevo alambre?

21. Un alambre con una resistencia R se alarga hasta 1.25 veces su longitud original jalándolo a través de un pequeño agujero. Encuentre la resistencia del alambre después de que se ha alargado.

22. Se encuentra que alambres de aluminio y cobre de igual longitud tienen la misma resistencia. ¿Cuál es la relación de sus radios?

23. Una densidad de corriente de 6.00×10^{-13} A/m^2 existe en la atmósfera donde el campo eléctrico (debido a nubarrones cargados en la vecindad) es de 100 V/m. Calcule la conductividad eléctrica de la atmósfera de la Tierra en esta región.

24. La barra en la figura P27.24 (no dibujada a escala) está hecha de dos materiales. Ambos tienen una sección transversal cuadrada de 3.00 mm de lado. El primer material tiene una resistividad de $4.00 \times 10^{-3}\ \Omega \cdot$ m y una longitud de 25.0 cm, en tanto que la resistividad del segundo material es igual a $6.00 \times 10^{-3}\ \Omega \cdot$ m y su longitud es de 40.0 cm. ¿Cuál es la resistencia entre los extremos de la barra?

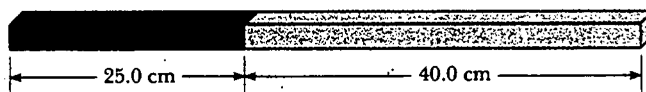


Figura P27.24

Sección 27.3 Un modelo para la conducción eléctrica

WEB 25. Si la velocidad de arrastre de los electrones libres en un alambre de cobre es de 7.84×10^{-4} m/s, ¿cuál es el campo eléctrico en el conductor?

26. Si la corriente transportada por un conductor se duplica, ¿qué pasa con a) la densidad de los portadores de carga? b) la densidad de corriente? c) la velocidad de arrastre de los electrones? d) el tiempo promedio entre colisiones?

27. Utilice los datos del ejemplo 27.1 para calcular la trayectoria libre media de choque de los electrones en el cobre, si la rapidez térmica promedio de los electrones de conducción es de 8.60×10^5 m/s.

Sección 27.4 Resistencia y temperatura

28. Mientras toma fotografías en Death Valley un día en que la temperatura es de 58.0°C, Bill Hiker encuentra que cierto voltaje aplicado a un alambre de cobre produce una corriente de 1.000 A. Luego Bill viaja a la Antártida y aplica el mismo voltaje al mismo alambre. ¿Qué corriente registra si la temperatura es de –88.0°C? Suponga que no hay cambio en la forma y tamaño del alambre.

29. Cierto foco eléctrico tiene un filamento de tungsteno con una resistencia de 19.0 Ω cuando está frío, y de 140 Ω cuando está caliente. Suponiendo que se puede usar

la ecuación 27.21 sobre el amplio intervalo de temperaturas involucrado aquí, encuentre la temperatura del filamento cuando está caliente. (Suponga una temperatura inicial de 20.0°C.)

30. Un alambre de carbón y un alambre de nicromo se conectan en serie. Si la combinación tiene una resistencia de 10.0 kΩ a 0°C, ¿cuál es la resistencia de cada alambre a 0°C de manera que la resistencia de la combinación no cambie con la temperatura? (Advierta que la resistencia equivalente de los dos resistores en serie es la suma de sus resistencias.)

31. Un alambre de aluminio con un diámetro de 0.100 mm tiene un campo eléctrico uniforme con una magnitud de 0.200 V/m impuesto a lo largo de su longitud. La temperatura del alambre es de 50.0°C. Suponga un electrón libre por átomo. a) Use la información de la tabla 27.1 y determine la resistividad. b) ¿Cuál es la densidad de corriente en el alambre? c) ¿Cuál es la corriente total en el alambre? d) ¿Cuál es la rapidez de arrastre de los electrones de conducción? e) ¿Qué diferencia de potencial debe existir entre los extremos de un alambre de 2.00 m de longitud para producir la intensidad de campo eléctrico establecida?

32. **Problema de repaso.** Una barra de aluminio tiene una resistencia de 1.234 Ω a 20.0°C. Calcule la resistencia de la barra a 120°C al tomar en consideración los cambios tanto en la resistividad como en las dimensiones de la barra.

33. ¿Cuál es el cambio fraccionario de la resistencia de un filamento de hierro cuando su temperatura cambia de 25.0°C a 50.0°C?

34. La resistencia de un alambre de platino se va a calibrar para mediciones de baja temperatura. Un alambre de platino con resistencia de 1.00 Ω a 20.0°C se sumerge en nitrógeno líquido a 77 K (−196°C). Si la respuesta de temperatura del alambre de platino es lineal, ¿cuál es la resistencia esperada del alambre de platino a −196°C? ($\alpha_{\text{platino}} = 3.92 \times 10^{-3}/°\text{C}$).

35. La temperatura de una muestra de tungsteno se incrementa mientras una muestra de cobre se mantiene a 20°C. ¿A qué temperatura la resistividad de la muestra de tungsteno será cuatro veces la de la muestra de cobre?

36. Un segmento de un alambre de nicromo está inicialmente a 20.0°C. Utilizando los datos de la tabla 27.1 calcule la temperatura a la cual el alambre debe calentarse para duplicar su resistencia.

Sección 27.6 Energía eléctrica y potencia

37. Un tostador está nominado a 600 W cuando se conecta a una fuente de 120 V. ¿Qué corriente conduce el tostador, y cuál es su resistencia?

38. En una instalación hidroeléctrica, una turbina entrega 1 500 hp a un generador, el cual, a su vez, convierte 80.0% de la energía mecánica en energía eléctrica. En estas condiciones, ¿qué corriente entregará el generador a una diferencia de potencial terminal de 2 000 V?

WEB 39. **Problema de repaso.** ¿Cuál es la resistencia que necesita un calefactor de inmersión que aumentará la temperatura de 1.50 kg de agua de 10.0°C a 50.0°C en 10.0 min mientras opera a 110 V?

40. **Problema de repaso.** ¿Cuál es la resistencia que necesita un calefactor de inmersión que aumentará la temperatura de una masa m de agua de T_1 a T_2 en un tiempo t mientras opera a un voltaje ΔV?

41. Suponga que una onda de voltaje produce 140 V durante un momento. ¿En qué porcentaje aumentará la salida de un foco eléctrico de 100 W y 120 V? (Suponga que su resistencia no cambia.)

42. Una bobina calefactora de 500 W diseñada para operar a 110 V está hecha de alambre de nicromo de 0.500 mm de diámetro. a) Suponiendo que la resistividad del nicromo permanece constante en su valor a 20.0°C, encuentre la longitud del alambre utilizado. b) Considere luego la variación de la resistividad con la temperatura. ¿Qué potencia entregará en realidad la bobina del inciso a) cuando se caliente hasta 1 200°C?

43. Una bobina de alambre de nicromo mide 25.0 m de longitud. El alambre tiene un diámetro de 0.400 mm y está a 20.0°C. Si el alambre porta una corriente de 0.500 A, ¿cuáles son a) la magnitud del campo eléctrico en el mismo y b) la potencia que se le entrega? c) Si la temperatura se incrementa a 340°C y la diferencia de potencial a través del alambre permanece constante, ¿cuál es la potencia entregada?

44. Las baterías se especifican en términos de ampere-horas (A · h). Por ejemplo, una batería que puede producir una corriente de 2.00 A durante 3.00 h está especificada en 6.00 A · h. a) ¿Cuál es la energía total, en kilowatt-horas, almacenada en una batería de 12.0 V especificada a 55.0 A · h? b) A un costo de 0.060 0 dólares por kilowatt-hora, ¿cuál es el valor de la electricidad producida por esta batería?

45. Una batería de 10.0 V se conecta a un resistor de 120 Ω. Ignorando la resistencia interna de la batería calcule la potencia entregada al resistor.

46. Se estima que cada persona en Estados Unidos (población = 270 millones) tiene un reloj eléctrico, y que cada reloj utiliza energía a una rapidez de 2.50 W. Para suministrar esta energía, ¿aproximadamente cuántas toneladas métricas de carbón se queman por hora en plantas carboeléctricas que, en promedio, tienen una eficiencia de 25.0%? (El calor de combustión para el carbón es de 33.0 MJ/kg.)

47. Calcule el costo diario de operar una lámpara que toma 1.70 A de una línea de 110 V si el costo de la energía eléctrica es de 0.060 0 dólares/kWh.

48. **Problema de repaso.** El elemento calefactor de una cafetera opera a 120 V y conduce una corriente de 2.00 A. Suponiendo que toda la energía transferida desde el elemento calefactor es absorbida por el agua, ¿cuánto tiempo tarda en calentarse 0.500 kg de agua desde la temperatura ambiente (23.0°C) hasta el punto de ebullición?

49. Cierto tostador tiene un elemento calefactor hecho de alambre de resistencia de nicromo. Cuando se conecta primero a una fuente de diferencia de potencial de 120 V (y el alambre está a una temperatura de 20.0°C) la corriente inicial es de 1.80 A. Sin embargo, la corriente empieza a disminuir cuando se calienta el elemento resistivo. Cuando el tostador ha alcanzado la temperatura máxima a la que funciona, la corriente ha disminuido a

1.53 A. a) Determine la potencia que el tostador consume cuando se encuentra a su temperatura de funcionamiento. b) ¿Cuál es la temperatura máxima del elemento calefactor?

50. Para calentar un cuarto que tiene un techo de 8.0 pies de alto se requieren aproximadamente 10.0 W de potencia eléctrica por pie cuadrado. A un costo de 0.080 0 dólares/kWh, ¿cuánto costará, por día, usar electricidad para calentar un cuarto que mide 10.0 × 15.0 pies?

51. Estime el costo que representa para una persona usar una secadora de cabello durante un año. Si usted no usa secadora, observe o entreviste a alguien que sí lo haga. Establezca las cantidades que estimó y sus valores.

PROBLEMAS ADICIONALES

52. Un foco eléctrico está marcado "25 W 120 V", y otro "100 W 120 V"; esto significa que cada foco convierte su respectiva potencia cuando se conecta a una diferencia de potencial constante de 120 V. a) Encuentre la resistencia de cada foco. b) ¿Cuánto tarda 1.00 C en pasar a través del foco encendido? ¿Cómo se diferencia esta carga al momento de su salida en comparación con el tiempo de su entrada? c) ¿Cuánto tarda 1.00 J en pasar a través del foco encendido? ¿Cómo se diferencia esta energía en el momento de su salida en comparación con el tiempo de su entrada? d) Encuentre el costo de mantener el foco encendido, de manera continua, durante 30.0 días, si la compañía eléctrica vende su producto a 0.070 0 dólares por kWh. ¿Qué producto *vende* la compañía eléctrica? ¿Cuál es el precio para una unidad SI de esta cantidad?

53. Una línea de transmisión de alto voltaje con un diámetro de 2.00 cm y una longitud de 200 km conduce una corriente estable de 1 000 A. Si el conductor es alambre de cobre con una densidad de carga libre de 8.00×10^{28} electrones/m^3, ¿cuánto tarda un electrón en viajar la longitud completa del cable?

54. Una línea de transmisión de alto voltaje conduce 1 000 A partiendo a 700 kV durante una distancia de 100 millas. Si la resistencia en el alambre es de 0.500 Ω/mi, ¿cuál es la pérdida de potencia debida a las pérdidas resistivas?

55. Una definición más general del coeficiente de temperatura de resistividad es

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}$$

donde ρ es la resistividad a temperatura T. a) Suponiendo que α es constante, demuestre que

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha(T-T_0)}$$

donde ρ_0 es la resistividad a temperatura T_0. b) Utilizando la expansión en serie ($e^x \cong 1 + x$ para $x \ll 1$), muestre que la resistividad está dada de manera aproximada por la expresión $\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$ para $\alpha(T - T_0) \ll 1$.

56. Se diseñará un cable de cobre para conducir una corriente de 300 A con una pérdida de potencia de sólo 2.00 W/m. ¿Cuál debe ser su radio?

WEB **57.** Se conduce un experimento para medir la resistividad eléctrica del nicromo en forma de alambres con diferentes longitudes y áreas de sección transversal. Para un conjunto de mediciones un estudiante utiliza alambre de calibre 30, el cual tiene un área de sección transversal de 7.30×10^{-8} m^2. El estudiante mide la diferencia de potencial a través del alambre y la corriente en el mismo con un voltímetro y un amperímetro, respectivamente. Para cada una de las mediciones dadas en la tabla siguiente, que se efectuaron en tres alambres de diferente longitud, calcule la resistencia de los alambres y los valores correspondientes de la resistividad. ¿Cuál es el valor promedio de la resistividad y cómo se compara ésta con el valor dado en la tabla 27.1?

L (m)	ΔV (V)	I (A)	R (Ω)	ρ (Ω · m)
0.540	5.22	0.500		
1.028	5.82	0.276		
1.543	5.94	0.187		

58. Una empresa eléctrica alimenta la casa de un cliente a partir de las líneas de transmisión principales (120 V) con dos alambres de cobre, cada uno de 50.0 m de largo y una resistencia de 0.108 Ω por cada 300 m. a) Encuentre el voltaje en la casa del consumidor para una corriente de carga de 110 A. Para esta corriente de carga encuentre b) la potencia que el consumidor recibe, y c) la pérdida de potencia en los alambres de cobre.

59. Un alambre cilíndrico recto colocado sobre el eje x tiene una longitud de 0.500 m y un diámetro de 0.200 mm. Está hecho de un material descrito por la ley de Ohm con una resistividad de $\rho = 4.00 \times 10^{-8}$ Ω · m. Suponga que un potencial de 4.00 V se mantiene en $x = 0$, y que $V = 0$ en $x = 0.500$ m. Encuentre a) el campo eléctrico **E** en el alambre, b) la resistencia del alambre, c) la corriente eléctrica en el alambre, y d) la densidad de corriente **J** en el alambre. Exprese los vectores en notación vectorial. e) Demuestre que $\mathbf{E} = \rho\mathbf{J}$.

60. Un alambre cilíndrico recto que está sobre el eje x tiene una longitud L y un diámetro d. Está hecho de un material descrito por la ley de Ohm con una resistividad ρ. Suponga que un potencial V se mantiene en $x = 0$, y que $V = 0$ en $x = L$. En términos de L, d, V, ρ y constantes físicas, derive expresiones para a) el campo eléctrico en el alambre, b) la resistencia del alambre, c) la corriente eléctrica en el alambre, y d) la densidad de corriente en el alambre. Exprese los vectores en notación vectorial. e) Demuestre que $\mathbf{E} = \rho\mathbf{J}$.

61. La diferencia de potencial a través del filamento de una lámpara se mantiene a un nivel constante mientras se alcanza la temperatura de equilibrio. Se observa que la corriente en estado estable en la lámpara sólo es un décimo de la corriente tomada por la lámpara cuando se enciende por primera vez. Si el coeficiente de temperatura de resistividad para la lámpara a 20.0°C es 0.004 50(°C)$^{-1}$ y la resistencia aumenta linealmente con el incremento de temperatura, ¿cuál es la temperatura de operación final del filamento?

62. La corriente en un resistor disminuye 3.00 A cuando la diferencia de potencial aplicada a través del resistor se reduce de 12.0 V a 6.00 V. Encuentre la resistencia del resistor.

63. Un auto eléctrico se diseña para operar por medio de un banco de baterías de 12.0 V con un almacenamiento de energía total de 2.00×10^7 J. a) Si el motor eléctrico toma 8.00 kW, ¿cuál es la corriente entregada al motor? b) Si el motor eléctrico consume 8.00 kW a medida que el auto se mueve a una rapidez estable de 20.0 m/s, ¿qué distancia recorrerá el auto antes de que se le "agote el combustible"?

64. **Problema de repaso.** Cuando un alambre recto se calienta, su resistencia está dada por la expresión $R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, de acuerdo con la ecuación 27.21, donde α es el coeficiente de temperatura de resistividad. a) Muestre que un resultado más preciso, uno que incluya el hecho de que la longitud y el área del alambre cambian cuando se calientan, es

$$R = \frac{R_0[1 + \alpha(T - T_0)][1 + \alpha'(T - T_0)]}{[1 + 2\alpha'(T - T_0)]}$$

donde α' es el coeficiente de expansión lineal (véase el capítulo 19). b) Compare estos dos resultados para un alambre de cobre de 2.00 m de largo y 0.100 mm de radio, inicialmente a 20.0°C y después calentado hasta 100.0°C.

65. Los coeficientes de temperatura de resistividad en la tabla 27.1 fueron determinados a una temperatura de 20°C. ¿Cómo serían a 0°C? (*Sugerencia*: los coeficientes de temperatura de resistividad a 20°C satisfacen la expresión $\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, donde ρ_0 es la resistividad del material a $T_0 = 20°C$. El coeficiente de temperatura de resistividad α' a 0°C debe satisfacer la expresión $\rho = \rho_0'[1 + \alpha' T]$, donde ρ_0' es la resistividad del material a 0°C.)

66. Un resistor se construye moldeando un material de resistividad ρ dentro de un cilindro hueco de longitud L y radios interior y exterior r_a y r_b, respectivamente (figura P27.66). Mientras se usa, una diferencia de potencial aplicada entre los extremos del cilindro produce una corriente paralela al eje. a) Encuentre una expresión general para la resistencia de un dispositivo de dichas características en términos de L, ρ, r_a y r_b. b) Obtenga un valor numérico para R cuando $L = 4.00$ cm, $r_a = 0.500$ cm, $r_b = 1.20$ cm y $\rho = 3.50 \times 10^5\ \Omega\cdot$m. c) Suponga después que la diferencia de potencial se aplica entre las superficies interna y externa de modo que la corriente resultante fluye radialmente hacia afuera. Encuentre una expresión general para la resistencia del dispositivo en términos de L, ρ, r_a y r_b. d) Calcule el valor de R usando los parámetros dados en el inciso b).

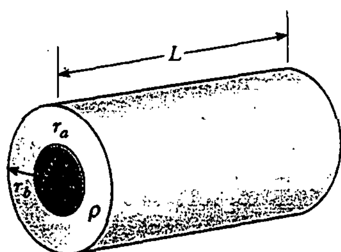


Figura P27.66

67. En cierto sistema estéreo cada bocina tiene una resistencia de 4.00 Ω. El sistema tiene un valor nominal de 60.0 W en cada canal, y cada circuito de altavoz incluye un fusible especificado a 4.00 A. ¿Este sistema está protegido en forma adecuada contra una sobrecarga? Exponga sus razones.

68. Hay una gran semejanza entre el flujo de energía debido a una diferencia de temperatura (véase la sección 20.7) y el flujo de carga eléctrica debido a una diferencia de potencial. La energía dQ y la carga eléctrica dq son transportadas por electrones libres en el material conductor. Consecuentemente, un buen conductor eléctrico suele ser también un buen conductor térmico. Considere una delgada placa conductora de espesor dx, área A y conductividad eléctrica σ, con una diferencia de potencial dV entre caras opuestas. Demuestre que la corriente $I = dq/dt$ está dada por la ecuación a la izquierda:

Conducción de carga	Conducción térmica análoga (Ec. 20.14)
$\dfrac{dq}{dt} = \sigma A \left\lvert \dfrac{dV}{dx} \right\rvert$	$\dfrac{dQ}{dt} = kA \left\lvert \dfrac{dT}{dx} \right\rvert$

En la ecuación de conducción térmica semejante a la derecha, la rapidez de flujo de energía dQ/dt (en unidades del SI joules por segundo) se debe a un gradiente de temperatura dT/dx, en un material de conductividad térmica k. Establezca reglas similares que relacionen la dirección de la corriente eléctrica con el cambio en potencial y que relacionen la dirección del flujo de energía con el cambio en temperatura.

69. Material con resistividad uniforme ρ se forma como una cuña de la manera indicada en la figura P27.69. Muestre que la resistencia entre las caras A y B de esta cuña es

$$R = \rho \frac{L}{w(y_2 - y_1)} \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

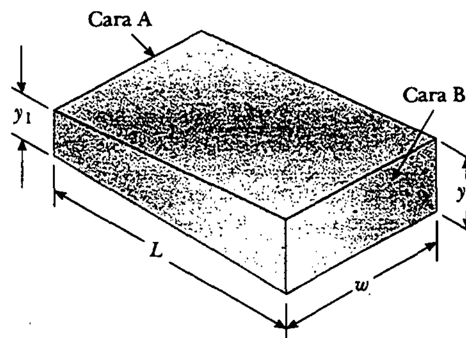


Figura P27.69

70. Un material de resistividad ρ se forma como un cono truncado de altitud h, según se indica en la figura P27.70. El extremo del fondo tiene un radio b y el extremo superior un radio a. Suponiendo que la corriente está dis-

tribuida de manera uniforme sobre cualquier sección transversal particular del cono, de modo que la densidad de corriente no es una función de la posición radial (aunque sí varíe con la posición a lo largo del eje del cono), muestre que la resistencia entre los dos extremos está dada por la expresión

$$R = \frac{\rho}{\pi}\left(\frac{h}{ab}\right)$$

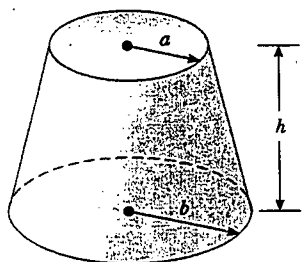


Figura P27.70

71. La curva característica corriente-voltaje para un diodo semiconductor como función de la temperatura T está dada por la ecuación

$$I = I_0(e^{e\Delta V/k_B T} - 1)$$

Aquí, el primer símbolo e representa la base del logaritmo natural. La segunda e es la carga sobre el electrón. La k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta. Use una hoja para exhibir los cálculos de I y $R = (\Delta V)/I$ para $\Delta V = 0.400$ V a 0.600 V en incrementos de 0.005 V. Suponga que $I_0 = 1.00$ nA. Grafique R *versus* ΔV para $T = 280$ K, 300 K y 320 K.

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

27.1 d, b = c, a. La corriente en la parte d) es equivalente a dos cargas positivas moviéndose hacia la izquierda. Las partes b) y c) representan, cada una, cuatro cargas positivas moviéndose en la misma dirección, porque las cargas negativas que se mueven hacia la izquierda son equivalentes a las cargas positivas que se mueven hacia la derecha. La corriente en la parte a) es equivalente a cinco cargas positivas moviéndose hacia la derecha.

27.2 Cada porción del alambre conduce la misma corriente aun cuando el alambre se estrecha. Conforme el área de sección transversal disminuye, la velocidad de arrastre debe aumentar para que se mantenga la corriente constante, de acuerdo con la ecuación 27.4. Las ecuaciones 27.5 y 27.6 indican que la densidad de corriente también aumenta. Un incremento en el campo eléctrico debe estar provocando el aumento en la densidad de corriente, como se indica por la ecuación 27.7. Si usted tuviese que dibujar esta situación, mostraría a las líneas del campo eléctrico siendo comprimidas en un área pequeña, lo cual indica incremento de la magnitud del campo eléctrico.

27.3 $1/R$. La curvatura de la línea indica que el dispositivo es no óhmico (esto es, su resistencia varía con la diferencia de potencial). Al ser la definición de resistencia, la ecuación 27.8 todavía se aplica, lo cual produce diferentes valores de R en diferentes puntos sobre la curva.

27.4 El cable podría ser tan corto como sea posible pero todavía permitiría alcanzar de un vehículo a otro (pequeña ℓ), debería ser lo bastante grueso (gran A) y debería estar hecho de un material con baja resistividad ρ. Al remitirse a la tabla 27.1, tal vez usted elegiría cobre o aluminio, ya que los únicos dos materiales en la tabla que tienen los valores ρ más bajos —plata y oro— son prohibitivamente caros para sus propósitos.

27.5 Justo después de que se enciende. Cuando el filamento está a temperatura ambiente, su resistencia es baja y, en consecuencia, la corriente es relativamente grande ($I = \Delta V/R$). Conforme el filamento se calienta, su resistencia aumenta, y la corriente disminuye. Con frecuencia los focos más viejos se funden justo cuando se encienden porque este gran "pico" de corriente inicial produce rápidos incrementos de temperatura y tensión sobre el filamento.

27.6 c). Ya que la diferencia de potencial ΔV es la misma a través de los dos focos, y puesto que la potencia entregada a un conductor es $\mathcal{P} = I\Delta V$, el foco de 60 W, con su especificación de potencia más elevada, debe conducir la mayor corriente. El foco de 30 W tiene la mayor resistencia porque toma menos corriente a la misma diferencia de potencial.

27.7 $I_a = I_b > I_c = I_d > I_e = I_f$. La corriente I_a deja la terminal positiva de la batería y luego se divide para fluir a través de los dos focos; por tanto, $I_a = I_c + I_e$. De la pregunta sorpresa 27.6 se sabe que la corriente en el foco de 60 W es mayor que la del foco de 30 W. (Advierta que toda la corriente no sigue la "trayectoria de menor resistencia", la cual en este caso es a través del foco de 60 W). Puesto que la carga no se almacena en los focos, se sabe que toda la carga que fluye hacia un foco desde la izquierda debe fluir hacia afuera a la derecha; en consecuencia, $I_c = I_d$ e $I_e = I_f$. Las dos corrientes que dejan los focos se recombinan para formar la corriente de regreso hacia la batería, $I_f + I_d = I_b$.

ACERTIJO

Si todos estos dispositivos estuviesen en funcionamiento al mismo tiempo, podría dispararse un interruptor automático, previniendo una situación potencialmente peligrosa. ¿Qué ocasiona que se dispare un interruptor automático cuando se conectan demasiados dispositivos eléctricos en un circuito? *(George Semple)*



capítulo

28 Circuitos de corriente continua

Líneas generales del capítulo

Este capítulo aborda el análisis de algunos circuitos eléctricos simples que constan de baterías, resistores y capacitores en diversas combinaciones. El análisis de estos circuitos se simplifica mediante el uso de dos reglas conocidas como *reglas de Kirchhoff*, las cuales surgen de las leyes de conservación de la energía y de conservación de la carga eléctrica. La mayor parte de los circuitos analizados se supone que están en *estado estable*, lo que significa que las corrientes son de magnitud y dirección constantes. En la sección 28.4 se estudian circuitos en los cuales la corriente varía con el tiempo. Por último se describen varios dispositivos eléctricos comunes y técnicas para medir corriente, diferencias de potencial, resistencia y fem.

28.1 FUERZA ELECTROMOTRIZ

En la sección 27.6 se encontró que puede mantenerse una corriente constante en un circuito cerrado mediante el uso de una fuente de *fem*, que es un dispositivo (como una batería o generador) que produce un campo eléctrico y, por tanto, puede originar que las cargas se muevan alrededor de un circuito. Una fuente de fem se puede considerar como una "bomba de carga". Cuando existe una diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos, la fuente mueve cargas "hacia arriba" desde un potencial bajo hasta uno más alto. La fem $\mathcal{E}$ describe el trabajo realizado por unidad de carga y, por ello, la unidad de fem del SI es el volt.

Considere el circuito que se muestra en la figura 28.1 que consta de una batería conectada a un resistor. Suponga que los alambres de conexión no tienen resistencia. La terminal positiva de la batería está a un potencial más alto que la terminal negativa. Si ignora la resistencia interna de la batería, entonces la diferencia de potencial a través de ella (el llamado *voltaje de la terminal*) es igual a su fem. Sin embargo, ya que una batería real siempre tiene alguna resistencia interna r, el voltaje de las terminales no es igual a la fem para una batería en un circuito en el cual existe una corriente. Para comprender por qué esto es así, considere el diagrama de circuito en la figura 28.2a, donde la batería de la figura 28.1 se representa por el rectángulo sombreado que contiene una fem $\mathcal{E}$ en serie con una resistencia interna r. Imagine ahora que se mueve a través de la batería en el sentido de las manecillas del reloj de a a b, y que mide el potencial eléctrico en varias ubicaciones. A medida que pasa de la terminal negativa a la positiva, su potencial *aumenta* en una cantidad $\mathcal{E}$. Sin embargo, conforme se mueve a través de la resistencia r, su potencial *disminuye* en una cantidad Ir, donde I es la corriente en el circuito. De este modo, el voltaje de las terminales de la batería, $\Delta V = V_b - V_a$ es[1]

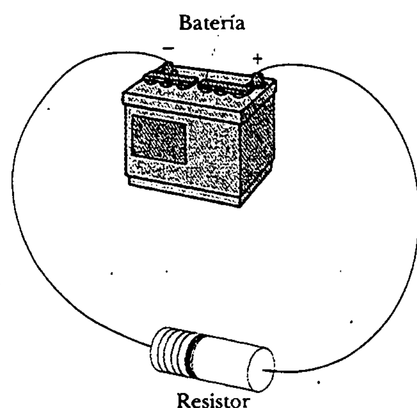


Figura 28.1 Un circuito que consta de un resistor conectado a las terminales de una batería.

[1] En este caso el voltaje de las terminales es menor que el de la fem en una cantidad Ir. En algunas situaciones el voltaje de las terminales puede *exceder* la fem en una cantidad Ir. Esto ocurre cuando la dirección de la corriente es *opuesta* a la de la fem, como en el caso de la carga de una batería con otra fuente de fem.

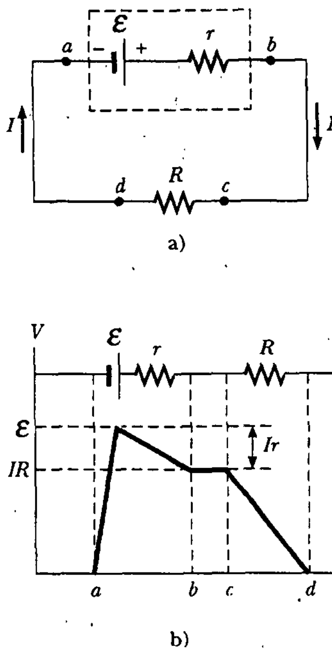


Figura 28.2 a) Diagrama de circuito de una fuente de fem $\mathcal{E}$ (en este caso, una batería), de resistencia interna r, conectada a un resistor externo de resistencia R. b) Representación gráfica que muestra cómo cambia el potencial eléctrico conforme el circuito en la parte a) es recorrido en el sentido de las manecillas del reloj.

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir \tag{28.1}$$

A partir de esta expresión advierta que $\mathcal{E}$ es equivalente al **voltaje en circuito abierto** —es decir, el *voltaje de las terminales cuando la corriente es cero*. La fem es el voltaje marcado sobre una batería—, por ejemplo, la fem de una pila D es 1.5 V. La diferencia de potencial real entre las terminales de la batería depende de la corriente a través de la batería, como se describe en la ecuación 28.1.

La figura 28.2b es una representación gráfica de los cambios de potencial eléctrico a medida que el circuito se recorre en la dirección de las manecillas del reloj. Al inspeccionar la figura 28.2a se ve que el voltaje terminal ΔV debe ser igual a la diferencia de potencial a través de la resistencia externa R, llamada con frecuencia **resistencia de carga**. El resistor de carga puede ser un simple elemento resistivo de circuito, como en la figura 28.1, o podría ser la resistencia de algún dispositivo eléctrico (como un tostador, un calentador eléctrico o un foco eléctrico) conectado a la batería (o, en el caso de los aparatos caseros, a un tomacorriente de pared). El resistor representa una *carga* sobre la batería porque ella debe suministrar energía para operar el dispositivo. La diferencia de potencial a través de la resistencia de carga es $\Delta V = IR$. Al combinar esta expresión con la ecuación 28.1 se ve que

$$\mathcal{E} = IR + Ir \tag{28.2}$$

La solución para la corriente da como resultado

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \tag{28.3}$$

Esta ecuación demuestra que la corriente en este circuito simple depende tanto de la resistencia de carga R externa a la batería como de la resistencia interna r. Si R es mucho mayor que r, como ocurre en muchos circuitos del mundo real, entonces puede ignorar r.

Si se multiplica la ecuación 28.2 por la corriente I, se obtiene

$$I\mathcal{E} = I^2R + I^2r \tag{28.4}$$

Esta ecuación dice que, ya que la potencia $\mathcal{P} = I\Delta V$ (véase la ecuación 27.22), la potencia de salida total $I\mathcal{E}$ de la batería es entregada a la resistencia de carga externa en la cantidad I^2R y a la resistencia interna en la cantidad I^2r. También en este caso, si $r \ll R$, entonces la mayor parte de la potencia entregada por la batería se transfiere a la resistencia de carga.

EJEMPLO 28.1 Voltaje de las terminales de una batería

Una batería tiene una fem de 12.0 V y una resistencia interna de 0.05 Ω. Sus terminales están conectadas a una resistencia de carga de 3.00 Ω. a) Encuentre la corriente en el circuito y el voltaje de las terminales de la batería.

Solución Utilizando primero la ecuación 28.3 y luego la ecuación 28.1, se obtiene

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{12.0\text{V}}{3.05\Omega} = 3.93 \text{ A}$$

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir = 12.0 \text{ V} - (3.93 \text{ A})(0.05 \ \Omega) = 11.8 \text{ V}$$

Para comprobar este resultado se puede calcular el voltaje a través de la resistencia de carga R:

$$\Delta V = IR = (3.93 \text{ A})(3.00 \ \Omega) = 11.8 \text{ V}$$

b) Calcule la potencia entregada al resistor de carga, la potencia entregada a la resistencia interna de la batería y la potencia entregada por la batería.

Solución La potencia entregada al resistor de carga es

$$\mathcal{P}_R = I^2R = (3.93 \text{ A})^2 \ (3.00 \ \Omega) = 46.3 \text{ W}$$

La potencia entregada a la resistencia interna es

$$\mathcal{P}_r = I^2r = (3.93 \text{ A})^2 \ (0.05 \ \Omega) = 0.772 \text{ W}$$

Por tanto, la potencia entregada por la batería es la suma de estas cantidades, o 47.1 W. Este valor puede verificarse usando la expresión $\mathcal{P} = I\mathcal{E}$.

EJEMPLO 28.2 **Equilibrando la carga**

Demuestre que la máxima potencia entregada a la resistencia de carga R en la figura 28.2a ocurre cuando la resistencia de carga iguala la resistencia interna, es decir, cuando $R = r$.

Solución La potencia entregada a la resistencia de carga es igual a I^2R, donde I está dada por la ecuación 28.3:

$$\mathcal{P} = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}$$

Cuando $\mathcal{P}$ se grafica *versus* R, como en la figura 28.3, se encuentra que $\mathcal{P}$ alcanza un valor máximo de $\mathcal{E}^2/4r$ en $R = r$. Esto puede probarse también al diferenciar $\mathcal{P}$ respecto de R, igualando a cero el resultado y despejando R. Los detalles se dejan como un problema para que usted lo resuelva (problema 57).

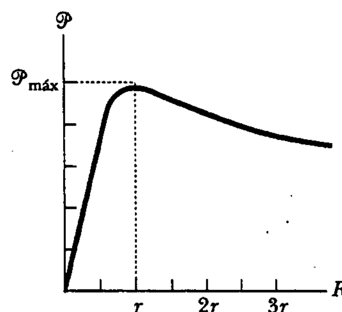


Figura 28.3 Gráfica de la potencia $\mathcal{P}$ entregada por una batería a un resistor de carga de resistencia R como una función de R. La potencia entregada al resistor es un máximo cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia interna de la batería.

28.2 RESISTORES EN SERIE Y EN PARALELO

Suponga que usted y sus amigos están presenciando un juego de basquetbol en un estadio atestado y deciden salirse temprano. Tienen dos opciones: a) salir todos por una sola puerta y caminar a lo largo de una galería que contiene varios locales concesionados, alrededor de los cuales se encuentran apretujados grupos de personas esperando comprar comida o souvenirs; o b) salir cada uno por puertas separadas en el vestíbulo principal del estadio, donde cada uno por su cuenta deberá empujarse a través de un solo grupo de personas paradas junto a las puertas. ¿En cuál escenario se requerirá menos tiempo para dejar el estadio?

Debería ser claro que sería más rápido salir por puertas separadas que bajar a la galería donde cada uno tendría que empujar para cruzar entre varios grupos de personas. Estos grupos en la galería podrían describirse como actuando en *serie*, puesto que cada uno de ustedes debe empujarse para cruzar entre todos los grupos. Los grupos de personas alrededor de las puertas en el estadio pueden describirse como actuando en *paralelo*, ya que cada uno de ustedes debe empujar para cruzar entre sólo un grupo de personas, y cada uno empuja para cruzar entre un grupo de personas *diferente*. Esta simple analogía le ayudará a comprender el comportamiento de las corrientes en los circuitos eléctricos que contienen más de un resistor.

Cuando dos o más resistores se conectan juntos, como lo están los focos en la figura 28.4a, se dice que están en *serie*. La figura 28.4b es el diagrama de circuito para los focos, los cuales se muestran como resistores, y la batería. En una conexión en serie todas las cargas que se mueven a través de un resistor también deben pasar por el segundo resistor. (Esto es similar a cuando todos los miembros de su grupo empujan para cruzar entre el gentío en el único corredor del estadio.) De otra forma la carga se acumularía entre los resistores. En consecuencia,

> para una combinación en serie de resistores, las corrientes en los dos resistores son iguales porque cualquier carga que fluye por R_1 también debe fluir por R_2.

La diferencia de potencial aplicada a través de la combinación en serie de resistores se dividirá entre los resistores. En la figura 28.4b, puesto que la caída de voltaje[2] de

[2] El término *caída de voltaje* es sinónimo de una disminución de potencial eléctrico que atraviesa un resistor y con frecuencia lo usa la gente que trabaja con circuitos eléctricos.

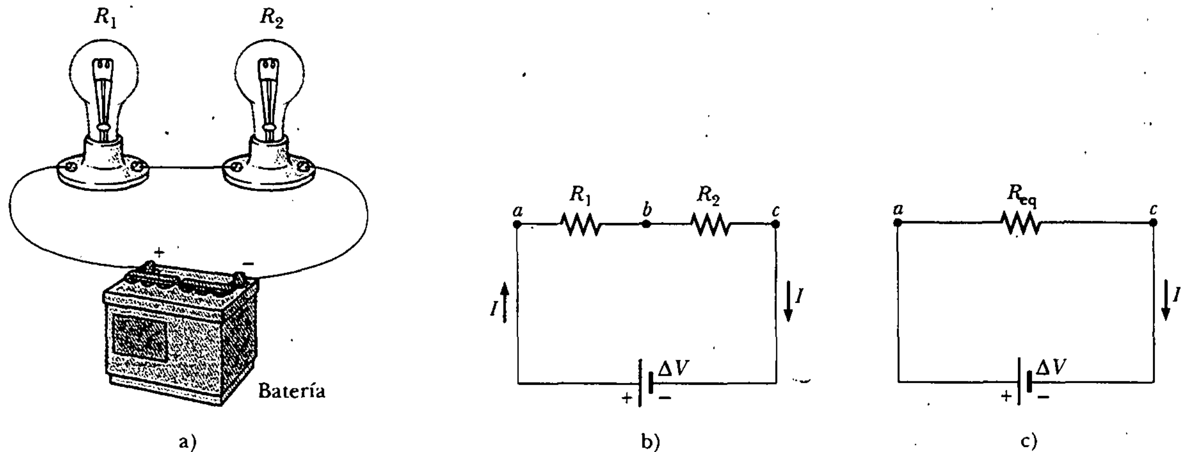


Figura 28.4 a) Una conexión en serie de dos resistores R_1 y R_2. La corriente en R_1 es la misma que en R_2. b) Diagrama de circuito para el circuito de dos resistores. c) Los resistores sustituidos con un solo resistor que tiene una resistencia equivalente $R_{eq} = R_1 + R_2$.

a a *b* es igual a IR_1 y la caída de voltaje de *b* a *c* es igual a IR_2, la caída de voltaje de *a* a *c* es

$$\Delta V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)$$

Por tanto, se puede sustituir los dos resistores en serie por un solo resistor que tenga una *resistencia equivalente a* R_{eq}, donde

$$R_{eq} = R_1 + R_2 \qquad \textbf{(28.5)}$$

La resistencia R_{eq} es equivalente a la combinación en serie $R_1 + R_2$, en el sentido de que la corriente del circuito es invariable cuando R_{eq} sustituye a $R_1 + R_2$.

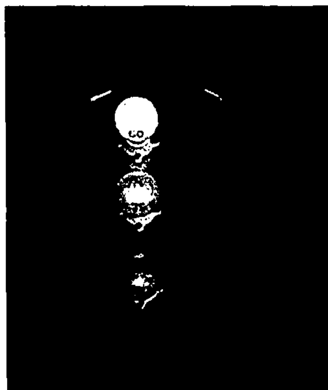
La resistencia equivalente de tres o más resistores conectados en serie es

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + ... \qquad \textbf{(28.6)}$$

Está relación indica que **la resistencia equivalente de una conexión de resistores en serie es siempre mayor que cualquier resistencia individual.**

Pregunta sorpresa 28.1

Si una pieza de alambre se usa para conectar los puntos *b* y *c* en la figura 28.4b, ¿la brillantez del foco R_1 aumenta, disminuye o se mantiene igual? ¿Qué ocurre con la brillantez del foco R_2?



Una conexión en serie de tres focos, todos especificados a 120 V pero que tienen potencias nominales de 60 W, 75 W y 200 W. ¿Por qué las intensidades de los focos son diferentes? ¿Cuál de los focos tiene la resistencia más grande? ¿Cómo diferirían sus intensidades relativas si estuviesen conectados en paralelo? *(Henry Leap y Jim Lehman)*

Considere ahora dos resistores conectados en *paralelo*, como se muestra en la figura 28.5. Cuando la corriente *I* llega al punto *a* en la figura 28.5b, conocido como *unión*, se divide en dos partes, I_1 que va a través de R_1 e I_2 que circula por R_2. Una **unión** es cualquier punto en un circuito donde una corriente puede dividirse (tal y como su grupo puede dividirse y dejar el estadio cruzando varias puertas, como antes se describió). Esta división resulta en menos corriente en cada resistor individual de la que sale de la batería. Puesto que la carga debe conservarse, la corriente *I* que entra al punto *a* debe ser igual a la corriente total que sale de dicho punto:

$$I = I_1 + I_2$$

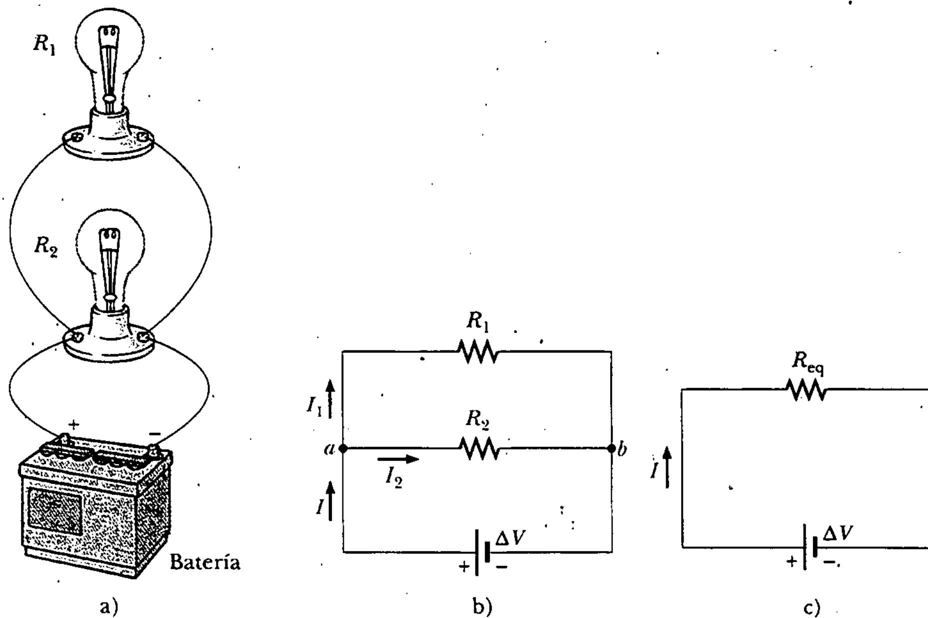
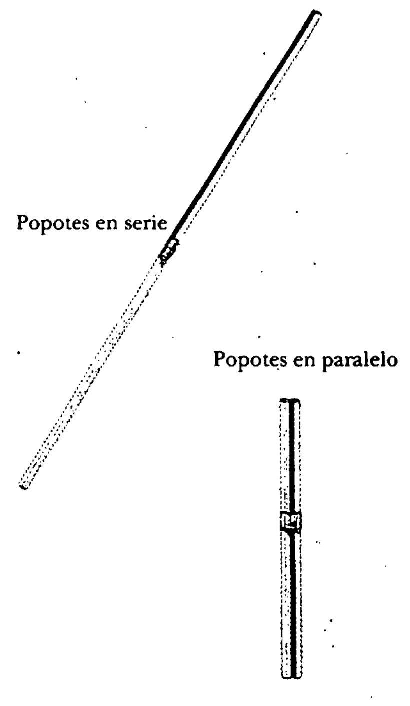


Figura 28.5 a) Conexión en paralelo de dos resistores R_1 y R_2. La diferencia de potencial a través de R_1 es la misma que la que ocurre en R_2. b) Diagrama de circuito para el circuito de dos resistores. c) Los resistores reemplazados con un solo resistor que tiene una resistencia equivalente $R_{eq} = (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1}$.

Experimento sorpresa

Pegue con cinta adhesiva un par de popotes, extremo con extremo, y un segundo par lado a lado. ¿Por cuál de los pares es más fácil soplar? ¿Qué ocurriría si quisiese comparar tres popotes pegados extremo con extremo con tres pegados lado a lado?



Como se puede apreciar en la figura 28.5, ambos resistores están conectados directamente a través de las terminales de la batería. En consecuencia,

> **cuando los resistores están conectados en paralelo, la diferencia de potencial a través de ellos es la misma.**

Puesto que la diferencia de potencial que atraviesa cada resistor es la misma, la expresión $\Delta V = IR$ produce

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{\Delta V}{R_{eq}}$$

A partir de este resultado se ve que la resistencia equivalente de dos resistores en paralelo está dada por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \textbf{(28.7)}$$

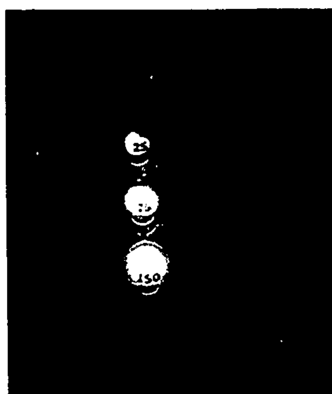
o

$$R_{eq} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$$

Una extensión de este análisis a tres o más resistores en paralelo produce

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad \textbf{(28.8)}$$

La resistencia equivalente de varios resistores en paralelo



Tres focos que tienen potencias nominales de 25 W, 75 W y 150 W conectados en paralelo a una fuente de voltaje de aproximadamente 100 V. Todos los focos están especificados al mismo voltaje. ¿Por qué difieren las intensidades? ¿Cuál foco toma más corriente? ¿Cuál tiene la resistencia más baja? *(Henry Leap y Jim Lehman)*

En esta expresión puede verse que **la resistencia equivalente de dos o más resistores conectados en paralelo siempre es menor que la resistencia más pequeña en el grupo.**

Los circuitos domésticos siempre se cablean de modo que los aparatos estén conectados en paralelo. Cada dispositivo opera independientemente de los otros, de modo que si uno se desconecta, los otros permanecen conectados. Más aún, los dispositivos operan al mismo voltaje.

Pregunta sorpresa 28.2

Suponga que la batería de la figura 28.1 tiene resistencia interna cero. Si se suma un segundo resistor en serie con el primero, ¿la corriente en la batería aumenta, disminuye o permanece igual? ¿Qué hay acerca de la diferencia de potencial a través de las terminales de la batería? ¿Sus respuestas cambiarían si el segundo resistor estuviese conectado en paralelo al primero?

Pregunta sorpresa 28.3

¿Los faros de los automóviles están conectados en serie o en paralelo? ¿Cómo puede decirlo?

EJEMPLO 28.3 Determinación de la resistencia equivalente

Cuatro resistores se conectan como se muestra en la figura 28.6a. a) Encuentre la resistencia equivalente entre los puntos a y c.

Solución La combinación de resistores puede reducirse en pasos, como se muestra en la figura 28.6. Los resistores de 8.0 Ω y 4.0 Ω están en serie, por lo que la resistencia equivalente entre a y b es de 12 Ω (véase la ecuación 28.5). Los resistores de 6.0 Ω y 3.0 Ω están en paralelo, de manera que de la ecuación 28.7 se encuentra que la resistencia equivalente de b a c es 2.0 Ω. Por tanto, la resistencia equivalente de a a c es 14 Ω.

b) ¿Cuál es la corriente en cada resistor si se mantiene una diferencia de potencial de 42 V entre a y c?

Solución La corriente en los resistores de 8.0 Ω y 4.0 Ω es la misma debido a que éstos están en serie. Esto también es igual para la corriente que existiría en la resistencia equivalente de 14 Ω sujeta a la diferencia de potencial de 42 V. Por tanto, usando la ecuación 27.8 ($R = \Delta V/I$) y los resultados del inciso a) se obtiene

$$I = \frac{\Delta V_{ac}}{R_{eq}} = \frac{42\text{V}}{14\Omega} = 3.0\,\text{A}$$

Ésta es la corriente en los resistores de 8.0 Ω y 4.0 Ω. Sin embargo, cuando esta corriente de 3.0 A entra a la unión en b se divide, y una parte pasa por el resistor de 6.0 Ω (I_1) y otra por el resistor de 3.0 Ω (I_2). Puesto que la diferencia de potencial es ΔV_{bc} a través de cada uno de estos resistores (pues están en paralelo), se ve que $(6.0\,\Omega)I_1 = (3.0\,\Omega)I_2$, o $I_2 = 2I_1$. Empleando este resultado, y el hecho de que $I_1 + I_2 = 3.0$ A, se encuentra que $I_1 = 1.0$ A e $I_2 = 2.0$ A. Pudo haberse sugerido este resultado desde el principio al advertir que la corriente que circula por el resistor de 3.0 Ω debe ser el doble de la que pasa a través del resistor de 6.0 Ω, en vista de sus resistencias relativas y del hecho de que se les aplica a ambos el mismo voltaje.

Con una verificación final de estos resultados observe que $\Delta V_{bc} = (6.0\,\Omega)I_1 = (3.0\,\Omega)I_2 = 6.0$ V y $\Delta V_{ab} = (12\,\Omega)I = 36$ V; por tanto, $\Delta V_{ac} = \Delta V_{ab} + \Delta V_{bc} = 42$ V, como debe ser.

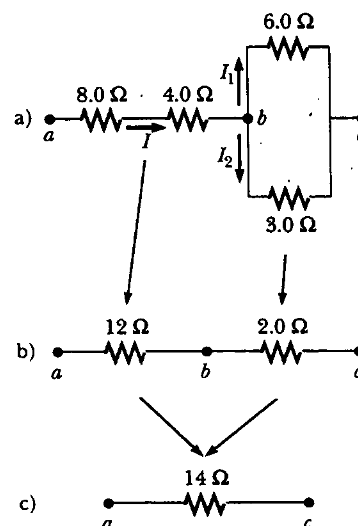


Figura 28.6

EJEMPLO 28.4 Tres resistores en paralelo

En la figura 28.7 se muestran tres resistores conectados en paralelo. Una diferencia de potencial de 18 V se mantiene entre los puntos *a* y *b*. a) Encuentre la corriente en cada resistor.

Solución Los resistores están en paralelo, por tanto, la diferencia de potencial a través de ellos es de 18 V. Al aplicar la relación $\Delta V = IR$ a cada resistor se obtiene

$$I = \frac{\Delta V}{R_1} = \frac{18\text{ V}}{3.0\ \Omega} = 6.0\text{ A}$$

$$I = \frac{\Delta V}{R_2} = \frac{18\text{ V}}{6.0\ \Omega} = 3.0\text{ A}$$

$$I = \frac{\Delta V}{R_3} = \frac{18\text{ V}}{9.0\ \Omega} = 2.0\text{ A}$$

b) Calcule la potencia entregada a cada resistor y la potencia total entregada a la combinación de resistores.

Solución La aplicación de $\mathcal{P} = (\Delta V)^2/R$ en cada resistor da como resultado

$$\mathcal{P}_1 = \frac{\Delta V^2}{R_1} = \frac{(18\text{ V})^2}{3.0\ \Omega} = 110\text{ W}$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{\Delta V^2}{R_2} = \frac{(18\text{ V})^2}{6.0\ \Omega} = 54\text{ W}$$

$$\mathcal{P}_3 = \frac{\Delta V^2}{R_3} = \frac{(18\text{ V})^2}{9.0\ \Omega} = 36\text{ W}$$

Esto demuestra que el resistor más pequeño recibe la mayor potencia. La suma de las tres cantidades brinda una potencia total de 200 W.

c) Calcule la resistencia equivalente del circuito.

Solución Se puede utilizar la ecuación 28.8 para encontrar R_{eq}:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{3.0\ \Omega} + \frac{1}{6.0\ \Omega} + \frac{1}{9.0\ \Omega}$$

$$= \frac{6}{18\ \Omega} + \frac{3}{18\ \Omega} + \frac{2}{18\ \Omega} = \frac{11}{18\ \Omega}$$

$$R_{eq} = \frac{18\ \Omega}{11} = 1.6\ \Omega$$

Ejercicio Con R_{eq} calcule la potencia total entregada por la batería.

Respuesta 200 W.

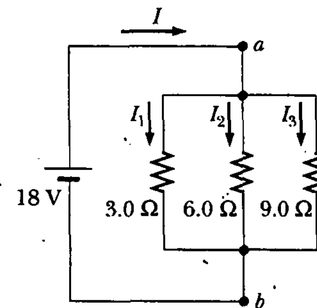


Figura 28.7 Tres resistores conectados en paralelo. El voltaje a través de cada resistor es de 18 V.

EJEMPLO 28.5 Determinación de R_{eq} mediante argumentos de simetría

Considere los cinco resistores conectados como se indica en la figura 28.8a. Determine la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b*.

Solución En este tipo de problemas es conveniente suponer que una corriente entra a la unión *a* y aplicar después argumentos de simetría. Debido a la simetría en el circuito (todos

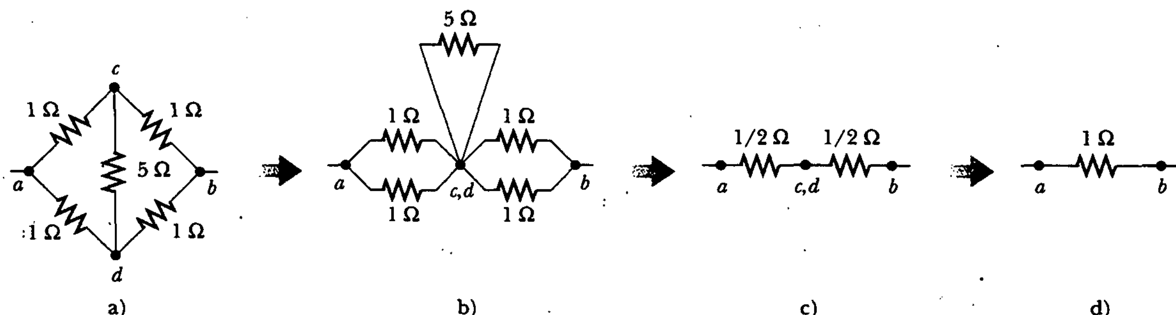


Figura 28.8 Debido a la simetría en este circuito, el resistor de 5 Ω no contribuye a la resistencia entre los puntos *a* y *b*, por lo que se puede despreciar cuando se calcula la resistencia equivalente.

los resistores de 1 Ω en el circuito cerrado exterior), las corrientes en los ramales *ac* y *ad* deben ser iguales; por tanto, los potenciales eléctricos en los puntos *c* y *d* deben ser iguales. Esto significa que $\Delta V_{cd} = 0$ y, como resultado, los puntos *c* y *d* pueden conectarse juntos, como en la figura 28.8b, sin afectar al circuito. Así, el resistor de 5 Ω puede eliminarse del circuito, y el circuito restante puede reducirse, como en las figuras 28.8c y 28.8d. A partir de esta reducción se ve que la resistencia equivalente de la combinación es de 1 Ω. Advierta que el resultado es 1 Ω, independientemente del valor del resistor conectado entre *c* y *d*.

EJEMPLO CONCEPTUAL 28.6 Operación de un foco de tres vías

La figura 28.9 ilustra cómo se construye un foco de tres vías para brindar tres niveles de intensidad luminosa. La lámpara tiene un enchufe equipado con un interruptor de tres vías para seleccionar diferentes intensidades luminosas. El foco contiene dos filamentos. Cuando la lámpara se conecta a una fuente de 120 V, un filamento recibe 100 W de potencia, y el otro recibe 75 W. Explique cómo se utilizan los dos filamentos para brindar tres intensidades luminosas diferentes.

Solución Las tres intensidades luminosas son posibles al aplicar los 120 V sólo a un filamento, al otro filamento solo o a los dos filamentos en paralelo. Cuando el interruptor S_1 se cierra y el interruptor S_2 se abre, sólo pasa corriente por el filamento de 75 W. Cuando el interruptor S_1 se abre y el interruptor S_2 se cierra, sólo pasa corriente por el filamento de 100 W. Cuando ambos interruptores se cierran, la corriente pasa por ambos filamentos y se obtiene una iluminación total de 175 W.

Si los filamentos se conectaran en serie, y uno de ellos se fundiera, no pasaría corriente por el foco y éste no iluminaría, independientemente de la posición del interruptor. Sin embargo, con los filamentos conectados en paralelo, si uno de ellos se funde (por ejemplo, el filamento de 75 W), el foco seguirá funcionando en dos de las posiciones del interruptor cuando la corriente pase a través del otro filamento (100 W).

Ejercicio Determine las resistencias de los dos filamentos y su resistencia equivalente en paralelo.

Respuesta 144 Ω, 192 Ω, 82.3 Ω.

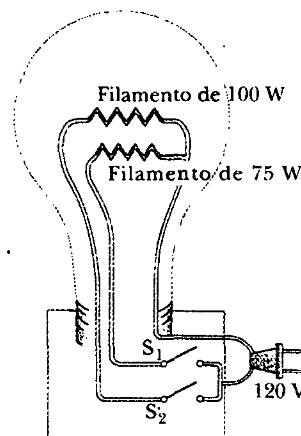


Figura 28.9 Un foco de tres vías.

APLICACIÓN Series de luces

Las series de luces se usan para muchos propósitos ornamentales, como la decoración en los árboles de Navidad. A través de los años las conexiones en serie y en paralelo se han usado para series con muchas luces, alimentadas con 120 V.[3] Los focos cableados en serie son más seguros que los que están cableados en paralelo para el uso interior en los árboles de Navidad porque aquellos cableados en serie operan con menos luz por foco y a menor temperatura. Sin embargo, si se funde el filamento de un foco individual (o si se quita un foco de su base), todas las luces en la serie se apagan. Las series de luces cableadas en serie son cada vez menos populares, pues detectar el problema con un foco fundido es una tarea tediosa y tardada, que implica el sustituir el foco en cada base a lo largo de toda la serie por uno bueno para así, mediante prueba y error, encontrar el defectuoso.

En una serie cableada en paralelo cada foco opera a 120 V. Por su diseño los focos son más brillantes y calientes que los de una serie cableada en serie. Como resultado, estos focos son inherentemente más peligrosos (por ejemplo, es más probable que comiencen a incendiarse), pero si un foco en una serie cableada en paralelo se quema o se quita, el resto de los focos continúa encendido. (Una serie de 25 focos de 4 W da como resultado una potencia de 100 W; la potencia total aumenta de manera importante cuando se usan varias series.)

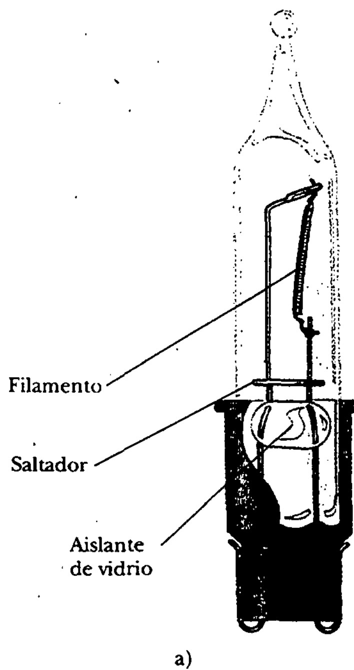
Para prevenir que la falla de un foco malogre toda la serie se desarrolló un nuevo diseño para las luces "miniatura" cableado en serie. La solución es crear una conexión (llamada saltador) a través del filamento después de que éste falle. (Si existe una conexión alterna a través del filamento antes de

[3] Éste y otros dispositivos domésticos, como el foco de tres vías en el ejemplo conceptual 28.6 y los electrodomésticos mostrados en el acertijo con que se comenzó este capítulo, de hecho operan con corriente alterna (ca), la cual se abordará en el capítulo 33.

que falle, cada foco representaría un circuito en paralelo; en este circuito la corriente fluiría a través de la conexión alterna, formando un cortocircuito, y el foco no encendería.) Cuando el filamento se rompe en uno de estos focos miniatura, aparecen 120 V a través del foco porque no hay corriente presente en el foco y, en consecuencia, no disminuye el potencial a través de los otros focos. Dentro del foco, una pequeña espira cubierta por un material aislante se enreda alrededor de las guías del filamento. Un arco quema al aislante y conecta las guías del filamento cuando los 120 V aparecen a través del foco —esto es, cuando falla el filamento—. Este "corto" ahora completa el circuito a través del foco aun cuando el filamento ya no está activo (Fig. 28.10).

Suponga que todos los focos en una serie de 50 focos miniatura están funcionando. Una caída de potencial de 2.4 V ocurre a través de cada foco porque están conectados en serie. La entrada de potencia a este tipo de focos es de 0.34 W, de modo que la potencia total suministrada a la serie es de sólo 17 W. La resistencia del filamento que se calcula a la temperatura de operación es $(2.4\ \text{V})^2/(0.34\ \text{W}) = 17\ \Omega$. Cuando el foco falla, la resistencia a través de sus terminales se reduce a cero debido al saltador de conexión alterno mencionado en el párrafo anterior. Todos los otros focos no sólo permanecen encendidos sino que brillan más debido a que la resistencia total de la serie se reduce y, en consecuencia, aumenta la corriente en cada foco.

Suponga que la resistencia en funcionamiento de un foco permanece a 17 Ω, aun cuando su temperatura aumenta como resultado del aumento de corriente. Si un foco falla, la caída de potencial a través de cada uno de los focos restantes aumenta en 2.45 V, la corriente aumenta de 0.142 A a 0.145 A, y la potencia aumenta a 0.354 W. Conforme más focos fallan, la corriente continúa aumentando, el filamento de cada uno de los focos funciona a mayor temperatura y el tiempo de vida del foco se reduce. Por tanto, es una buena idea buscar los focos estropeados (que no brillan) en una serie cableada en serie y reemplazarlos tan pronto como sea posible para maximizar el tiempo de vida de todos los focos.



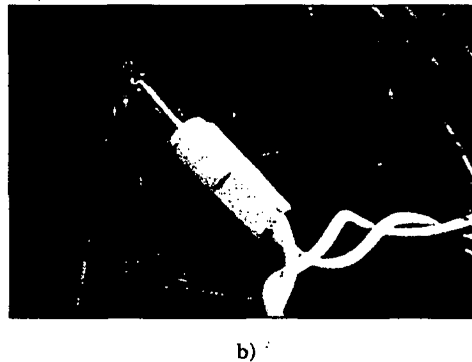


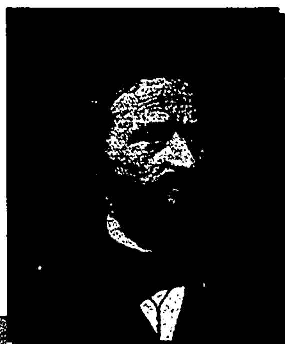
Figura 28.10 a) Diagrama esquemático de un moderno foco "miniatura", con un saltador de conexión para proporcionar una trayectoria a la corriente si el filamento se funde. b) Foco de una serie para el árbol de Navidad. *(George Semple)*

28.3 REGLAS DE KIRCHHOFF

13.4 Como se expuso en la sección anterior, los circuitos simples pueden analizarse utilizando la expresión $\Delta V = IR$ y las reglas para las combinaciones de resistores en serie y en paralelo. Sin embargo, con mucha frecuencia no es posible reducir un circuito a una sola espira. El procedimiento para analizar circuitos más complejos se simplifica mucho mediante el uso de dos sencillas reglas conocidas como **reglas de Kirchhoff**:

1. **La suma de las corrientes que entran a cualquier unión en un circuito debe ser igual a la suma de las corrientes que salen de dicha unión:**

$$\sum I_{\text{entra}} = \sum I_{\text{sale}} \qquad \textbf{(28.9)}$$



Gustav Kirchhoff (1824-1887) Kirchhoff, profesor en Heidelberg, Alemania, y Robert Bunsen inventaron el espectroscopio y fundaron la ciencia de la espectroscopia, la cual se estudiará en el capítulo 40. Descubrieron los elementos cesio y rubidio e inventaron la espectroscopia astronómica. Kirchhoff formuló otra regla, a saber, "una sustancia fría absorberá luz de la misma longitud de onda que emite cuando está caliente". *(AIP ESVA/W.F. Meggers Collection)*

Experimento sorpresa

Dibuje una espira cerrada de forma arbitraria que no se cruce a sí misma. Marque cinco puntos sobre la espira (*a, b, c, d* y *e*) y asigne un número aleatorio a cada punto. Ahora comience en el punto *a* y recorra su camino alrededor de la espira calculando la diferencia entre cada par de números adyacentes. Algunas de estas diferencias serán positivas y algunas serán negativas. Ahora sume todas las diferencias asegurándose de que conserva con precisión los signos algebraicos. ¿Cuál es la suma de las diferencias a todo lo largo de la espira?

2. La suma de las diferencias de potencial a través de todos los elementos de cualquier espira de circuito cerrado debe ser cero:

$$\sum_{\substack{\text{circuito}\\ \text{cerrado}}} \Delta V = 0 \tag{28.10}$$

La primera regla de Kirchhoff es un enunciado de la conservación de la carga eléctrica. Toda la corriente que entra a un punto dado en un circuito debe salir de ese punto ya que la carga no puede acumularse en un punto. Si se aplica esta regla a la unión que se muestra en la figura 28.11a, se obtiene

$$I_1 = I_2 + I_3$$

La figura 28.11b representa una analogía mecánica de esta situación, en la cual fluye agua a través de un tubo ramificado sin fugas. La rapidez de flujo dentro de la tubería es igual a la rapidez de flujo total afuera de las dos ramas en la derecha.

La segunda regla de Kirchhoff surge de la ley de la conservación de la energía. Suponga el movimiento de una carga alrededor de la espira. Cuando la carga regresa al punto de partida, el sistema carga-circuito debe tener la misma energía que tenía cuando la carga partió de ahí. La suma de los incrementos en energía en algunos elementos de circuito debe ser igual a la suma de los decrementos en energía en otros elementos. La energía potencial disminuye cada vez que la carga se mueve a través de una caída de potencial $-IR$ a través de un resistor, o cada vez que se mueve en la dirección contraria a través de una fuente de fem. La energía potencial se incrementa cada vez que la carga pasa a través de una batería desde la terminal negativa hacia la terminal positiva. La segunda regla de Kirchhoff se aplica sólo en circuitos en los cuales se define un potencial eléctrico en cada punto; este criterio no puede satisfacerse si hay campos electromagnéticos variables, como se verá en el capítulo 31.

Al justificar la pretensión de que la segunda regla de Kirchhoff es un enunciado de la conservación de la energía, se supone conduciendo una carga alrededor de una espira. Cuando aplique esta regla imagínese *viajando* alrededor del [illegible] considere los cambios en el *potencial eléctrico* en lugar de los cambios en [illegible] *potencial* descrita en los párrafos anteriores. Debe usted tomar en [illegible] siguientes convenciones de signos cuando use la segunda regla:

- Ya que las cargas se mueven del extremo de alto potencial de un resistor al extremo de menor potencial, si se recorre un resistor en la dirección de la corriente, el cambio de potencial ΔV a través del resistor es $-IR$ (Fig. 28.12a).
- Si un resistor se recorre en la dirección *opuesta* a la corriente, el cambio de potencial ΔV a través del resistor es $+IR$ (Fig. 28.12b).
- Si una fuente de fem (la cual se supone con resistencia interna cero) se recorre en la dirección de la fem (de − a +), el cambio en el potencial ΔV es $+\mathcal{E}$ (Fig. 28.12c). La fem de la batería aumenta el potencial eléctrico conforme se mueve a través de la misma en dicha dirección.
- Si una fuente de fem (la cual se supone con resistencia interna cero) se atraviesa en la dirección opuesta de la fem (de + a −), el cambio en el potencial ΔV es $-\mathcal{E}$ (Fig. 28.12d). En este caso la fem de la batería reduce el potencial eléctrico conforme se mueve a través de ella.

Existen limitaciones en el número de veces que usted puede aplicar de manera útil las reglas de Kirchhoff al analizar un circuito dado. La regla de unión puede usarse tan frecuentemente como sea necesario, siempre y cuando cada vez que escriba una ecuación incluya en ella una corriente que no se haya usado en una ecuación anterior de la regla de unión. En general, el número de veces que se puede usar la regla de unión es un poco menor que el número de puntos de unión en el

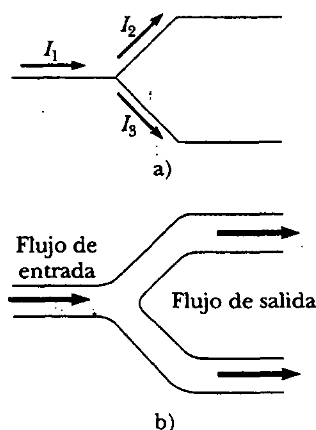


Figura 28.11 a) Regla de la unión de Kirchhoff. La conservación de la carga requiere que toda la corriente que entra a una unión debe salir de dicha unión. Por tanto, $I_1 = I_2 + I_3$. b) Una analogía mecánica de la regla de la unión: la cantidad de agua que fluye hacia afuera de las ramas en la derecha debe ser igual a la cantidad que fluye en la rama individual a la izquierda.

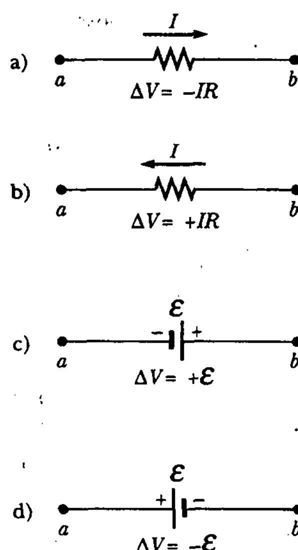


Figura 28.12 Reglas para determinar los cambios de potencial a través de un resistor y una batería. (Se supone que la batería no tiene resistencia interna.) Cada elemento de circuito es recorrido de izquierda a derecha.

circuito. La regla de la espira se puede usar con la frecuencia necesaria siempre que un nuevo elemento de circuito (resistor o batería) o una nueva corriente aparezca en cada nueva ecuación. En general, **para resolver un problema de circuito particular, el número de ecuaciones independientes que usted necesita obtener de las dos reglas es igual al número de corrientes desconocidas.**

Las redes complejas contienen muchas espiras y uniones que generan un gran número de ecuaciones lineales independientes y un correspondiente gran número de incógnitas. Estas situaciones pueden manejarse formalmente utilizando álgebra de matrices. También pueden escribirse programas de computadora para resolver las incógnitas.

Los siguientes ejemplos ilustran cómo usar las reglas de Kirchhoff. En todos los casos se supone que los circuitos han alcanzado las condiciones de estado estable —es decir, las corrientes en las diferentes ramas son constantes—. Cualquier capacitor **actúa como un circuito abierto**; es decir, la corriente en la rama que contiene al capacitor es cero en condiciones de estado estable.

Sugerencias para resolver problemas

Reglas de Kirchhoff

- Dibuje un diagrama de circuito y marque todas las cantidades conocidas y desconocidas. Debe asignar una *dirección* a las corrientes en cada rama del circuito. No se alarme si indica la dirección de una corriente de modo incorrecto; su resultado será negativo, pero su *magnitud será correcta.* A pesar de que la asignación de las direcciones de corriente es arbitraria, usted debe apegarse rigurosamente a las direcciones asignadas cuando aplique las reglas de Kirchhoff.
- Aplique la regla de la unión a cualquier unión en el circuito que proporcione nuevas relaciones entre las diversas corrientes.

- Aplique la regla de la espira a tantas espiras en el circuito como sea necesario para resolver las incógnitas. Con el fin de aplicar esta regla usted debe identificar correctamente el cambio de potencial conforme lo supone cruzando cada elemento al recorrer la espira cerrada (ya sea en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido contrario). ¡Asegúrese de verificar los signos!
- Resuelva de manera simultánea las ecuaciones para las cantidades desconocidas.

EJEMPLO 28.7 Circuito de una sola espira

Un circuito de una sola espira contiene dos resistores y dos baterías, como se ve en la figura 28.13. (Ignore las resistencias internas de las baterías.) a) Encuentre la corriente en el circuito.

Solución No se necesitan las reglas de Kirchhoff para analizar este circuito simple, pero se usarán de cualquier manera sólo para ver cómo se pueden aplicar. No hay uniones en este circuito de una sola espira, por lo cual la corriente es la misma en todos los elementos. Suponga que la corriente está en la dirección de las manecillas del reloj, como se indica en la figura 28.13. Recorriendo el circuito en esta dirección, empezando en *a*, se ve que $a \rightarrow b$ representa un cambio de potencial de $+\mathcal{E}_1$, $b \rightarrow c$ representa un cambio de potencial de $-IR_1$, $c \rightarrow d$ representa un cambio de potencial de $-\mathcal{E}_2$ y $d \rightarrow a$ representa un cambio de potencial de $-IR_2$. Al aplicar la regla de la espira de Kirchhoff se obtiene

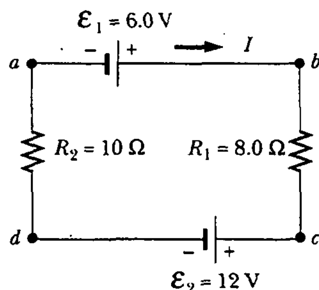


Figura 28.13 Circuito en serie que contiene dos baterías y dos resistores, donde las polaridades de las baterías están en oposición.

$$\Sigma \Delta V = 0$$

$$\mathcal{E}_1 - IR_1 - \mathcal{E}_2 - IR_2 = 0$$

Al despejar I y usar los valores dados en la figura 28.13 se obtiene

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} = \frac{6.0\text{ V} - 12\text{ V}}{8.0\ \Omega + 10\ \Omega} = -0.33\text{ A}$$

El signo negativo para I indica que la dirección de la corriente es opuesta a la dirección que se supuso.

b) ¿Qué potencia se entrega a cada resistor? ¿Qué potencia suministra la batería de 12 V?

Solución

$$\mathcal{P}_1 = I^2R_1 = (0.33\text{ A})^2(8.0\ \Omega) = 0.87\text{ W}$$

$$\mathcal{P}_2 = I^2R_2 = (0.33\text{ A})^2(10\ \Omega) = 1.1\text{ W}$$

En consecuencia, la potencia total entregada a los resistores es $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = 2.0$ W.

Advierta que la batería de 12 V entrega potencia $I\mathcal{E}_2 = 4.0$ W. La mitad de esta potencia se entrega a los dos resistores, del modo en que se ha calculado. La otra mitad se entrega a la batería de 6 V, la cual está siendo cargada por la batería de 12 V. Si en el análisis se hubieran incluido las resistencias internas de las baterías, una parte de la potencia aparecería como energía interna en ellas; como resultado, se habría encontrado que se ha entregado menos potencia a la batería de 6 V.

EJEMPLO 28.8 Aplicación de las reglas de Kirchhoff

Determine las corrientes I_1, I_2 e I_3 en el circuito mostrado en la figura 28.14.

Solución Advierta que no se puede reducir este circuito a una forma más simple mediante las reglas de adición de resistencias en serie y paralelo. Se requiere el empleo de las reglas de Kirchhoff para analizar este circuito. De manera arbitraria se eligen las direcciones de las corrientes como en la figura 28.14. La aplicación de la regla de la unión de Kirchhoff a la unión *c* produce

1) $I_1 + I_2 = I_3$

Ahora se tiene una ecuación con tres incógnitas —I_1, I_2 e I_3—. Hay tres espiras en el circuito —*abcda, befcb* y *aefda*—. Por tanto, sólo necesita dos ecuaciones de espira para determinar las corrientes desconocidas. (La ecuación de la tercera espira no brindaría nueva información.) Aplicando la regla de la espira de Kirchhoff a las espiras *abcda* y *befcb*, y recorriendo estas espiras en la dirección de las manecillas del reloj, se obtienen las expresiones

2) *abcda* $10\text{ V} - (6\ \Omega)I_1 - (2\ \Omega)I_3 = 0$

3) *befcb* $-14\text{ V} + (6\ \Omega)I_1 - 10\text{ V} - (4\ \Omega)I_2 = 0$

Advierta que en la espira *befcb* se obtiene un valor positivo cuando se recorre el resistor de 6 Ω porque la dirección de la trayectoria es opuesta a la dirección de I_1 que se supuso.

Las expresiones 1), 2) y 3) representan tres ecuaciones independientes con tres incógnitas. Sustituyendo la ecuación 1) en 2) se obtiene

$$10\text{ V} - (6\ \Omega)I_1 - (2\ \Omega)\ (I_1 + I_2) = 0$$

$$4)\qquad 10\text{ V} = (8\ \Omega)I_1 + (2\ \Omega)\ I_2$$

Al dividir cada término en la ecuación 3) por 2 y reordenando la ecuación, se tiene

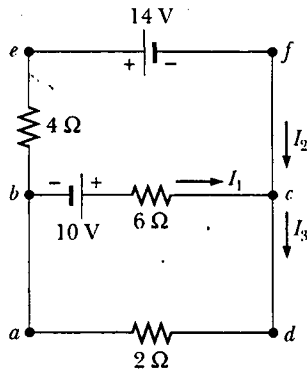


Figura 28.14 Circuito que contiene tres espiras.

$$5)\qquad -12\text{ V} = -(3\ \Omega)I_1 + (2\ \Omega)\ I_2$$

Al sustraer la ecuación 5) de la 4) se elimina I_2, resultando

$$22\text{ V} = (11\ \Omega)I_1$$

$$I_1 = 2\text{ A}$$

Usando este valor de I_1 en la ecuación 5) se obtiene un valor para I_2:

$$(2\ \Omega)I_2 = (3\ \Omega)I_1 - 12\text{ V} = (3\ \Omega)\ (2\text{ A}) - 12\text{ V} = -6\text{ V}$$

$$I_2 = -3\text{ A}$$

Por último,

$$I_3 = I_1 + I_2 = -1\text{ A}$$

El hecho de que I_2 e I_3 sean negativas indica sólo que las corrientes son opuestas a la dirección que se ha elegido para ellas. Sin embargo, los valores numéricos son correctos. ¿Qué habría ocurrido si se hubiesen dejado las direcciones de las corrientes como se marcaron en la figura 28.14 pero se hubieren recorrido las espiras en la dirección opuesta?

Ejercicio Encuentre la diferencia de potencial entre los puntos *b* y *c*.

Respuesta 2 V.

EJEMPLO 28.9 Un circuito de espiras múltiples

a) En condiciones de estado estable determine las corrientes desconocidas I_1, I_2 e I_3 en el circuito de espiras múltiples mostrado en la figura 28.15.

Solución Advierta primero que, como el capacitor representa un circuito abierto, no hay corriente entre *g* y *b* a lo largo de la trayectoria *ghab* en condiciones de estado estable. En consecuencia, cuando las cargas asociadas con I_1 alcanzan el punto *g*, todas ellas pasan a través de la batería de 8.00 V hacia el punto *b*; por tanto, $I_{gb} = I_1$. Marcando las corrientes como se indica en la figura 28.15 y aplicando la ecuación 28.9 a la unión *c*, se obtiene

$$1)\qquad I_1 + I_2 = I_3$$

La ecuación 28.10 aplicada a las espiras *defcd* y *cfgbc*, recorridos en el sentido de las manecillas del reloj produce

$$2)\qquad defcd\qquad 4.00\text{ V} - (3.00\ \Omega)I_2 - (5.00\ \Omega)I_3 = 0$$

$$3)\qquad cfgbc\qquad (3.00\ \Omega)I_2 - (5.00\ \Omega)I_1 + 8.00\text{ V} = 0$$

A partir de la ecuación 1) se ve que $I_1 = I_3 - I_2$, la cual, cuando se sustituye en la ecuación 3), produce

$$4)\qquad (8.00\ \Omega)I_2 - (5.00\ \Omega)I_3 + 8.00\text{ V} = 0$$

Restando la ecuación 4) de la ecuación 2) se elimina I_3, y se encuentra que

$$I_2 = -\frac{4.00\text{V}}{11.0\Omega} = -0.364\text{ A}$$

Puesto que I_2 es negativa, se concluye que la dirección de I_2 es de *c* a *f* a través del resistor de 3.00 Ω. Sin embargo, a pe-

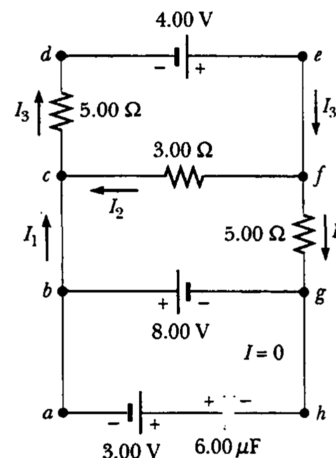


Figura 28.15 Circuito multiespiras. La regla de la espira de Kirchhoff puede ser aplicada a *cualquier* espira cerrada, incluyendo la que contiene al capacitor.

sar de esta interpretación de la dirección, se debe continuar usando este valor negativo para I_2 en cálculos subsecuentes porque las ecuaciones fueron establecidas con la elección de dirección original.

Usando este valor de $I_2 = -0.364$ A en las ecuaciones 3) y 1) se obtiene

$$I_1 = 1.38 \text{ A} \qquad I_3 = 1.02 \text{ A}$$

b) ¿Cuál es la carga en el capacitor?

Solución Se puede aplicar la regla de la espira de Kirchhoff a la espira *bghab* (o a cualquier otra espira que contenga al capacitor) para encontrar la diferencia de potencial ΔV_{cap} a través del capacitor. Esta diferencia de potencial se ingresa en la ecuación sin referencia a una convención de signos porque la carga sobre el capacitor depende sólo de la magnitud de la diferencia de potencial. Al moverse en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de este lazo se obtiene

$$-8.00 \text{ V} + \Delta V_{cap} - 3.00 \text{ V} = 0$$

$$\Delta V_{cap} = 11.0 \text{ V}$$

Puesto que $Q = C\,\Delta V_{cap}$ (véase la ecuación 26.1), la carga en el capacitor es

$$Q = (6.00\ \mu\text{F})(11.0\ \text{V}) = 66.0\ \mu\text{C}$$

¿Por qué el lado izquierdo del capacitor está cargado positivamente?

Ejercicio Encuentre el voltaje a través del capacitor recorriendo cualquier otra espira.

Respuesta 11.0 V.

Ejercicio Invierta la dirección de la batería de 3.00 V y responda las partes a) y b) nuevamente.

Respuesta a) $I_1 = 1.38$ A, $I_2 = -0.364$ A, $I_3 = 1.02$ A; b) 30 μC.

28.4 CIRCUITOS *RC*

Hasta ahora se han analizado circuitos en estado estable, en los cuales la corriente es constante. En circuitos que contienen capacitores la corriente puede variar en el tiempo. Un circuito que contiene una combinación en serie de un resistor y un capacitor se denomina **circuito *RC*.**

Carga de un capacitor

Suponga que el capacitor en la figura 28.16 inicialmente está descargado. No hay corriente cuando el interruptor S está abierto (Fig. 28.16b). Sin embargo, si el interruptor se cierra en $t = 0$, empiezan a fluir cargas, de modo que se establece una corriente en el circuito y el capacitor empieza a cargarse.[4] Advierta que durante el proceso de carga las cargas no brincan a través de las placas del capacitor debido a que el espacio entre las mismas representa un circuito abierto. En lugar de eso la carga se transfiere entre cada placa y su alambre conector debido al campo eléctrico establecido en los alambres por la batería, hasta que el capacitor se carga por completo. Conforme las placas comienzan a cargarse, la diferencia de potencial a través del capacitor aumenta. El valor de la carga máxima depende del voltaje de la batería. Una vez alcanzada la carga máxima, la corriente en el circuito es cero porque la diferencia de potencial a través del capacitor se iguala con la suministrada por la batería.

Para analizar este circuito de manera cuantitativa aplique al circuito la regla de la espira de Kirchhoff después de que se cierra el interruptor. Al recorrer la espira en el sentido de las manecillas del reloj se obtiene

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR = 0 \qquad \textbf{(28.11)}$$

[4] En análisis previos de los capacitores, se supuso una situación de estado estable, en la cual no había corriente presente en ninguna rama del circuito que contenía al capacitor. Ahora se está considerando el caso *antes* de que se llegue a la condición de estado estable; en esta situación, las cargas se están moviendo y existe una corriente en los alambres conectados al capacitor.

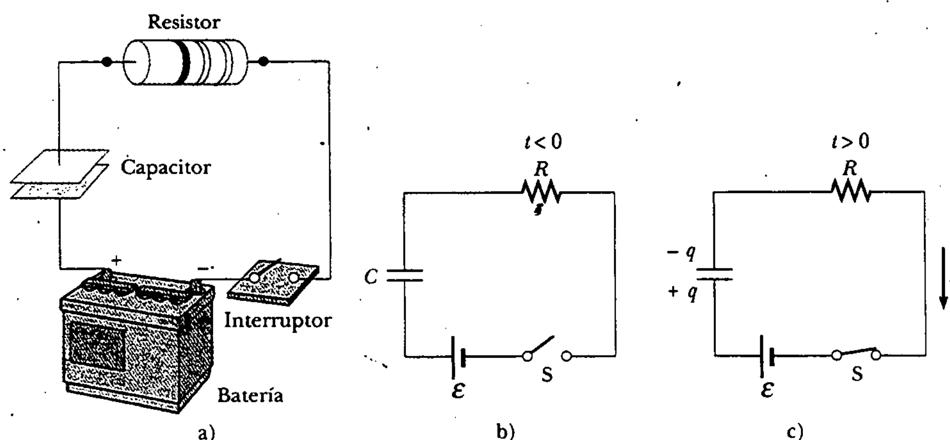


Figura 28.16 a) Un capacitor en serie con un resistor, interruptor y batería. b) Diagrama de circuito donde se representa este sistema en el tiempo $t < 0$, antes de que el interruptor se cierre. c) Diagrama de circuito en el tiempo $t > 0$, después de que se ha cerrado el interruptor.

donde q/C es la diferencia de potencial en el capacitor e IR es la diferencia de potencial en el resistor. Se emplearon las convenciones de signos antes analizados para los signos de $\mathcal{E}$ e IR. Para el capacitor advierta que se está recorriendo en la dirección de la placa positiva hacia la placa negativa; esto representa una disminución en el potencial. Por ende, se usa un signo negativo para este voltaje en la ecuación 28.11. Observe que q e I son valores *instantáneos* que dependen del tiempo (como opuestos a los valores del estado estable) conforme el capacitor se está cargando.

Con la ecuación 28.11 se puede encontrar la corriente inicial en el circuito y la carga máxima en el capacitor. En el instante en que se cierra el interruptor ($t = 0$) la carga en el capacitor es cero, y según la ecuación 28.11 se encuentra que la corriente inicial en el circuito I_0 es un máximo e igual a

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \text{(corriente en } t = 0) \qquad \textbf{(28.12)}$$

Corriente máxima

En este tiempo la diferencia de potencial de las terminales de la batería aparece por completo a través del resistor. Después, cuando el capacitor se carga hasta su valor máximo Q, las cargas dejan de fluir, la corriente en el circuito es cero y la diferencia de potencial de las terminales de la batería aparece por completo a través del capacitor. Al sustituir $I = 0$ en la ecuación 28.11 se obtiene la carga en el capacitor en dicho tiempo:

$$Q = C\mathcal{E} \quad \text{(carga máxima)} \qquad \textbf{(28.13)}$$

Carga máxima en el capacitor

Para determinar expresiones analíticas relativas a la dependencia en el tiempo de la carga y la corriente se debe resolver la ecuación 28.11 —una sola ecuación que contiene dos variables, q e I—. La corriente en todas las partes del circuito en serie debe ser la misma. Por tanto, la corriente en la resistencia R debe ser la misma conforme la corriente fluye afuera de y hacia las placas del capacitor. Esta corriente es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de la carga sobre las placas del capacitor. En consecuencia, sustituya $I = dq/dt$ en la ecuación 28.11 y reordene la ecuación:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

Para encontrar una expresión para q primero combine los términos en el lado derecho:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{C\mathcal{E}}{RC} - \frac{q}{RC} = -\frac{q - C\mathcal{E}}{RC}$$

Ahora multiplique por dt y divida entre $q - C\mathcal{E}$ para obtener

$$\frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}dt$$

Al integrar esta expresión, y usar el hecho de que $q = 0$ en $t = 0$ se obtiene

$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$

A partir de la definición del logaritmo natural esta expresión se puede escribir como

Carga *versus* tiempo para un capacitor que se está cargando

$$q(t) = C\mathcal{E}\,(1 - e^{-t/RC}) = Q(1 - e^{-t/RC}) \qquad \textbf{(28.14)}$$

donde e es la base del logaritmo natural y se ha sustituido $C\mathcal{E} = Q$ de la ecuación 28.13.

Puede encontrarse una expresión para la corriente de carga diferenciando la ecuación 28.14 respecto del tiempo. Utilizando $I = dq/dt$ se encuentra que

Corriente *versus* tiempo para un capacitor que se carga

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} \qquad \textbf{(28.15)}$$

En la figura 28.17 se presentan gráficas de carga y corriente del circuito *versus* tiempo. Observe que la carga es cero en $t = 0$ y se acerca al valor máximo $C\mathcal{E}$ a medida que $t \to \infty$. La corriente tiene su valor máximo $I_0 = \mathcal{E}/R$ en $t = 0$ y decae en forma exponencial hasta cero conforme $t \to \infty$. La cantidad RC, la cual aparece en los exponentes de las ecuaciones 28.14 y 28.15, se conoce como **constante de tiempo** τ del circuito. Representa el tiempo que tarda en disminuir la corriente hasta $1/e$ de su valor inicial; esto es, en un tiempo τ, $I = e^{-1}I_0 = 0.368I_0$. En un tiempo 2τ, $I = e^{-2}I_0 = 0.135I_0$, etcétera. Del mismo modo, en un tiempo τ la carga aumenta de cero a $C\mathcal{E}\,(1 - e^{-1}) = 0.632C\mathcal{E}$.

El siguiente análisis dimensional muestra que τ tiene las unidades de tiempo:

$$[\tau] = [RC] = \left[\frac{\Delta V}{I} \times \frac{Q}{\Delta V}\right] = \left[\frac{Q}{Q/\Delta t}\right] = [\Delta t] = \mathrm{T}$$

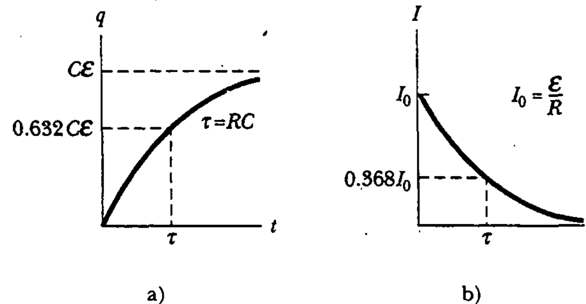


Figura 28.17 a) Gráfica de carga de capacitor *versus* tiempo para el circuito mostrado en la figura 28.16. Después de que ha transcurrido un intervalo de tiempo igual a una constante de tiempo τ, la carga es 63.2% del valor máximo $C\mathcal{E}$. La carga se acerca a su valor máximo conforme t tiende al infinito. b) Gráfica de corriente *versus* tiempo para el circuito mostrado en la figura 28.16. La corriente tiene su valor máximo $I_0 = \mathcal{E}/R$ en $t = 0$ y decae a cero exponencialmente conforme t tiende al infinito. Después de que ha transcurrido un tiempo igual a una constante de tiempo τ, la corriente es 36.8% de su valor inicial.

Puesto que $\tau = RC$ tiene unidades de tiempo, la combinación t/RC es adimensional, como debe ser para poder funcionar como exponente de e en las ecuaciones 28.14 y 28.15.

La salida de energía de la batería durante el proceso de carga del capacitor es $Q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$. Después de que el capacitor se ha cargado completamente, la energía almacenada en él es $\frac{1}{2}Q\mathcal{E} = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$, lo cual es la mitad de la salida de energía de la batería. Se deja como un problema (problema 60) demostrar que la mitad restante de la energía suministrada por la batería aparece como energía interna en el resistor.

Descarga de un capacitor

Considere ahora el circuito mostrado en la figura 28.18, el que consta de un capacitor con una carga inicial Q, un resistor y un interruptor. La carga *inicial* Q no es la misma que la carga *máxima* Q en el análisis anterior, a menos que la descarga ocurra después de que el capacitor está completamente cargado (como se describió con anterioridad). Cuando el interruptor se abre hay una diferencia de potencial de Q/C a través del capacitor y una diferencia de potencial cero en el resistor, puesto que $I = 0$. Si el interruptor se cierra en $t = 0$, el capacitor empieza a descargarse a través del resistor. En cierto tiempo t durante la descarga, la corriente en el circuito es I y la carga en el capacitor es q (Fig. 28.18b). El circuito en la figura 28.18 es el mismo que el de la figura 28.16, excepto por la ausencia de la batería. En consecuencia, se elimina la fem $\mathcal{E}$ de la ecuación 28.11 para obtener la ecuación de la espira apropiada para el circuito en la figura 28.18:

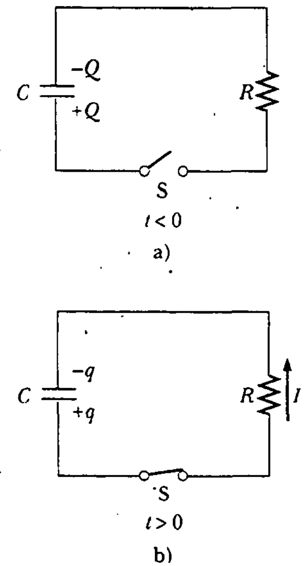


Figura 28.18 a) Un capacitor cargado conectado a un resistor y un interruptor, el cual está abierto en $t < 0$. b) Después de que se cierra el interruptor, se establece una corriente que disminuye en magnitud con el tiempo y en la dirección mostrada; y la carga en el capacitor disminuye exponencialmente con el tiempo.

$$-\frac{q}{C} - IR = 0 \qquad \textbf{(28.16)}$$

Cuando se sustituye $I = dq/dt$ en esta expresión, se convierte en

$$-R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C}$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$$

Integrando esta expresión con base en el hecho de que $q = Q$ en $t = 0$ resulta

$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$q(t) = Qe^{-t/RC} \qquad \textbf{(28.17)}$$

Carga *versus* tiempo para un capacitor que se descarga

Diferenciar esta ecuación con respecto del tiempo produce la corriente instantánea como una función del tiempo:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Qe^{-t/RC}) = -\frac{Q}{RC}e^{-t/RC} \qquad \textbf{(28.18)}$$

Corriente *versus* tiempo para un capacitor que se descarga

donde $Q/RC = I_0$ es la corriente inicial. El signo negativo indica que la dirección de la corriente ahora que el capacitor se está descargando es opuesta a la dirección de la corriente cuando el capacitor se estaba cargando. (Compare las direcciones de la corriente en las figuras 28.16c y 28.18b.) Se ve que tanto la carga en el capacitor como la corriente decaen en forma exponencial a una rapidez caracterizada por la constante de tiempo $\tau = RC$.

EJEMPLO CONCEPTUAL 28.10 Limpiadores de parabrisas intermitentes

Muchos automóviles están equipados con limpiaparabrisas que pueden funcionar intermitentemente durante una ligera llovizna. ¿Cómo depende el funcionamiento de estos limpiadores de la carga y descarga de un capacitor?

Solución Los limpiadores son parte de un circuito *RC* cuya constante de tiempo puede variarse seleccionando diferentes valores de *R* mediante un interruptor de posición múltiple. Conforme aumenta con el tiempo, el voltaje a través del capacitor alcanza un punto en el cual se disparan los limpiadores y se descarga, listo para iniciar otro ciclo de carga. El intervalo de tiempo entre los barridos individuales de los limpiadores se determina por el valor de la constante de tiempo del circuito.

EJEMPLO 28.11 Carga de un capacitor en un circuito RC

Un capacitor descargado y un resistor se conectan en serie a una batería, como se muestra en la figura 28.19. Si $\mathcal{E} = 12.0$ V, $C = 5.00\ \mu$F y $R = 8.00 \times 10^5\ \Omega$, encuentre la constante de tiempo del circuito, la carga máxima en el capacitor, la corriente máxima en el circuito y la carga y la corriente como funciones del tiempo.

Solución La constante de tiempo del circuito es $\tau = RC = (8.00 \times 10^5\ \Omega)(5.00 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 4.00$ s. La carga máxima en el capacitor es $Q = C\mathcal{E} = (5.00\ \mu\text{F})(12.0\ \text{V}) = 60.0\ \mu$C. La corriente máxima en el circuito es $I_0 = \mathcal{E}/R = (12.0\ \text{V})/(8.00 \times 10^5\ \Omega) = 15.0\ \mu$A. Empleando estos valores y las ecuaciones 28.14 y 28.15 se encuentra que

$$q(t) = (60.0\ \mu\text{C})\ (1 - e^{-t/4.00\ \text{s}})$$

$$I(t) = (15.0\ \mu\text{A})\ e^{-t/4.00\ \text{s}}$$

En la figura 28.20 se presentan gráficas de estas funciones.

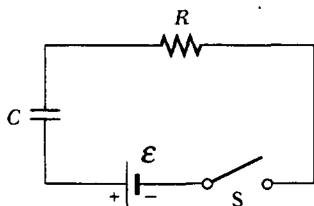


Figura 28.19 El interruptor de este circuito *RC* en serie, abierto para tiempos $t < 0$, se cierra en $t = 0$.

Ejercicio Calcule la carga en el capacitor y la corriente en el circuito después de que ha transcurrido una constante de tiempo.

Respuesta 37.9 μC, 5.52 μA.

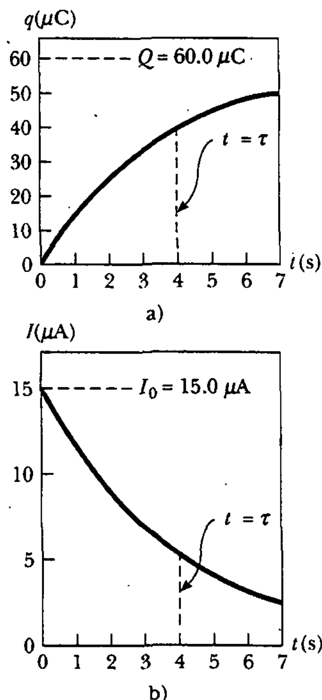


Figura 28.20 Gráficas de a) carga *versus* tiempo y b) corriente *versus* tiempo para el circuito *RC* mostrado en la figura 28.19, con $\mathcal{E} = 12.0$ V, $R = 8.00 \times 10^5\ \Omega$ y $C = 5.00\ \mu$F.

EJEMPLO 28.12 Descarga de un capacitor en un circuito RC

Considere un capacitor de capacitancia *C* que se está descargando a través de un resistor de resistencia *R*, como se ve en la figura 28.18. a) ¿Después de cuántas constantes de tiempo la carga en el capacitor es un cuarto de su valor inicial?

Solución La carga en el capacitor varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación 28.17, $q(t) = Qe^{-t/RC}$. Para determinar el tiempo que tarda la carga q en disminuir hasta un cuarto de su valor inicial se sustituye $q(t) = Q/4$ en esta expresión y se despeja t:

$$\frac{Q}{4} = Qe^{-t/RC}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-t/RC}$$

Tomando logaritmos en ambos lados se encuentra

$$-\ln 4 = -\frac{t}{RC}$$

$$t = RC(\ln 4) = 1.39RC = 1.39\tau$$

b) La energía almacenada en el capacitor disminuye con el tiempo a medida que el capacitor se descarga. ¿Después de cuántas constantes de tiempo esta energía almacenada es un cuarto de su valor inicial?

Solución Con las ecuaciones 26.11 ($U = Q^2/2C$) y 28.17 se puede expresar la energía almacenada en el capacitor en cualquier tiempo t como

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{(Qe^{-t/RC})^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}e^{-2t/RC} = U_0e^{-2t/RC}$$

donde $U_0 = Q^2/2C$ es la energía inicial almacenada en el capacitor. Como en el inciso a), se hace $U = U_0/4$ y se despeja t:

$$\frac{U_0}{4} = U_0e^{-2t/RC}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-2t/RC}$$

Tomando de nuevo logaritmos en ambos lados y despejando t resulta

$$t = \tfrac{1}{2}RC(\ln 4) = 0.693RC = 0.693\tau$$

Ejercicio ¿Después de cuántas constantes de tiempo la corriente en el circuito es la mitad de su valor inicial?

Respuesta $0.693RC = 0.693\tau$.

EJEMPLO 28.13 **Energía entregada a un resistor**

Un capacitor de 5.00 μF se carga hasta una diferencia de potencial de 800 V y después se descarga por medio de un resistor de 25.0 kΩ. ¿Cuánta energía se entrega al resistor en el tiempo que tarda el capacitor en descargarse por completo?

Solución Este problema se resolverá por dos maneras. El primer método es tomar en cuenta que la energía inicial en el circuito es igual a la energía almacenada en el capacitor, $C\mathcal{E}^2/2$ (véase la Ec. 26.11). Una vez que el capacitor se ha descargado por completo, la energía almacenada es cero. Puesto que la energía se conserva, la energía inicial almacenada en el capacitor se transforma en energía interna en el resistor. Empleando los valores dados de C y $\mathcal{E}$ se encuentra

$$\text{Energía} = \tfrac{1}{2}C\mathcal{E}^2 = \tfrac{1}{2}(5.00 \times 10^{-6}\ \text{F})(800\ \text{V})^2 = 1.60\ \text{J}$$

El segundo método, que es más difícil pero quizá más instructivo, es advertir que cuando el capacitor se descarga a través del resistor, la rapidez a la cual la energía es entregada al resistor está dada por I^2R, donde I es la corriente instantánea dada por la ecuación 28.18. Puesto que la potencia se define como la rapidez de cambio en el tiempo de la energía, se concluye que la energía entregada al resistor debe ser igual a la integral de tiempo de $I^2R\,dt$:

$$\text{Energía} = \int_0^\infty I^2R\,dt = \int_0^\infty (I_0e^{-t/RC})^2R\,dt$$

Para evaluar esta integral observe que la corriente inicial I_0 es igual a $\mathcal{E}/R$ y que todos los parámetros son constantes, excepto t. Así, se encuentra que

$$1)\qquad \text{Energía} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/RC}\,dt$$

Esta integral tiene un valor de RC/2; por lo que se halla

$$\text{Energía} = \tfrac{1}{2}C\mathcal{E}^2$$

lo cual concuerda con el resultado obtenido con el planteamiento más simple, como debe ser. Advierta que este segundo método puede utilizarse para determinar la energía total entregada al resistor en *cualquier* tiempo después de que el interruptor se cierra reemplazando simplemente el límite superior en la integral por un valor específico de t.

Ejercicio Muestre que la integral dada en la ecuación 1) tiene el valor $RC/2$.

Sección opcional

28.5 INSTRUMENTOS ELÉCTRICOS

El amperímetro

Se conoce como **amperímetro** al dispositivo que mide corriente. La corriente que se va a medir debe pasar directamente por el amperímetro, de modo que el instrumento debe estar conectado en serie con otros elementos en el circuito, como se muestra en la figura 28.21. Cuando use este instrumento para medir corrientes directas

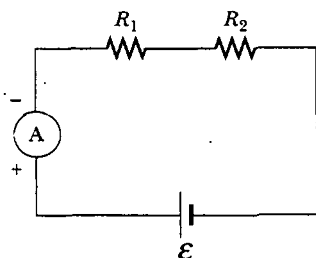


Figura 28.21 La corriente puede medirse con un amperímetro conectado en serie con el resistor y la batería de un circuito. Un amperímetro ideal tiene resistencia cero.

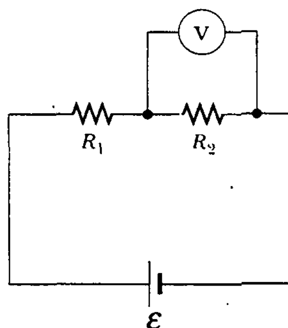


Figura 28.22 La diferencia de potencial a través de un resistor puede medirse con un voltímetro conectado en paralelo con el resistor. Un voltímetro ideal tiene resistencia infinita.

debe asegurarse de conectarlo de modo que la corriente entre en la terminal positiva del instrumento y salga en la terminal negativa.

Idealmente, un amperímetro debe tener resistencia cero de manera que no altere la corriente que se va a medir. En el circuito indicado en la figura 28.21 esta condición requiere que la resistencia del amperímetro sea pequeña comparada con $R_1 + R_2$. Puesto que cualquier amperímetro tiene siempre alguna resistencia interna, su presencia en el circuito reduce ligeramente la corriente respecto del valor que tendría en ausencia del medidor.

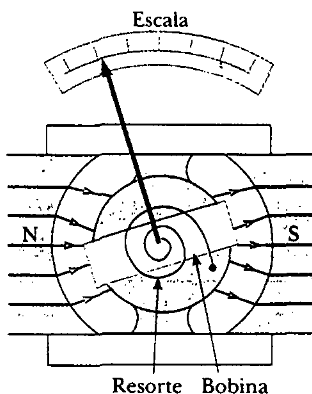
El voltímetro

Un dispositivo que mide diferencias de potencial recibe el nombre de **voltímetro**. La diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera en el circuito puede medirse al unir las terminales del voltímetro entre estos puntos sin romper el circuito, como se muestra en la figura 28.22. La diferencia de potencial en el resistor R_2 se mide conectando el voltímetro en paralelo con R_2. También en este caso es necesario observar la polaridad del instrumento. La terminal positiva del voltímetro debe conectarse en el extremo del resistor que está al potencial más alto, y la terminal negativa al extremo del resistor de potencial más bajo.

Un voltímetro ideal tiene resistencia infinita de manera que no circula corriente a través de él. Como se ve en la figura 28.22, esta condición requiere que el voltímetro tenga una resistencia que es muy grande en relación con R_2. En la práctica, si no se cumple esta condición, debe hacerse una corrección respecto de la resistencia conocida del voltímetro.

El galvanómetro

El **galvanómetro** es el principal componente en los amperímetros y voltímetros análogos. Las características esenciales de un tipo común, conocido como *galvanómetro de D'Arsonval*, se muestran en la figura 28.23a. Está compuesto por una bobina de alambre montada de modo que pueda girar libremente sobre un pivote en un campo magnético proporcionado por un imán permanente. El funcionamiento básico del galvanómetro aprovecha el hecho de que el momento de torsión actúa sobre una espira de corriente en presencia de un campo magnético (capítulo 29). El momento de torsión experimentado por la bobina es proporcional a la corriente que



a)



b)

Figura 28.23 a) Componentes principales de un galvanómetro D'Arsonval. Cuando la bobina está situada en el campo magnético conduce una corriente, el momento de torsión magnético provoca que la bobina gire. El ángulo que gira la bobina es proporcional a la corriente en la bobina debido al momento de torsión de reacción del resorte. b) Modelo a gran escala del movimiento de un galvanómetro. ¿Por qué la bobina gira sobre el eje vertical después de que el interruptor se ha cerrado? *(Cortesía de Jim Lehman)*

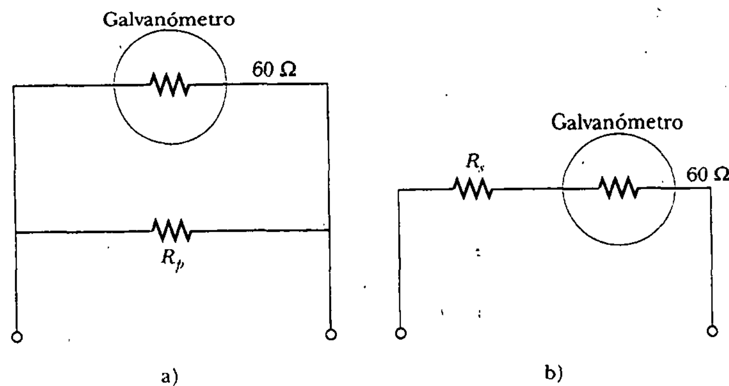


Figura 28.24 a) Cuando un galvanómetro se va a usar como amperímetro, se conecta un resistor de desviación R_p en paralelo con el galvanómetro. b) Cuando el galvanómetro va a ser usado como voltímetro, se conecta un resistor R_s en serie con el galvanómetro.

circula por ella: cuanto más grande es la corriente, tanto mayor es el momento de torsión, así como el giro de la bobina antes de que el resorte se tense lo suficiente como para detener la rotación. Por tanto, la desviación de una aguja unida a la bobina es proporcional a la corriente. Después de que el instrumento se calibra de manera apropiada, puede usarse junto con otros elementos de circuito para medir corrientes o diferencias de potencial.

Un galvanómetro estándar no es adecuado para usarse como un amperímetro, debido principalmente a que un galvanómetro común tiene una resistencia cercana a 60 Ω. La resistencia de un amperímetro de esta magnitud altera de manera considerable la corriente en un circuito. Esto puede entenderse considerando el siguiente ejemplo: la corriente en un circuito en serie simple que contiene una batería de 3 V y un resistor de 3 Ω es 1 A. Sin embargo, si para medir la corriente usted inserta un galvanómetro de 60 Ω en el circuito, ¡la resistencia total del circuito se vuelve de 63 Ω y la corriente se reduce a 0.048 A!

Un segundo factor que limita el uso del galvanómetro como un amperímetro es el hecho de que un galvanómetro común proporciona una desviación de máxima escala para corrientes del orden de 1 mA o menos. Consecuentemente, dicho galvanómetro no puede usarse de manera directa para medir corrientes mayores que ésta. Sin embargo, es posible convertir un galvanómetro en un amperímetro útil colocando un resistor de desviación R_p en paralelo con el galvanómetro, como se puede ver en la figura 28.24a. El valor de R_p debe ser muy pequeño respecto de la resistencia del galvanómetro, de modo que la mayor parte de la corriente que se va a medir circule por el resistor de desviación.

Un galvanómetro también puede utilizarse como un voltímetro añadiendo un resistor externo R_s en serie con él, como se muestra en la figura 28.24b. En este caso el resistor externo debe tener un valor muy grande respecto de la resistencia del galvanómetro para asegurar que el galvanómetro no altere de manera significativa el voltaje que se va a medir.

El puente de Wheatstone

Es posible medir con exactitud resistencias desconocidas utilizando un circuito conocido como **puente de Wheatstone** (Fig. 28.25). Este circuito consta de una resistencia desconocida, R_x; tres resistencias conocidas, R_1, R_2 y R_3 (donde R_1 es un resistor variable calibrado); un galvanómetro y una batería. El resistor conocido R_1 se varía hasta que la lectura del galvanómetro es cero —es decir, hasta que no haya corriente de *a* a *b*. En estas condiciones se dice que el puente está balanceado. Puesto que el potencial eléctrico en el punto *a* debe ser igual al potencial en el punto *b* cuando el puente está balanceado, la diferencia de potencial a través de R_1 debe ser

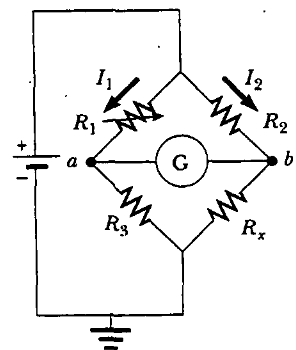
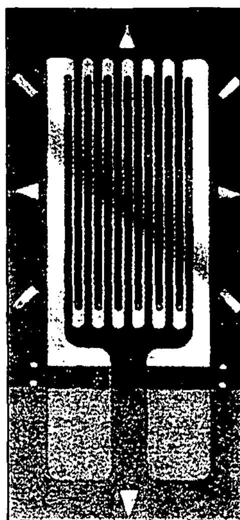


Figura 28.25 Diagrama de circuito para un puente de Wheatstone, un instrumento usado para medir una resistencia desconocida R_x en términos de resistencias conocidas R_1, R_2 y R_3. Cuando el puente está en equilibrio, ninguna corriente está presente en el galvanómetro. La flecha colocada sobre el símbolo de circuito para el resistor R_1 indica que el valor de este resistor puede ser variado por la persona que maneja el puente.



El medidor de deformación, un dispositivo usado para análisis experimental de tensión, consta de una fina bobina de alambre asegurada a un soporte de plástico flexible. El medidor expresa las tensiones mediante la detección de los cambios en la resistencia de la bobina conforme las tiras se doblan. Mediciones de la resistencia se realizan con este dispositivo como un elemento de un puente de Wheatstone. Los medidores de deformación se emplean comúnmente en las modernas balanzas electrónicas, para medir las masas de los objetos.

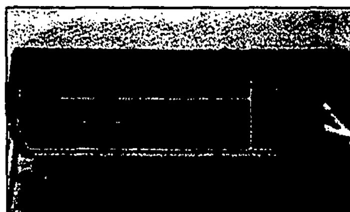


Figura 28.26 Con multímetros digitales como el mostrado suelen medirse voltajes, corrientes y resistencias. *(Henry Leap y Jim Lehman)*

igual a la diferencia de potencial a través de R_2. De igual modo, la diferencia de potencial a través de R_3 debe ser igual a la diferencia de potencial a través de R_x. De acuerdo con estas consideraciones se ve que

$$1)\qquad I_1R_1 = I_2R_2$$

$$2)\qquad I_1R_3 = I_2R_x$$

Dividiendo la ecuación 1) entre la ecuación 2) se eliminan las corrientes, y despejando R_x se encuentra que

$$R_x = \frac{R_2R_3}{R_1} \qquad \textbf{(28.19)}$$

Hay varios dispositivos similares que también operan bajo el principio de la medición nula (esto es, el ajuste de un elemento de circuito para hacer que la lectura del galvanómetro sea cero). Un ejemplo de esto es el puente de capacitancia utilizado para medir capacitancias desconocidas. Estos dispositivos no necesitan medidores calibrados y pueden emplearse con cualquier fuente de voltaje.

Los puentes de Wheatstone no son útiles para resistencias mayores a $10^5\ \Omega$, pero los instrumentos electrónicos modernos pueden medir resistencias tan altas como $10^{12}\ \Omega$. Dichos instrumentos tienen una resistencia muy alta entre sus terminales de entrada. Por ejemplo, son comunes resistencias de entrada de $10^{10}\ \Omega$ en la mayor parte de los multímetros digitales, dispositivos que se utilizan para medir voltaje, corriente y resistencia (Fig. 28.26).

El potenciómetro

Un **potenciómetro** es un circuito que se emplea para medir una fem desconocida $\mathcal{E}_x$ mediante la comparación con una fem conocida. En la figura 28.27 el punto d representa un contacto deslizante que se utiliza para variar la resistencia (y, consecuentemente, la diferencia de potencial) entre los puntos a y d. Los otros componentes requeridos en este circuito son un galvanómetro, una batería con fem conocida $\mathcal{E}_0$ y una batería con fem desconocida $\mathcal{E}_x$.

Con las corrientes en las direcciones indicadas en la figura 28.27, de acuerdo con la regla de unión de Kirchhoff se ve que la corriente que circula por el resistor R_x es $I - I_x$, donde I es la corriente en la rama izquierda (a través de la batería con fem $\mathcal{E}_0$) e I_x es la corriente en la rama derecha. La regla de la espira de Kirchhoff aplicada a la espira *abcda*, la cual se recorre en la dirección de las manecillas del reloj, produce

$$-\mathcal{E}_x + (I - I_x)R_x = 0$$

Puesto que la corriente I_x pasa a través de él, el galvanómetro muestra una lectura diferente de cero. El contacto deslizante en d se ajusta luego hasta que el galvanómetro registra cero (lo que indica un circuito balanceado y que el potenciómetro es otro dispositivo de medición nula). En estas circunstancias la corriente en el galvanómetro es cero, y la diferencia de potencial entre a y d debe ser igual a la fem desconocida $\mathcal{E}_x$:

$$\mathcal{E}_x = IR_x$$

Después, la batería de fem desconocida se reemplaza por una batería estándar de fem conocida $\mathcal{E}_s$ y el procedimiento anterior se repite. Si R_s es la resistencia entre a y d cuando se alcanza el balance en este tiempo, entonces

$$\mathcal{E}_s = IR_s$$

donde se supone que I permanece igual. Combinando esta expresión con la ecuación previa se ve que

$$\mathcal{E}_x = \frac{R_x}{R_s}\mathcal{E}_s \qquad \textbf{(28.20)}$$

Si el resistor es un alambre de resistividad ρ, su resistencia puede variarse usando el contacto deslizante para modificar la longitud L, lo que indica cuánto del alambre es parte del circuito. Con las sustituciones $R_s = \rho L_s/A$ y $R_x = \rho L_x/A$, la ecuación 28.20 se convierte en

$$\mathcal{E}_x = \frac{L_x}{L_s}\mathcal{E}_s \qquad \textbf{(28.21)}$$

donde L_x es la longitud del resistor cuando la batería de fem desconocida $\mathcal{E}_x$ está en el circuito y L_s es la longitud del resistor cuando la batería estándar está en el circuito.

El circuito de alambre deslizante de la figura 28.27 sin la fem desconocida y el galvanómetro a veces se denomina *divisor de voltaje.* Este circuito hace posible derivar en cualquier pequeña porción deseada de la fem $\mathcal{E}_0$ mediante el ajuste de la longitud del resistor.

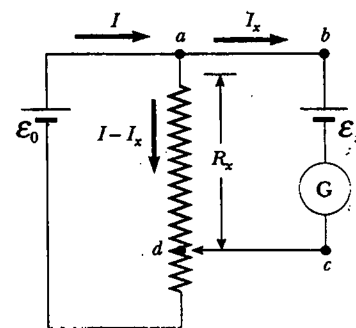


Figura 28.27 Diagrama de circuito para un potenciómetro. El circuito se usa para medir una fem desconocida $\mathcal{E}_x$.

Sección opcional

28.6 CABLEADO DOMÉSTICO Y SEGURIDAD ELÉCTRICA

Los circuitos domésticos representan una aplicación práctica de algunas de las ideas presentadas en este capítulo. En el mundo actual de los aparatos eléctricos es útil entender los requerimientos y limitaciones de energía de los sistemas eléctricos convencionales y las medidas de seguridad para evitar accidentes.

En una instalación convencional, la compañía que proporciona el servicio eléctrico distribuye la energía eléctrica a hogares individuales con un par de alambres, a los que cada usuario se conecta en paralelo a estas líneas. Un alambre se denomina *alambre vivo,*[5] como está ilustrado en la figura 28.28, y al otro se le conoce como *alambre neutro.* La diferencia de potencial entre estos dos alambres es de aproximadamente 120 V. El voltaje alterna en el tiempo, con el alambre neutral conectado a tierra, y el potencial del alambre vivo oscilando respecto de la tierra. Mucho de lo aprendido hasta ahora para la situación de fem constante (corriente directa) también se puede aplicar a la corriente alterna que las compañías eléctricas suministran a los negocios y hogares. (Los voltajes y las corrientes alternas se estudian en el capítulo 33.)

Un medidor se conecta en serie con el alambre vivo que entra a la casa para registrar el consumo de electricidad del hogar. Después del medidor el alambre se divide de modo que existen varios circuitos en paralelo separados, distribuidos por toda la casa. Cada circuito contiene un interruptor automático de circuito (o, en las instalaciones antiguas, un fusible). El alambre y el interruptor de circuito se seleccionan cuidadosamente para satisfacer las necesidades de corriente de este circuito. Si un circuito va a conducir corrientes tan grandes como 30 A, un alambre grueso y un interruptor de circuito apropiado deben elegirse para manejar esta corriente. Otros circuitos domésticos individuales utilizados por lo general para activar lámparas y pequeños aparatos requieren casi siempre de sólo 15 A. Cada circuito tiene su propio interruptor para adaptarse a diversas condiciones de carga.

Como ejemplo, considere un circuito en el cual un tostador, un horno de microondas y una cafetera están conectados (correspondiendo a R_1, R_2 y R_3 en la figura 28.28) y como está mostrado en la fotografía del inicio del capítulo). Se puede calcular la corriente tomada por cada aparato utilizando la expresión $\mathcal{P} = I\,\Delta V$. El tostador, con un valor nominal de 1 000 W, toma una corriente de 1 000 W/120 V = 8.33 A. El horno de microondas, con un valor nominal de 1 300 W extrae 10.8 A y la cafetera, con un valor nominal de 800 W, toma 6.67 A. Si los tres aparatos operan en forma simultánea, toman una corriente total de 25.8 A. Por consiguiente, el circuito debe alambrarse para manejar por lo menos esta corriente tan elevada. Si

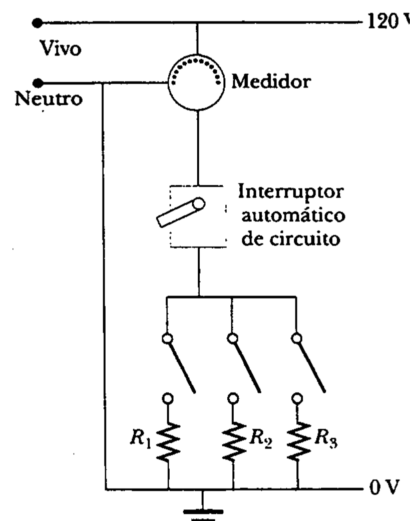


Figura 28.28 Diagrama de cableado de un circuito doméstico. Las resistencias representan aparatos u otros dispositivos eléctricos que funcionan con un voltaje aplicado de 120 V.

[5] *Alambre vivo* es una expresión común para un conductor común cuyo potencial eléctrico está sobre o bajo el potencial de tierra.

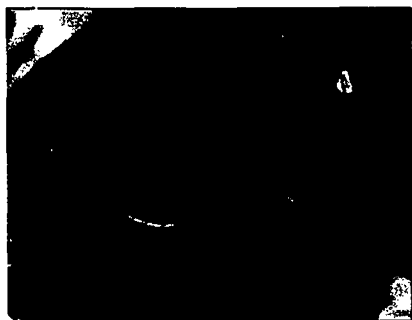


Figura 28.29 Un tomacorriente para un aparato de 240 V. *(George Semple)*

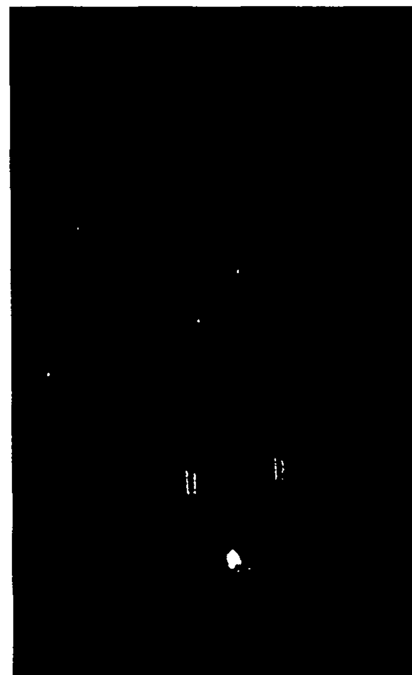


Figura 28.30 Cordón eléctrico de tres puntas para un aparato de 120 V. *(George Semple)*

el valor nominal del interruptor automático que protege al circuito es demasiado pequeño —por ejemplo, 20 A— el interruptor se disparará cuando el tercer aparato se encienda, evitando que funcionen los tres aparatos. Para evitar esta situación el tostador y la cafetera podrían operarse en un circuito de 20 A y el horno de microondas en un circuito separado de 20 A.

Muchos aparatos de gran capacidad, como los hornos eléctricos y las secadoras de ropa, requieren 240 V para su operación. La compañía eléctrica brinda este voltaje suministrando un tercer alambre que está a 120 V por debajo del potencial de tierra (Fig. 28.29). La diferencia de potencial entre este alambre vivo y el otro alambre vivo (el cual está a 120 V sobre el potencial de tierra) es de 240 V. Un aparato que funciona a partir de una línea de 240 V requiere la mitad de la corriente de uno que trabaja con base en una línea de 120 V; por tanto, pueden utilizarse alambres más pequeños en el circuito de mayor voltaje sin que el sobrecalentamiento se vuelva un problema.

Seguridad eléctrica

Cuando el alambre vivo de una toma de corriente eléctrica se conecta directamente a tierra, el circuito se completa y existe una condición de cortocircuito. Un *cortocircuito* ocurre cuando casi existe resistencia cero entre dos puntos a diferentes potenciales; esto da como resultado una corriente muy grande. Cuando esto sucede de manera accidental, un interruptor de circuito funcionando en forma apropiada abre el circuito y no ocurre daño alguno. Sin embargo, una persona en contacto con tierra puede electrocutarse al tocar el alambre vivo de un conductor raído u otro conductor expuesto. Un contacto a tierra excepcionalmente bueno (aunque muy peligroso) se efectúa cuando la persona toca una tubería de agua (por lo común al potencial de tierra) o permanece parada sobre tierra con los pies húmedos. La última situación representa una buena tierra porque el agua normal no destilada es un conductor debido a que contiene gran cantidad de iones asociados con impurezas. Esta situación debe evitarse a toda costa.

Un choque eléctrico puede producir quemaduras fatales o puede ser origen de mal funcionamiento de los músculos de órganos vitales, como el corazón. El grado de daño al cuerpo depende de la magnitud de la corriente, el lapso en que ésta actúa, la parte del cuerpo que toca el alambre vivo y la parte del cuerpo a través de la cual circula la corriente. Las corrientes de 5 mA o menos causan una sensación de choque, pero en general no ocasionan daño o éste es mínimo. Si la corriente es mayor que aproximadamente 10 mA, los músculos se contraen y la persona puede no poder soltar el alambre vivo. Si una corriente cercana a 100 mA pasa por el cuerpo durante unos cuantos segundos, el resultado puede ser fatal. Corrientes tan grandes paralizan los músculos respiratorios y obstruyen la respiración. En algunos casos corrientes de alrededor de 1 A a través del cuerpo pueden producir serias (y en ocasiones fatales) quemaduras. En la práctica ningún contacto con alambres vivos se considera seguro cuando el voltaje es superior a 24 V.

Muchos de los tomacorrientes de 120 V se diseñan para aceptar un cordón eléctrico de tres puntas como el que se muestra en la figura 28.30. (Esta característica se requiere en todas las nuevas instalaciones eléctricas.) Una de estas puntas es el alambre vivo a un potencial nominal de 120 V. La segunda, que se denomina el "neutro", nominalmente está a 0 V y conduce la corriente a tierra. La tercera punta, redondeada, es un alambre de seguridad de conexión a tierra por el que por lo común no circula corriente pero está tanto aterrizado como conectado directamente a la caja del aparato. Si el alambre vivo entra por accidente en corto con la caja (lo cual ocurre a menudo cuando se desgasta el aislamiento de alambre), la corriente toma una trayectoria de baja resistencia a través del aparato hasta tierra. En contraste, si la caja del aparato no está conectada a tierra de manera apropiada y ocurre un corto, cualquiera que esté en contacto con el aparato experimenta un choque eléctrico debido a que el cuerpo proporciona una trayectoria de baja resistencia a tierra.

En la actualidad se utilizan tomas de corriente eléctrica especiales denominadas *interruptores de falla a tierra* (IFT, o GFI por sus siglas en inglés) en cocinas, baños, cimientos, tomacorrientes exteriores y otras áreas peligrosas de los nuevos hogares. Estos dispositivos están diseñados para proteger a las personas contra choques eléctricos registrando corrientes pequeñas ($\approx$ 5 mA) que se fugan a tierra. (El principio de su operación se describe en el capítulo 31.) Cuando se detecta una corriente de fuga excesiva, la corriente se corta en menos de 1 ms.

Pregunta sorpresa 28.4

¿El interruptor automático de un circuito está cableado en serie o en paralelo con el dispositivo que protege?

RESUMEN

La **fem** de una batería es igual al voltaje a través de sus terminales cuando la corriente es cero. Esto significa que la fem es equivalente al **voltaje en circuito abierto** de la batería.

La **resistencia equivalente** de un conjunto de resistores conectados en **serie** es

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \qquad \textbf{(28.6)}$$

La **resistencia equivalente** de un conjunto de resistores conectados en **paralelo** es

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad \textbf{(28.8)}$$

Si es posible combinar resistores en serie o paralelo equivalentes, las dos ecuaciones anteriores facilitan la determinación de cómo influyen los resistores en el resto del circuito.

Los circuitos que involucran más de una espira se analizan de manera conveniente utilizando las **reglas de Kirchhoff:**

1. La suma de las corrientes que entran a cualquier unión en un circuito eléctrico debe ser igual a la suma de las corrientes que salen de esta unión:

$$\sum I_{\text{entrada}} = \sum I_{\text{salida}} \qquad \textbf{(28.9)}$$

2. La suma de las diferencias de potencial a través de todos los elementos alrededor de cualquier espira de circuito cerrado debe ser cero:

$$\sum_{\substack{\text{espira}\\ \text{cerrada}}} \Delta V = 0 \qquad \textbf{(28.10)}$$

La primera regla es un enunciado de la conservación de la carga; la segunda es equivalente a un enunciado de la conservación de la energía.

Cuando un resistor se recorre en la dirección de la corriente, el cambio de potencial ΔV a través del resistor es $-IR$. Cuando el resistor se recorre en la dirección opuesta a la corriente, $\Delta V = +IR$. Si una fuente de fem se recorre en la dirección de la fem (terminal negativa a positiva) el cambio de potencial es $+\mathcal{E}$. Cuando una fuente de la fem se recorre en el sentido opuesto de la fem (positivo a negativo), el cambio de potencial es $-\mathcal{E}$. El uso de estas reglas, junto con las ecuaciones 28.9 y 28.10, permite analizar circuitos eléctricos.

Si un capacitor se carga con una batería a través de un resistor de resistencia R, la carga en el capacitor y la corriente en el circuito varían en el tiempo de acuerdo con las expresiones

$$q(t) = Q(1 - e^{-t/RC}) \quad \textbf{(28.14)}$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} \quad \textbf{(28.15)}$$

donde $Q = C\mathcal{E}$ es la carga máxima en el capacitor. El producto RC se denomina **constante de tiempo** τ del circuito. Si un capacitor cargado se descarga a través de un resistor de resistencia R, la carga y la corriente disminuyen exponencialmente en el tiempo de acuerdo con las expresiones

$$q(t) = Qe^{-t/RC} \quad \textbf{(28.17)}$$

$$I(t) = -\frac{Q}{RC} e^{-t/RC} \quad \textbf{(28.18)}$$

donde Q es la carga inicial en el capacitor y $Q/RC = I_0$ es la corriente inicial en el circuito. Las ecuaciones 28.14, 28.15, 28.17 y 28.18 le permiten analizar la corriente y las diferencias de potencial en un circuito RC y la carga almacenada en el capacitor del circuito.

PREGUNTAS

1. Explique la diferencia entre resistencia de carga en un circuito y resistencia interna de una batería.
2. ¿En qué condición la diferencia de potencial a través de las terminales de una batería es igual a su fem? ¿El voltaje de las terminales puede ser mayor que la fem? Explique.
3. ¿La dirección de la corriente a través de una batería siempre es de la terminal negativa a la positiva? Explique.
4. ¿Cómo conectaría resistores de manera que la resistencia equivalente sea más grande que la resistencia individual más grande? Dé un ejemplo que incluya tres resistores.
5. ¿Cómo conectaría resistores de manera que la resistencia equivalente sea más pequeña que la resistencia individual más pequeña? Brinde un ejemplo que incluya tres resistores.
6. Dados tres focos y una batería, dibuje tantos circuitos eléctricos diferentes como pueda.
7. Cuando se conectan resistores en serie, ¿cuáles de las siguientes características serían iguales en cada resistor: diferencia de potencial, corriente, potencia?
8. Cuando se conectan resistores en paralelo, ¿de lo siguiente qué sería igual en cada resistor: diferencia de potencial, corriente, potencia?
9. ¿Qué ventajas habría al usar dos resistores idénticos en paralelo conectados en serie con otro par idéntico en paralelo en lugar de usar un solo resistor?
10. Una lámpara incandescente conectada a una fuente de 120 V con un cable de extensión corto brinda más iluminación que la misma lámpara conectada a la misma fuente con un cable de extensión muy largo. Explique por qué.
11. ¿Cuándo puede ser positiva la diferencia de potencial que pasa por un resistor?
12. Suponga que en la figura 28.15 el alambre entre los puntos g y h se reemplaza por un resistor de 10 Ω. Explique por qué este cambio no afecta las corrientes calculadas en el ejemplo 28.9.
13. Describa qué ocurre con el foco de la figura P28.13 después de que se cierra el interruptor. Suponga que el capacitor tiene una gran capacitancia y que al inicio está descargado, considere también que el foco ilumina cuando se conecta directamente entre las terminales de la batería.

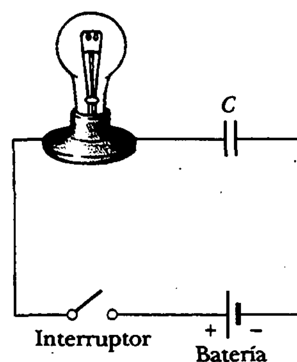


Figura P28.13

14. ¿Cuáles son las resistencias internas de un amperímetro y un voltímetro ideales? ¿Los medidores reales llegan a estos casos ideales?
15. Aunque las resistencias internas de todas las fuentes de fem se ignoraran en el tratamiento del potenciómetro (sección 28.5), en realidad no es necesario hacer esta suposición. Explique por qué las resistencias internas no desempeñan ningún papel en esta medición de $\mathcal{E}_x$.

16. ¿Por qué es peligroso activar una luz cuando se está dentro de una bañera?
17. Suponga que usted cae de un edificio y en el trayecto hacia abajo se agarra de un cable de alto voltaje. Suponiendo que usted está colgando del cable, ¿se electrocutará? Si el cable se rompe después, ¿usted continuará unido al extremo del mismo mientras está cayendo?
18. ¿Qué ventajas ofrece operar 120 V respecto de 240 V? ¿Qué desventajas?
19. Cuando los electricistas trabajan con alambres potencialmente vivos, con frecuencia usan los dorsos de sus manos o dedos para mover los alambres. ¿Por qué supone que usan esta técnica?
20. ¿Qué procedimiento usaría para tratar de salvar a una persona que está "petrificada" en un cable vivo de alto voltaje sin poner en riesgo su propia vida?
21. Si la corriente que circula por un cuerpo es la que determina qué tan serio será un choque eléctrico, ¿por qué se ven anuncios de peligro de alto *voltaje* en vez de alta *corriente* cerca de los equipos eléctricos?
22. Suponga que usted está volando un papalote y éste choca con un cable de alto voltaje. ¿Qué factores determinan la magnitud del choque eléctrico que usted recibe?
23. Un circuito en serie está compuesto por tres lámparas idénticas conectadas a una batería, como se muestra en la figura P28.23. Cuando el interruptor S se cierra, ¿qué ocurre con a) las intensidades de las lámparas A y B, b) la intensidad de la lámpara C, c) la corriente en el circuito y d) el voltaje a través de las tres lámparas? e) ¿La potencia entregada al circuito aumenta, disminuye o permanece igual?

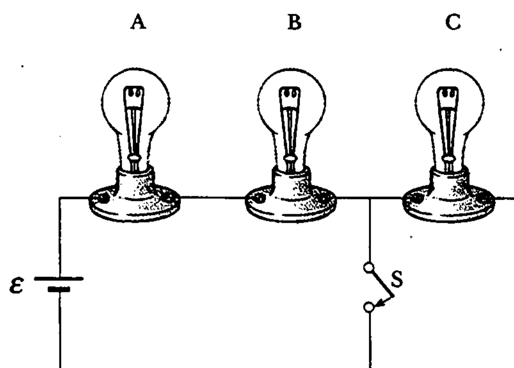


Figura P28.23

24. Si los faros de su automóvil están encendidos cuando usted activa la marcha, ¿por qué se oscurecen mientras el carro está encendiéndose?
25. Una estación de esquí consta de unos cuantos teleféricos y varias pistas cuesta abajo interconectadas al lado de una montaña, con un albergue en el fondo. Los elevadores son semejantes a baterías, y las pistas son análogas a resistores. Describa cómo pueden estar en serie dos pistas. Describa cómo pueden estar en paralelo tres pistas. Bosqueje la unión de un elevador y dos pistas. Establezca la regla de unión de Kirchhoff para las estaciones de esquí. Una de las esquiadoras que por casualidad lleva un altímetro se detiene a calentar los dedos de sus pies cada vez que pasa por el albergue. Establezca la regla de la espira de Kirchhoff para la altitud.

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante ☐ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en http://www.saunderscollege.com/physics/ = use computadora para resolver el problema = Física interactiva ☐ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 28.1 Fuerza electromotriz

WEB 1. Una batería tiene una fem de 15.0 V. El voltaje terminal de la batería es 11.6 V cuando está entregando 20.0 W de potencia a un resistor de carga externo R. a) ¿Cuál es el valor de R? b) ¿Cuál es la resistencia interna de la batería?

2. a) ¿Cuál es la corriente en un resistor de 5.60 Ω conectado a una batería que tiene una resistencia interna de 0.200 Ω si el voltaje terminal de la batería es de 10.0 V? b) ¿Cuál es la fem de la batería?

3. Dos baterías de 1.50 V —con sus terminales positivas en la misma dirección— se insertan en serie dentro del cilindro de una linterna. Una batería tiene una resistencia interna de 0.255 Ω, y la resistencia interna de la otra es igual a 0.153 Ω. Cuando el interruptor se cierra se produce una corriente de 600 mA en la lámpara. a) ¿Cuál es la resistencia de la lámpara? b) ¿Qué porcentaje de la potencia de las baterías aparece en las baterías mismas, representada como un incremento en la temperatura?

4. Una batería de automóvil tiene una fem de 12.6 V y una resistencia interna de 0.080 0 Ω. Los faros tienen una resistencia total de 5.00 Ω (supuesta constante). ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de los focos de los faros a) cuando son la única carga en la batería, y b) cuando el motor de la marcha está operando y toma 35.0 A adicionales de la batería?

Sección 28.2 Resistores en serie y en paralelo

5. La corriente en un lazo de circuito que tiene una resistencia de R_1 es de 2.00 A. La corriente se reduce a 1.60 A cuando un resistor adicional R_2 = 3.00 Ω se añade en serie con R_1. ¿Cuál es el valor de R_1?
6. a) Encuentre la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* en la figura P28.6. b) Si una diferencia de potencial de 34.0 V se aplica entre los puntos *a* y *b*, calcule la corriente en cada resistor.
7. Un técnico en reparación de televisores necesita un resistor de 100 Ω para componer un equipo defectuoso.

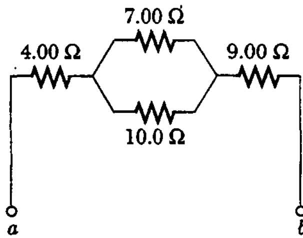


Figura P28.6

Por el momento no tiene resistores de este valor. Todo lo que tiene en su caja de herramientas son un resistor de 500 Ω y dos resistores de 250 Ω. ¿Cómo puede obtener la resistencia deseada usando los resistores que tiene a mano?

8. Un foco marcado "75 W [a] 120 V" se atornilla en un portalámpara al extremo de un largo cable de extensión en el cual cada uno de los dos conductores tiene una resistencia de 0.800 Ω. El otro extremo del cable de extensión está conectado a un tomacorriente de 120 V. Dibuje un diagrama de circuito y encuentre la potencia real entregada al foco en este circuito.

WEB 9. Considere el circuito mostrado en la figura P28.9. Encuentre a) la corriente en el resistor de 20.0 Ω y b) la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*.

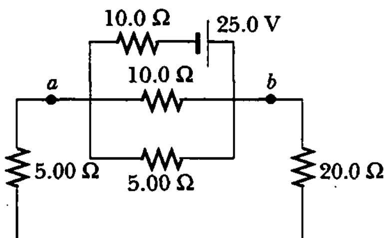


Figura P28.9

10. Cuatro alambres de cobre de igual longitud están conectados en serie. Sus áreas de sección transversal son 1.00 cm^2, 2.00 cm^2, 3.00 cm^2 y 5.00 cm^2. Si se aplica un voltaje de 120 V al arreglo, ¿cuál es el voltaje a través del alambre de 2.00 cm^2?

11. Tres resistores de 100 Ω se conectan como se indica en la figura P28.11. La máxima potencia que se puede entregar de manera segura a cualquiera de los resistores es 25.0 W. a) ¿Cuál es el máximo voltaje que se puede aplicar a las terminales *a* y *b*? b) Para el voltaje determinado en el inciso a), ¿cuál es la potencia entregada a cada resistor? ¿Cuál es la potencia total entregada?

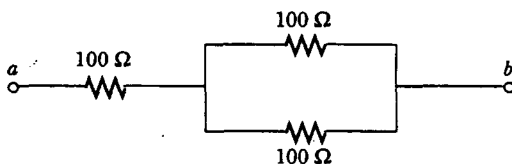


Figura P28.11

12. Utilizando sólo tres resistores —2.00 Ω, 3.00 Ω y 4.00 Ω— encuentre 17 valores de resistencia que se pueden obtener mediante diversas combinaciones de uno o más resistores. Tabule las combinaciones en orden de resistencia creciente.

13. La corriente en un circuito se triplica conectando un resistor de 500 Ω en paralelo con la resistencia del circuito. Determine la resistencia del circuito en ausencia del resistor de 500 Ω.

14. La potencia entregada a la parte superior del circuito de la figura P28.14 no depende de si el interruptor está abierto o cerrado. Si $R = 1.00$ Ω, determine R'. Ignore la resistencia interna de la fuente de voltaje.

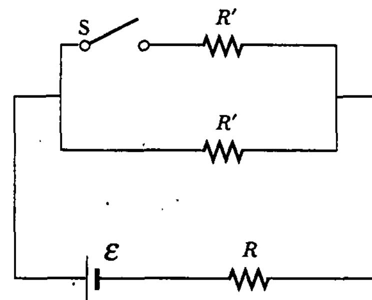


Figura P28.14

15. Calcule la potencia entregada a cada resistor en el circuito mostrado en la figura P28.15.

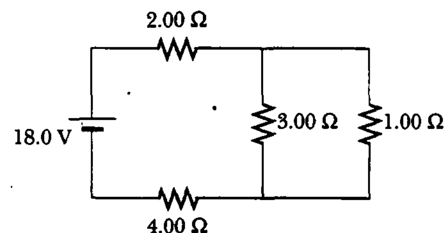


Figura P28.15

16. Dos resistores conectados en serie tienen una resistencia equivalente de 690 Ω. Cuando se conectan en paralelo su resistencia equivalente es igual a 150 Ω. Determine la resistencia de cada resistor.

17. En las figuras 28.4 y 28.5, haga $R_1 = 11.0$ Ω, $R_2 = 22.0$ Ω y que la batería tenga un voltaje terminal de 33.0 V. a) En el circuito en paralelo que se muestra en la figura 28.5, ¿cuál resistor consume más potencia? b) Verifique que la suma de la potencia (I^2R) consumida por cada resistor sea igual a la potencia suministrada por la batería ($I\,\Delta V$). c) En el circuito en serie, ¿cuál resistor usa más potencia? d) Verifique que la suma de la potencia (I^2R) usada por cada resistor sea igual a la potencia suminis-

trada por la batería ($\mathcal{P} = I\Delta V$). e) ¿Cuál de las configuraciones de circuito usa más potencia?

Sección 28.3 Reglas de Kirchhoff

Nota: las corrientes no están necesariamente en la dirección indicada en algunos circuitos.

18. El amperímetro mostrado en la figura P28.18 registra 2.00 A. Encuentre I_1, I_2 y $\mathcal{E}$.

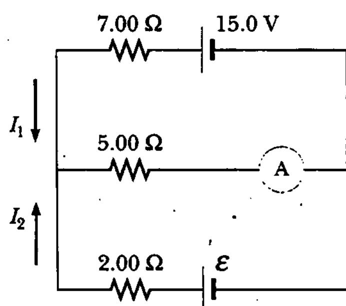


Figura P28.18



19. Determine la corriente en cada rama del circuito mostrado en la figura P28.19.

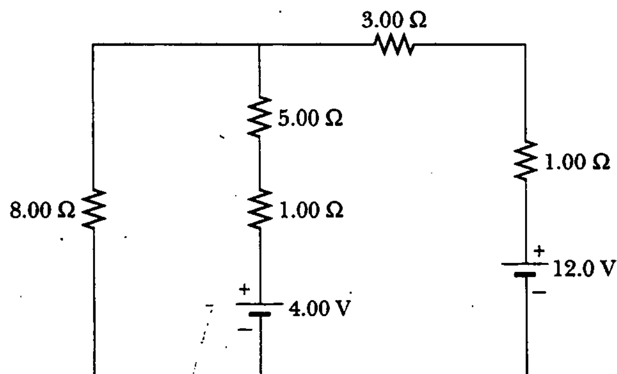


Figura P28.19 Problemas 19, 20 y 21.

20. En la figura P28.19 muestre cómo añadir suficientes amperímetros para medir cada diferente corriente que está fluyendo. Muestre cómo añadir suficientes voltímetros para medir la diferencia de potencial a través de cada resistor y a través de cada batería.

21. El circuito considerado en el problema 19 y mostrado en la figura P28.19 está conectado durante 2.00 min. a) Encuentre la energía suministrada por cada batería. b) Encuentre la energía entregada a cada resistor. c) Encuentre la cantidad total de energía convertida de energía química en la batería a energía interna en la resistencia del circuito.

22. a) Utilizando las reglas de Kirchhoff encuentre la corriente en cada resistor mostrado en la figura P28.22 y b) encuentre la diferencia de potencial entre los puntos *c* y *f*. ¿Qué punto está al potencial más alto?

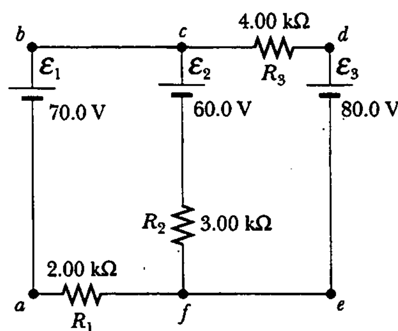


Figura P28.22

23. Si $R = 1.00$ kΩ y $\mathcal{E} = 250$ V en la figura P28.23, determine la dirección y magnitud de la corriente en el alambre horizontal entre *a* y *e*.

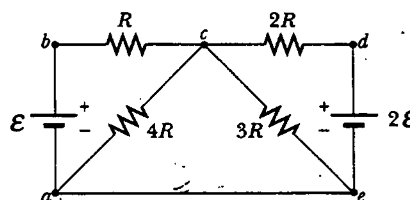


Figura P28.23

24. En el circuito de la figura P28.24 determine la corriente en cada resistor y el voltaje a través del resistor de 200 Ω.

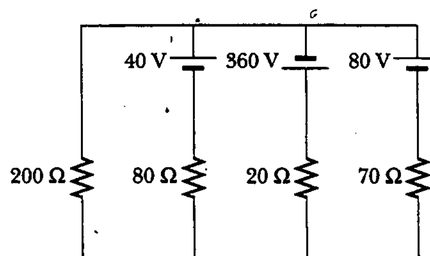


Figura P28.24

25. Una batería descargada se carga conectándola a una batería en funcionamiento de otro auto (Fig. P28.25). Determine la corriente en el mecanismo de arranque y en la batería descargada.

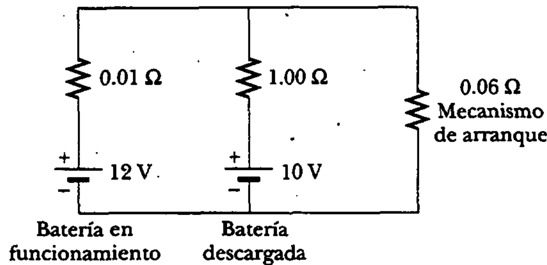


Figura P28.25

26. Para la red mostrada en la figura P28.26 demuestre que la resistencia $R_{ab} = \frac{27}{17}\ \Omega$.

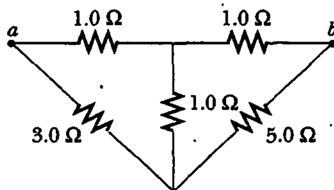


Figura P28.26

27. Para el circuito mostrado en la figura P28.27, calcule a) la corriente en el resistor de 2.00 Ω y b) la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b*.

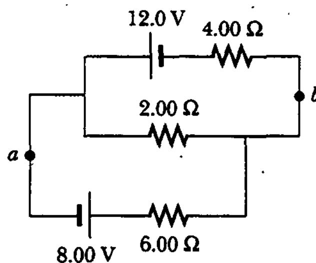


Figura P28.27

28. Calcule la potencia entregada a cada uno de los resistores mostrados en la figura P28.28.

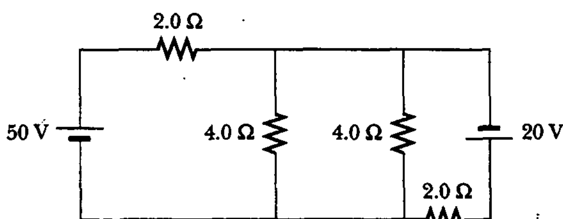


Figura P28.28

Sección 28.4 Circuitos *RC*

WEB 29. Considere un circuito *RC* en serie (véase la Fig. 28.16) para el cual $R = 1.00\ \text{M}\Omega$, $C = 5.00\ \mu\text{F}$ y $\mathcal{E} = 30.0$ V. Encuentre a) la constante de tiempo del circuito y b) la carga máxima en el capacitor después de que se cierra el interruptor. c) Si el interruptor se cierra en $t = 0$, determine la corriente en el resistor 10.0 s después.

30. Un capacitor de 2.00 nF con una carga inicial de 5.10 μC se descarga por medio de un resistor de 1.30 kΩ. a) Calcule la corriente a través del resistor 9.00 μs después de que el resistor se conecta en las terminales del capacitor. b) ¿Qué carga permanece en el capacitor después de 8.00 μs? c) ¿Cuál es la corriente máxima en el resistor?

31. Un capacitor completamente cargado almacena una energía U_0. ¿Cuánta energía queda cuando su carga se ha reducido a la mitad de su valor original?

32. En el circuito de la figura P28.32 el interruptor S ha estado abierto durante un largo tiempo. Luego se cierra repentinamente. Calcule la constante de tiempo a) antes de cerrar el interruptor y b) después de cerrarlo. c) Si el interruptor se cierra en $t = 0$, determine la corriente a través de él como una función del tiempo.

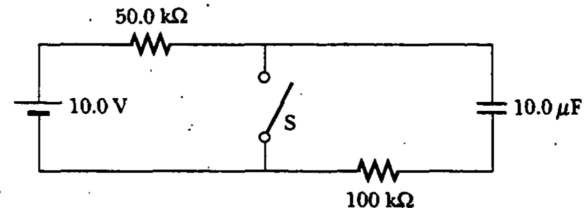


Figura P28.32

33. El circuito mostrado en la figura P28.33 ha estado conectado durante largo tiempo. a) ¿Cuál es el voltaje a través del capacitor? b) Si se desconecta la batería, ¿cuánto tarda el capacitor en descargarse hasta un décimo de su voltaje inicial?

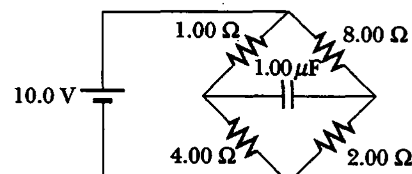


Figura P28.33

34. Un resistor de 4.00 MΩ y un capacitor de 3.00 μF se conectan en serie a un suministro de potencia de 12.0 V. a) ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito? b) Exprese la corriente en el circuito y la carga en el capacitor como funciones del tiempo.

35. Los materiales dieléctricos empleados en la manufactura de capacitores se caracterizan por conductividades que son pequeñas pero no cero. Por tanto, un capacitor cargado pierde lentamente su carga por medio de "fugas" a través del dieléctrico. Si cierto capacitor de 360 μF tiene una fuga de carga tal que la diferencia de potencial disminuye a la mitad de su valor inicial en 4.00 s, ¿cuál es la resistencia equivalente del dieléctrico?

36. Los materiales dieléctricos empleados en la manufactura de capacitores se caracterizan por las conductividades que son pequeñas pero no cero. Por tanto, un capacitor cargado pierde lentamente su carga por medio de "fugas" a través del dieléctrico. Si un capacitor que tiene una capacitancia C tiene una fuga de carga tal que la diferencia de potencial disminuye a la mitad de su valor inicial en un tiempo t, ¿cuál es la resistencia equivalente del dieléctrico?

37. Un capacitor en un circuito RC se carga hasta 60.0% de su valor máximo en 0.900 s. ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito?

(Opcional)
Sección 28.5 Instrumentos eléctricos

38. Un galvanómetro común que necesita una corriente de 1.50 mA para la máxima desviación de escala, y que tiene una resistencia de 75.0 Ω, puede usarse para medir corrientes de valores mucho más grandes. Para permitir a un operador medir grandes corrientes sin dañar el galvanómetro un resistor en derivación relativamente pequeño se cablea en paralelo con el galvanómetro (considere la figura 28.24a). La mayor parte de la corriente fluye entonces por el resistor en derivación. Calcule el valor del resistor en derivación que permite emplear al galvanómetro para medir una corriente de 1.00 A a máxima desviación de escala. (*Sugerencia*: emplee las reglas de Kirchhoff.)

39. El galvanómetro descrito en el problema anterior puede utilizarse para medir voltajes. En este caso se conecta a un gran resistor en serie con el galvanómetro de modo similar al indicado en la figura 28.24b. Este arreglo, en efecto, limita la corriente que fluye a través del galvanómetro cuando se aplican grandes voltajes. La mayor parte de la caída de potencial ocurre a través del resistor puesto en serie. Calcule el valor del resistor que permite al galvanómetro medir un voltaje aplicado de 25.0 V a máxima desviación de escala.

40. Un galvanómetro que tiene una sensibilidad de máxima escala de 1.00 mA requiere un resistor en serie de 900 Ω para efectuar una lectura de máxima escala de voltímetro cuando se mide 1.00 V en las terminales. ¿Qué resistor en serie se requiere para convertir el mismo galvanómetro en un voltímetro de 50.0 V (máxima escala)?

41. Suponga que un galvanómetro tiene una resistencia interna de 60.0 Ω y necesita una corriente de 0.500 mA para producir la desviación de máxima escala. ¿Qué resistencia debe conectarse en paralelo con el galvanómetro si la combinación va a servir como un amperímetro que tiene una desviación de máxima escala para una corriente de 0.100 A?

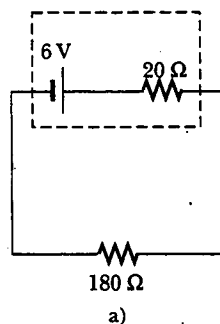
42. Un puente de Wheatstone del tipo mostrado en la figura 28.25 se usa para realizar mediciones precisas de la resistencia de un conector de alambre. Si R_3 = 1.00 kΩ, y el puente se equilibra ajustando R_1 de manera tal que $R_1 = 2.50\ R_2$, ¿cuál es el valor de R_x?

43. Considere el caso en que el puente de Wheatstone mostrado en la figura 28.25 está desbalanceado. Calcule la corriente a través del galvanómetro cuando $R_x = R_3$ = 7.00 Ω, R_2 = 21.0 Ω y R_1 = 14.0 Ω. Suponga que el voltaje a través del puente es de 70.0 V, e ignore la resistencia del galvanómetro.

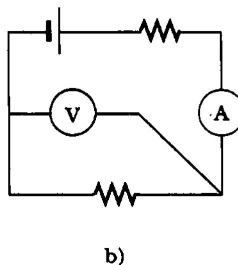
44. **Problema de repaso.** Un puente de Wheatstone se puede usar para medir el esfuerzo ($\Delta L/L_i$) de un alambre (véase la sección 12.4), donde L_i es la longitud antes del alargamiento, L es la longitud después del alargamiento, y $\Delta L = L - L_i$. Sea $\alpha = \Delta L/L_i$. Demuestre que la resistencia es $R = R_i(1 + 2\alpha + \alpha^2)$ para cualquier longitud, donde $R_i = \rho L_i/A_i$. Suponga que la resistividad y el volumen del alambre permanecen constantes.

45. Considere el circuito de potenciómetro que se muestra en la figura 28.27. Si se emplea una batería estándar de 1.018 6 V de fem en el circuito y la resistencia entre a y d es de 36.0 Ω, el registro del galvanómetro es cero. Cuando la batería estándar se sustituye por una fem desconocida, el galvanómetro registra cero si la resistencia se ajusta a 48.0 Ω. ¿Cuál es el valor de la fem?

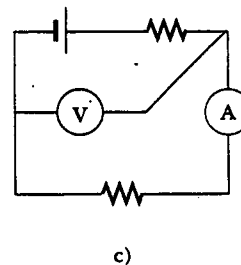
46. *La carga del medidor.* Trabaje este problema a una precisión de cinco dígitos. Refiérase a la figura P28.46. a) Cuando un resistor de 180.00 Ω se pone a través de una batería con una fem de 6.000 0 V y una resistencia interna de 20.000 Ω, ¿qué corriente fluye en el resistor? ¿Cuál será la diferencia de potencial a través del mismo? b) Suponga ahora que un amperímetro con una resistencia de 0.500 00 Ω y un voltímetro con una resistencia



a)



b)



c)

Figura P28.46

de 20 000 Ω se añaden al circuito, como se muestra en la figura P28.46b. Encuentre la lectura de cada uno de ellos. c) Una terminal de un alambre se mueve como se muestra en la figura P28.46c. Encuentre las nuevas lecturas del medidor.

(Opcional)
Sección 28.6 Cableado doméstico y seguridad eléctrica

WEB 47. Un calefactor eléctrico está especificado para 1 500 W, un tostador para 750 W y una parrilla eléctrica para 1 000 W. Los tres aparatos se conectan a un circuito común de 120 V. a) ¿Cuánta corriente toma cada uno? b) ¿Un circuito interruptor de 25.0 A es suficiente en esta situación? Explique su respuesta.

48. Un cordón de 8.00 pies de extensión tiene dos alambres de cobre de calibre 18, cada uno con un diámetro de 1.024 mm. ¿Cuál es la pérdida I^2R en este cable cuando conduce una corriente de a) 1.00 A y b) 10.0 A?

49. Por razones económicas algunas veces se usa cableado de aluminio en lugar de cobre. De acuerdo con el código eléctrico nacional de Estados Unidos la máxima corriente permisible para un alambre de cobre de calibre 12 con aislamiento de caucho es de 20 A. ¿Cuál debe ser la máxima corriente permisible en un alambre de aluminio de calibre 12 si va a tener la misma pérdida I^2R por unidad de longitud que el alambre de cobre?

50. Encienda su lámpara de escritorio. Levante el cable con sus dedos índice y pulgar sosteniéndolo a lo ancho. a) Calcule una estimación del orden de magnitud para la corriente que fluye a través de su mano. Usted puede suponer que en un instante típico el conductor dentro del cordón de la lámpara cerca de su pulgar está a un potencial ~10^2 V y que el conductor cerca de su dedo índice está a potencial de tierra (0 V). La resistencia de su mano depende fuertemente del grosor y contenido de humedad de las capas externas de su piel. Suponga que la resistencia de su mano entre las puntas de los dedos índice y pulgar es ~10^4 Ω. Puede modelar el cordón como si tuviese un aislante de goma. Establezca las otras cantidades que mida o estime y sus valores. Explique su razonamiento. b) Suponga que su cuerpo está aislado de cualesquiera otras cargas o corrientes. En términos del orden de magnitud describa el potencial de su pulgar donde está en contacto con el cordón y el potencial de su índice donde toca al cordón.

PROBLEMAS ADICIONALES

51. Cuatro baterías AA de 1.50 V en serie se usan para dar potencia a un radio de transistores. Si las baterías pueden proporcionar una carga total de 240 C, ¿cuánto tiempo duran si el radio tiene una resistencia de 200 Ω?

52. Una batería tiene una fem de 9.20 V y una resistencia interna de 1.20 Ω. a) ¿Qué resistencia a través de la batería extraerá de ella una potencia de 12.8 W? b) ¿Una potencia de 21.2 W?

53. Calcule la diferencia de potencial entre los puntos *a* y *b* en la figura P28.53 e identifique cuál punto está al potencial más alto.

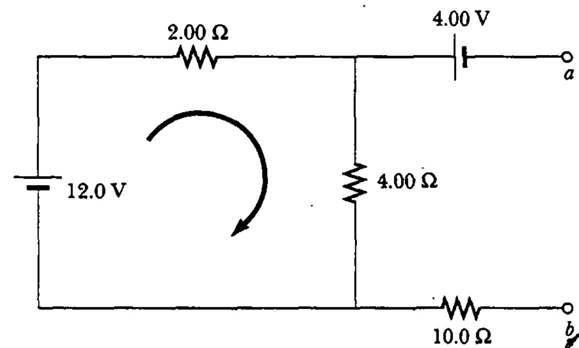


Figura P28.53

54. Un capacitor de 10.0 μF se carga con una batería de 10.0 V a través de una resistencia *R*. El capacitor alcanza una diferencia de potencial de 4.00 V en 3.00 s a partir del inicio de la carga. Encuentre *R*.

55. Cuando dos resistores desconocidos se conectan en serie con una batería se entregan 225 W a la combinación, con una corriente total de 5.00 A. Para la misma corriente total se entregan 50.0 W cuando los resistores se conectan en paralelo. Determine los valores de los dos resistores.

56. Cuando dos resistores desconocidos se conectan en serie con una batería, se entrega una potencia total $\mathcal{P}_s$ a la combinación con una corriente total de *I*. Para la misma corriente total se entrega una potencia total $\mathcal{P}_p$ cuando los resistores se conectan en paralelo. Determine los valores de los dos resistores.

57. Una batería tiene una fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna *r*. Un resistor variable *R* se conecta en las terminales de la batería. Encuentre el valor de *R* de modo que a) la diferencia de potencial en las terminales sea un máximo, b) la corriente en el circuito sea un máximo y c) la potencia entregada al resistor sea un máximo.

58. Una fuente de potencia que tiene un voltaje en circuito abierto de 40.0 V y una resistencia interna de 2.00 Ω se emplea para cargar dos baterías de almacenamiento conectadas en serie, cada una con una fem de 6.00 V y resistencia interna de 0.300 Ω. Si la corriente de carga será de 4.00 A, a) ¿qué resistencia adicional debe agregarse en serie? b) Determine la potencia entregada a la resistencia interna del suministro, la pérdida I^2R en las baterías y la potencia entregada a las resistencias sumadas en serie. c) ¿A qué rapidez aumenta la energía química en las baterías?

59. El valor de un resistor *R* se determinará utilizando el arreglo amperímetro-voltímetro mostrado en la figura P28.59. El amperímetro tiene una resistencia de 0.500 Ω, y la resistencia del voltímetro es de 20 000 Ω. ¿Dentro de qué intervalo de valores reales de *R* los valores medidos serán correctos, hasta dentro de 5.00%, si la medición se realiza utilizando a) el circuito mostrado en la figura P28.59a y b) la figura P.28.59b?

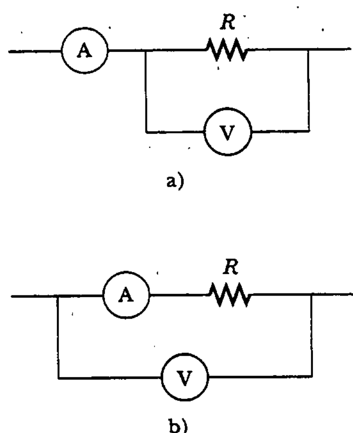


Figura P28.59

60. Con una batería se carga un capacitor mediante un resistor, como se ve en la figura 28.16. Muestre que la mitad de la energía suministrada por la batería aparece como energía interna en el resistor y la otra mitad se almacena en el capacitor.

61. Los valores de los componentes en un circuito *RC* en serie simple que contiene un interruptor (Fig. 28.16) son: $C = 1.00\ \mu F$, $R = 2.00 \times 10^6\ \Omega$, y $\mathcal{E} = 10.0$ V. En el instante 10.0 s después de que se cierra el interruptor, calcule a) la carga en el capacitor, b) la corriente en el resistor, c) la rapidez a la cual se almacena la energía en el capacitor, y d) la rapidez a la cual la batería entrega su energía.

62. El interruptor en la figura P28.62a se cierra cuando $V_c > 2V/3$ y se abre cuando $V_c < V/3$. El voltímetro registra un voltaje como el que se grafica en la figura P28.62b. ¿Cuál es el periodo T de la forma de onda en función de R_A, R_B y C?

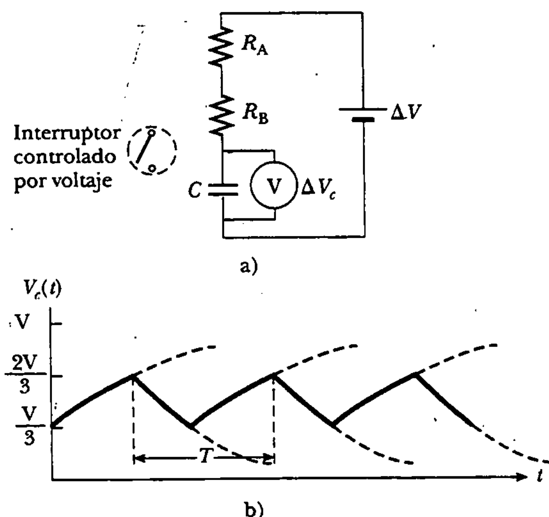


Figura P28.62

63. Tres focos de 60.0 W y 120 V se conectan a través de la misma fuente de potencia de 120 V, como se muestra en la figura P28.63. Encuentre a) la potencia total entregada en los tres focos, y b) el voltaje en cada uno. Suponga que la resistencia de cada foco concuerda con la ley de Ohm (aun cuando en realidad la resistencia aumenta de manera notable con la corriente).

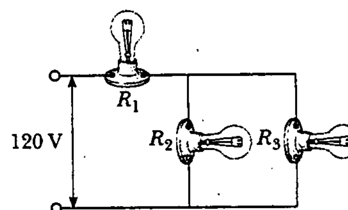


Figura P28.63

64. Diseñe un voltímetro de escala múltiple con capacidad de desviación de máxima escala para 20.0 V, 50.0 V y 100 V. Suponga que el medidor del movimiento es un galvanómetro que tiene una resistencia de 60.0 Ω y proporciona una desviación de máxima escala para una corriente de 1.00 mA.

65. Diseñe un amperímetro de escala múltiple con capacidad de desviación de máxima escala para 25.0 mA, 50.0 mA y 100 mA. Suponga que el medidor del movimiento es un galvanómetro que tiene una resistencia de 25.0 Ω y brinda una desviación de máxima escala para una corriente de 1.00 mA.

66. Un galvanómetro particular sirve como un voltímetro de máxima escala de 2.00 V cuando un resistor de 2 500 Ω se conecta en serie con él. Sirve como un amperímetro de máxima escala de 0.500 A cuando un resistor de 0.220 Ω se conecta en paralelo con él. Determine la resistencia interna del galvanómetro y la corriente requerida para producir una desviación de máxima escala.

67. En la figura P28.67 suponga que el interruptor se ha cerrado durante un tiempo tan largo como para que el capacitor quede completamente cargado. Determine a) la corriente en estado estable a través de cada resistor. b) La carga Q en el capacitor. c) El interruptor se abre en $t = 0$. Escriba una ecuación para la corriente I_{R2} a través de R_2 como una función del tiempo, y d) encuentre el tiempo que tarda la carga en el capacitor para disminuir a un quinto de su valor inicial.

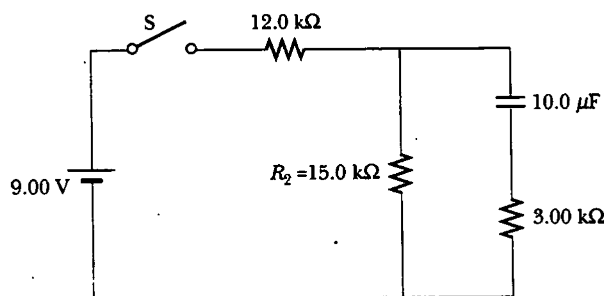


Figura P28.67

68. El circuito que se muestra en la figura P28.68 se colocó en el laboratorio para medir una capacitancia desconocida C empleando un voltímetro de resistencia $R = 10.0$ MΩ y una batería cuya fem es de 6.19 V. Los datos dados en la tabla siguiente son los voltajes medidos en el capacitor como una función del tiempo, donde $t = 0$ representa el momento en que se abre el interruptor. a) Construya una gráfica de $\ln(\mathcal{E}/\Delta V)$ *versus* t y haga un ajuste lineal de mínimos cuadrados sobre los datos. b) A partir de la pendiente de su gráfica obtenga un valor para la constante de tiempo del circuito y un valor para la capacitancia.

ΔV (V)	t (s)	$\ln(\mathcal{E}/\Delta V)$
6.19	0	
5.55	4.87	
4.93	11.1	
4.34	19.4	
3.72	30.8	
3.09	46.6	
2.47	67.3	
1.83	102.2	

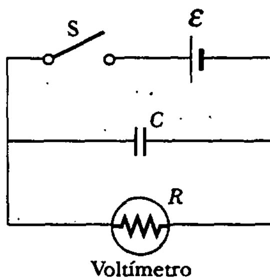


Figura P28.68

69. a) Con argumentos de simetría, muestre que la corriente que pasa por cualquier resistor en la configuración de la figura P28.69 es $I/3$ o $I/6$. Todos los resistores tienen la misma resistencia r. b) Muestre que la resistencia equivalente entre los puntos a y b es $(5/6)r$.

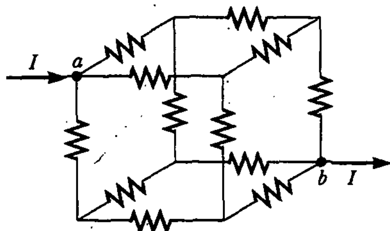


Figura P28.69

70. Un estudiante de ingeniería de la estación de radio de un campus universitario desea verificar la eficacia del pararrayos en el mástil de la antena (Fig. P28.70). La resistencia desconocida R_x está entre los puntos C y E. El punto E es una conexión a tierra verdadera, pero es inaccesible para una medición directa debido a que se encuentra a varios metros debajo de la superficie de la tierra. Dos barras idénticas se clavan dentro de la tierra en A y B, introduciendo una resistencia desconocida R_y. El procedimiento es como sigue. Se mide la resistencia R_1 entre los puntos A y B, luego se unen A y B con un alambre de conducción grueso y se mide la resistencia R_2 entre A y C. a) Obtenga una fórmula para R_x en función de las resistencias observables R_1 y R_2. b) Una resistencia de tierra satisfactoria sería $R_x < 2.00$ Ω. ¿La conexión a tierra de la estación resulta adecuada si las mediciones dan $R_1 = 13.0$ Ω y $R_2 = 6.00$ Ω?

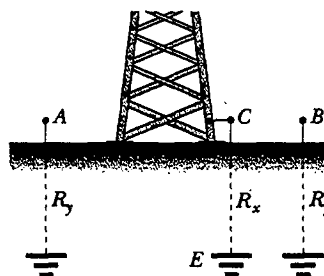


Figura P28.70

71. Tres resistores de 2.00 Ω se conectan como se muestra en la figura P28.71. Cada uno puede soportar una potencia máxima de 32.0 W sin calentarse excesivamente. Determine la máxima potencia que puede ser entregada a la combinación de resistores.

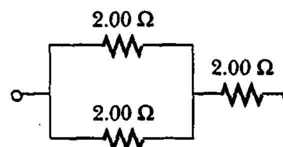


Figura P28.71

72. El circuito en la figura P28.72 contiene dos resistores, $R_1 = 2.00$ kΩ y $R_2 = 3.00$ kΩ, y dos capacitores, $C_1 = 2.00$ μF y $C_2 = 3.00$ μF, conectados a una batería con fem $\mathcal{E} = 120$ V. Si no hay cargas en los capacitores antes de que se cierre el interruptor S, determine las cargas q_1 y q_2 en los capacitores C_1 y C_2, respectivamente, después de que se cierra el interruptor. (*Sugerencia:* primero reconstruya el circuito de manera que se vuelva un circuito *RC* simple que contenga un solo resistor y un solo capacitor en serie, conectados con la batería, y determine después la carga total q almacenada en el circuito equivalente.)

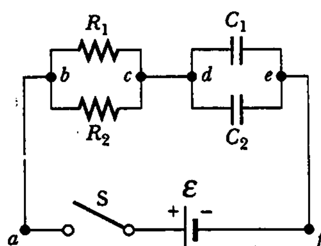


Figura P28.72

73. Suponga que usted tiene una batería con fem $\mathcal{E}$ y tres focos idénticos, cada uno con resistencia constante R. ¿Cuál es la potencia total de la batería si los focos están conectados a) en serie? b) en paralelo? c) ¿Para cuál conexión los focos brillan con mayor intensidad?

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

28.1 El foco R_1 se vuelve más brillante. Conectar *b* a *c* "corta" el foco R_2 y cambia la resistencia total del circuito de $R_1 + R_2$ a sólo R_1. Puesto que la resistencia ha disminuido (y la diferencia de potencial suministrada por la batería no cambia), la corriente a través de la batería aumenta. Esto significa que la corriente a través del foco R_1 aumenta, y éste resplandece con más brillo. El foco R_2 se apaga porque la nueva pieza de alambre proporciona una trayectoria casi libre de resistencia para la corriente; en consecuencia, existe una corriente esencialmente cero en el foco R_2.

28.2 Añadir otro resistor en serie incrementa la resistencia total del circuito y por ende reduce la corriente en la batería. La diferencia de potencial a través de las terminales de la batería se incrementaría porque la corriente se reduce y da como resultado una menor disminución del voltaje a través de la resistencia interna.

Si el segundo resistor estuviese conectado en paralelo, la resistencia total del circuito disminuiría, y resultaría un incremento en la corriente a través de la batería. La diferencia de potencial a través de las terminales disminuiría debido a que el incremento en la corriente da como resultado una mayor disminución del voltaje a través de la resistencia interna.

28.3 Deben estar en paralelo porque si uno se quema, el otro continúa funcionando. Si estuviesen en serie, una lámpara quemada interrumpiría la corriente a través del circuito completo, incluyendo la otra lámpara.

28.4 Puesto que el interruptor automático del circuito se activa y abre el circuito cuando la corriente en el mismo excede un cierto valor predefinido, el interruptor debe estar en serie para percibir la corriente apropiada (véase la Fig. 28.28).



ACERTIJO

Aurora boreal, las luces del norte, fotografiadas cerca de Fairbanks, Alaska. Estas hermosas manifestaciones aurorales son espectáculos comunes en las lejanas latitudes hacia el norte y el sur, pero son muy raras en las latitudes medias. ¿Qué provoca estas cortinas de reflejos trémulos de luz y por qué por lo común sólo se ven cerca de los polos norte y sur de la Tierra? *(George Lepp/Tony Stone Images)*

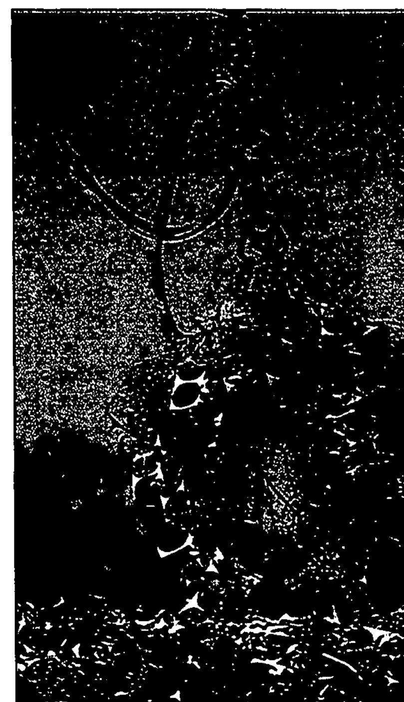
capítulo

29 Campos magnéticos

Líneas generales del capítulo

Muchos historiadores de la ciencia creen que la brújula, la cual usa una aguja magnética, se utilizó en China por primera vez en el siglo XIII a.C., y que su invención es de origen árabe o hindú. Los antiguos griegos tenían conocimiento del magnetismo desde el año 800 a.C. Descubrieron que la magnetita (Fe_3O_4) atrae pedazos de hierro. La leyenda atribuye el nombre de *magnetita* al pastor Magnes, quien atraía trozos de magnetita con los clavos de sus zapatos y la punta de su báculo mientras apacentaba su rebaño.

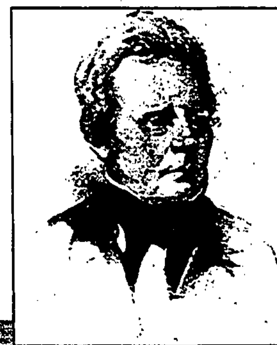
En 1269 un francés llamado Pierre de Maricourt trazó las direcciones que seguía una aguja colocada en diversos puntos sobre la superficie de un imán natural esférico. Encontró que las direcciones formaban líneas que encerraban en un círculo a la esfera y que pasaban por dos puntos diametralmente opuestos el uno del otro, a los cuales llamó *polos* del imán. Experimentos subsecuentes mostraron que todo imán, sin importar su forma, tiene dos polos, llamados polos *norte* y *sur*, los cuales ejercen fuerzas sobre otros polos magnéticos de manera análoga a las fuerzas que ejercen entre sí las cargas eléctricas. Es decir, polos iguales se repelen entre sí y polos diferentes se atraen uno al otro.



Un electroimán es usado para mover toneladas de chatarra metálica. *(Jeffrey Sylvester/FPG International)*

Los polos recibieron sus nombres debido al comportamiento de un imán en la presencia del campo magnético de la Tierra. Si un imán de barra se suspende de su punto medio y puede balancearse libremente en un plano horizontal, girará hasta que su polo norte apunte al Polo Norte geográfico de la Tierra y su polo sur apunte hacia el Polo Sur geográfico terrestre.[1] (La misma idea se utiliza para construir una brújula simple.)

En 1600 William Gilbert (1540-1603) amplió los experimentos de Maricourt a una diversidad de materiales. A partir de que la aguja de una brújula se orienta en direcciones preferidas, sugirió que la propia Tierra es un gran imán permanente. En 1750 los investigadores emplearon una balanza de torsión para demostrar que los polos magnéticos ejercen fuerzas atractivas o repulsivas entre sí y que estas fuerzas varían con el cuadrado inverso de la distancia entre los polos que interactúan. Aunque la fuerza entre dos polos magnéticos es similar a la fuerza entre dos cargas eléctricas, existe una importante diferencia. Las cargas eléctricas pueden aislarse (lo que corroboran el electrón y el protón), en tanto que **un polo magnético individual nunca se ha aislado.** Es decir, **los polos magnéticos siempre se encuentran en pares.** Todos los intentos realizados hasta ahora para detectar un polo magnético aislado han sido infructuosos. No importa cuántas veces se corte en dos un imán permanente, cada pedazo siempre tendrá un polo norte y uno sur. (Hay algunos fundamentos teóricos para especular que los *monopolos* magnéticos —polos norte o sur aislados— tal vez existan en la naturaleza, y los intentos para detectarlos en la actualidad conforman un activo campo de investigación experimental.)



Hans Christian Oersted
Físico danés (1777-1851)
(North Wind Picture Archives)

La relación entre magnetismo y electricidad fue descubierta en 1819 cuando, durante una conferencia demostrativa, el científico danés Hans Christian Oersted encontró que una corriente eléctrica en un alambre desviaba la aguja de una brújula cercana.[2] Poco tiempo después, André Ampère (1775-1836) formuló leyes cuantitativas para calcular la fuerza magnética ejercida sobre un conductor por otro conductor eléctrico que porta corriente. También sugirió que, a nivel atómico, las espiras de corriente eléctrica son responsables de *todos* los fenómenos magnéticos.

En la década de 1820 Faraday demostró conexiones adicionales entre la electricidad y el magnetismo, y lo mismo hizo Joseph Henry (1797-1878) por su lado. Los

[1] Advierta que el Polo Norte geográfico de la Tierra es un polo magnético sur, mientras que el Polo Sur geográfico es un polo norte magnético. Ya que los polos magnéticos *opuestos* se atraen entre sí, el polo en un imán que es atraído al Polo Norte geográfico de la Tierra es el polo *norte* del imán, y el polo atraído al Polo Sur geográfico de la Tierra es el polo *sur* del imán.

[2] El mismo descubrimiento fue anunciado en 1802 por un jurista italiano, Gian Dominico Romognosi, pero pasó inadvertido, quizá porque fue publicado en el periódico *Gazetta de Trentino* en lugar de en una revista científica.

dos demostraron que una corriente eléctrica puede producirse en un circuito, ya sea moviendo un imán cerca del circuito o cambiando la corriente en otro circuito cercano. Estas observaciones demostraron que un campo magnético que cambia produce un campo eléctrico. Años después un trabajo teórico de Maxwell mostró que lo inverso también es cierto: un campo eléctrico variable origina un campo magnético.

Una similitud entre los efectos eléctrico y magnético ha proporcionado métodos para elaborar imanes permanentes. En el capítulo 23 se aprendió que cuando caucho y lana se frotan entre sí, ambos quedan cargados —uno positiva y el otro negativamente—. De modo análogo, un pedazo de hierro desmagnetizado puede magnetizarse golpeándolo con un imán. El magnetismo también se puede inducir en el hierro (y otros materiales) por otros medios. Por ejemplo, si un pedazo de hierro desmagnetizado se coloca cerca de un imán intenso (sin tocarlo), conforme pase el tiempo el pedazo de hierro se magnetizará.

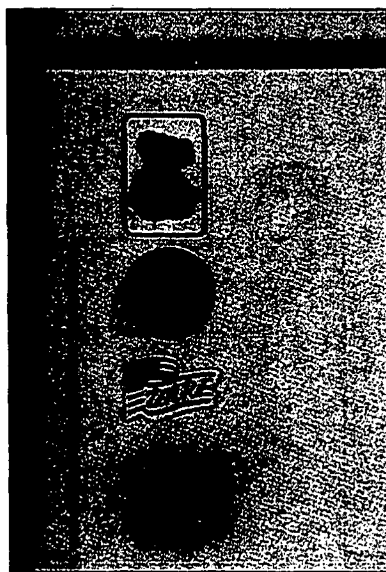
Este capítulo examina las fuerzas que actúan en cargas móviles y en alambres que conducen corriente en presencia de un campo magnético. La fuente del propio campo magnético se describe en el capítulo 30.

Experimento sorpresa

Si el hierro o el acero se dejan el tiempo suficiente en un campo magnético débil (como el producido por la Tierra), se magnetizan. Use una brújula para ver si usted puede detectar un campo magnético cerca de un archivero de acero, un radiador de hierro fundido o alguna otra pieza de metal férrico que haya estado en una posición durante varios años.

EL CAMPO MAGNÉTICO

12.2 En el estudio de la electricidad la interacción entre objetos cargados se ha descrito en términos de campos eléctricos. Recuerde que un campo eléctrico rodea a cualquier carga eléctrica, estacionaria o en movimiento. Además de un campo eléctrico, la región del espacio que rodea a una carga eléctrica *móvil* también contiene un campo magnético, como se verá en el capítulo 30. Un campo magnético también rodea a cualquier sustancia magnética.



Estos imanes de refrigerador son similares a una serie de imanes de barra muy cortos colocados extremo con extremo. Si usted desliza la parte trasera de un imán de refrigerador en una trayectoria circular a través de la parte trasera de otro, usted puede sentir una vibración conforme las dos series de polos norte y sur se mueven la una sobre la otra. *(George Semple)*

Históricamente, el símbolo **B** se ha usado para representar un campo magnético, y ésta es la notación que se usa en este texto. La dirección del campo magnético **B** en cualquier ubicación está en la dirección hacia la cual apunta la aguja de una brújula en dicha ubicación. La figura 29.1 muestra cómo trazar el campo magnético de un imán de barra con ayuda de una brújula. Advierta que las líneas de campo magnético afuera del imán apuntan alejándose de los polos norte y acercándose a los polos sur. Los patrones de campo magnético pueden visualizarse mediante pequeñas limaduras de hierro, como se muestra en la figura 29.2.

Se puede definir un campo magnético **B** en algún punto en el espacio en términos de la fuerza magnética $\mathbf{F}_B$ que el campo ejerce sobre un objeto de prueba, que en este caso es una partícula cargada que se mueve a una velocidad **v**. Por ahora, suponga que no hay campos eléctrico o gravitacional en la región del objeto de prueba. Los experimentos acerca del movimiento de diversas partículas cargadas en un campo magnético dan los siguientes resultados:

- La magnitud F_B de la fuerza magnética ejercida sobre la partícula es proporcional a la carga q y a la rapidez v de la partícula.

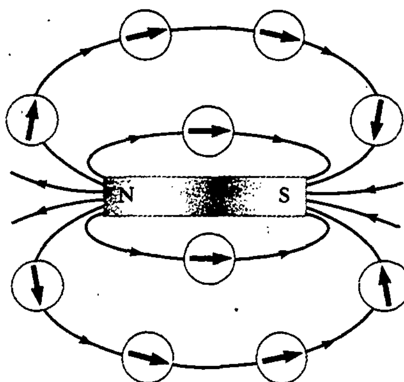


Figura 29.1 Las agujas de brújula se pueden usar para trazar las líneas de campo magnético de un imán de barra.

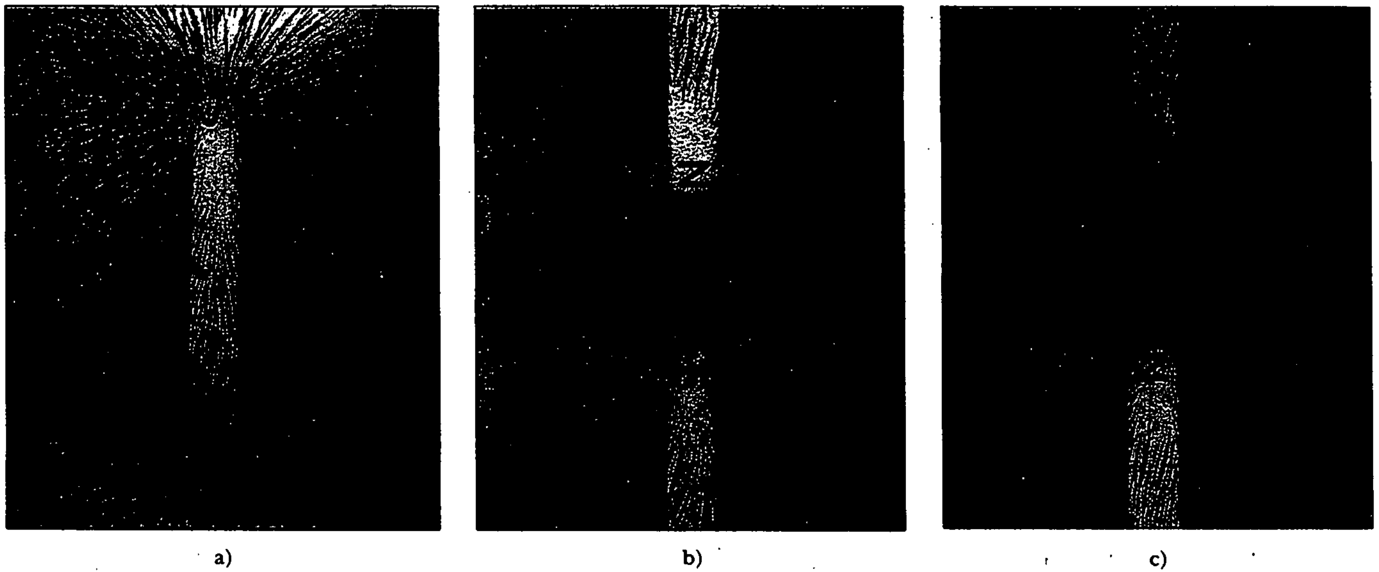


Figura 29.2 a) Patrón de campo magnético que rodea a un imán de barra como se ve con limaduras de hierro. b) Patrón de campo magnético entre polos *distintos* de dos imanes de barra. c) Patrón de campo magnético entre polos *iguales* de dos imanes de barra. *(Henry Leap y Jim Lehman)*

- La magnitud y dirección de $\mathbf{F}_B$ depende de la velocidad de la partícula y de la magnitud y dirección del campo magnético **B**.
- Cuando una partícula cargada se mueve paralela al vector de campo magnético, la fuerza magnética que actúa sobre la partícula es cero.
- Cuando el vector velocidad de la partícula forma un ángulo $\theta \neq 0$ con el campo magnético, la fuerza magnética actúa en una dirección perpendicular tanto a **v** como a **B**; es decir, $\mathbf{F}_B$ es perpendicular al plano formado por **v** y **B** (Figura 29.3a).

Propiedades de la fuerza magnética sobre una carga que se mueve en un campo magnético B.

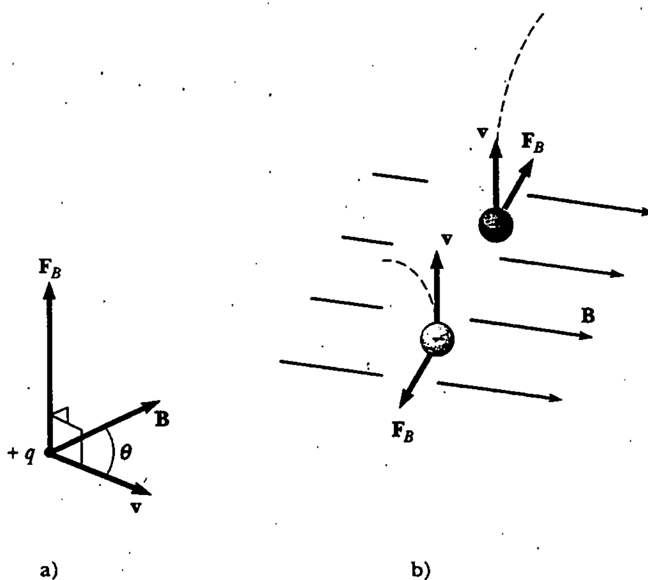


Figura 29.3 La dirección de la fuerza magnética $\mathbf{F}_B$ que actúa sobre una partícula cargada que se mueve a velocidad **v** ante la presencia de un campo magnético **B**. a) La fuerza magnética es perpendicular tanto a **v** como a **B**. b) Las fuerzas magnéticas $\mathbf{F}_B$ ejercidas sobre dos partículas cargadas opuestamente y que se mueven a la misma velocidad en un campo magnético están dirigidas de manera opuesta.



El arco blanquiazul en esta fotografía indica la trayectoria circular seguida por un haz de electrones que se mueve en un campo magnético. El matraz contiene gas a muy baja presión, y el haz se hace visible conforme los electrones chocan con los átomos del gas, el cual emite entonces luz visible. El campo magnético es producido por dos bobinas (no mostradas). El aparato se puede usar para medir la relación e/m_e para el electrón. *(Cortesía de Central Scientific Company)*

- La fuerza magnética ejercida sobre una carga positiva está en la dirección opuesta a la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre una carga negativa que se mueve en la misma dirección (figura 29.3b).
- La magnitud de la fuerza magnética ejercida sobre la partícula en movimiento es proporcional a sen θ, donde θ es el ángulo que el vector velocidad de la partícula forma con la dirección de **B**.

Estas observaciones pueden resumirse escribiendo la fuerza magnética en la forma

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{29.1}$$

donde la dirección de $\mathbf{F}_B$ está en la dirección de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ si q es positiva, la cual, por definición del producto cruz (véase la sección 11.2), es perpendicular tanto a **v** como a **B**. Se puede considerar esta ecuación como una definición operacional del campo magnético en algún punto en el espacio. Esto es, el campo magnético se define en términos de la fuerza que actúa sobre una partícula cargada móvil.

La figura 29.4 repasa la regla de la mano derecha para determinar la dirección del producto cruz $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Usted dirige los cuatro dedos de su mano derecha a lo largo de la dirección de **v** con la palma vuelta hacia **B** y luego los gira hacia **B**. El pulgar extendido, que está en ángulo recto con los dedos, apunta entonces en la dirección de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Puesto que $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, $\mathbf{F}_B$ está en la dirección de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ si q es positiva

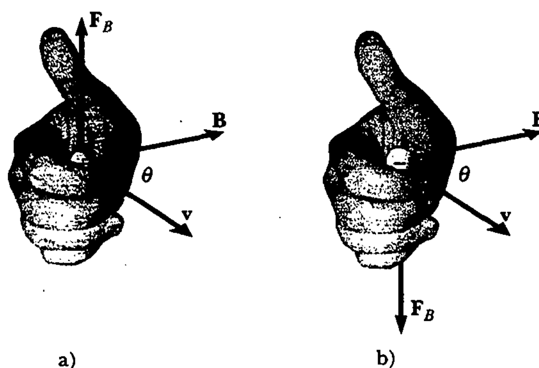


Figura 29.4 La regla de la mano derecha para determinar la dirección de la fuerza magnética $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que actúa sobre una partícula con carga q moviéndose a velocidad **v** en un campo magnético **B**. La dirección de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es la dirección en la cual apunta el pulgar. a) Si q es positiva, $\mathbf{F}_B$ está hacia arriba. b) Si q es negativa, $\mathbf{F}_B$ está hacia abajo, antiparalela a la dirección en la cual apunta el pulgar.

(figura 29.4a), y opuesta a la dirección de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ si q es negativa (figura 29.4b). (Si necesita más ayuda para entender el producto cruz, debería revisar las páginas 333 a 334, incluyendo la figura 11.8.)

La magnitud de la fuerza magnética es

Magnitud de la fuerza magnética sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético

$$F_B = |q|vB \operatorname{sen} \theta \tag{29.2}$$

donde θ es el ángulo más pequeño entre **v** y **B**. A partir de esta expresión se ve que F es cero cuando **v** es paralela o antiparalela a **B** ($\theta = 0$ o $180°$) y máxima ($F_{B,\text{máx}} = |q|vB$) cuando **v** es perpendicular a **B** ($\theta = 90°$).

Pregunta sorpresa 29.1

¿Cuál es el máximo trabajo que puede realizar un campo magnético constante **B** sobre una carga q que se mueve a través del campo a velocidad **v**?

Hay varias diferencias importantes entre las fuerzas eléctrica y magnética:

Diferencias entre fuerzas eléctrica y magnética

- La fuerza eléctrica actúa en la dirección del campo eléctrico, en tanto que la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético.
- La fuerza eléctrica actúa sobre una partícula cargada independientemente de si la partícula está en movimiento, mientras que la fuerza magnética actúa sobre una partícula cargada sólo cuando la partícula está en movimiento.
- La fuerza eléctrica efectúa trabajo al desplazar una partícula cargada, en tanto que la fuerza magnética asociada con un campo magnético estable no trabaja cuando se desplaza una partícula.

A partir de esta última propiedad, y sobre la base del teorema del trabajo y la energía cinética, se concluye que la energía cinética de una partícula cargada que se mueve a través de un campo magnético no puede ser alterada por un campo magnético aislado. En otras palabras,

> cuando una partícula cargada se mueve a una velocidad **v** a través de un campo magnético, el campo puede alterar la dirección del vector velocidad pero no puede cambiar la rapidez o la energía cinética de la partícula.

Un campo magnético no puede cambiar la rapidez de una partícula

A partir de la ecuación 29.2 se ve que la unidad del SI del campo magnético es el newton por coulomb-metro por segundo, el cual se llama **tesla** (T):

$$1\,\text{T} = \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m/s}}$$

Puesto que un coulomb por segundo se define como un ampere, se ve que

$$1\,\text{T} = 1\,\frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

Una unidad del campo magnético que no es del SI pero se usa con frecuencia es el *gauss* (G), el cual se relaciona con el tesla por medio de la conversión $1\,\text{T} = 10^4\,\text{G}$. La tabla 29.1 muestra algunos valores típicos de campos magnéticos.

Pregunta sorpresa 29.2

El extremo polo norte de un imán de barra se sostiene cerca de una pieza de plástico cargada positivamente. ¿El plástico es atraído, repelido o no es afectado por el imán?

TABLA 29.1 Algunas magnitudes aproximadas de campo magnético

Fuente del campo	Magnitud del campo (T)
Imán de laboratorio de superconducción intensa	30
Imán de laboratorio convencional intenso	2
Unidad médica de IRM	1.5
Imán de barra	10^{-2}
Superficie del Sol	10^{-2}
Superficie de la Tierra	0.5×10^{-4}
Interior del cerebro humano (debido a impulsos nerviosos)	10^{-13}

EJEMPLO 29.1 Un electrón que se mueve en un campo magnético

Un electrón en un cinescopio de televisión se mueve hacia el frente del tubo con una rapidez de 8.0×10^6 m/s a lo largo del eje x (Fig. 29.5). Rodeando el cuello del tubo existen bobinas de alambre que crean un campo magnético de 0.025 T de magnitud, dirigido a un ángulo de 60° con el eje x y que se encuentra en el plano xy. Calcule la fuerza magnética sobre el electrón y la aceleración del mismo.

Solución Usando la ecuación 29.2 se puede encontrar la magnitud de la fuerza magnética:

$$F_B = |q| vB \operatorname{sen} \theta$$
$$= (1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})(8.0 \times 10^6\,\mathrm{m/s})(0.025\,\mathrm{T})(\operatorname{sen} 60°)$$
$$= 2.8 \times 10^{-14}\,\mathrm{N}$$

Ya que $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ está en la dirección z positiva (regla de la mano derecha) y la carga es negativa, $\mathbf{F}_B$ está en la dirección z negativa.

La masa del electrón es 9.11×10^{-31} kg, por lo que su aceleración es

$$a = \frac{F_B}{m_e} = \frac{2.8 \times 10^{-14}\,\mathrm{N}}{9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 3.1 \times 10^{16}\,\mathrm{m/s^2}$$

en la dirección z negativa.

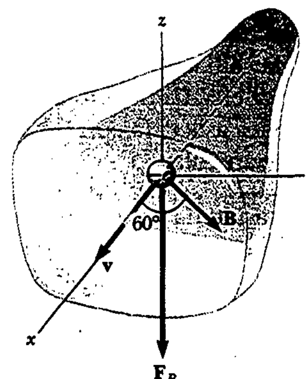


Figura 29.5 La fuerza magnética $\mathbf{F}_B$ que actúa sobre el electrón está en la dirección z negativa cuando $\mathbf{v}$ y $\mathbf{B}$ están en el plano xy.

29.2 FUERZA MAGNÉTICA SOBRE UN CONDUCTOR QUE LLEVA CORRIENTE

12.3 Si se ejerce una fuerza magnética sobre una partícula cargada aislada cuando ésta se mueve a través de un campo magnético, no debería sorprenderle que un alambre que conduce una corriente experimente también una fuerza cuando se pone en un campo magnético. Esto es resultado de que la corriente representa una colección de muchas partículas cargadas en movimiento; por tanto, la fuerza resultante ejercida por el campo sobre el alambre es el vector suma de las fuerzas individuales ejercidas sobre todas las partículas cargadas que forman la corriente. La fuerza ejercida sobre las partículas se transmite al alambre cuando las partículas chocan con los átomos que forman el alambre.

Antes de continuar con el análisis vale la pena explicar la notación empleada en este texto. Para indicar la dirección de **B** en las ilustraciones, en ocasiones se presentarán vistas en perspectiva, como las que se muestran en las figuras 29.5, 29.6a y 29.7. En las ilustraciones planas, como las mostradas en la figura 29.6b a d, se describe un

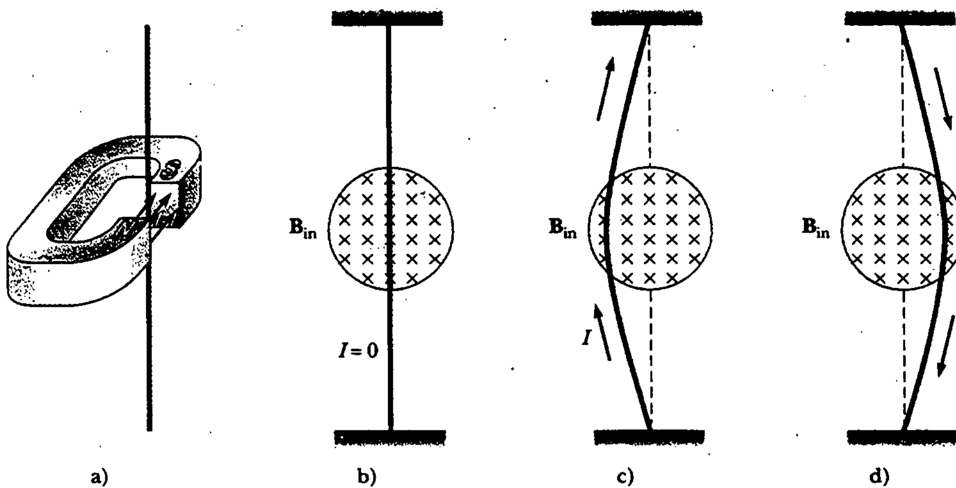


Figura 29.6 a) Un alambre suspendido verticalmente entre los polos de un imán. b) La configuración mostrada en la parte a) como se ve mirando hacia el polo sur del imán, de modo que el campo magnético (cruces azules) está dirigido hacia la página. Cuando no hay corriente en el alambre, permanece vertical. c) Cuando la corriente es hacia arriba, el alambre se desvía hacia la izquierda. d) Cuando la corriente es hacia abajo, el alambre se desvía hacia la derecha.

campo magnético dirigido hacia la página con cruces azules, las cuales representan las colas de las flechas disparadas perpendicularmente y alejándose de usted. En este caso el campo se llama $\mathbf{B}_{\text{in}}$, donde el subíndice "in" indica "interior de la página". Si **B** es perpendicular y dirigido hacia afuera de la página, se usa una serie de puntos azules, los cuales representan las puntas de las flechas que vienen hacia usted (véase la Fig. P29.56). En este caso al campo se le llama $\mathbf{B}_{\text{out}}$. Si **B** está en el plano de la página, se usa una serie de líneas de campo azules con puntas de flecha, como se muestra en la figura 29.7.

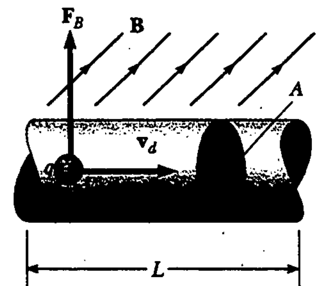


Figura 29.7 Segmento de un alambre que conduce corriente, ubicado en un campo magnético **B**. La fuerza magnética ejercida sobre cada carga que conforma la corriente es $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$, y la fuerza neta sobre el segmento de longitud L es $I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$.

La fuerza sobre un conductor que lleva corriente puede demostrarse sosteniendo un alambre entre los polos de un imán, como se muestra en la figura 29.6a. Para facilitar la visualización se ha removido parte del imán de herradura en la parte a) de modo que se vea la cara extrema del polo sur en las partes b), c) y d) de la figura 29.6. El campo magnético está dirigido hacia adentro de la página y cubre la región interna de los círculos sombreados. Cuando la corriente en el alambre es cero, el alambre permanece vertical, como se ve en la figura 29.6b. Sin embargo, cuando una corriente dirigida hacia arriba fluye en el alambre, como se muestra en la figura 29.6c, el alambre se desvía hacia la izquierda. Si se invierte la corriente, como se ve en la figura 29.6d, el alambre se desvía hacia la derecha.

Cuantifique este análisis considerando un segmento de alambre recto de longitud L y área de sección transversal A, que conduce una corriente I en un campo magnético uniforme **B**, como se muestra en la figura 29.7. La fuerza magnética ejercida sobre una carga q que se mueve a una velocidad de arrastre $\mathbf{v}_d$ es $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$. Para determinar la fuerza total que actúa sobre el alambre multiplique la fuerza que se ejerce sobre una carga $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ por el número de cargas en el segmento. Puesto que el volumen del segmento es AL, el número de cargas en el segmento es nAL, donde n es el número de cargas por unidad de volumen. Por tanto, la fuerza magnética total sobre el alambre de longitud L es

$$\mathbf{F}_B = (q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B})nAL$$

Esta expresión puede escribirse en una forma más conveniente observando que, de acuerdo con la ecuación 27.4, la corriente en el alambre es $I = nqv_dA$. Por tanto,

Fuerza sobre un segmento de alambre en un campo magnético uniforme

$$\mathbf{F}_B = I\mathbf{L} \times \mathbf{B} \qquad \textbf{(29.3)}$$

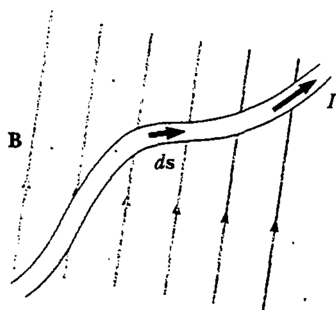


Figura 29.8 Un segmento de alambre de forma arbitraria que conduce una corriente I en un campo magnético $\mathbf{B}$ experimenta una fuerza magnética. La fuerza sobre cualquier segmento $d\mathbf{s}$ es $I\, d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$ y está dirigida hacia afuera de la página. Usted debe emplear la regla de la mano derecha para confirmar la dirección de esta fuerza.

donde $\mathbf{L}$ es un vector que apunta en la dirección de la corriente I y tiene una magnitud igual a la longitud L del segmento. Observe que esta expresión se aplica sólo a un segmento de alambre recto en un campo magnético uniforme.

Considere ahora un segmento de alambre de forma arbitraria y de sección transversal uniforme en un campo magnético, como el que se muestra en la figura 29.8. De la ecuación 29.3 se deduce que la fuerza magnética sobre un pequeño segmento de vector de longitud $d\mathbf{s}$ en presencia de un campo $\mathbf{B}$ es

$$d\mathbf{F}_B = I\, d\mathbf{s} \times \mathbf{B} \tag{29.4}$$

donde $d\mathbf{F}_B$ está dirigida hacia afuera de la página para las direcciones supuestas en la figura 29.8. Se puede considerar la ecuación 29.4 como una definición alternativa de $\mathbf{B}$. Esto es, el campo magnético $\mathbf{B}$ puede definirse en términos de una fuerza mensurable ejercida sobre un elemento de corriente, donde la fuerza es un máximo cuando $\mathbf{B}$ es perpendicular al elemento y cero cuando $\mathbf{B}$ es paralela al elemento.

Para calcular la fuerza total $\mathbf{F}_B$ que actúa sobre el alambre mostrado en la figura 29.8 integre la ecuación 29.4 sobre la longitud del alambre:

$$\mathbf{F}_B = I\int_a^b d\mathbf{s} \times \mathbf{B} \tag{29.5}$$

donde a y b representan los puntos extremos del alambre. Cuando se realiza esta integración, la magnitud del campo magnético y la dirección que el campo forma con el vector $d\mathbf{s}$ (en otras palabras, con la orientación del elemento) puede diferir en diferentes puntos.

Considere a continuación dos casos que involucran la ecuación 29.5. En ambos casos el campo magnético se considera constante en magnitud y dirección.

Caso 1 Un alambre curvo conduce una corriente I y está ubicado en un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$, como se muestra en la figura 29.9a. Puesto que el campo es uniforme, $\mathbf{B}$ puede sacarse de la integral en la ecuación 29.5, y obtenerse

$$\mathbf{F}_B = I\left(\int_a^b d\mathbf{s}\right) \times \mathbf{B} \tag{29.6}$$

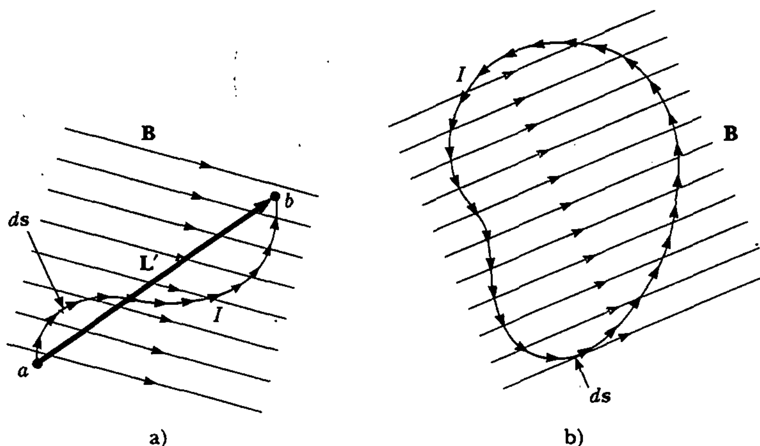


Figura 29.9 a) Un alambre curvo que conduce una corriente I en un campo magnético uniforme. La fuerza magnética total que actúa sobre el alambre es equivalente a la fuerza sobre un alambre recto de longitud L' tendido entre los extremos del alambre curvo. b) Una espira de forma arbitraria que conduce corriente en un campo magnético uniforme. La fuerza magnética neta sobre la espira es cero.

Pero la cantidad $\int_a^b d\mathbf{s}$ representa el *vector suma* de todos los elementos de longitud de *a* a *b*. A partir de la ley de la suma de vectores la suma es igual al vector $\mathbf{L}'$, dirigido de *a* a *b*. Por tanto, la ecuación 29.6 se reduce a

$$\mathbf{F}_B = I\mathbf{L}' \times \mathbf{B} \tag{29.7}$$

Caso 2 Una espira cerrada de forma arbitraria que conduce una corriente I se coloca en un campo magnético uniforme, como se ve en la figura 29.9b. También en este caso se puede expresar la fuerza que actúa sobre la espira en la forma de la ecuación 29.6, pero en esta ocasión se debe tomar la suma vectorial de los elementos de longitud $d\mathbf{s}$ sobre toda la espira:

$$\mathbf{F}_B = I\left(\oint d\mathbf{s}\right) \times \mathbf{B}$$

Puesto que el conjunto de elementos de longitud forma un polígono cerrado, la suma vectorial debe ser cero. Esto se desprende del procedimiento gráfico de suma de vectores por medio del método del polígono. Puesto que $\oint d\mathbf{s} = 0$, se concluye que $\mathbf{F}_B = 0$:

La fuerza magnética neta que actúa sobre cualquier espira de corriente cerrada en un campo magnético uniforme es cero.

EJEMPLO 29 Fuerza sobre un conductor semicircular

Un alambre doblado en forma de un semicírculo de radio R forma un circuito cerrado y conduce una corriente I. El alambre se encuentra en el plano *xy*, y un campo magnético uniforme está presente a lo largo del eje *y* positivo, como se muestra en la figura 29.10. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza magnética que actúa sobre la porción recta del alambre y sobre la porción curva.

Solución La fuerza $\mathbf{F}_1$ que actúa sobre la porción recta del alambre tiene una magnitud $F_1 = ILB = 2IRB$, puesto que $L = 2R$, y el alambre es perpendicular a $\mathbf{B}$. La dirección de $\mathbf{F}_1$ es hacia afuera de la página, pues $\mathbf{L} \times \mathbf{B}$ está a lo largo del eje *z* positivo. (Esto es, $\mathbf{L}$ está hacia la derecha, en la dirección de la corriente; por lo que, de acuerdo con la regla de los productos cruz, $\mathbf{L} \times \mathbf{B}$ es hacia afuera de la página en la figura 29.10.)

Para encontrar la fuerza $\mathbf{F}_2$ que actúa sobre la parte curva debe escribir primero una expresión para la fuerza $d\mathbf{F}_2$ sobre el elemento de longitud $d\mathbf{s}$ mostrado en la figura 29.10. Si θ es el ángulo entre $\mathbf{B}$ y $d\mathbf{s}$, entonces la magnitud de $d\mathbf{F}_2$ es

$$dF_2 = I|d\mathbf{s} \times \mathbf{B}| = IB \operatorname{sen} \theta \, ds$$

Con el fin de integrar esta expresión debe expresar ds en términos de θ. Puesto que $s = R\theta$, se tiene $ds = R\,d\theta$, y se puede realizar esta sustitución para dF_2:

$$dF_2 = IRB \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

Para obtener la fuerza total F_2 que actúa sobre la porción curva, se puede integrar esta expresión para tomar en cuenta las contribuciones de todos los elementos $d\mathbf{s}$. Advierta que la dirección de la fuerza sobre todo elemento es la misma: hacia el interior de la página (puesto que $d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$ es hacia adentro). Por tanto, la fuerza resultante $\mathbf{F}_2$ sobre el alambre curvo debe apuntar también hacia la página. La integración de la expresión para dF_2 sobre los límites $\theta = 0$ a $\theta = \pi$ (esto es, el semicírculo completo) produce

$$F_2 = IRB\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = IRB\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}$$

$$= -IRB(\cos\pi - \cos 0) = -IRB(-1-1) = 2IRB$$

En vista de que $\mathbf{F}_2$, con una magnitud de $2IRB$, está dirigida hacia la página, y puesto que $\mathbf{F}_1$, con una magnitud de $2IRB$, es hacia afuera del papel, la fuerza neta sobre la espira cerrada es cero. Este resultado es consistente con el caso 2 recién descrito.

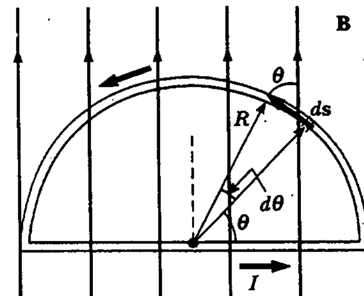


Figura 29.10 La fuerza neta que actúa sobre una espira de corriente cerrada en un campo magnético uniforme es cero. En la configuración mostrada aquí, la fuerza sobre la porción recta de la espira es $2IRB$ y está dirigida hacia afuera de la página, y la fuerza sobre la porción curva es $2IRB$ dirigida al interior de la página.

Pregunta sorpresa 29.3

Los cuatro alambres mostrados en la figura 29.11 conducen la misma corriente del punto A al punto B a través del mismo campo magnético. Clasifique los alambres de acuerdo con la magnitud de la fuerza magnética que se ejerce sobre ellos, del mayor al menor.

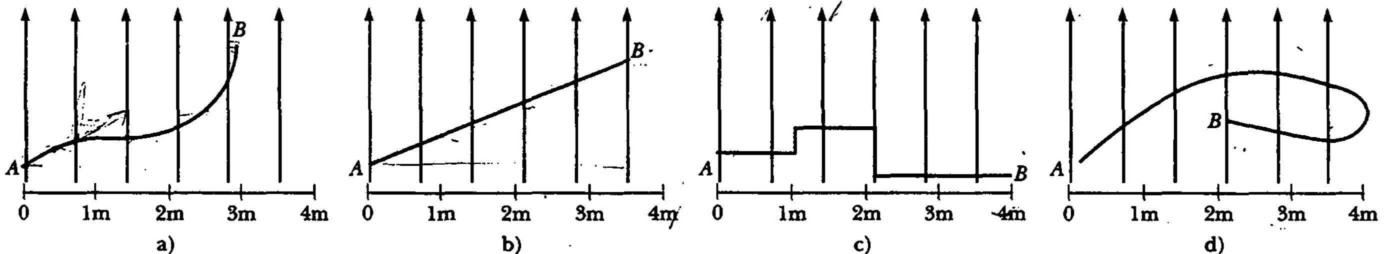


Figura 29.11 ¿Cuál alambre experimenta la fuerza magnética más grande?

MOMENTO DE TORSIÓN SOBRE UNA ESPIRA DE CORRIENTE EN UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

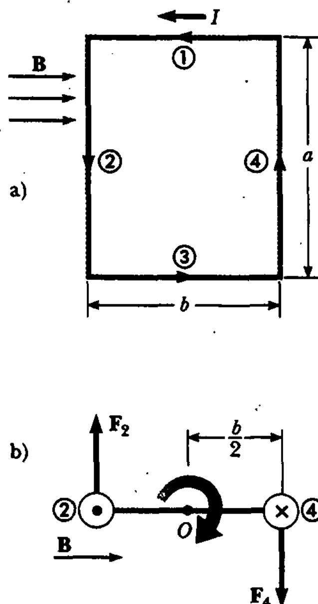


Figura 29.12 a) Vista superior de una espira de corriente rectangular en un campo magnético uniforme. Ninguna fuerza está actuando sobre los lados ① y ③ porque estos lados son paralelos a **B**. Sin embargo, existen fuerzas que actúan en los lados ② y ④. b) La vista lateral de la espira apuntando hacia abajo los lados ② y ④ muestra que las fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_4$ ejercidas sobre estos lados crean un momento de torsión que tiende a girar a la espira en el sentido de las manecillas del reloj. El punto púrpura en el círculo izquierdo representa corriente que viene hacia usted en el alambre ②; la cruz púrpura en el círculo a la derecha representa corriente que se aleja de usted en el alambre ④.

En la sección anterior se mostró cómo se ejerce una fuerza sobre un conductor que lleva corriente cuando éste se coloca en un campo magnético. Con esto como punto de partida, a continuación se mostrará que se ejerce un momento de torsión sobre cualquier espira de corriente ubicada en un campo magnético. El resultado de este análisis tendrá un gran valor cuando se estudien los motores en el capítulo 31.

Considere una espira rectangular que conduce una corriente I en presencia de un campo magnético uniforme en dirección paralela al plano de la espira, como se ve en la figura 29.12a. Ninguna fuerza magnética actúa en los lados ① y ③, pues dichos alambres son paralelos al campo; en consecuencia, $\mathbf{L} \times \mathbf{B} = 0$ para estos lados. Sin embargo, sí hay fuerzas magnéticas actuando sobre los lados ② y ④, pues dichos lados están orientados de forma perpendicular al campo. La magnitud de estas fuerzas es, a partir de la ecuación 29.3,

$$F_2 = F_4 = IaB$$

La dirección de $\mathbf{F}_2$, la fuerza ejercida sobre el alambre ② apunta hacia afuera del papel en la perspectiva mostrada en la figura 29.12a, y la de $\mathbf{F}_4$, la fuerza ejercida sobre el alambre ④ está dirigida hacia el papel en la misma perspectiva. Si se ve la espira desde el lado ③ y se observa a lo largo de los lados ② y ④, se ve la perspectiva que se presenta en la figura 29.12b, y las dos fuerzas $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_4$ están dirigidas como se muestra. Advierta que las dos fuerzas apuntan en direcciones opuestas pero *no* están dirigidas a lo largo de la misma línea de acción. Si la espira tiene un pivote que le permite girar en torno del punto O, estas dos fuerzas producen un momento de torsión respecto de O que hace girar a la espira en el sentido de las manecillas del reloj. La magnitud de este momento de torsión $\tau_{\text{máx}}$, es

$$\tau_{\text{máx}} = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \frac{b}{2} = (IaB)\frac{b}{2} + (IaB)\frac{b}{2} = IabB$$

donde el brazo de momento alrededor de O es $b/2$ para cada fuerza. Puesto que el área encerrada por la espira es $A = ab$, el momento de torsión máxima puede expresarse como

$$\tau_{\text{máx}} = IAB \qquad \textbf{(29.8)}$$

Recuerde que este momento de torsión máxima resultante sólo es válido cuando el campo magnético esté paralelo al plano de la espira. El sentido de rotación es el de

las manecillas del reloj cuando se ve desde el lado ③, como se indica en la figura 29.12b. Si la dirección de la corriente se invirtiera, las fuerzas se invertirían y la tendencia rotacional sería en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Suponga ahora que el campo magnético uniforme forma un ángulo $\theta < 90°$ con una línea perpendicular al plano de la espira, como se muestra en la figura 29.13a. Por conveniencia, suponga que **B** es perpendicular a los lados ① y ③. En este caso las fuerzas magnéticas $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_4$ ejercidas sobre los lados ② y ④ se cancelan entre sí y no producen momento de torsión debido a que pasan por un origen común. Sin embargo, las fuerzas que actúan sobre los lados ① y ③, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_3$, forman un par y, en consecuencia, producen un momento de torsión en torno de *cualquier punto.* Con referencia a la vista extrema mostrada en la figura 29.13b, note que el brazo de momento de $\mathbf{F}_1$ en torno al punto O es igual a $(a/2)$ sen θ. De igual modo, el brazo de momento de $\mathbf{F}_3$ alrededor de O es también $(a/2)$ sen θ. Puesto que $F_1 = F_3 = IbB$, el momento de torsión neto alrededor de O tiene la magnitud

$$\begin{aligned}\tau &= F_1 \frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta + F_3 \frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta \\ &= IbB\left(\frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta\right) + IbB\left(\frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta\right) = IabB \operatorname{sen} \theta \\ &= IAB \operatorname{sen} \theta\end{aligned}$$

donde $A = ab$ es el área de la espira. Este resultado muestra que el momento de torsión tiene su valor máximo IAB cuando el campo es perpendicular a la normal al plano de la espira ($\theta = 90°$), como se vio cuando se analizó la figura 29.12, y es cero cuando el campo es paralelo a la normal al plano de la espira ($\theta = 0$). Como se ve en la figura 29.13, la espira tiende a rotar en la dirección de los valores decrecientes de θ (es decir, de modo que el vector de área **A** gira hacia la dirección del campo magnético).

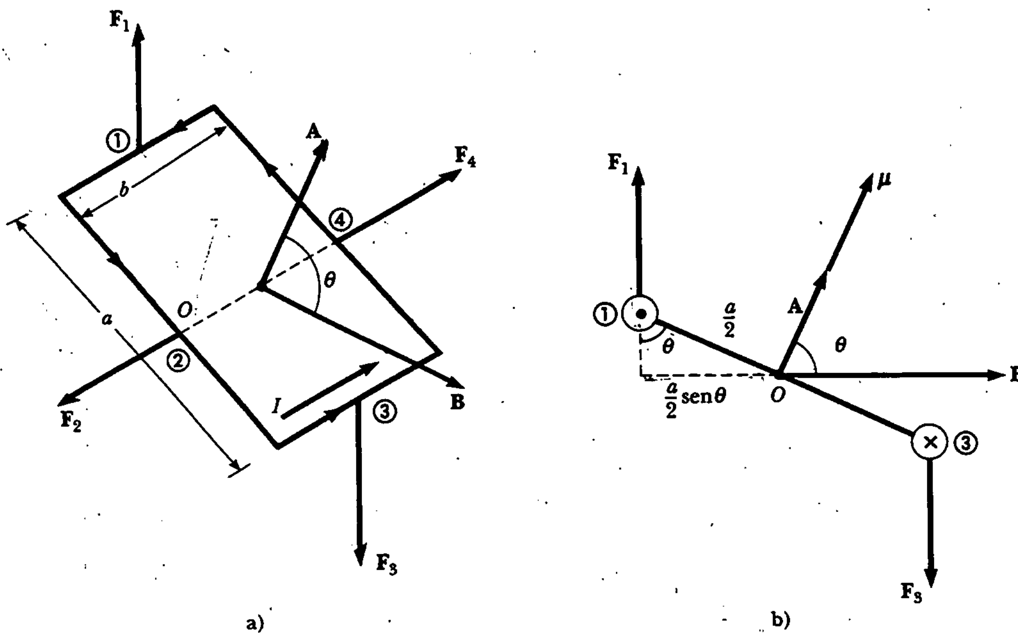


Figura 29.13 a) Una espira de corriente rectangular en un campo magnético uniforme. El vector de área **A** perpendicular al plano de la espira que forma un ángulo θ con el campo. Las fuerzas magnéticas ejercidas en los lados ② y ④ se cancelan, pero las fuerzas ejercidas en los lados ① y ③ crean un momento de torsión sobre la espira. b) Vista lateral de la espira mirando hacia abajo los lados ① y ③.

Pregunta sorpresa 29.4

Describa las fuerzas sobre la espira de corriente rectangular mostrada en la figura 29.13 si el campo magnético está dirigido como se muestra pero se incrementa en magnitud yendo de izquierda a derecha.

Momento de torsión sobre una espira de corriente

Una expresión adecuada para el momento de torsión ejercido sobre una espira colocada en un campo magnético uniforme **B** es

$$\boldsymbol{\tau} = I\mathbf{A} \times \mathbf{B} \tag{29.9}$$

donde **A**, el vector mostrado en la figura 29.13, es perpendicular al plano de la espira y tiene una magnitud igual al área de la espira. La dirección de **A** se determina usando la regla de la mano derecha descrita en la figura 29.14. Cuando usted enrosca los dedos de su mano derecha en la dirección de la corriente en la espira, el pulgar apunta en la dirección de **A**. El producto $I\mathbf{A}$ se define como el **momento de dipolo magnético** $\boldsymbol{\mu}$ (con frecuencia llamado simplemente "momento magnético") de la espira:

Momento de dipolo magnético de una espiga de corriente

$$\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A} \tag{29.10}$$

La unidad del momento de dipolo magnético del SI es el ampere-metro² ($\text{A} \cdot \text{m}^2$). Con esta definición el momento de torsión ejercido sobre una espira que conduce una corriente en un campo magnético **B** se puede expresar como

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \tag{29.11}$$

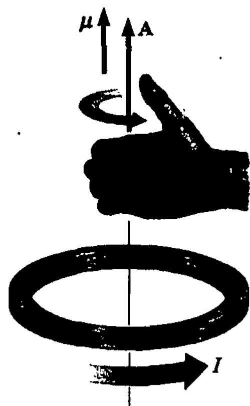


Figura 29.14 Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector **A**. La dirección del momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ es la misma que la dirección de **A**.

Advierta que este resultado es análogo a la ecuación 26.18, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$, para el momento de torsión que actúa sobre un dipolo eléctrico en presencia de un campo eléctrico **E**, donde **p** es el momento de dipolo eléctrico.

Aunque se obtuvo el momento de torsión para una orientación particular de **B** respecto de la espira, la ecuación $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ es válida para cualquier orientación. Además, aunque se obtuvo la expresión del momento de torsión para una espira rectangular, el resultado es válido para una espira de cualquier forma.

Si una bobina consta de N vueltas de alambre, cada una conduciendo la misma corriente y encerrando la misma área, el momento de dipolo magnético total de la bobina es N veces el momento de dipolo magnético para una vuelta. El momento de torsión sobre una bobina de N vueltas es N veces mayor que el de una bobina de una vuelta. En consecuencia, se escribe $\boldsymbol{\tau} = N\boldsymbol{\mu}_{\text{espira}} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}_{\text{bobina}} \times \mathbf{B}$.

En la sección 26.6 se encontró que la energía potencial de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico está dada por $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$. Esta energía depende de la orientación del dipolo en el campo eléctrico. Del mismo modo, la energía potencial de un dipolo magnético en un campo magnético depende de la orientación del dipolo en el campo magnético y está dada por

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \tag{29.12}$$

A partir de esta expresión se ve que un dipolo magnético tiene su energía mínima $U_{\text{mín}} = -\mu B$ cuando $\boldsymbol{\mu}$ apunta en la misma dirección que **B**. El dipolo tiene su máxima energía $U_{\text{máx}} = +\mu B$ cuando $\boldsymbol{\mu}$ apunta en la dirección opuesta a **B**.

Pregunta sorpresa 29.5

Clasifique la magnitud de los momentos de torsión que actúan sobre las espiras rectangulares mostradas en la figura 29.15, del mayor al menor. Todas las espiras son idénticas y conducen la misma corriente.

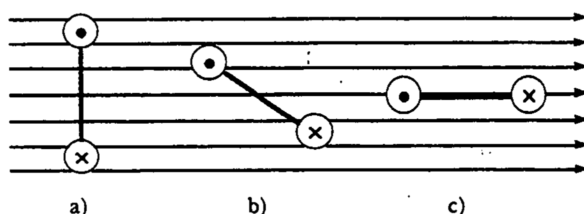


Figura 29.15 ¿Cuál espira de corriente (vista desde un lado) experimenta el mayor momento de torsión?

EJEMPLO — El momento de dipolo magnético de una bobina

Una bobina rectangular de 5.40 cm × 8.50 cm consta de 25 vueltas de alambre y conduce una corriente de 15.0 mA. Un campo magnético de 0.350 T se aplica paralelo al plano de la espira. a) Calcule la magnitud de su momento dipolar magnético.

Solución Puesto que la bobina tiene 25 vueltas, se modifica la ecuación 29.10 para obtener

$$\mu_{\text{bobina}} = NIA = (25)(15.0 \times 10^{-3}\ \text{A})(0.054\ 0\ \text{m})(0.085\ 0\ \text{m})$$
$$= 1.72 \times 10^{-3}\ \text{A}\cdot\text{m}^2$$

b) ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión que actúa sobre la espira?

Solución Puesto que **B** es perpendicular a μ_{bobina}, la ecuación 29.11 produce

$$\tau = \mu_{\text{bobina}}B = (1.72 \times 10^{-3}\ \text{A}\cdot\text{m}^2)(0.350\ \text{T})$$
$$= 6.02 \times 10^{-4}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Ejercicio Demuestre que las unidades $\text{A}\cdot\text{m}^2\cdot\text{T}$ se reducen a las unidades del momento de torsión $\text{N}\cdot\text{m}$.

Ejercicio Calcule la magnitud del momento de torsión sobre la bobina cuando el campo forma un ángulo de a) 60° y b) 0° con μ.

Respuesta a) $5.21 \times 10^{-4}\ \text{N}\cdot\text{m}$; b) cero.

web
Para mayor información acerca de las llaves de torsión y otros mecanismos visite los sitios web de algunas de las compañías que suministran estos dispositivos a la NASA:
http://www.smad.com o
http://www.itaco.com

EJEMPLO — Control de altitud de satélite

Muchos satélites usan bobinas llamadas *torquers* para ajustar su orientación. Estos dispositivos interactúan con el campo magnético de la Tierra para crear un momento de torsión sobre la nave espacial en la dirección *x*, *y* o *z*. La mayor ventaja de este tipo de sistema de control de elevación es que emplea electricidad generada por el Sol y así no consume combustible de empuje.

Si un dispositivo típico tiene un momento de dipolo magnético de 250 $\text{A}\cdot\text{m}^2$, ¿cuál es el momento de torsión máximo aplicado a un satélite cuando su torquer se enciende a una altitud donde la magnitud del campo magnético terrestre es de 3.0×10^{-5} T?

Solución De nueva cuenta aplique la ecuación 29.11, reconociendo que el momento de torsión máximo se obtiene cuando el momento de dipolo magnético del torquer es perpendicular al campo magnético de la Tierra:

$$\tau_{\text{máx}} = \mu B = (250\ \text{A}\cdot\text{m}^2)(3.0 \times 10^{-5}\ \text{T})$$
$$= 7.5 \times 10^{-3}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

Ejercicio Si el torquer requiere 1.3 W de potencia a una diferencia de potencial de 28 V, ¿cuánta corriente extrae cuando opera?

Respuesta 46 mA.

EJEMPLO El galvanómetro D'Arsonval

Una vista del galvanómetro D' Arsonval (véase la sección 28.5) se muestra en la figura 29.16. Cuando se conduce una corriente por las vueltas de alambre que forman la bobina, el campo magnético creado por el imán ejerce sobre la bobina un momento de torsión que lo hace girar (junto con su indicador) contra el resorte. Demuestre que el ángulo de desviación del indicador es directamente proporcional a la corriente en la bobina.

Solución Se puede usar la ecuación 29.11 para encontrar el momento de torsión τ_m que el campo magnético ejerce sobre la bobina. Si se supone que el campo magnético a través de la bobina es perpendicular a la normal al plano de la bobina, la ecuación 29.11 se convierte en

$$\tau_m = \mu B$$

(Ésta es una suposición razonable porque la sección transversal circular del imán asegura líneas de campo magnético radiales.) Este momento de torsión magnético es opuesto por el momento de torsión debido al resorte, lo cual está dado por la versión rotacional de la ley de Hooke, $\tau_s = -\kappa\varphi$, donde κ es la constante de torsión del resorte y φ es el ángulo a través del cual gira el resorte. Puesto que la bobina no tiene una aceleración angular cuando el indicador está en reposo, la suma de estos momentos de torsión debe ser cero:

$$1) \qquad \tau_m + \tau_s = \mu B - \kappa\varphi = 0$$

La ecuación 29.10 permite relacionar el momento magnético de las N vueltas de alambre con la corriente a través de las mismas:

$$\mu = NIA$$

Esta expresión para μ se puede sustituir en la ecuación 1) para obtener

$$(NIA)B - \kappa\varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{NAB}{\kappa} I$$

En consecuencia, el ángulo de desviación del indicador es directamente proporcional a la corriente en la espira. El factor NAB/κ indica que la desviación también depende del diseño del medidor.

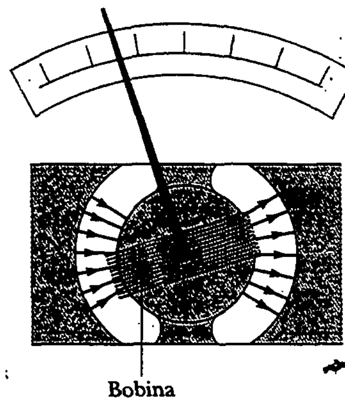


Figura 29.16 Vista de un galvanómetro de bobina móvil.

MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

12.3 En la sección 29.1 encontró que la fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético es perpendicular a la velocidad de la partícula y que, en consecuencia, el trabajo hecho sobre la partícula por la fuerza magnética es cero. Considere ahora el caso especial de una partícula con carga positiva que se mueve en un campo magnético uniforme con su vector de velocidad inicial perpendicular al campo. Suponga que el campo magnético apunta hacia el interior de la página. La figura 29.17 muestra que la partícula se mueve en un círculo en un plano perpendicular al campo magnético.

La partícula se mueve de esta manera debido a que la fuerza magnética $\mathbf{F}_B$ forma ángulos rectos con **v** y **B**, y tiene una magnitud constante igual a qvB. A medida que la fuerza desvía la partícula, las direcciones de **v** y $\mathbf{F}_B$ cambian continuamente, como se ve en la figura 19.17. Ya que $\mathbf{F}_B$ siempre apunta hacia el centro del círculo, **sólo cambia la dirección de v y no su magnitud**. Como se muestra en la figura 29.17, la rotación es contraria al de las manecillas del reloj para una carga positiva. Si q fuera negativa, el sentido de rotación sería el de las manecillas del reloj. Se puede usar la ecuación 6.1 para igualar esta fuerza magnética con la fuerza radial requerida para mantener a la carga moviéndose en un círculo:

Experimento sorpresa

Mueva un imán de barra a través de la pantalla de un televisor blanco y negro y observe qué ocurre con la imagen. Los electrones son desviados por el campo magnético conforme se acercan a la pantalla, provocando distorsión. (CUIDADO: no intente hacer esto con una televisión a *color* o un monitor de computadora. Estos dispositivos suelen contener una placa metálica que puede quedar magnetizada por el imán de barra. Si esto ocurre, un técnico necesitará "desimantar" la pantalla para repararla.)

$$\sum F = ma_r$$

$$F_B = qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB} \quad \textbf{(29.13)}$$

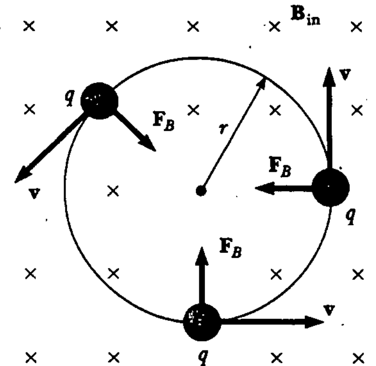


Figura 29.17 Cuando la velocidad de una partícula cargada es perpendicular a un campo magnético uniforme, la partícula se mueve en una trayectoria circular en un plano perpendicular a **B**. La fuerza magnética $\mathbf{F}_B$ que actúa sobre la carga siempre está dirigida hacia el centro del círculo.

Es decir, el radio de la trayectoria es proporcional al *momentum* lineal mv de la partícula e inversamente proporcional a la magnitud de la carga sobre la partícula y a la magnitud del campo magnético. La rapidez angular de la partícula (a partir de la Ec. 10.10) es

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} \quad \textbf{(29.14)}$$

El periodo del movimiento (el tiempo que tarda la partícula en completar una revolución) es igual a la circunferencia del círculo dividido entre la rapidez lineal de la partícula:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \quad \textbf{(29.15)}$$

Estos resultados muestran que la rapidez angular de la partícula y el periodo del movimiento circular no dependen de la rapidez lineal de la partícula o del radio de la órbita. La rapidez angular ω con frecuencia se conoce como **frecuencia de ciclotrón,** ya que circulan partículas cargadas a esta rapidez angular en un tipo de acelerador llamado *ciclotrón,* el cual se estudia en la sección 29.5.

Si una partícula cargada se mueve en un campo magnético uniforme con esta velocidad a cierto ángulo arbitrario con respecto a **B**, su trayectoria es una hélice. Por ejemplo, si el campo está en la dirección x, como se muestra en la figura 29.18, no existe componente de fuerza en la dirección x. En consecuencia, $a_x = 0$ y la componente x de la velocidad permanece constante. Sin embargo, la fuerza magnética $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ocasiona que las componentes v_y y v_z cambien en el tiempo, y el movimiento resultante es una hélice cuyo eje es paralelo al campo magnético. La proyección de la trayectoria sobre el plano yz (vista a lo largo del eje x) es un círculo. (¡Las proyecciones de la trayectoria sobre los planos xy y xz son senoidales!) Las ecuaciones de la 29.13 a la 29.15 siguen aplicándose, siempre que v se sustituya por $v_\perp = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$.

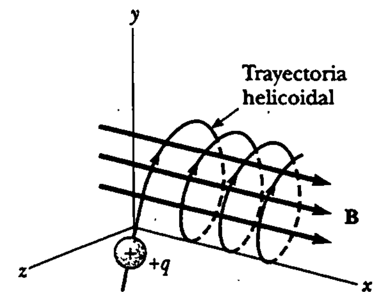


Figura 29.18 Una partícula cargada con un vector velocidad que tiene una componente paralela a un campo magnético uniforme se mueve en una trayectoria helicoidal.

EJEMPLO 2 **Un protón que se mueve perpendicular a un campo magnético uniforme**

Un protón se mueve en una órbita circular de 14 cm de radio en un campo magnético uniforme de 0.35 T perpendicular a la velocidad del protón. Determine la rapidez lineal del protón.

Solución De la ecuación 29.13 se tiene

$$v = \frac{qBr}{m_p} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\,\text{C})(0.35\,\text{T})(14 \times 10^{-2}\,\text{m})}{1.67 \times 10^{-27}\,\text{kg}}$$

$$= 4.7 \times 10^6\,\text{m/s}$$

Ejercicio Si un electrón se mueve perpendicular al mismo campo magnético a esta misma rapidez lineal, ¿cuál es el radio de su órbita circular?

Respuesta 7.6×10^{-5} m.

EJEMPLO Desviación de un haz de electrones

En un experimento diseñado para medir la magnitud de un campo magnético uniforme, los electrones se aceleran desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 350 V. Los electrones viajan a lo largo de una trayectoria curva debido a la fuerza magnética ejercida sobre ellos, y el radio medido de la trayectoria es de 7.5 cm. (La Fig. 29.19 muestra tal haz de electrones curvo.) Si el campo magnético es perpendicular al haz, a) ¿cuál es la magnitud del campo?

Solución En primer lugar debe calcular la rapidez de los electrones. Puede utilizar el hecho de que el aumento de su energía cinética debe ser igual a la disminución de su energía potencial, $|e|\Delta V$ (debido a la conservación de la energía). Luego, con la ecuación 29.13 se encuentra la magnitud del campo magnético. Puesto que $K_i = 0$ y $K_f = m_e v^2/2$, se tiene

$$\tfrac{1}{2} m_e v^2 = |e|\Delta V$$

$$v = \sqrt{\frac{2|e|\Delta V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2(1.60 \times 10^{-19}\text{C})(350\text{V})}{9.11 \times 10^{-31}\text{kg}}}$$

$$= 1.11 \times 10^7 \text{m/s}$$

$$B = \frac{m_e v}{|e|r} = \frac{(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(1.11 \times 10^7 \text{m/s})}{(1.60 \times 10^{-19}\text{C})(0.075\text{ m})}$$

$$= 8.4 \times 10^{-4}\text{T}$$

b) ¿Cuál es la rapidez angular de los electrones?

Solución Utilizando la ecuación 29.14 se encuentra que

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1.11 \times 10^7 \text{m/s}}{0.075\text{m}} = 1.5 \times 10^8 \text{rad/s}$$

Ejercicio ¿Cuál es el periodo de revolución de los electrones?

Respuesta 43 ns.

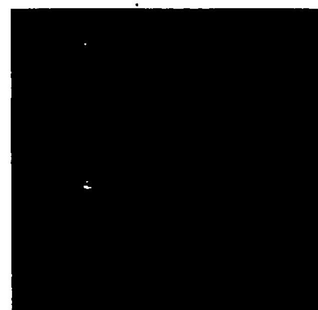


Figura 29.19 La desviación de un haz de electrones en un campo magnético. *(Henry Leap y Jim Lehman)*

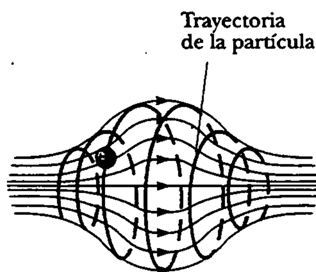


Figura 29.20 Una partícula cargada moviéndose en un campo magnético no uniforme (una botella magnética) forma espirales en torno al campo (trayectoria roja) y oscila entre los puntos extremos. La fuerza magnética ejercida sobre la partícula cerca de cualquier extremo de la botella tiene una componente que provoca que la partícula se mueva en espiral de regreso hacia el centro.

Cuando partículas cargadas se mueven en un campo magnético no uniforme, el movimiento es complejo. Por ejemplo, en un campo magnético que es intenso en los extremos y débil en la parte media, como el que se muestra en la figura 29.20, las partículas pueden oscilar hacia adelante y hacia atrás en los puntos extremos. Una partícula cargada empezando en un extremo gira en espiral a lo largo de las líneas de campo hasta que alcanza el otro extremo, donde invierte su trayectoria y gira en espiral de regreso. Esta configuración se conoce como una *botella magnética* debido a que partículas cargadas pueden quedar atrapadas en ella. La botella magnética se ha utilizado para confinar *plasma*, un gas compuesto de iones y electrones. Tal esquema de confinamiento de plasma podría desempeñar un papel crucial en el control de fusión nuclear, un proceso que posiblemente proporcionará una fuente casi ilimitada de energía. Desafortunadamente, las botellas magnéticas tienen sus problemas. Si se atrapa un gran número de partículas, los choques entre ellas originan que poco a poco se fuguen del sistema.

Los cinturones de radiación de Van Allen se componen de partículas cargadas (principalmente electrones y protones) que circundan la Tierra en regiones con forma de dona (Fig. 29.21). Las partículas, atrapadas por el campo magnético no uniforme de la Tierra, giran en espiral alrededor de las líneas de campo de polo a polo, cubriendo la distancia en sólo unos cuantos segundos. Estas partículas se originan principalmente del Sol, aunque algunas provienen de estrellas y otros objetos espaciales. Por esta razón las partículas se denominan *rayos cósmicos*. La mayor parte de los rayos cósmicos son desviados por el campo magnético terrestre y nunca llegan a la atmósfera. Sin embargo, algunas quedan atrapadas, y éstas son las que conforman los cinturones de Van Allen. Cuando las partículas están ubicadas sobre los polos, en ocasiones chocan con los átomos en la atmósfera, provocando que éstos emitan luz visible. Tales colisiones son el origen de las bellas auroras boreales, o luces del norte, en el hemisferio norte, y la aurora austral en el hemisferio sur.

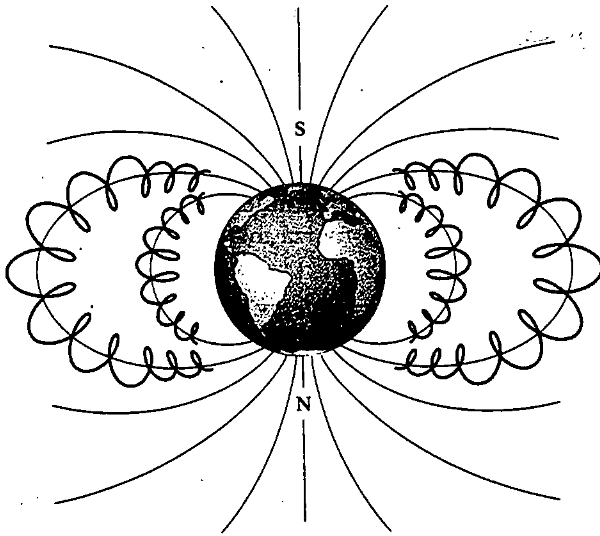


Figura 29.21 Los cinturones de Van Allen están hechos de partículas cargadas atrapadas por el campo magnético no uniforme de la Tierra. Las líneas de campo magnético están en azul y las trayectorias de las partículas en rojo.

Las auroras usualmente están confinadas en las regiones polares porque es ahí donde los cinturones de Van Allen están más cerca de la superficie terrestre. Ocasionalmente, sin embargo, la actividad solar provoca gran número de partículas cargadas que ingresan a los cinturones y distorsionan de manera significativa las líneas de campo magnético normal asociadas con la Tierra. En estas situaciones a veces se puede ver una aurora en latitudes más bajas. 12.1 y 12.11



Esta fotografía resaltada con colores, tomada en el CERN, el laboratorio de física de partículas en las afueras de Ginebra, Suiza, muestra una colección de trazos dejados por partículas subatómicas en una cámara de burbujas. Una cámara de burbujas es un recipiente lleno con hidrógeno líquido que es sobrecalentado, esto es, momentáneamente elevado sobre su punto de ebullición normal por medio de una súbita caída en la presión en el recipiente. Cualquier partícula cargada que pasa a través del líquido en este estado deja tras de sí un rastro de finas burbujas conforme el líquido hierve en su excitación. Estas burbujas se visualizan como finos trazos que muestran las trayectorias características de los diferentes tipos de partículas. Las trayectorias son curvas debido a que existe un intenso campo magnético aplicado. Las trazas espirales que se enrollan apretujadamente son provocadas por los electrones y los positrones. *(Patrice Loiez, CERN/SPL/Photo Researchers, Inc.)*

Sección opcional

APLICACIONES QUE INVOLUCRAN EL MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS EN UN CAMPO MAGNÉTICO

Una carga que se mueve a una velocidad **v** en presencia tanto de un campo eléctrico **E** como de un campo magnético **B** experimenta tanto una fuerza eléctrica $q\mathbf{E}$ como una fuerza magnética $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. La fuerza total (llamada fuerza de Lorentz) que actúa sobre la carga es

Fuerza de Lorentz

$$\sum \mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{29.16}$$

Selector de velocidades

En muchos experimentos que incluyen el movimiento de partículas cargadas es importante que todas las partículas se muevan en esencia a la misma velocidad. Lo anterior puede conseguirse al aplicar una combinación de un campo eléctrico y un campo magnético orientados como se muestra en la figura 29.22. Un campo eléctrico uniforme está dirigido verticalmente hacia abajo (en el plano de la página en la figura 29.22a), y un campo magnético uniforme se aplica perpendicular al campo eléctrico (al interior de la página en la figura 29.22a). Para q positiva, la fuerza magnética $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es hacia arriba y la fuerza eléctrica $q\mathbf{E}$ es hacia abajo. Cuando las magnitudes de los dos campos se eligen de modo que $qE = qvB$, la partícula se mueve en una línea recta horizontal a través de la región de los campos. A partir de la expresión $qE = qvB$ se encuentra que

$$v = \frac{E}{B} \tag{29.17}$$

Sólo aquellas partículas que tengan rapidez v pasan sin desviarse a través de los campos eléctrico y magnético mutuamente perpendiculares. La fuerza magnética ejercida sobre partículas que se mueven con rapidez más grande que ésta, es más intensa que la fuerza eléctrica, y las partículas se desvían hacia arriba. Aquellas que se mueven con rapidez menor que ésta se desvían hacia abajo.

El espectrómetro de masas

El **espectrómetro de masas** separa iones de acuerdo con la proporción entre su masa y su carga. En una versión de este dispositivo, conocida como el *espectrómetro de masas de Bainbridge*, un haz de iones pasa primero a través de un selector de velocidades y después entra a un segundo campo magnético uniforme $\mathbf{B}_0$ que tiene la misma dirección que el campo magnético en el selector (Fig. 29.23). Después de entrar al

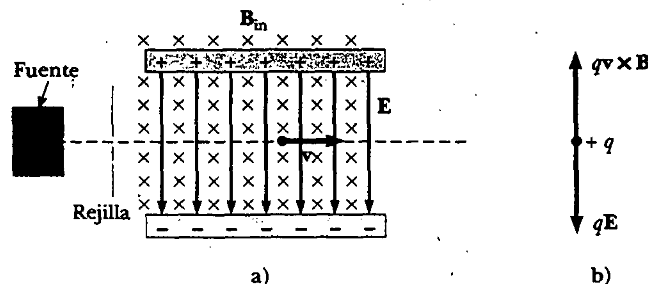


Figura 29.22 a) Un selector de velocidad. Cuando una partícula cargada positivamente está en presencia de un campo magnético dirigido hacia la página y un campo eléctrico dirigido hacia abajo, experimenta una fuerza eléctrica descendente $q\mathbf{E}$ y una fuerza magnética ascendente $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. b) Cuando dichas fuerzas se balancean, la partícula se mueve en una línea horizontal a través de los campos.

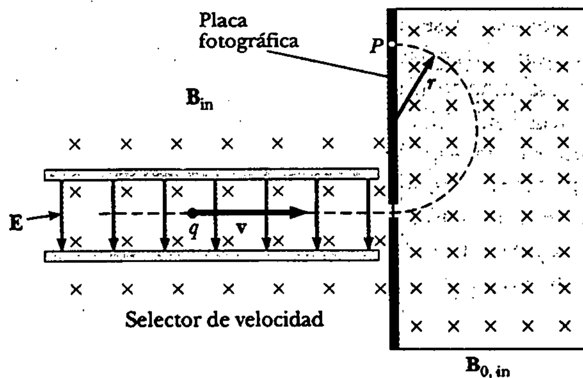


Figura 29.23 Un espectrómetro de masas. Partículas cargadas de manera positiva se envían primero a través de un selector de velocidad y luego a regiones donde el campo magnético $\mathbf{B}_0$ causa que las partículas se muevan en una trayectoria semicircular y golpean una placa fotográfica en *P*.

segundo campo magnético, los iones se mueven en un semicírculo de radio *r* antes de incidir sobre una placa fotográfica en *P*. Si los iones están con carga positiva, el haz se desvía hacia arriba, como se muestra en la figura 29.23. Si los iones están con carga negativa, el haz se desviaría hacia abajo. A partir de la ecuación 29.13 se puede expresar la proporción m/q como

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v}$$

Utilizando la ecuación 29.17 se encuentra que

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0B}{E} \qquad \textbf{(29.18)}$$

Por tanto, m/q puede determinarse midiendo el radio de curvatura y conociendo las magnitudes de los campos B, B_0 y E. En la práctica suelen medirse las masas de varios isótopos de un ion determinado, con todos los iones conduciendo la misma carga q. En consecuencia, es posible encontrar las proporciones de masa incluso si se desconoce q.

Una variación de esta técnica fue empleada por J. J. Thomson (1856-1940) en 1897 para medir la proporción e/m_e de los electrones. La figura 29.24a muestra el

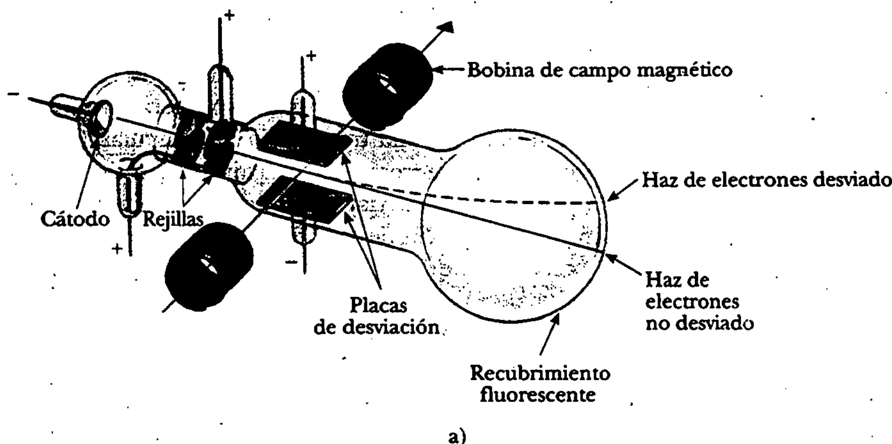




Figura 29.24 a) Aparato de Thomson para medir e/m_e. Los electrones se aceleran desde el cátodo, pasan por dos rejillas y se desvían tanto por un campo eléctrico como por un campo magnético (dirigido perpendicular al campo eléctrico). Luego el haz de electrones golpea una pantalla fluorescente. b) J. J. Thomson (*izquierda*) en el Laboratorio Cavendish, Universidad de Cambridge. Es interesante advertir que el hombre a la derecha, Frank Baldwin Jewett, es un pariente lejano de John W. Jewett, Jr., autor colaborador de este texto. *(Bell Telephone Labs/Cortesía de Emilio Segrè Visual Archives)*

aparato básico que él utilizó. Los electrones se aceleran desde el cátodo y pasan a través de dos rejillas. Luego se deja que se desplacen hacia la región de campos eléctrico y magnético perpendiculares. Las magnitudes de los dos campos se ajustan primero para producir un haz sin desviación. Cuando el campo magnético se desactiva, el campo eléctrico produce una desviación del haz mensurable que se registra sobre la pantalla fosforescente. A partir del tamaño de la desviación y de los valores medidos de E y B puede establecerse la relación entre la carga y la masa. Los resultados de este experimento crucial representaron el descubrimiento del electrón como una partícula fundamental de la naturaleza.

Pregunta sorpresa 29.6

Cuando se revela una placa fotográfica de un espectrómetro de masas como el que se muestra en la figura 29.23, se observan los tres patrones mostrados en la figura 29.25. Clasifique las partículas que provocaron los patrones por su rapidez y proporción m/q.

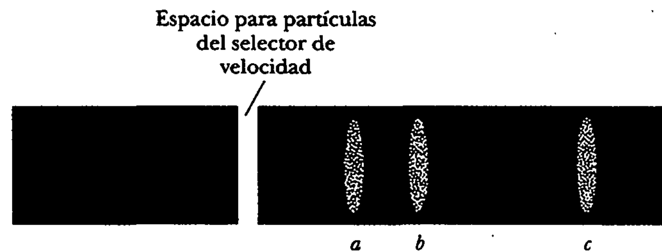


Figura 29.25

El ciclotrón

El **ciclotrón** puede acelerar partículas cargadas con rapidez muy alta. Tanto las fuerzas eléctricas como las magnéticas desempeñan un papel clave. Las partículas energéticas producidas se utilizan para bombardear núcleos atómicos y por ello producen reacciones nucleares de interés para los investigadores. Varios hospitales emplean las instalaciones de los ciclotrones para producir sustancias radiactivas para diagnóstico y tratamiento.

Un dibujo esquemático del ciclotrón se muestra en la figura 29.26. Las cargas se mueven dentro de dos recipientes semicirculares, D_1 y D_2, conocidos como *des*. Una diferencia de potencial alterna de alta frecuencia se aplica a las des, y un campo magnético uniforme se dirige perpendicular a ellas. Un ion positivo liberado en P cerca del centro del imán en una de se mueve en una trayectoria semicircular (indicada en el dibujo por la línea roja punteada) y regresa a la abertura en un tiempo $T/2$, donde T es el tiempo necesario para realizar un viaje completo alrededor de las dos des, dado por la ecuación 29.15. La frecuencia de la diferencia de potencial aplicada se ajusta de manera que la polaridad de las des se invierte en el mismo tiempo que tarda el ion en viajar alrededor de una de. Si la diferencia de potencial aplicada se ajusta de modo tal que D_2 está a un potencial eléctrico menor que D_1 en una cantidad ΔV, el ion se acelera a través de la abertura hasta D_2, y su energía cinética se incrementa en una cantidad $q\Delta V$. Luego se mueve alrededor de D_2 en una trayectoria semicircular de radio más grande (puesto que su rapidez ha aumentado). Después de un tiempo $T/2$, vuelve a llegar a la abertura entre las des. En ese momento la polaridad a través de las des se invierte de nuevo, y al ion se le da otro "empujón" a través de la abertura. El movimiento continúa de manera que a cada media revolución alrededor de una de el ion gana energía cinética adicional igual a $q\Delta V$. Cuando el radio de su trayectoria es casi el de las des, el ion energético abandona el sistema a través de la rejilla de salida. Es importante observar que la opera-

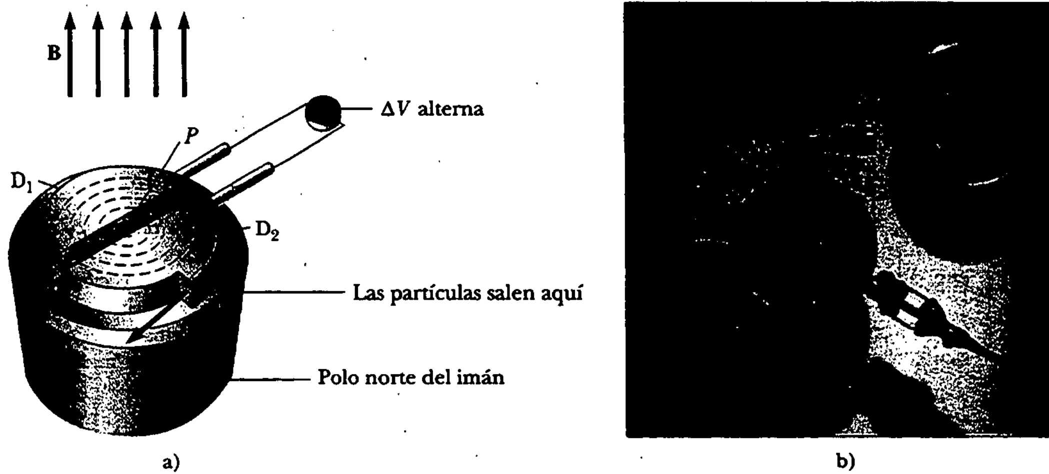


Figura 29.26 a) Un ciclotrón consta de una fuente de iones en *P*, dos des D_1 y D_2 a través de las cuales se aplica una diferencia de potencial alterna y un campo magnético uniforme. (El polo sur del imán no se muestra.) Las líneas curvas punteadas rojas representan la trayectoria de las partículas. b) El primer ciclotrón, inventado por E.O. Lawrence y M.S. Livingston en 1934. *(Cortesía de Lawrence Berkeley Laboratory/Universidad de California)*

ción de ciclotrón se basa en el hecho de que T es independiente de la rapidez del ion y del radio de la trayectoria circular.

Se puede obtener una expresión para la energía cinética del ion cuando éste sale del ciclotrón en función del radio R de las des. Según la ecuación 29.13 se sabe que $v = qBR/m$. Por tanto, la energía cinética es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m} \quad \textbf{(29.19)}$$

Cuando la energía de los iones en un ciclotrón es mayor que aproximadamente 20 MeV, entran en juego efectos relativistas. (Dichos efectos se analizan en el capítulo 39.) Se aprecia que T aumenta y los iones en movimiento no permanecen en fase con la diferencia de potencial aplicada. Algunos aceleradores resuelven este problema modificando el periodo de la diferencia de potencial aplicada de modo que permanezca en fase con los iones en movimiento.

web
Más información acerca de estos aceleradores está disponible en **http://www.fnal.gov** o **http://www.CERN.ch.** El sitio CERN también describe la creación de la World Wide Web por físicos a mediados de los noventa.

Sección opcional

EL EFECTO HALL

Cuando un conductor que transporta corriente se pone en un campo magnético, se genera una diferencia de potencial en una dirección perpendicular tanto a la corriente como al campo magnético. Este fenómeno, observado por primera vez por Edwin Hall (1855-1938) en 1879, se conoce como *efecto Hall*. Éste surge de la desviación de los portadores de carga a un lado de los conductores como consecuencia de la fuerza magnética que experimentan. El efecto Hall proporciona información en relación con el signo de los portadores de carga y su densidad; también puede usarse para medir la magnitud de los campos magnéticos.

Un dispositivo para observar el efecto Hall consta de un conductor plano por el que circula una corriente I en la dirección x, como se muestra en la figura 29.27. Un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$ se aplica en la dirección y. Si los portadores de carga son electrones que se mueven en la dirección x negativa con velocidad de

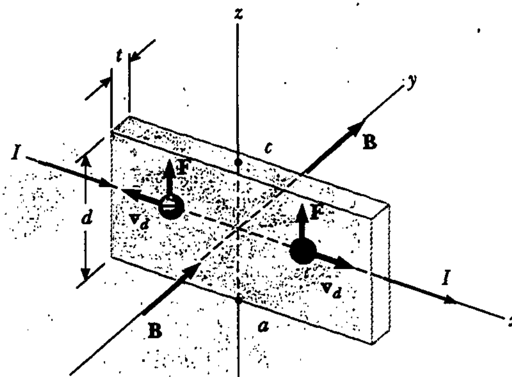


Figura 29.27 Para observar el efecto Hall se aplica un campo magnético a un conductor que porta carga. Cuando I está en la dirección x y $\mathbf{B}$ en la dirección y, ambos portadores de carga, positiva y negativa, se desvían hacia arriba en el campo magnético. El voltaje Hall se mide entre los puntos a y c.

arrastre $\mathbf{v}_d$, experimentan una fuerza magnética hacia arriba $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$, se desvían hacia arriba, y se acumulan en el borde superior del conductor plano, dejando un exceso de carga positiva en el borde inferior (Fig. 29.28a). Esta acumulación de carga en los bordes aumenta hasta que la fuerza eléctrica establecida por la separación de carga equilibra la fuerza magnética que actúa sobre los portadores. Cuando esta condición de equilibrio se alcanza, los electrones ya no se desvían hacia arriba. Un voltímetro o potenciómetro sensible conectado a través de la muestra, como se ilustra en la figura 29.28, puede medir la diferencia de potencial generada en el conductor, conocida como **voltaje Hall** ΔV_H.

Si los portadores de carga son positivos y, en consecuencia, se mueven en la dirección x positiva como se ve en las figuras 29.27 y 29.28b, también experimentan una fuerza magnética hacia arriba $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$. Esto produce una acumulación de carga positiva sobre el borde superior y deja un exceso de carga negativa en el borde inferior. En consecuencia, el signo del voltaje Hall generado en la muestra es opuesto al signo del voltaje Hall que resulta de la desviación de electrones. El signo de los portadores de carga puede, por tanto, determinarse a partir de la medición de la polaridad del voltaje Hall.

Para encontrar una expresión que defina el voltaje Hall advierta primero que la fuerza magnética sobre los portadores de carga tiene una magnitud qv_dB. En equilibrio, esta fuerza es equilibrada por la fuerza eléctrica qE_H, donde E_H es la magnitud de campo eléctrico debido a la separación de carga (denominado algunas veces como *campo Hall*). Por consiguiente,

$$qv_dB = qE_H$$
$$E_H = v_dB$$

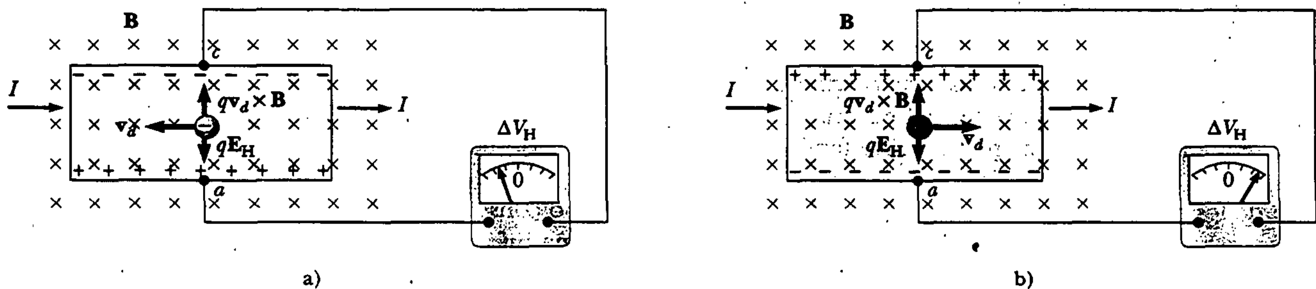


Figura 29.28 a) Cuando los portadores de carga en un aparato de efecto Hall son negativos, el borde superior del conductor se carga negativamente, y c está a un potencial eléctrico más bajo que a. b) Cuando los portadores de carga son positivos, el borde superior se carga positivamente, y c está a un potencial más alto que a. En ambos casos los portadores de carga ya no se desvían cuando los bordes están cargados completamente, esto es, cuando existe un balance entre la fuerza electrostática qE_H y la fuerza de desviación magnética qvB.

Si d es el ancho del conductor, el voltaje Hall es

$$\Delta V_H = E_H d = v_d B d \quad \textbf{(29.20)}$$

De este modo, el voltaje Hall medido proporciona un valor para la rapidez de arrastre de los portadores de carga si se conocen d y B.

Puede obtenerse la densidad de portadores de carga n midiendo la corriente en la muestra. A partir de la ecuación 27.4 se puede expresar la rapidez de arrastre como

$$v_d = \frac{I}{nqA} \quad \textbf{(29.21)}$$

donde A es el área de la sección transversal del conductor. Sustituyendo la ecuación 29.21 en la 29.20 se obtiene

$$\Delta V_H = \frac{IBd}{nqA} \quad \textbf{(29.22)}$$

Puesto que $A = td$, donde t es el espesor del conductor, la ecuación 29.22 también se puede expresar como

$$\Delta V_H = \frac{IB}{nqt} = \frac{R_H IB}{t} \quad \textbf{(29.23)}$$

El voltaje Hall

donde $R_H = 1/nq$ es el **coeficiente Hall**. Esta relación muestra que un conductor calibrado de manera apropiada puede emplearse para medir la magnitud de un campo magnético desconocido.

Puesto que todas las cantidades que aparecen en la ecuación 29.23, además de nq, pueden medirse, se obtiene fácilmente un valor para el coeficiente Hall. El signo y la magnitud de R_H proporcionan el signo de los portadores de carga y su densidad de número. En la mayoría de los metales los portadores de carga son electrones y la densidad de portadores de carga determinada a partir de las mediciones del efecto Hall concuerda bien con los valores calculados para metales como el litio (Li), sodio (Na), cobre (Cu) y plata (Ag), cuyos átomos proporcionan cada uno un electrón para actuar como portador de corriente. En este caso n es aproximadamente igual al número de electrones conductores por unidad de volumen. Sin embargo, este modelo clásico no es válido para metales como hierro (Fe), bismuto (Bi) y cadmio (Cd) o para semiconductores. Estas discrepancias pueden explicarse sólo con el empleo de un modelo basado en la naturaleza cuántica de los sólidos.

web

En 1980 Klaus von Klitzing descubrió que el voltaje Hall está cuantizado. Él ganó el premio Nobel por este descubrimiento en 1985. Para un análisis del efecto Hall cuántico y algunas de sus consecuencias, visite el sitio web en http://www.saunderscollege.com/physics/

EJEMPLO **El efecto Hall en el cobre**

Una tira de cobre rectangular de 1.5 cm de ancho y 0.10 cm de espesor conduce una corriente de 5.0 A. Encuentre el voltaje Hall para un campo magnético de 1.2 T aplicado en dirección perpendicular a la tira.

Solución Si supone que un electrón por átomo está disponible para conducción, puede considerar la densidad de portadores de carga igual a $n = 8.49 \times 10^{28}$ electrones/m^3 (véase el ejemplo 27.1). Sustituyendo este valor y los datos dados en la ecuación 29.23 se obtiene

$$\Delta V_H = \frac{IB}{nqt}$$

$$= \frac{(5.0 \text{A})(1.2 \text{T})}{(8.49 \times 10^{28} \text{m}^{-3})(1.6 \times 10^{-19} \text{C})(0.0010 \text{m})}$$

$$\Delta V_H = 0.44 \ \mu\text{V}$$

Tal voltaje Hall extremadamente pequeño se espera en buenos conductores. (Advierta que el ancho del conductor no es necesario en este cálculo.)

En semiconductores n es mucho más pequeña que en metales que contribuyen con un electrón por átomo a la corriente; en consecuencia, el voltaje Hall por lo común es mayor, puesto que varía como el inverso de n. Por lo general, se emplean corrientes del orden de 0.1 mA para tales materiales. Considere un trozo de silicón con las mismas dimensiones que la tira de cobre en este ejemplo y cuyo valor para $n = 1.0 \times 10^{20}$ electrones/m^3. Si $B = 1.2$ T e $I = 0.10$ mA, se encuentra que $\Delta V_H = 7.5$ mV. Una diferencia de potencial de esta magnitud se mide sin dificultad.

RESUMEN

La fuerza magnética que actúa sobre una carga q que se mueve a una velocidad **v** en un campo magnético **B** es

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad \textbf{(29.1)}$$

La dirección de esta fuerza magnética es perpendicular tanto a la velocidad de la partícula como al campo magnético. La magnitud de esta fuerza es

$$F_B = |q|vB \operatorname{sen} \theta \qquad \textbf{(29.2)}$$

donde θ es el ángulo más pequeño entre **v** y **B**. La unidad del SI de **B** es el **tesla** (T), donde $1 \text{ T} = 1 \text{ N/A}\cdot\text{m}$.

Cuando una partícula cargada se mueve en un campo magnético, el trabajo hecho por la fuerza magnética sobre la partícula es cero debido a que el desplazamiento siempre es perpendicular a la dirección de la fuerza. El campo magnético puede alterar la dirección del vector velocidad de la partícula, pero no puede cambiar su rapidez.

Si un conductor recto de longitud L conduce una corriente I, la fuerza ejercida sobre ese conductor cuando se coloca en un campo magnético uniforme **B** es

$$\mathbf{F}_B = I\mathbf{L} \times \mathbf{B} \qquad \textbf{(29.3)}$$

donde la dirección de **L** está en la dirección de la corriente y $|\mathbf{L}| = L$.

Si un alambre de forma arbitraria que conduce una corriente I se coloca en un campo magnético, la fuerza magnética ejercida sobre un segmento muy pequeño $d\mathbf{s}$ es

$$d\mathbf{F}_B = I\, d\mathbf{s} \times \mathbf{B} \qquad \textbf{(29.4)}$$

Para determinar la fuerza magnética total sobre el alambre se debe integrar la ecuación 29.4, teniendo en mente que tanto **B** como $d\mathbf{s}$ pueden variar en cada punto. La integración da la fuerza ejercida sobre un conductor de forma arbitraria que conduce corriente en un campo magnético uniforme

$$\mathbf{F}_B = I\mathbf{L}' \times \mathbf{B} \qquad \textbf{(29.7)}$$

donde **L′** es un vector dirigido de un extremo del conductor al extremo opuesto. Puesto que la integración de la ecuación 29.4 para una espira cerrada proporciona un resultado cero, la fuerza magnética neta sobre cualquier espira cerrada que conduce una corriente en un campo magnético uniforme es cero.

El **momento de dipolo magnético** $\boldsymbol{\mu}$ de una espira que conduce una corriente I es

$$\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{A} \qquad \textbf{(29.10)}$$

donde el vector de área **A** es perpendicular al plano de la espira y $|\mathbf{A}|$ es igual al área de la espira. La unidad SI de $\boldsymbol{\mu}$ es $\text{A}\cdot\text{m}^2$.

El momento de torsión $\boldsymbol{\tau}$ sobre una espira de corriente cuando ésta se coloca en un campo magnético uniforme **B** es

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \qquad \textbf{(29.11)}$$

y la energía potencial de un dipolo magnético en un campo magnético es

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \qquad \textbf{(29.12)}$$

Si una partícula cargada se mueve en un campo magnético uniforme de manera que su velocidad inicial es perpendicular al campo, la partícula se mueve en un círculo cuyo plano es perpendicular al campo magnético. El radio de la trayectoria circular es

$$r = \frac{mv}{qB} \qquad \textbf{(29.13)}$$

donde m es la masa de la partícula y q es su carga. La rapidez angular de la partícula cargada es

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad \textbf{(29.14)}$$

PREGUNTAS

1. En cierto instante un protón se mueve en la dirección x positiva en una región donde hay un campo magnético en la dirección z negativa. ¿Cuál es la dirección de la fuerza magnética? ¿El protón continúa moviéndose en la dirección x positiva? Explique.
2. Dos partículas cargadas se proyectan en una región donde hay un campo magnético perpendicular a sus velocidades. Si las cargas se desvían en direcciones opuestas, ¿qué puede usted decir acerca de ellas?
3. Si una partícula cargada se mueve en una línea recta a través de cierta región del espacio, ¿puede usted afirmar que el campo magnético en esa región es cero?
4. Suponga que un electrón persigue a un protón sobre esta página cuando repentinamente se forma un campo magnético perpendicular a la misma. ¿Qué sucede con las partículas?
5. ¿Cómo puede emplearse el movimiento de una partícula cargada móvil para distinguir entre un campo magnético y un campo eléctrico? Proporcione un ejemplo específico para justificar su argumento.
6. Liste varias similitudes y diferencias entre las fuerzas eléctrica y magnética.
7. Justifique el siguiente enunciado: "Es imposible para un campo magnético constante (en otras palabras, independiente del tiempo) alterar la rapidez de una partícula cargada."
8. En vista del enunciado anterior, ¿cuál es el papel del campo magnético en un ciclotrón?
9. Un conductor que lleva corriente no experimenta fuerza magnética cuando se coloca de cierto modo en un campo magnético uniforme. Explique.
10. ¿Es posible orientar una espira de corriente en un campo magnético uniforme de manera que la espira no tienda a girar? Explique.
11. ¿Cómo puede emplearse una espira de corriente para determinar la presencia de un campo magnético en una región determinada del espacio?
12. ¿Cuál es la fuerza neta sobre la aguja de una brújula en un campo magnético uniforme?
13. ¿Qué tipo de campo magnético se requiere para ejercer una fuerza resultante sobre un dipolo magnético? ¿Cuál es la dirección de la fuerza resultante?
14. Un protón que se mueve horizontalmente entra en una región donde hay un campo magnético uniforme perpendicular a la velocidad del protón, como se muestra en la figura P29.14. Describa el movimiento subsecuente del protón. ¿Cómo se comportaría un electrón en las mismas circunstancias?
15. En una botella magnética, ¿qué invierte la dirección de la velocidad de las partículas cargadas confinadas? (*Sugerencia:* encuentre la dirección de la fuerza magnética sobre estas partículas en una región donde las líneas de campo converjan.)

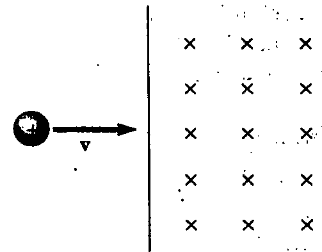


Figura P29.14

16. En el ciclotrón, ¿por qué las partículas de diferentes velocidades tardan el mismo tiempo en completar la mitad de una revolución alrededor de una de?
17. La *cámara de burbujas* es un dispositivo que se utiliza para observar las trayectorias de partículas que pasan a través de la cámara, las cuales se encuentran inmersas en un campo magnético. Si algunas de las huellas son espirales y otras son líneas rectas, ¿qué puede usted decir acerca de las partículas?
18. ¿Un campo magnético constante puede poner en movimiento a un electrón en reposo? Explique.
19. Usted está diseñando una sonda magnética que utiliza el efecto Hall para medir campos magnéticos. Suponga que está restringido a usar un material determinado y que ya ha hecho una sonda lo más delgada posible. ¿Qué puede hacerse, si fuera posible, para incrementar el voltaje Hall producido por un campo magnético dado?
20. El haz de electrones en la figura P29.20 se proyecta hacia la derecha. El haz se desvía hacia abajo ante la presencia de un campo magnético producido por un par de bobinas que conducen corriente. a) ¿Cuál es la dirección del campo magnético? b) ¿Qué le pasaría al haz si se invirtiera la corriente en las bobinas?

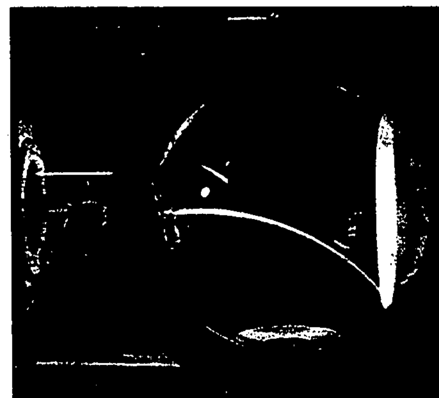


Figura P29.20 (*Cortesía de Central Scientific Company*)

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante ☐ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** = use computadora para resolver el problema = Física interactiva ☐ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 29.1 El campo magnético

WEB 1. Indique la dirección inicial de la desviación de las partículas cargadas cuando éstas entran en los campos magnéticos indicados como se muestra en la figura P29.1.

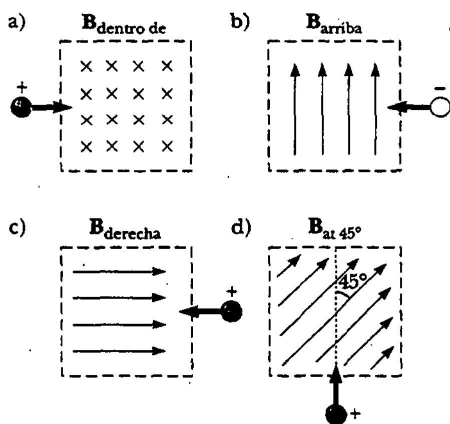


Figura P29.1

2. Considere un electrón cerca del ecuador de la Tierra. ¿En qué dirección tendería a desviarse si su velocidad está dirigida a) hacia abajo, b) rumbo al norte, c) hacia el este o d) hacia el sureste?
3. Un electrón que se mueve a lo largo del eje x positivo perpendicular a un campo magnético experimenta una desviación magnética en la dirección y negativa. ¿Cuál es la dirección del campo magnético?
4. Un protón viaja a una rapidez de 3.00×10^6 m/s en un ángulo de 37.0° con la dirección de un campo magnético de 0.300 T en la dirección $+y$. ¿Cuáles son a) la magnitud de la fuerza magnética sobre el protón y b) su aceleración?
5. Un protón se mueve perpendicular a un campo magnético uniforme **B** a 1.00×10^7 m/s y experimenta una aceleración de 2.00×10^{13} m/s² en la dirección $+x$ cuando su velocidad está en la dirección $+z$. Determine la magnitud y la dirección del campo.
6. Un electrón se acelera desde el reposo a través de 2 400 V y luego ingresa a una región donde existe un campo magnético uniforme de 1.70 T. ¿Cuáles son los valores a) máximo y b) mínimo de la fuerza magnética que experimenta esta carga?
7. En el ecuador, cerca de la superficie de la Tierra, el campo magnético es aproximadamente de 50.0 μT con dirección norte y el campo eléctrico es cercano a 100 N/C hacia abajo en clima favorable. Encuentre las fuerzas gravitacional, eléctrica y magnética sobre un electrón que se mueve a una velocidad instantánea de 6.00×10^6 m/s en dirección este en dicho ambiente.
8. Una bola metálica de 30.0 g que tiene una carga neta Q = 5.00 μC se lanza horizontalmente por una ventana a una rapidez v = 20.0 m/s. La ventana está a una altura h = 20.0 m sobre el suelo. Un campo magnético horizontal uniforme de magnitud B = 0.010 0 T es perpendicular al plano de la trayectoria de la bola. Encuentre la fuerza magnética que actúa sobre la bola antes de que ésta golpee el suelo.
9. Un protón que se mueve a 4.00×10^6 m/s a través de un campo magnético de 1.70 T experimenta una fuerza magnética de 8.20×10^{-13} N de magnitud. ¿Cuál es el ángulo entre la velocidad del protón y el campo?
10. Un electrón en campos eléctrico y magnético uniforme tiene una velocidad de 1.20 km/s (en la dirección x positiva) y una aceleración de 2.00×10^{12} m/s² (en la dirección z positiva). Si el campo eléctrico tiene una intensidad de 20.0 N/C (en la dirección z positiva), ¿qué puede determinar acerca del campo magnético en la región? ¿Qué no se puede determinar?
11. Un protón se mueve a una velocidad **v** = (2**i** − 4**j** + **k**) m/s en una región donde el campo magnético es **B** = (**i** + 2**j** − 3**k**) T. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza magnética que esta carga experimenta?
12. Un electrón se proyecta dentro de un campo magnético uniforme B = (1.40**i** + 2.10**j**) T. Encuentre la expresión vectorial para la fuerza sobre el electrón cuando su velocidad es **v** = 3.70×10^5**j** m/s.

Sección 29.2 Fuerza magnética sobre un conductor que lleva corriente

WEB 13. Un alambre con una masa por unidad de longitud de 0.500 g/cm conduce una corriente de 2.00 A horizontalmente hacia el sur. ¿Cuáles son la dirección y la magnitud del campo magnético mínimo necesario para levantar verticalmente este alambre?
14. Un alambre conduce una corriente estable de 2.40 A. Una sección recta del alambre mide 0.750 m de largo y se encuentra a lo largo del eje x dentro de un campo magnético uniforme de magnitud B = 1.60 T en la dirección z positiva. Si la corriente está en la dirección + x, ¿cuál es la fuerza magnética sobre la sección de alambre?
15. Un alambre de 2.80 m de longitud conduce una corriente de 5.00 A en una región donde un campo magnético uniforme tiene una magnitud de 0.390 T. Calcule la magnitud de la fuerza magnética sobre el alambre si el ángulo entre el campo magnético y la corriente es a) 60.0°, b) 90.0°, c) 120°.
16. Un conductor suspendido por dos alambres flexibles, como se muestra en la figura P29.16, tiene una masa por unidad de longitud de 0.040 0 kg/m. ¿Qué corriente debe existir en el conductor para que la tensión en los alambres de soporte sea cero cuando el campo magnéti-

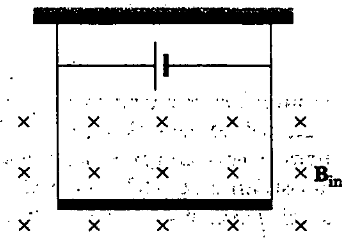


Figura P29.16

co es de 3.60 T hacia el interior de la página? ¿Cuál es la dirección requerida para la corriente?

17. Suponga un alambre uniforme muy largo que tiene una densidad lineal de masa de 1.00 g/m y que circunda la Tierra por el ecuador magnético. Suponga que el campo magnético del planeta es de 50.0 μT horizontalmente hacia el norte a través de esta región. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la corriente en el alambre que lo mantienen levitando?

18. En la figura P29.18 el cubo mide 40.0 cm en cada lado. Cuatro segmentos rectos de alambre —*ab*, *bc*, *cd* y *da*— forman una espira cerrada que conduce una corriente I = 5.00 A en la dirección que se muestra. Un campo magnético uniforme de magnitud B = 0.020 0 T está en la dirección y positiva. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza magnética sobre cada segmento.

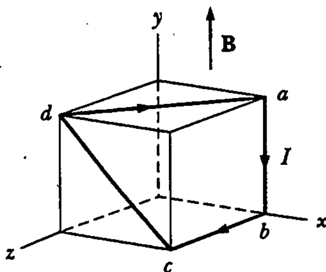


Figura P29.18

19. **Problema de repaso.** Una barra de 0.720 kg de masa y 6.00 cm de radio descansa sobre dos rieles paralelos (Fig. P29.19) separados por una distancia d = 12.0 cm y tienen longitud L = 45.0 cm. La barra conduce una corriente I = 48.0 A en la dirección indicada y rueda a lo largo de los rieles sin deslizarse. Si la barra parte del reposo, ¿cuál es su rapidez cuando deja los rieles si hay un campo magnético uniforme de 0.240 T en dirección perpendicular a la barra y los rieles?

20. **Problema de repaso.** Una barra de masa m y radio R descansa sobre dos rieles paralelos (Fig. P29.19) separados por una distancia d y que tienen longitud L. La barra conduce una corriente I en la dirección indicada y rueda a lo largo de los rieles sin deslizarse. Si la barra parte del reposo, ¿cuál es su rapidez cuando deja los rieles si hay un campo magnético uniforme **B** en dirección perpendicular a la barra y los rieles?

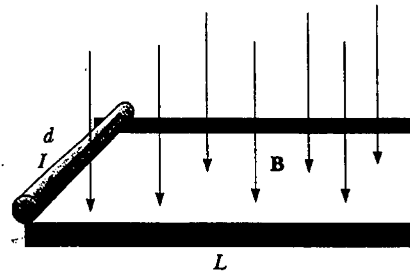


Figura P29.19 Problemas 19 y 20.

WEB 21. *Un campo magnético no uniforme ejerce una fuerza neta sobre un dipolo magnético.* Un imán de gran intensidad se pone bajo un anillo conductor horizontal de radio r que conduce una corriente I, como muestra la figura P29.21. Si el campo magnético **B** forma un ángulo θ con la vertical en la posición del anillo, ¿cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza resultante sobre el anillo?

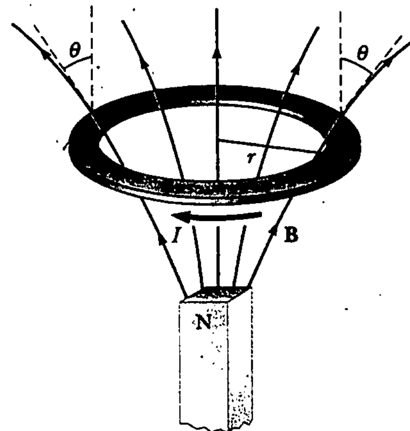


Figura P29.21

22. Suponga que en Atlanta, Georgia, el campo magnético de la Tierra es de 52.0 μT hacia el norte y 60.0° bajo la horizontal. Un tubo en una señal de neón conduce una corriente de 35.0 mA entre las dos esquinas opuestas diagonalmente de la ventana de una tienda, la cual está en el plano vertical norte-sur. La corriente ingresa al tubo en la esquina inferior sur de la ventana. Sale en la esquina opuesta, que está 1.40 m más al norte y 0.850 m más alto. Entre estos dos puntos el tubo fosforescente indica DONAS. Use el teorema proporcionado en el texto como "Caso 1" para determinar el vector total de la fuerza magnética sobre el tubo.

Sección 29.3 Momento de torsión sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme

23. Una corriente de 17.0 mA se mantiene en una espira de circuito individual de 2.00 m de circunferencia. Un campo magnético de 0.800 T se dirige paralelo al plano de la espira. a) Calcule el momento magnético de la espira.

b) ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión ejercido sobre la espira por el campo magnético?

24. Un pequeño imán de barra está suspendido en un campo magnético uniforme de 0.250 T. El momento de torsión máximo experimentado por el imán de barra es de 4.60×10^{-3} N·m. Calcule el momento magnético del imán de barra.

WEB 25. Una espira rectangular consta de $N = 100$ vueltas enrolladas muy próximas entre sí y tiene dimensiones $a = 0.400$ m y $b = 0.300$ m. La espira se articula a lo largo del eje y, y su plano forma un ángulo $\theta = 30.0°$ con el eje x (Fig. P29.25). ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión ejercido sobre la espira por un campo magnético uniforme $B = 0.800$ T dirigido a lo largo del eje x cuando la corriente es $I = 1.20$ A en la dirección indicada? ¿Cuál es la dirección esperada de rotación de la espira?

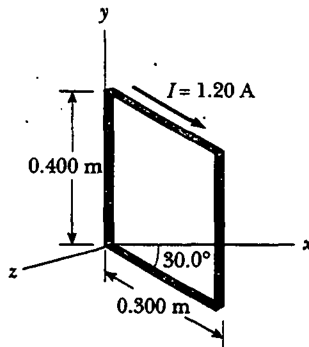


Figura P29.25

26. Un largo pedazo de alambre de 0.100 kg de masa y 4.00 m de longitud se usa para formar una bobina cuadrada de 0.100 m de lado. La bobina se articula a lo largo de un lado horizontal, conduciendo una corriente de 3.40 A y se coloca en un campo magnético vertical de 0.010 0 T de magnitud. a) Determine el ángulo que el plano de la bobina forma con la vertical cuando la bobina está en equilibrio. b) Encuentre el momento de torsión que actúa sobre la bobina debido a la fuerza magnética en equilibrio.

27. Un alambre de 40.0 cm de largo conduce una corriente de 20.0 A. Se dobla en una espira y se coloca con su normal perpendicular a un campo magnético con una intensidad de 0.520 T. ¿Cuál es el momento de torsión sobre la espira si se dobla en la forma de a) un triángulo equilátero, b) un cuadrado, c) un círculo? d) ¿Cuál momento de torsión es más grande?

28. Una espira de corriente con un momento de dipolo $\boldsymbol{\mu}$ se coloca en un campo magnético uniforme **B**. Pruebe que su energía potencial es $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$. Puede reproducir el análisis de la energía potencial de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico proporcionado en el capítulo 26.

29. La aguja de una brújula magnética tiene un momento magnético de 9.70 mA·m². En esta ubicación el campo magnético de la Tierra es de 55.0 μT hacia el norte a 48.0° bajo la horizontal. a) Identifique las orientaciones a las cuales la aguja de la brújula tiene energías potenciales mínima y máxima. b) ¿Cuánto trabajo debe realizarse sobre la aguja para que ésta se mueva desde la primera hasta la última orientación?

30. Se forma un círculo con un alambre de 10.0 cm de diámetro y se pone en un campo magnético uniforme de 3.00 mT. Una corriente de 5.00 A circula por el alambre. Determine a) el momento de torsión máximo sobre el alambre y b) el intervalo de energía potencial del alambre para diferentes orientaciones del círculo en el campo.

Sección 29.4 Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme

31. El campo magnético de la Tierra en cierta localidad está dirigido verticalmente hacia abajo y tiene una magnitud de 50.0 μT. Un protón se mueve horizontalmente hacia el oeste en este campo a una rapidez de 6.20×10^{6} m/s. a) ¿Cuáles son la dirección y magnitud de la fuerza magnética que el campo ejerce sobre esta carga? b) ¿Cuál es el radio del arco circular que sigue este protón?

32. Un ion positivo con una sola carga tiene una masa de 3.20×10^{-26} kg. Después de que es acelerado desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 833 V, el ion entra a un campo magnético de 0.920 T a lo largo de una dirección perpendicular a la dirección del campo. Calcule el radio de la trayectoria del ion en el campo.

33. **Problema de repaso.** Un electrón choca en forma elástica con un segundo electrón inicialmente en reposo. Después del choque los radios de sus trayectorias son 1.00 cm y 2.40 cm. Las trayectorias son perpendiculares a un campo magnético uniforme de 0.044 0 T de magnitud. Determine la energía (en keV) del electrón incidente.

34. Un protón que se mueve en una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético constante tarda 1.00 μs para completar una revolución. Determine la magnitud del campo magnético.

35. Un protón (carga $+e$, masa m_p), un deuterón (carga $+e$, masa $2m_p$) y una partícula alfa (carga $+2e$, masa $4m_p$) se aceleran a través de una diferencia de potencial común ΔV. Las partículas entran a un campo magnético uniforme **B** con una velocidad en dirección perpendicular a **B**. El protón se mueve en una trayectoria circular de radio r_p. Determine los valores de los radios de las órbitas circulares para el deuterón r_d y la partícula alfa r_α en términos de r_p.

36. **Problema de repaso.** Un electrón se mueve en una trayectoria circular perpendicular a un campo magnético constante de magnitud 1.00 mT. Si el *momentum* angular del electrón respecto del centro del círculo es 4.00×10^{-25} J·s, determine a) el radio de la trayectoria circular y b) la rapidez del electrón.

37. Calcule la frecuencia de ciclotrón de un protón en un campo magnético con una magnitud de 5.20 T.

38. Un ion de masa m con una sola carga se acelera desde el reposo por medio de una diferencia de potencial ΔV. Después se desvía por un campo magnético uniforme (perpendicular a la velocidad del ion) hacia un semicírculo de radio R. Después de esto un ion doblemente cargado de masa m' se acelera a través de la misma dife-

rencia de potencial y se desvía mediante el mismo campo magnético hacia un semicírculo de radio $R' = 2R$. ¿Cuál es la relación de las masas de los iones?

39. Un protón de rayos cósmicos en el espacio interestelar tiene una energía de 10.0 MeV y ejecuta una órbita circular con un radio igual al de la órbita de Mercurio alrededor del Sol (5.80×10^{10} m). ¿Cuál es el campo magnético en esta región del espacio?

40. Un ion positivo con una sola carga que se mueve a 4.60×10^5 m/s sale de una trayectoria circular de 7.94 mm de radio a lo largo de una dirección perpendicular a un campo magnético de 1.80 T de una cámara de burbujas. Calcule la masa (en unidades de masa atómica) de este ion, y, a partir de ese valor, identifíquelo.

(Opcional)

Sección 29.5 Aplicaciones que involucran el movimiento de partículas cargadas en un campo magnético

41. Un selector de velocidades se compone de campos magnético y eléctrico descritos por las expresiones $\mathbf{E} = E\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B\mathbf{j}$. Si $B = 0.015\ 0$ T, determine el valor de E tal que un electrón de 750 eV que se mueve a lo largo del eje x positivo no se desvíe.

42. a) Iones de uranio -238 con una sola carga se aceleran a través de una diferencia de potencial de 2.00 kV y entran a un campo magnético uniforme de 1.20 T dirigido perpendicular a sus velocidades. Determine el radio de su trayectoria circular. b) Repita para iones de uranio -235. ¿Cómo depende la relación de radios de trayectoria del voltaje de aceleración y de la intensidad del campo magnético?

43. Considere el espectrómetro de masas que se muestra esquemáticamente en la figura 29.23. El campo eléctrico entre las placas de selector de velocidad es de 2 500 V/m y el campo magnético tanto en el selector de velocidad como en la cámara de desviación tiene una magnitud de 0.035 0 T. Calcule el radio de la trayectoria para un ion con una sola carga que tiene una masa $m = 2.18 \times 10^{-26}$ kg.

44. ¿Cuál es el radio requerido de un ciclotrón diseñado para acelerar protones hasta energías de 34.0 MeV empleando un campo magnético de 5.20 T?

45. Un ciclotrón diseñado para acelerar protones tiene un campo magnético de 0.450 T de magnitud sobre una región de 1.20 m de radio. ¿Cuáles son a) la frecuencia de ciclotrón y b) la rapidez máxima adquirida por los protones?

46. En el acelerador Fermilab en Batavia, Illinois, protones que tienen un *momentum* de 4.80×10^{-16} kg·m/s se mantienen en una órbita circular de 1.00 km de radio mediante un campo magnético hacia arriba. ¿Cuál es la magnitud de este campo?

WEB 47. El tubo de imagen en una televisión emplea bobinas de desviación magnética en lugar de placas de desviación eléctrica. Suponga que un haz de electrones se acelera a través de una diferencia de potencial de 50.0 kV y luego viaja a través de una región de campo magnético uniforme de 1.00 cm de ancho. La pantalla se localiza a 10.0 cm del centro de las bobinas y mide 50.0 cm de ancho. Cuando se desactiva el campo, el haz de electrones incide en el centro de la pantalla. ¿Qué intensidad de campo es necesaria para desviar el haz al lado de la pantalla? Ignore correcciones relativistas.

(Opcional)

Sección 29.6 El efecto Hall

48. Una tira plana de plata que tiene un espesor $t = 0.200$ mm se usa en una medición de efecto Hall de un campo magnético uniforme perpendicular a la tira, como se muestra en la figura P29.48. El coeficiente Hall para la plata es $R_H = 0.840 \times 10^{-10}$ m³/C. a) ¿Cuál es la densidad de los portadores de carga en la plata? b) Si una corriente $I = 20.0$ A produce un voltaje Hall $\Delta V_H = 15.0\ \mu$V, ¿cuál es la magnitud del campo magnético aplicado?

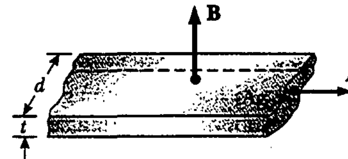


Figura P29.48

49. Una sección de conductor de 0.400 cm de espesor se usa en una medición del efecto Hall. Si se mide un voltaje Hall de 35.0 μV para una corriente de 21.0 A en un campo magnético de 1.80 T, calcule el coeficiente Hall para el conductor.

50. Una tira de cobre plana de 0.330 mm de espesor conduce una corriente estable de 50.0 A y se localiza en un campo magnético uniforme de 1.30 T en dirección perpendicular al plano de la tira. Si un voltaje Hall de 9.60 μV se mide a través de la tira, ¿cuál es la densidad de carga de los electrones libres? ¿Qué número efectivo de electrones libres por átomo indica este resultado?

51. En un experimento diseñado para medir el campo magnético de la Tierra utilizando el efecto Hall, una barra de cobre de 0.500 cm de espesor se coloca a lo largo de una dirección este–oeste. Si una corriente de 8.00 A en el conductor da como resultado un voltaje Hall de 5.10 pV, ¿cuál es la magnitud del campo magnético terrestre? (Suponga que $n = 8.48 \times 10^{28}$ electrones/m³ y que el plano de la barra se gira hasta quedar perpendicular a la dirección de **B**.)

52. Una sonda de efecto Hall funciona con una corriente de 120 mA. Cuando la sonda se pone en un campo magnético uniforme de 0.080 0 T de magnitud, produce un voltaje Hall de 0.700 μV. a) Cuando se mide un campo magnético desconocido, el voltaje Hall es de 0.330 μV. ¿Cuál es la intensidad del campo magnético desconocido? b) Si el espesor de la sonda en la dirección de **B** es 2.00 mm, encuentre la densidad de portadores de carga (cada uno de carga e).

PROBLEMAS ADICIONALES

53. Un electrón entra a la región de un campo magnético de 0.100 T de magnitud, desplazándose perpendicularmente a la frontera lineal de la región. La dirección del campo es perpendicular a la velocidad del electrón. a) Determine el tiempo que tarda el electrón en salir de la región "llena de campo", dado que recorre una trayectoria semicircular. b) Encuentre la energía cinética del electrón si la profundidad de penetración máxima en el campo es de 2.00 cm.

54. Una barra metálica de 0.200 kg que conduce una corriente de 10.0 A se desliza sobre dos rieles horizontales separados 0.500 m. ¿Qué campo magnético vertical se requiere para mantener la barra en movimiento a una rapidez constante si el coeficiente de fricción cinética entre la barra y los rieles es de 0.100?

55. El sodio se funde a 99°C. El sodio líquido, un excelente conductor térmico, se emplea en algunos reactores nucleares para enfriar el núcleo del reactor. El sodio líquido se mueve a través de tuberías mediante bombas que aprovechan la fuerza sobre una carga móvil en un campo magnético. El principio es el siguiente: suponga que el metal líquido está dentro de una tubería aislada eléctricamente con una sección transversal rectangular de ancho w y altura h. Un campo magnético uniforme perpendicular a la tubería afecta una sección de longitud L (Fig. P29.55). Una corriente eléctrica en dirección perpendicular a la tubería y al campo magnético produce una densidad de corriente J en el sodio líquido. a) Explique por qué este arreglo produce en el líquido una fuerza que está dirigida a lo largo de la longitud de la tubería. b) Muestre que la sección de líquido en el campo magnético experimenta un aumento de presión JLB.

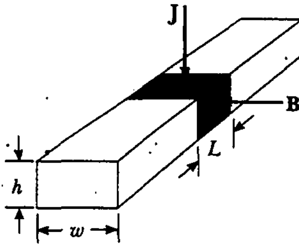


Figura P29.55



56. Protones que tienen una energía cinética de 5.00 MeV se mueven en la dirección x positiva y entran a un campo magnético $\mathbf{B} = (0.050\,0\ \mathbf{k})$ dirigido hacia afuera del plano de la página y que se extiende de $x = 0$ a $x = 1.00$ m, como se muestra en la figura P29.56. a) Calcule la componente y del *momentum* de los protones conforme salen del campo magnético. b) Encuentre el ángulo α entre el vector de velocidad inicial del haz de protones y el vector de velocidad después de que el haz emerge del campo. (*Sugerencia:* ignore los efectos relativistas y observe que 1 eV = 1.60×10^{-19} J.)

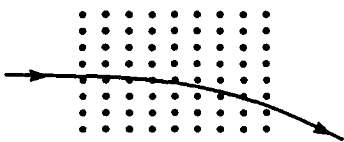


Figura P29.56

57. a) Un protón que se mueve en la dirección $+x$ a una velocidad $\mathbf{v} = v_i\mathbf{i}$ experimenta una fuerza magnética $\mathbf{F} = F_i\mathbf{j}$. Explique qué puede y qué no puede inferir acerca de $\mathbf{B}$ a partir de esta información. b) En términos de F_i, y en el mismo campo, ¿cuál sería la fuerza sobre un protón que se mueve a velocidad $\mathbf{v} = -v_i\mathbf{i}$? c) En el mismo campo, ¿cuál sería la fuerza sobre un electrón que se mueve a velocidad $\mathbf{v} = v_i\mathbf{i}$?

58. **Problema de repaso.** Un alambre que tiene una densidad de masa lineal de 1.00 g/cm se pone sobre una superficie horizontal que tiene un coeficiente de fricción de 0.200. El alambre conduce una corriente de 1.50 A hacia el este y se mueve horizontalmente hacia el norte. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del campo magnético más pequeño que permite al alambre moverse de esta manera?

59. Una carga positiva $q = 3.20 \times 10^{-19}$ C se mueve a una velocidad $\mathbf{v} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 1\mathbf{k})$ m/s a través de una región donde existen tanto un campo magnético uniforme como un campo eléctrico uniforme. a) ¿Cuál es la fuerza total sobre la carga móvil (en notación de vectores unitarios) si $\mathbf{B} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 1\mathbf{k})$ T y $\mathbf{E} = (4\mathbf{i} - 1\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ V/m? b) ¿Qué ángulo forma el vector fuerza con el eje x positivo?

60. Un protón de rayos cósmicos que viaja a la mitad de la rapidez de la luz se dirige directamente hacia el centro de la Tierra en el plano del ecuador terrestre. ¿Golpeará al planeta? Suponga que la magnitud del campo magnético terrestre es uniforme sobre el plano del ecuador de 50.0 μT y que se extiende hacia el exterior 1.30×10^7 m a partir de la superficie de la Tierra. Suponga que el campo es cero a grandes distancias. Calcule el radio de curvatura de la trayectoria del protón en este campo magnético. Ignore efectos relativistas.

61. El circuito en la figura P29.61 se compone de alambres en la parte superior y en la inferior y de resortes metálicos idénticos en los lados izquierdo y derecho. El alambre en el fondo tiene una masa de 10.0 g y mide 5.00 cm de longitud. Los resortes se alargan 0.500 cm bajo el peso del alambre y el circuito tiene una resistencia total de 12.0 Ω. Cuando se activa un campo magnético, que apunta hacia afuera de la página, los resortes se alargan 0.300 cm adicionales. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético? (La parte superior del circuito está fija.)

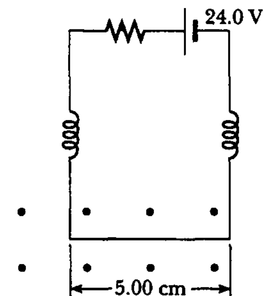


Figura P29.61

62. Una batidora eléctrica de mano contiene un motor eléctrico. Modele el motor como una sola bobina circular compacta y plana que conduce una corriente eléctrica en una región donde un campo magnético es producido por un imán permanente externo. Necesita considerar sólo un instante en la operación del motor. (Los motores se considerarán nuevamente en el capítulo 31.) La bobina se mueve porque el campo magnético ejerce un momento de torsión sobre la misma, como se describió

en la sección 29.3. Realice estimación del orden de magnitud del campo magnético, el momento de torsión sobre la bobina, la corriente sobre ella, su área y el número de vueltas en la bobina, de manera que estén relacionadas de acuerdo con la ecuación 29.11. Advierta que la potencia de entrada al motor es eléctrica, dada por $\mathcal{P} = I\Delta V$, y la potencia de salida útil es mecánica, dada por $\mathcal{P} = \tau\omega$.

63. Una barra metálica con una masa por unidad de longitud de 0.0100 kg/m conduce una corriente de I = 5.00 A. La barra cuelga de dos alambres en un campo magnético vertical uniforme, como se ve en la figura P29.63. Si los alambres forman un ángulo θ = 45.0° con la vertical cuando están en equilibrio, determine la intensidad del campo magnético.

64. Una barra metálica con una masa por unidad de longitud μ conduce una corriente I. La barra cuelga de dos alambres en un campo magnético vertical uniforme como se ve en la figura P29.63. Si los alambres forman un ángulo θ con la vertical cuando están en equilibrio, determine la intensidad del campo magnético.

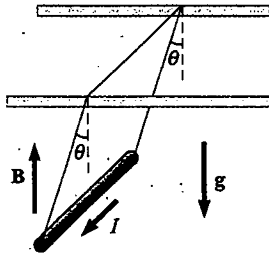


Figura P29.63 Problemas 63 y 64.

65. Los ciclotrones se utilizan algunas veces para determinar la época con carbono, la cual se considera en la sección 44.6. Los iones de carbono -14 y carbono -12 son obtenidos de una muestra del material a ser fechado y acelerados en el ciclotrón. Si el ciclotrón tiene un campo magnético de 2.40 T de magnitud, ¿cuál es la diferencia en las frecuencias del ciclotrón para los dos iones?

66. Un campo magnético uniforme de magnitud 0.150 T apunta a lo largo del eje x positivo. Un positrón que se mueve a 5.00 × 10^6 m/s ingresa al campo a lo largo de una dirección que forma un ángulo de 85.0° con el eje x (Fig. P29.66). El movimiento de la partícula se espera que sea una hélice, como se describe en la sección 29.4. Calcule a) el paso p y b) el radio r de la trayectoria.

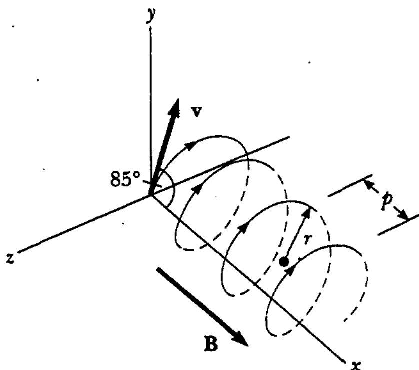


Figura P29.66

67. Considere un electrón que orbita alrededor de un protón y mantiene una trayectoria circular fija de radio R = 5.29 × 10^{-11} m por la fuerza de Coulomb. Tratando a la carga orbital como una espira de corriente, calcule el momento de torsión resultante cuando el sistema está en un campo magnético de 0.400 T dirigido perpendicular al momento magnético del electrón.

68. Un ion con una sola carga completa cinco revoluciones en un campo magnético uniforme de magnitud 5.00 × 10^{-2} T en 1.50 ms. Calcule la masa del ion en kilogramos.

69. Un protón que se mueve en el plano de la página tiene una energía cinética de 6.00 MeV. Entra en un campo magnético de magnitud B = 1.00 T dirigido hacia el interior de la página a un ángulo θ = 45.0° con la frontera lineal recta del campo, como se muestra en la figura P29.69. a) Encuentre la distancia x desde el punto de entrada hasta donde el protón abandona el campo. b) Determine el ángulo θ' entre la frontera y el vector de velocidad del protón cuando éste sale del campo.

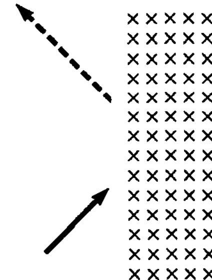


Figura P29.69

70. La tabla P29.70 presenta mediciones de un voltaje Hall y del campo magnético correspondiente a una sonda usada para medir campos magnéticos. a) Grafique estos datos y obtenga una relación entre las dos variables.

TABLA P29.70

$\Delta V_H(\mu V)$	B(T)
0	0.00
11	0.10
19	0.20
28	0.30
42	0.40
50	0.50
61	0.60
68	0.70
79	0.80
90	0.90
102	1.00

b) Si las mediciones se tomaron con una corriente de 0.200 A y la muestra se tomó de un material que tiene una densidad de portadores de carga de $1.00 \times 10^{26}/m^3$, ¿cuál es el espesor de la muestra?

71. Un cardiólogo vigila la rapidez de flujo de sangre a través de una arteria usando un medidor electromagnético de flujo (Fig. P29.71). Los electrodos A y B hacen contacto con la superficie exterior del vaso sanguíneo, el cual tiene 3.00 mm de diámetro interno. a) Para un campo magnético de 0.040 0 T de magnitud, una fem de 160 μV aparece entre los electrodos. Calcule la rapidez de la sangre. b) Verifique que el electrodo A es positivo, como se muestra. ¿El signo de la fem depende de si los iones móviles en la sangre están predominantemente cargados de manera positiva o negativa? Explique.

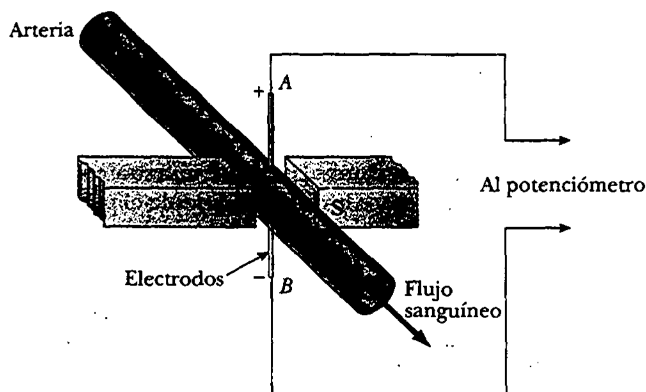


Figura P29.71

72. Como está ilustrado en la figura P29.72, una partícula de masa m que tiene carga positiva q inicialmente viaja hacia arriba a velocidad $v\mathbf{j}$. En el origen de coordenadas ingresa a una región entre $y = 0$ y $y = h$ que contiene un campo magnético uniforme $B\mathbf{k}$ dirigido perpendicular hacia afuera de la página. a) ¿Cuál es el valor crítico de v tal que la partícula apenas alcance $y = h$? Describa la trayectoria de la partícula bajo esta condición y prediga su velocidad final. b) Especifique la trayectoria de la partícula y su velocidad final si v es menor que el valor crítico. c) Especifique la trayectoria de la partícula y su velocidad final si v es mayor que el valor crítico.

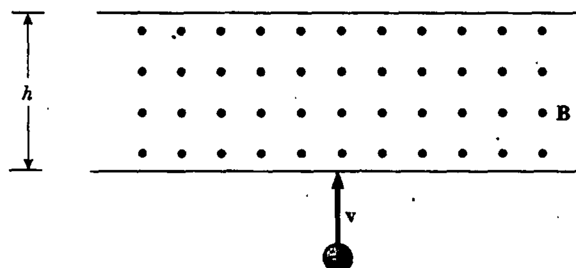


Figura P29.72

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

29.1 Cero. Debido a que la fuerza magnética ejercida por el campo sobre la carga siempre es perpendicular a la velocidad de la carga, el campo nunca puede realizar trabajo alguno sobre la carga: $W = \mathbf{F}_B \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{F}_B \cdot \mathbf{v})\,dt = 0$. El trabajo requiere una componente de fuerza a lo largo de la dirección del movimiento.

29.2 No se ve afectado. La fuerza magnética ejercida por un campo magnético sobre una carga es proporcional a la velocidad de la carga relativa al campo. Si la carga es estacionaria, como en esta situación, no existe fuerza magnética.

29.3 c), b), a), d). Como muestra el ejemplo 29.2, es necesario estar interesado sólo en la "longitud efectiva" del alambre perpendicular al campo magnético o, dicho de otro modo, la longitud de la "sombra del campo magnético" proyectada por el alambre. Para c), 4 m de alambre son perpendiculares al campo. Las pequeñas piezas verticales no experimentan fuerza magnética porque sus corrientes son paralelas al campo. Cuando el alambre en b) se rompe en muchos pequeños segmentos verticales y horizontales que se alternan paralela y perpendicularmente al campo, se encuentra un total de 3.5 m de segmentos horizontales perpendiculares al campo y, en consecuencia, que experimentan una fuerza. Luego viene a), con 3 m de alambre efectivamente perpendicular al campo. Sólo 2 m del alambre en d) experimentan una fuerza. La porción que conduce corriente de 2 a 4 m experimenta una fuerza dirigida hacia afuera de la página, pero esta fuerza es cancelada por una fuerza dirigida de manera opuesta que actúa sobre la corriente mientras se mueve de 4 a 2 m.

29.4 Puesto que está en la región del campo magnético más intenso, el lado ③ experimenta una mayor fuerza que el lado ①: $F_3 > F_1$. En consecuencia, además del momento de torsión resultante de las dos fuerzas, sobre la espira se ejerce una fuerza neta descendente.

29.5 c), b), a). Ya que todas las espiras encierran la misma área y conducen la misma corriente, la magnitud de $\boldsymbol{\mu}$ es la misma para todos. Para c), $\boldsymbol{\mu}$ apunta hacia arriba y es perpendicular al campo magnético y $\tau = \mu B$. Éste es el máximo momento de torsión posible. El siguiente producto cruz de $\boldsymbol{\mu}$ y $\mathbf{B}$ más grande es para b), en el cual $\boldsymbol{\mu}$ apunta hacia el superior derecho (como se ilustra en la Fig. 29.13b). Finalmente, $\boldsymbol{\mu}$ para la espira en a) apunta a lo largo de la dirección de $\mathbf{B}$; en consecuencia, el momento de torsión es cero.

29.6 El selector de velocidad asegura que los tres tipos de partículas tengan la misma rapidez. No se pueden determinar masas o cargas individuales, pero las partículas se pueden clasificar mediante la proporción m/q. La ecuación 29.18 indica que aquellas partículas que viajan a través del círculo de radio más grande tienen la mayor relación m/q. Por tanto, la clasificación m/q, de mayor a menor, es c, b, a.



ACERTIJO

Estos tres artículos de uso común emplean magnetismo para almacenar información. El casete puede almacenar más de una hora de música; el disco flexible puede guardar el equivalente a cientos de páginas de información, y en el videocasete se pueden grabar muchas horas de programas de televisión. ¿Cómo funcionan estos dispositivos? *(George Semple)*

capítulo

30

Fuentes del campo magnético

Líneas generales del capítulo

En el capítulo anterior se estudió la fuerza magnética ejercida sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético. Para completar la descripción de la interacción magnética, este capítulo trata el origen del campo magnético —cargas en movimiento—. El tema inicia mostrando cómo usar la ley de Biot y Savart para calcular el campo magnético producido en algún punto del espacio por un pequeño elemento de corriente. Con este formalismo y el principio de superposición, se calcula entonces el campo magnético total debido a varias distribuciones de corriente. Después, se mostrará cómo determinar la fuerza entre dos conductores portadores de corriente, que llevará a la definición del ampere. También se introduce la ley de Ampère, que es muy útil para calcular el campo magnético de configuraciones altamente simétricas que conducen corrientes estables.

Este capítulo también trata los complejos procesos que ocurren en los materiales magnéticos. Todos los efectos magnéticos en la materia pueden explicarse sobre la base de momentos magnéticos atómicos, los cuales surgen tanto del movimiento orbital de los electrones como de la propiedad intrínseca de los electrones conocida como espín.

LA LEY DE BIOT-SAVART

Poco después de que Oersted descubriera en 1819 que la aguja de una brújula era desviada por un conductor que llevaba corriente, Jean-Baptiste Biot (1774-1862) y Félix Savart (1791-1841) realizaron experimentos cuantitativos sobre la fuerza ejercida por una corriente eléctrica sobre un imán cercano. A partir de sus resultados experimentales, Biot y Savart llegaron a una expresión matemática que proporciona el campo magnético en algún punto en el espacio en términos de la corriente que produce el campo. Dicha expresión está basada en las siguientes observaciones experimentales para el campo magnético $d\mathbf{B}$ en un punto P asociado con un elemento de longitud $d\mathbf{s}$ de un alambre que conduce una corriente estable I (Fig. 30.1):

Propiedades del campo magnético creado por una corriente eléctrica

- El vector $d\mathbf{B}$ es perpendicular tanto a $d\mathbf{s}$ (que apunta en la dirección de la corriente) como al vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ dirigido de $d\mathbf{s}$ a P.
- La magnitud de $d\mathbf{B}$ es inversamente proporcional a r^2, donde r es la distancia desde $d\mathbf{s}$ hasta P.
- La magnitud de $d\mathbf{B}$ es proporcional a la corriente y a la magnitud ds del elemento de longitud $d\mathbf{s}$.
- La magnitud de $d\mathbf{B}$ es proporcional a sen θ, donde θ es el ángulo entre los vectores $d\mathbf{s}$ y $\hat{\mathbf{r}}$.

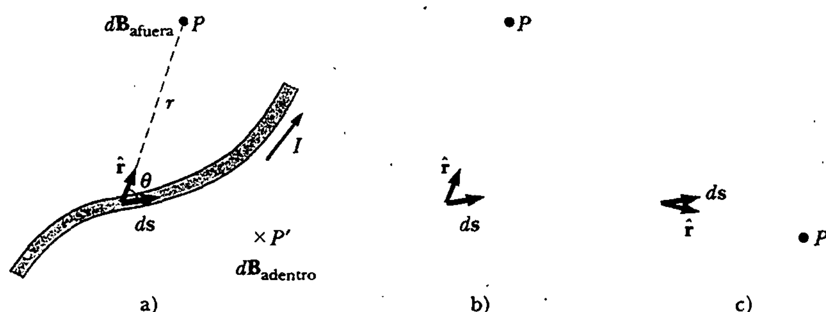


Figura 30.1 a) El campo magnético $d\mathbf{B}$ en el punto P debido a la corriente I a través de un elemento de longitud $d\mathbf{s}$ está dado por la ley de Biot-Savart. La dirección del campo es hacia afuera de la página en P y hacia adentro de la página en P'. b) El producto cruz $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}$ apunta hacia afuera de la página cuando $\hat{\mathbf{r}}$ apunta hacia P. c) El producto cruz $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}$ apunta hacia adentro de la página cuando $\hat{\mathbf{r}}$ apunta hacia P'.

Estas observaciones se resumen en la fórmula matemática conocida en la actualidad como **ley de Biot-Savart**

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad \textbf{(30.1)}$$

Ley de Biot-Savart

donde μ_0 es una constante conocida como **permeabilidad del espacio libre:**

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A} \qquad \textbf{(30.2)}$$

Permeabilidad del espacio libre

Es importante observar que el campo $d\mathbf{B}$ en la ecuación 30.1 es el campo creado por la corriente sólo para un pequeño elemento de longitud $d\mathbf{s}$ del conductor. Para encontrar el campo magnético total **B** creado en algún punto por una corriente de tamaño finito, debe sumar las contribuciones de todos los elementos de corriente $I\,d\mathbf{s}$ que conforman la corriente. Es decir, debe evaluar **B** integrando la ecuación 30.1:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad \textbf{(30.3)}$$

donde la integral se evalúa sobre toda la distribución de corriente. Esta expresión debe manejarse con especial cuidado debido a que el integrando es un producto cruz y, por tanto, una cantidad vectorial. Se verá un caso de tal integración en el ejemplo 30.1.

Aunque se ha desarrollado la ley de Biot-Savart para un alambre que conduce corriente, también es válida para una corriente que consta de cargas que fluyen a través del espacio, como el haz de electrones en una televisión. En este caso $d\mathbf{s}$ representa la longitud de un pequeño segmento del espacio en el cual fluyen las cargas.

Hay similitudes interesantes entre la ley Biot-Savart del magnetismo y la ley de Coulomb de la electrostática. El elemento de corriente produce un campo magnético, en tanto que una carga puntual produce un campo eléctrico. Además, la magnitud del campo magnético varía como el cuadrado inverso de la distancia desde el elemento de corriente, como ocurre con el campo eléctrico debido a una carga puntual. Sin embargo, las direcciones de los dos campos son bastante diferentes. El campo eléctrico creado por una carga puntual es radial, mientras el campo magnético creado por un elemento de corriente es perpendicular tanto al elemento de longitud $d\mathbf{s}$ como al vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$, como se describe por el producto cruz en la ecuación 30.1. Por consiguiente, si el conductor está en el plano de la página, como se muestra en la figura 30.1, $d\mathbf{B}$ apunta hacia afuera de la página en P y hacia adentro de la misma en P'.

Otra diferencia entre los campos eléctrico y magnético está relacionada con la fuente del campo. Un campo eléctrico se establece mediante una carga eléctrica aislada. La ley de Biot-Savart proporciona el campo magnético de un elemento de corriente aislado en algún punto, pero tal elemento de corriente aislado no puede existir de la forma en que puede hacerlo una carga eléctrica aislada. Un elemento de corriente *debe* ser parte de una distribución de corriente extendida porque es necesario tener un circuito completo para que fluyan las cargas. En consecuencia, la ley de Biot-Savart sólo es el primer paso en un cálculo de un campo magnético; debe ser seguido por una integración sobre la distribución de corriente.

En los ejemplos que siguen es importante reconocer que **el campo magnético determinado en esos cálculos es el campo creado por un conductor que transporta corriente.** Este campo no debe confundirse con cualesquier campos adicionales que puedan estar presentes afuera del conductor debidos a otras fuentes, como un imán de barra colocado en la cercanía.

EJEMPLO 30.1 Campo magnético alrededor de un conductor recto delgado

Considere un alambre recto y delgado que conduce una corriente constante I y que se coloca a lo largo del eje x, como se muestra en la figura 30.2. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto P debido a esta corriente.

Solución A partir de la ley de Biot-Savart, se espera que la magnitud del campo sea proporcional a la corriente en el alambre y disminuya conforme aumente la distancia a desde el alambre al punto P. Comience por considerar un elemento de longitud ds que está a una distancia r de P. La dirección del campo magnético en el punto P debido a la corriente en este elemento apunta hacia afuera de la página, pues $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}$ se orienta hacia afuera de la página. De hecho, dado que *todos* los elementos de corriente $I\,d\mathbf{s}$ están en el plano de la página, todos ellos producen un campo magnético dirigido hacia afuera de la página en el punto P. Por tanto, se tiene la dirección del campo magnético en el punto P, y sólo se necesita determinar la magnitud.

Tomando el origen en O y dejando que P esté a lo largo del eje y positivo, con $\mathbf{k}$ como el vector unitario que apunta hacia afuera de la página, se ve que

$$d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{k}\,|d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}| = \mathbf{k}\,(dx \operatorname{sen} \theta)$$

donde, a partir del capítulo 3, $|d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}|$ representa la magnitud de $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}$. Puesto que $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario, la unidad del producto cruz es simplemente la unidad de $d\mathbf{s}$, que es longitud. La sustitución en la ecuación 30.1 produce

$$d\mathbf{B} = (dB)\mathbf{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \operatorname{sen} \theta}{r^2}\mathbf{k}$$

Puesto que todos los elementos de corriente producen un campo magnético en la dirección $\mathbf{k}$, restrinja su atención a la magnitud del campo debido a un elemento de corriente, la cual es

$$1) \qquad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \operatorname{sen} \theta}{r^2}$$

Para integrar esta expresión, se deben relacionar las variables θ, x y r. Una aproximación es expresar x y r en términos de θ. A partir de la geometría de la figura 30.2a se tiene

$$2) \qquad r = \frac{a}{\operatorname{sen} \theta} = a \csc \theta$$

Puesto que $\tan \theta = a/(-x)$ según el triángulo recto en la figura 30.2a (el signo negativo es necesario porque $d\mathbf{s}$ se localiza en un valor negativo de x), se tiene

$$x = -a \cot \theta$$

Tomando la derivada de esta expresión se obtiene

$$3) \qquad dx = a \csc^2 \theta \, d\theta$$

La sustitución de las ecuaciones 2) y 3) en la ecuación 1) produce

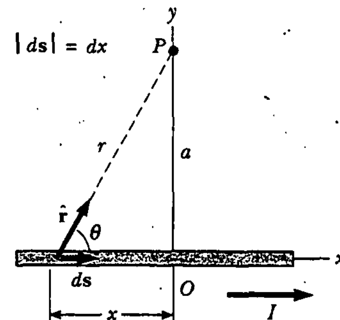
$$4) \qquad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a \csc^2 \theta \operatorname{sen} \theta \, d\theta}{a^2 \csc^2 \theta} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \operatorname{sen} \theta \, d\theta$$

una expresión en la cual la única variable es θ. Ahora se puede obtener la magnitud del campo magnético en el punto P integrando la ecuación 4) sobre todos los elementos que subtienden ángulos que varían de θ_1 a θ_2 como se define en la figura 30.2b:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen} \theta \, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \qquad \textbf{(30.4)}$$

Se puede usar este resultado para encontrar el campo magnético de cualquier alambre recto que transporta corriente si se conoce la geometría y, por tanto, los ángulos θ_1 y θ_2. Considere el caso especial de un alambre recto infinitamente largo. Si se deja que el alambre en la figura 30.2b se vuelva infinitamente largo, se ve que $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi$, para elementos de longitud que varían entre posiciones $x = -\infty$ y $x = +\infty$. Puesto que $(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) = (\cos 0 - \cos \pi) = 2$, la ecuación 30.4 se transforma en

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \qquad \textbf{(30.5)}$$



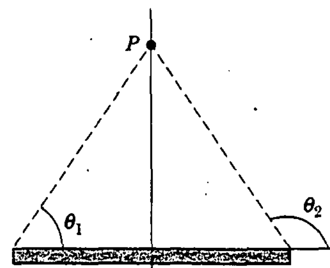


Figura 30.2 a) Un delgado alambre recto que conduce una corriente I. El campo magnético en el punto P debido a la corriente en cada elemento ds del alambre es hacia afuera de la página, de modo que el campo neto en el punto P también es hacia afuera de la página. b) Los ángulos θ_1 y θ_2, usados para determinar el campo neto. Cuando el alambre es infinitamente largo, $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = 180°$.

Las ecuaciones 30.4 y 30.5 muestran que la magnitud del campo magnético es proporcional a la corriente y disminuye cuando aumenta la distancia desde el alambre, como se esperaba. Advierta que la ecuación 30.5 tiene la misma forma matemática que la expresión para la magnitud del campo eléctrico debida a un largo alambre cargado (véase la Ec. 24.7).

Ejercicio Calcule la magnitud del campo magnético a 4.0 cm de un alambre recto de longitud infinita que conduce una corriente de 5.0 A.

Respuesta 2.5×10^{-5} T.

El resultado del ejemplo 30.1 es importante porque una corriente en la forma de un largo alambre recto ocurre con frecuencia. La figura 30.3 es una perspectiva tridimensional del campo magnético que rodea un largo alambre recto que conduce corriente. Debido a la simetría del alambre, las líneas del campo magnético son círculos concéntricos con el alambre y se encuentran en planos perpendiculares al mismo. La magnitud de **B** es constante en cualquier círculo de radio a y está dada por la ecuación 30.5. Una regla conveniente para determinar la dirección de **B** es asir el alambre con la mano derecha, colocando el pulgar a lo largo de la dirección de la corriente. Los cuatro dedos se envuelven en la dirección del campo magnético.



Figura 30.3 La regla de la mano derecha para determinar la dirección del campo magnético que rodea un largo alambre recto que conduce corriente. Advierta que las líneas de campo magnético forman círculos alrededor del alambre.

EJEMPLO 30.2 Campo magnético debido a un segmento de alambre curvo

Calcule el campo magnético en el punto O para el segmento de alambre que conduce corriente mostrado en la figura 30.4. El alambre se compone de dos partes rectas y de un arco circular de radio R, el cual subtiende un ángulo θ. Las puntas de flecha en el alambre indican la dirección de la corriente.

Solución El campo magnético en O debido a la corriente en los segmentos rectos AA' y CC' es cero debido a que $d\mathbf{s}$ es paralelo a $\hat{\mathbf{r}}$ a lo largo de estas trayectorias; esto significa que $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}} = 0$. Cada elemento de longitud $d\mathbf{s}$ a lo largo de la trayectoria AC está a la misma distancia R de O, y la corriente en cada uno contribuye un elemento de campo $d\mathbf{B}$ dirigido hacia adentro de la página en O. Además, en cada punto de la trayectoria AC, $d\mathbf{s}$ es perpendicular a $\hat{\mathbf{r}}$, por lo que $|d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}| = ds$. Con esta información y con la ecuación 30.1 se puede encontrar la magnitud del campo en O debida a la corriente en un elemento de longitud ds:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds}{R^2}$$

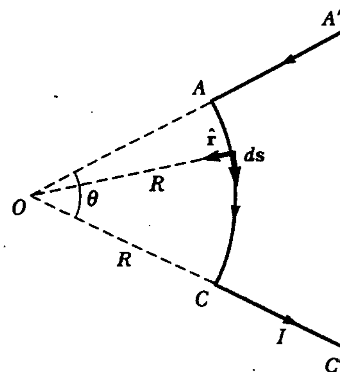


Figura 30.4 El campo magnético en O debido a la corriente en el segmento curvo AC es hacia adentro de la página. La contribución al campo en O debido a la corriente en los dos segmentos rectos es cero.

Puesto que I y R son constantes, se puede integrar fácilmente esta expresión sobre la trayectoria curva AC.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}s = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\theta \qquad \textbf{(30.6)}$$

donde se ha aprovechado el hecho de que $s = R\theta$, donde θ se mide en radianes. La dirección de **B** es hacia adentro de la página en O porque $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}$ apunta hacia adentro de la página para cada elemento de longitud.

Ejercicio Un alambre con forma de espira circular de radio R conduce una corriente I. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético en su centro?

Respuesta $\mu_0 I/2R$.

EJEMPLO 30.3 Campo magnético sobre el eje de una espira de corriente circular

Considere una espira circular de alambre de radio R localizada en el plano yz que conduce una corriente estable I, como se ve en la figura 30.5. Calcule el campo magnético en un punto axial P a una distancia x del centro de la espira.

Solución En esta situación observe que cada elemento de longitud $d\mathbf{s}$ es perpendicular al vector $\hat{\mathbf{r}}$ en la ubicación del elemento. Por tanto, para cualquier elemento, $d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}} = (ds)(1)$ sen 90° $= ds$. Además, todos los elementos de longitud alrededor del lazo están a la misma distancia r desde P, donde $r^2 = x^2 + R^2$. Por tanto, la magnitud de $d\mathbf{B}$ debido a la corriente en cualquier elemento de longitud $d\mathbf{s}$ es

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{|d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{r}}|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{(x^2 + R^2)}$$

La dirección de $d\mathbf{B}$ es perpendicular al plano formado por $\hat{\mathbf{r}}$ y $d\mathbf{s}$, como se muestra en la figura 30.5. El vector $d\mathbf{B}$ puede descomponerse en una componente dB_x a lo largo del eje x, y una componente dB_y perpendicular al eje x. Cuando las componentes dB_y se suman sobre todos los elementos alrededor de la espira, la componente resultante es cero. Es decir, por simetría la corriente en cualquier elemento sobre un lado de la espira coloca una componente perpendicular de $d\mathbf{B}$ que cancela la componente perpendicular colocada por la corriente a través de un elemento diametralmente opuesto a él. Por las razones anteriores, *el campo resultante en* P *debe estar a lo largo del eje* x y puede encontrarse integrando las componentes $dB_x = dB \cos\theta$. Esto es, $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i}$, donde

$$B_x = \oint dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{ds\cos\theta}{x^2 + R^2}$$

y la integral debe tomarse sobre toda la espira. Como θ, x y R son constantes para todos los elementos de la espira, y puesto que $\cos\theta = R/(x^2 + R^2)^{1/2}$ se obtiene

$$B_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi(x^2 + R^2)^{3/2}}\oint ds = \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \qquad \textbf{(30.7)}$$

donde se ha aprovechado el hecho de que $\oint ds = 2\pi R$ (la circunferencia de la espira).

Para encontrar el campo magnético en el centro de la espira, se hace $x = 0$ en la ecuación 30.7. En este punto especial, por tanto,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \qquad (\text{en } x = 0) \qquad \textbf{(30.8)}$$

lo cual es consistente con el resultado del ejercicio en el ejemplo 30.2.

También es interesante determinar el comportamiento del campo magnético lejos de la espira —esto es, cuando x es mucho más grande que R. En este caso se puede ignorar el término R^2 en el denominador de la ecuación 30.7 y obtener

$$B \approx \frac{\mu_0 IR^2}{2x^3} \qquad (\text{para } x \gg R) \qquad \textbf{(30.9)}$$

Puesto que la magnitud del momento magnético μ de la espira se define como el producto de la corriente y el área de la espira (véase la Ec. 29.10) —$\mu = I(\pi R^2)$ para la espira circular— y la ecuación 30.9 se puede expresar como

$$B \approx \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{x^3} \qquad \textbf{(30.10)}$$

Este resultado es similar en forma a la expresión para el campo eléctrico debido a un dipolo eléctrico, $E = k_e(2qa/y^3)$

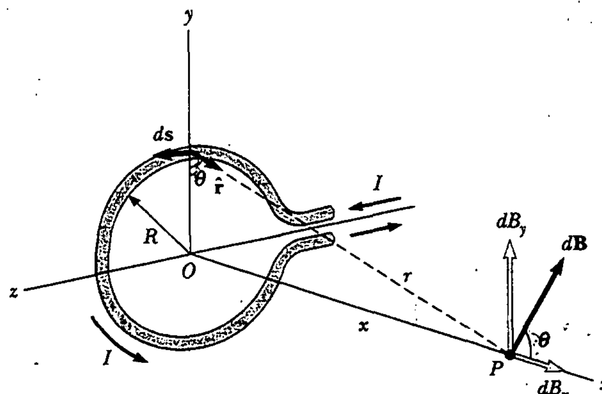


Figura 30.5 Geometría para calcular el campo magnético en un punto P sobre el eje de una espira de corriente. Por simetría, el campo total **B** está a lo largo de este eje.

(véase el ejemplo 23.6) donde $2qa = p$ es el momento de dipolo eléctrico como se define en la ecuación 26.16.

El patrón de las líneas de campo magnético para una espira de corriente circular se muestra en la figura 30.6a. Por claridad, las líneas se dibujan sólo para un plano —el que contiene al eje de la espira—. Advierta que el patrón de las líneas de campo es axialmente simétrico y se parece al patrón que rodea a un imán de barra, mostrado en la figura 30.6c.

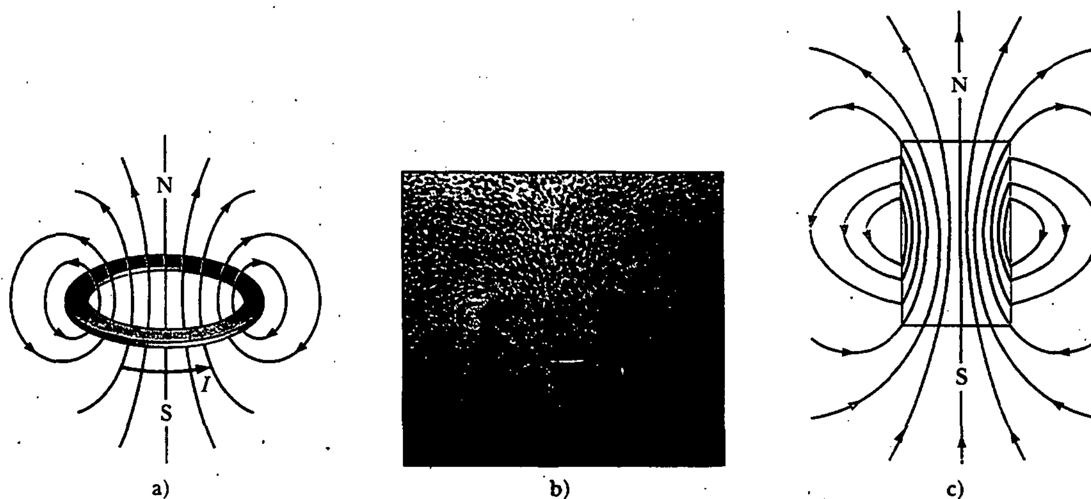


Figura 30.6 a) Líneas de campo magnético que rodean una espira de corriente. b) Líneas de campo magnético que rodean una espira de corriente, mostradas con limaduras de hierro *(Education Development Center, Newton, MA).* c) Líneas de campo magnético que rodean un imán de barra. Advierta la similitud entre este patrón de líneas y el correspondiente a una espira de corriente.

30.2 LA FUERZA MAGNÉTICA ENTRE DOS CONDUCTORES PARALELOS

En el capítulo 29 se describió la fuerza magnética que actúa sobre un conductor que transporta corriente cuando éste se sitúa en un campo magnético externo. Puesto que una corriente en un conductor establece su propio campo magnético, es sencillo entender que dos conductores que llevan corriente ejercen fuerzas magnéticas entre sí. Como se verá, dichas fuerzas pueden utilizarse como la base para definir el ampere y el coulomb.

Considere dos largos alambres paralelos rectos, separados por una distancia a y que conducen las corrientes I_1 e I_2 en la misma dirección, como se muestra en la figura 30.7. Se puede determinar la fuerza ejercida sobre un alambre debido a un campo magnético establecido por el otro alambre. El alambre 2, el cual conduce una corriente I_2, crea un campo magnético $\mathbf{B}_2$ en la posición del alambre 1. La dirección de $\mathbf{B}_2$ es perpendicular al alambre 1, como se muestra en la figura 30.7. De acuerdo con la ecuación 29.3, la fuerza magnética sobre una longitud ℓ del alambre 1 es $\mathbf{F}_1 = I_1\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}_2$. Puesto que $\boldsymbol{\ell}$ es perpendicular a $\mathbf{B}_2$ en esta situación, la magnitud de $\mathbf{F}_1$ es $F_1 = I_1\ell B_2$. Como la magnitud de $\mathbf{B}_2$ está dada por la ecuación 30.5, se ve que

$$F_1 = I_1\ell B_2 = I_1\ell\left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\ell \qquad \textbf{(30.11)}$$

La dirección de $\mathbf{F}_1$ es hacia el alambre 2, pues $\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}_2$ está en dicha dirección. Si se calcula el campo establecido en el alambre 2 por el alambre 1, la fuerza $\mathbf{F}_2$ que actúa sobre el alambre 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a $\mathbf{F}_1$. Esto es lo que se esperaba porque la tercera ley de Newton se debe obedecer[1].

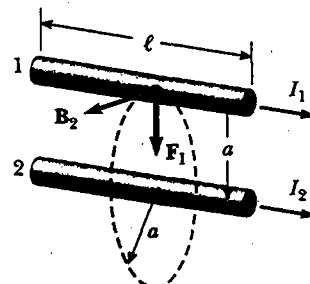


Figura 30.7 Dos alambres paralelos, cada uno conduciendo una corriente estable, ejercen una fuerza entre ellos. El campo $\mathbf{B}_2$ debido a la corriente en el alambre 2 ejerce una fuerza de magnitud $F_1 = I_1\ell B_2$ sobre el alambre 1. La fuerza es atractiva si las corrientes son paralelas (como se muestra) y repulsiva si las corrientes son antiparalelas.

Cuando las corrientes están en direcciones opuestas (esto es, cuando una de las corrientes es inversa en la Fig. 30.7), las fuerzas se invierten y los alambres se repelen uno a otro. Por tanto, se encuentra que **conductores paralelos que llevan corrientes en la misma dirección se atraen entre sí, y conductores paralelos que portan corrientes en direcciones opuestas se repelen entre sí.**

Ya que las magnitudes de las fuerzas son las mismas en ambos alambres, la magnitud de la fuerza magnética entre los alambres se denota simplemente F_B. Esta magnitud se puede reescribir en términos de la fuerza por unidad de longitud:

$$\frac{F_B}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \qquad \textbf{(30.12)}$$

La fuerza entre dos alambres paralelos se usa para definir el **ampere** de la forma siguiente:

Definición del ampere

Cuando la magnitud de la fuerza por unidad de longitud entre dos largos alambres paralelos que conducen corrientes idénticas y están separados por 1 m es de 2×10^{-7} N/m, la corriente en cada alambre se define como 1 A.

El valor 2×10^{-7} N/m se obtiene de la ecuación 30.12, con $I_1 = I_2 = 1$ A y $a = 1$ m. Puesto que esta definición está basada en una fuerza, es posible utilizar una medida mecánica para estandarizar el ampere. Por ejemplo, el Instituto Nacional de Estándares y Tecnología de Estados Unidos utiliza un instrumento llamado *balanza de corriente* para mediciones de corriente primarias. Estos resultados se utilizan luego para estandarizar otros instrumentos más convencionales, como los amperímetros.

web
Para mayor información, visite **http://physics.nist.gov/cuu/Units/ampere.html**

La unidad de carga del SI, el **coulomb**, se define en términos del ampere:

Definición del coulomb

Cuando un conductor lleva una corriente estable de 1 A, la cantidad de carga que fluye por la sección transversal del conductor en 1 s es 1 C.

Al derivar las ecuaciones 30.11 y 30.12 se supuso que ambos alambres eran largos comparados con su distancia de separación. De hecho, sólo un alambre necesita ser largo. Las ecuaciones describen con precisión las fuerzas ejercidas mutuamente por un alambre largo y un alambre paralelo recto de longitud limitada ℓ.

Pregunta sorpresa 30.1

Para $I_1 = 2$ A e $I_2 = 6$ A en la figura 30.7, ¿qué es cierto: a) $F_1 = 3F_2$, b) $F_1 = F_2/3$ o c) $F_1 = F_2$?

Pregunta sorpresa 30.2

Un resorte espiral relajado cuelga del techo, y una gran corriente se hace pasar a través del mismo. ¿Las espiras se mueven acercándose o alejándose?

[1] Aunque la fuerza total ejercida sobre el alambre 1 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza total ejercida sobre el alambre 2, la tercera ley de Newton no se aplica cuando se consideran dos pequeños elementos de los alambres que no están opuestos exactamente entre sí. Esta aparente violación de la tercera ley de Newton y de la ley de conservación del *momentum* se describe en tratamientos más avanzados acerca de electricidad y magnetismo.

30.3 LEY DE AMPÈRE

El descubrimiento de Oersted de 1819 acerca de la desviación de las agujas de brú-
12.4 jula demostró que un conductor que lleva corriente produce un campo magnético. La figura 30.8a muestra cómo puede demostrarse este efecto en el salón de clase. Varias agujas de brújula se ponen en un plano horizontal cerca de un largo alambre vertical. Cuando no hay corriente en el alambre, todas las agujas apuntan en la misma dirección (la del campo magnético de la Tierra), como se esperaría. Cuando el alambre conduce una intensa corriente estable, todas las agujas se desvían en una dirección tangente al círculo, como se ve en la figura 30.8b. Estas observaciones demuestran que la dirección del campo magnético producido por la corriente en el alambre es consistente con la regla de la mano derecha descrita en la figura 30.3. Cuando la corriente se invierte, las agujas en la figura 30.8b también se invierten.



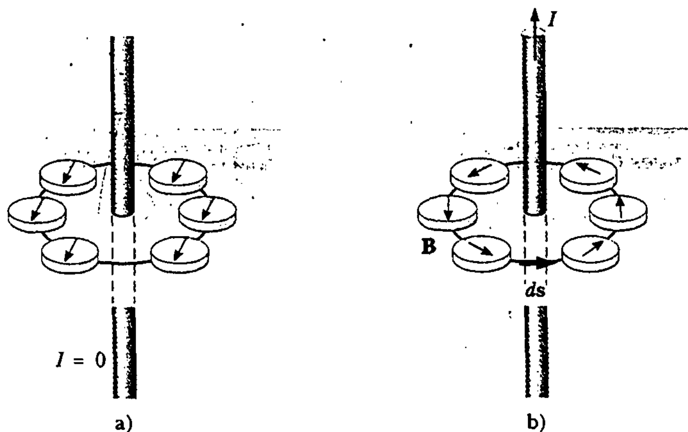
André-Marie Ampère (1775–1836) A Ampère, francés, se le acredita el descubrimiento del electromagnetismo —la relación entre corrientes eléctricas y campos magnéticos. El genio de Ampère, particularmente en las matemáticas, se volvió evidente cuando tenía 12 años de edad; sin embargo, su vida personal estuvo llena de tragedias. Su padre, un opulento oficial de la ciudad, murió en la guillotina durante la Revolución Francesa, y su esposa murió joven, en 1803. Ampère murió de neumonía a la edad de 61 años. El juicio de su vida es claro a partir del epitafio que eligió para su tumba: *Tandem Felix* (Feliz al fin). *(AIP Emilio Segre Visual Archive)*

Ya que las agujas de la brújula apuntan en la dirección de **B**, se concluye que las líneas de **B** forman círculos alrededor del alambre, como se estudió en la sección anterior. Por simetría, la magnitud de **B** es la misma en todos los puntos sobre una trayectoria circular centrada en el alambre y que yace en un plano perpendicular al alambre. Mediante la variación de la corriente y la distancia a desde el alambre, se encuentra que B es proporcional a la corriente e inversamente proporcional a la distancia desde el alambre, como describe la ecuación 30.5.

Ahora se evaluará el producto $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ para un pequeño elemento de longitud $d\mathbf{s}$ sobre la trayectoria circular definida por las agujas de brújula, y se sumarán los productos para todos los elementos sobre la trayectoria circular cerrada. A lo largo de esta trayectoria, los vectores $d\mathbf{s}$ y $\mathbf{B}$ son paralelos en cada punto (véase la Fig. 30.8b), de modo que $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = B\,ds$. Además, la magnitud de $\mathbf{B}$ es constante sobre este círculo y está dada por la ecuación 30.5. Por tanto, la suma de los productos $B\,ds$ sobre la trayectoria cerrada, la cual es equivalente a la integral de línea de $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$, es

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = B\oint ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(2\pi r) = \mu_0 I$$

donde $\oint ds = 2\pi r$ es la circunferencia de la trayectoria circular. Aunque este resultado se calculó para el caso especial de una trayectoria circular que rodea a un alambre,



c)

Figura 30.8 a) Cuando no hay corriente presente en el alambre, todas las agujas de brújula apuntan en la misma dirección (hacia el Polo Norte terrestre). b) Cuando el alambre conduce una corriente intensa, las agujas de brújula se desvían en una dirección tangente al círculo, que es la dirección del campo magnético creado por la corriente. c) Líneas de campo magnético circular que rodean un conductor que transporta corriente, mostradas con limaduras de hierro. *(Henry Leap y Jim Lehman)*

se cumple para una trayectoria cerrada de *cualquier* forma que rodee una *corriente* que permanece constante en el tiempo. El caso general, conocido como **ley de Ampère**, puede enunciarse como sigue:

La integral de línea de $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a $\mu_0 I$, donde I es la corriente continua total que pasa por cualquier superficie delimitada por la trayectoria cerrada.

Ley de Ampère

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \qquad \textbf{(30.13)}$$

La ley de Ampère describe la creación de campos magnéticos por todas las configuraciones de corriente constante, pero en el nivel matemático es útil exclusivamente para calcular el campo magnético de configuraciones de corriente que tienen un alto grado de simetría. Su uso es similar al de la ley de Gauss para calcular campos eléctricos para distribuciones de carga altamente simétricas.

Pregunta sorpresa 30.3

Clasifique las magnitudes de $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ para las trayectorias cerradas de la figura 30.9, de menor a mayor.

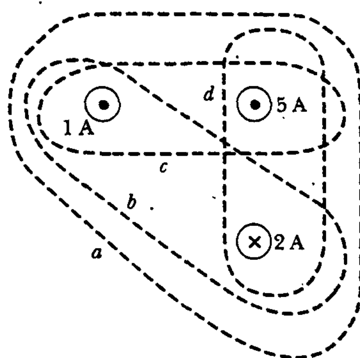


Figura 30.9 Cuatro trayectorias cerradas alrededor de tres alambres que conducen corriente.

Pregunta sorpresa 30.4

Clasifique las magnitudes de $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ para las trayectorias cerradas de la figura 30.10, de menor a mayor.

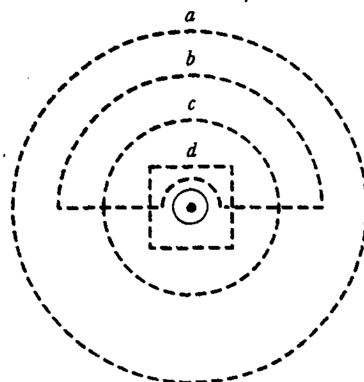


Figura 30.10 Varias trayectorias cerradas cerca de un alambre solo que conduce corriente.

EJEMPLO 30.2 El campo magnético creado por un largo alambre que conduce corriente

Un largo alambre recto de radio R conduce una corriente estable I_0 que está distribuida de manera uniforme a través de la sección transversal del alambre (Fig. 30.11). Calcule el campo magnético a una distancia r del centro del alambre en las regiones $r \geq R$ y $r < R$.

Solución Para el caso $r \geq R$, deberá obtener el mismo resultado obtenido en el ejemplo 30.1, en el cual se aplicó la ley Biot-Savart a la misma situación. Elija como trayectoria de integración el círculo 1 en la figura 30.11. De acuerdo con la simetría, **B** debe ser de magnitud constante y paralelo a ds en todo punto sobre este círculo. Puesto que la corriente total que pasa por el plano del círculo es I_0, la ley de Ampère produce

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B\oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 I_0$$

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad (\text{para } r \geq R) \qquad \textbf{(30.14)}$$

que es idéntica en forma a la ecuación 30.5. Advierta cuán más fácil es usar la ley de Ampère en lugar de emplear la ley Biot-Savart. Con frecuencia éste es el caso en situaciones con alto grado de simetría.

Considere ahora el interior del alambre, donde $r < R$. Aquí la corriente I que pasa por el plano del círculo 2 es menor que la corriente total I_0. Como la corriente es uniforme en la sección transversal del alambre, la fracción de la corriente encerrada por el círculo 2 debe ser igual a la proporción entre el área πr^2 encerrada por el círculo 2 y el área de la sección transversal πR^2 del alambre:[2]

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

$$I = \frac{r^2}{R^2} I_0$$

Siguiendo el mismo procedimiento que para el círculo 1, aplique la ley de Ampère al círculo 2:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B(2\pi r) = \mu_0 I = \mu_0\left(\frac{r^2}{R^2} I_0\right)$$

$$B = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi R^2}\right) r \quad (\text{para } r < R) \qquad \textbf{(30.15)}$$

Este resultado es de forma similar a la expresión del campo eléctrico dentro de una esfera cargada de manera uniforme (véase el ejemplo 24.5). La magnitud del campo magnético *versus* r para esta configuración se dibuja en la figura 30.12. Advierta que dentro del alambre, $B \to 0$ cuando $r \to 0$. Observe también que las ecuaciones 30.14 y 30.15 dan el mismo valor del campo magnético en $r = R$, con lo cual se demuestra que el campo magnético es continuo en la superficie del alambre.

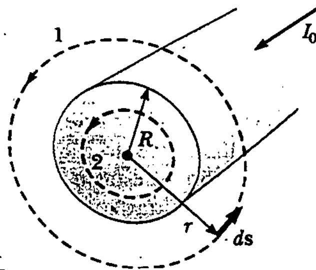


Figura 30.11 Un largo alambre recto de radio R conduciendo una corriente estable I_0 distribuida de manera uniforme a través de la sección transversal del alambre. El campo magnético en cualquier punto puede calcularse a partir de la ley de Ampère usando una trayectoria circular de radio r, concéntrica con el alambre.

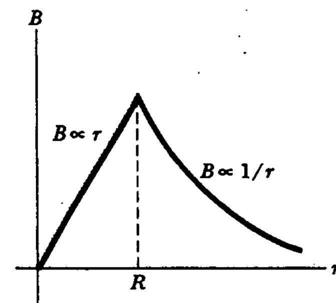


Figura 30.12 Magnitud del campo magnético *versus* r para el alambre mostrado en la figura 30.11. El campo es proporcional a r dentro del alambre y varía como $1/r$ afuera del alambre.

EJEMPLO 30.3 El campo magnético creado por un toroide

Con frecuencia se emplea un dispositivo llamado *toroide* (Fig. 30.13) para crear un campo magnético casi uniforme en alguna área cerrada. El dispositivo consta de un alambre conductor enrollado alrededor de un anillo (un *toro*) hecho de un material no conductor. Para un toroide que tenga N vueltas de alambre espaciadas muy cerca unas de otras, calcule el campo magnético en la región ocupada por el toro, a una distancia r del centro.

[2] Otra forma de abordar este problema es observando que la corriente encerrada por el círculo 2 debe ser igual al producto de la densidad de corriente $J = I_0/\pi R^2$ y el área πr^2 de este círculo.

Solución Para calcular este campo se debe evaluar $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ sobre el círculo de radio r en la figura 30.13. Por simetría, se ve que la magnitud del campo es constante en este círculo y tangente a él, por lo que $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B\,ds$. Además, note que

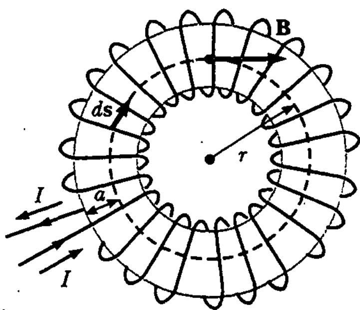


Figura 30.13 Un toroide consta de muchas vueltas de alambre. Si las vueltas están muy juntas, el campo magnético en el interior del toro (la región sombreada en amarillo) es tangente al círculo punteado y varía como $1/r$. El campo afuera del toroide es cero. La dimensión a es el radio transversal del toro.

la trayectoria circular cerrada rodea N vueltas de alambre, cada una de las cuales conduce una corriente I. En consecuencia, el lado derecho de la ecuación 30.13 es $\mu_0 NI$ en este caso. La ley de Ampère aplicada al círculo produce

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \qquad \textbf{(30.16)}$$

Este resultado muestra que B varía como $1/r$ y, por consiguiente, no es uniforme en la región ocupada por el toro. Sin embargo, si r es muy grande comparada con el radio de la sección transversal del toro, entonces el campo es aproximadamente uniforme dentro del toro.

Para un toroide ideal, donde las vueltas están muy juntas unas de otras, el campo magnético externo es cero. Esto puede observarse al ver que la corriente neta que atraviesa cualquier trayectoria circular que se encuentre afuera del toroide es cero (incluyendo la región del "agujero de la dona"). Por tanto, de acuerdo con la ley de Ampère, se encuentra que $B = 0$ en las regiones exteriores al toro.

Ejemplo 30.6 Campo magnético creado por una lámina infinita de corriente

Hasta el momento se ha imaginado corrientes a través de alambres de sección transversal pequeña. Considere ahora un ejemplo en el cual existe una corriente en un objeto extendido. Una delgada lámina, infinitamente larga, que está en el plano yz conduce una corriente cuya densidad de corriente lineal es $\mathbf{J}_s$. La corriente está en la dirección y, y J_s representa la corriente por unidad de longitud medida a lo largo del eje z. Encuentre el campo magnético cerca de la lámina.

Solución Esta situación recuerda cálculos similares que involucran la ley de Gauss (véase el ejemplo 24.8). Usted recordará que el campo eléctrico debido a una lámina infinita de

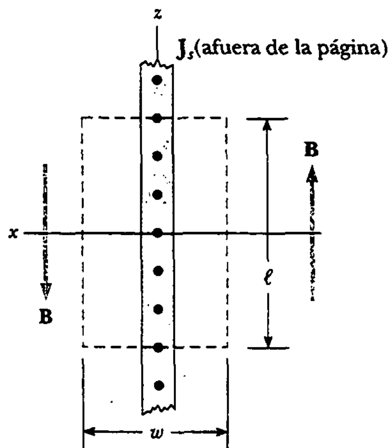


Figura 30.14 Vista lateral de una lámina infinita de corriente que se encuentra en el plano yz, donde la corriente está en la dirección y (afuera de la página). Esta vista muestra la dirección de $\mathbf{B}$ en ambos lados de la lámina.

carga no depende de la distancia desde la lámina. En consecuencia, aquí se puede esperar un resultado similar para el campo magnético.

Para evaluar la integral de línea en la ley de Ampère, considere una trayectoria rectangular a través de la lámina, como se muestra en la figura 30.14. El rectángulo tiene dimensiones ℓ y w, con los lados de longitud ℓ paralelos a la superficie de la lámina. La corriente neta que pasa por el plano del rectángulo es $J_s\ell$. Al aplicar la ley de Ampère sobre el rectángulo se observa que los dos lados de longitud w no contribuyen a la integral de línea debido a que la componente de $\mathbf{B}$ a lo largo de la dirección de estas trayectorias es cero. Por simetría, se puede argumentar que el campo magnético es constante sobre los lados de longitud ℓ, pues cada punto sobre la lámina infinitamente larga es equivalente y, por tanto, el campo no debería variar de punto a punto. Las únicas opciones de dirección de campo que son razonables para la simetría son perpendicular o paralela a la lámina, y un campo perpendicular pasaría *a través* de la corriente, lo cual es inconsistente con la ley Biot-Savart. Suponiendo un campo que es constante en magnitud y paralelo al plano de la lámina, se obtiene

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I = \mu_0 J_s \ell$$

$$2B\ell = \mu_0 J_s \ell$$

$$B = \mu_0 \frac{J_s}{2}$$

Este resultado muestra que *el campo magnético es independiente de la distancia desde la lámina de corriente,* como se esperaba.

EJEMPLO 30.7 La fuerza magnética sobre un segmento de corriente

El alambre 1 en la figura 30.15 se orienta a lo largo del eje y y conduce una corriente estable I_1. Una espira rectangular localizada a la derecha del alambre y en el plano xy conduce una corriente I_2. Encuentre la fuerza magnética ejercida por el alambre 1 sobre el alambre superior (de longitud b) en la espira, marcado "alambre 2" en la figura.

Solución Es posible que usted esté tentado a utilizar la ecuación 30.12 para obtener la fuerza ejercida sobre un pequeño segmento de longitud dx del alambre 2. Sin embargo, esa ecuación se aplica sólo a dos alambres *paralelos*, y no puede utilizarse aquí. El enfoque correcto es considerar la fuerza ejercida por el alambre 1 sobre un pequeño segmento $d\mathbf{s}$ del alambre 2 mediante el uso de la ecuación 29.4. Esta fuerza está dada por $d\mathbf{F}_B = I\, d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$, donde $I = I_2$ y $\mathbf{B}$ es el campo magnético creado por la corriente en el alambre 1 en la posición de $d\mathbf{s}$. Según la ley de Ampère, el campo a una distancia x del alambre 1 (véase la Ec. 30.14) es

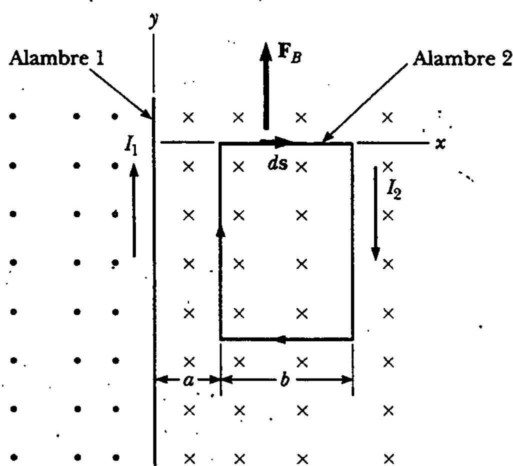


Figura 30.15

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}(-\mathbf{k})$$

donde el vector unitario $-\mathbf{k}$ se usa para indicar que el campo en $d\mathbf{s}$ apunta hacia la página. Como el alambre 2 está a lo largo del eje x, $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i}$, y se encuentra que

$$d\mathbf{F}_B = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}[\mathbf{i} \times (-\mathbf{k})]\, dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{dx}{x}\mathbf{j}$$

La integración de esta ecuación sobre los límites $x = a$ a $x = a + b$ produce

$$\mathbf{F}_B = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln x\Big]_a^{a+b}\mathbf{j} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\left(1 + \frac{b}{a}\right)\mathbf{j}$$

La fuerza apunta en la dirección y positiva, como indica el vector unitario $\mathbf{j}$, y como se muestra en la figura 30.15.

Ejercicio ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre el alambre inferior de longitud b?

Respuesta La fuerza tiene la misma magnitud que la fuerza sobre el alambre 2, pero está dirigida hacia abajo.

Pregunta sorpresa 30.5

¿Alguna fuerza neta actúa sobre la espira de corriente en el ejemplo 30.7? ¿Un momento de torsión?

30.4 EL CAMPO MAGNÉTICO DE UN SOLENOIDE

Un **solenoide** es un alambre largo enrollado en la forma de una hélice. Con esa configuración, es posible producir un campo magnético razonablemente uniforme en el espacio rodeado por las vueltas de alambre —a lo que se le llamará *interior* del solenoide— cuando el solenoide conduce una corriente. Cuando las vueltas están muy próximas entre sí, cada una puede considerarse como una espira circular, y el campo magnético neto es el vector suma de los campos debidos a todas las vueltas.

La figura 30.16 muestra las líneas de campo magnético que rodean un solenoide poco enrollado. Observe que las líneas de campo en el interior son casi paralelas, están distribuidas de modo uniforme y próximas entre sí, lo que indica que el campo en este espacio es intenso y uniforme. Las líneas de campo entre elementos de corriente sobre dos vueltas adyacentes tienden a cancelarse unas con otras, pues los vectores de campo de los dos elementos están en direcciones opuestas. El campo en puntos exteriores como P es débil porque el campo debido a los elementos de corriente en las porciones derechas de una vuelta tiende a cancelar al campo que se debe a los elementos de corriente en las porciones izquierdas.

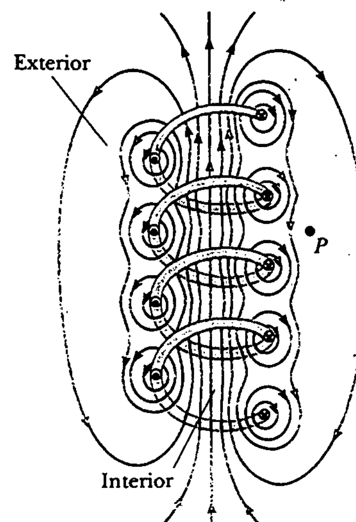
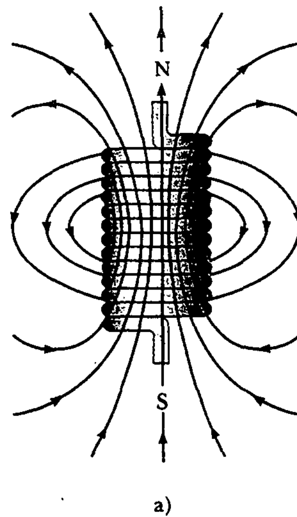


Figura 30.16 Líneas de campo magnético para un solenoide poco enrollado.



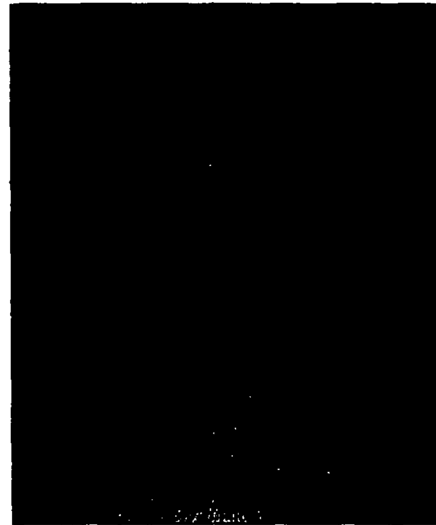


Figura 30.17 a) Líneas de campo magnético para un solenoide de longitud finita enrollado de manera ajustada, el que conduce una corriente estable. El campo en el espacio interior es casi uniforme e intenso. Advierta que las líneas de campo recuerdan las de un imán de barra, lo cual significa que el solenoide efectivamente tiene polos norte y sur. b) Patrón de campo magnético de un imán de barra, desplegado con pequeñas limaduras de hierro sobre una hoja de papel. *(Henry Leap y Jim Lehman)*



Un técnico estudia la exploración de la cabeza de un paciente. La exploración se obtuvo usando una técnica de diagnóstico médico conocida como imagen por resonancia magnética (MRI, por sus siglas en inglés). Este instrumento emplea intensos campos magnéticos producidos por solenoides superconductores. *(Hank Morgan/Science Source)*

Si las vueltas están muy próximas entre sí y el solenoide es de longitud finita, las líneas de campo magnético son como se indica en la figura 30.17a. Esta distribución de líneas de campo es similar a la que rodea a un imán de barra (véase la Fig. 30.17b). Por tanto, un extremo del solenoide se comporta como el polo norte de un imán, mientras que el extremo opuesto lo hace como el polo sur. A medida que crece la longitud del solenoide, el campo interior se vuelve más uniforme mientras que el exterior se debilita. El caso de un *solenoide ideal* se aproxima cuando el espacio entre las vueltas es muy pequeño y la longitud es grande en comparación con el radio de las vueltas. En este caso el campo externo es cero y el campo interior es uniforme en un gran volumen.

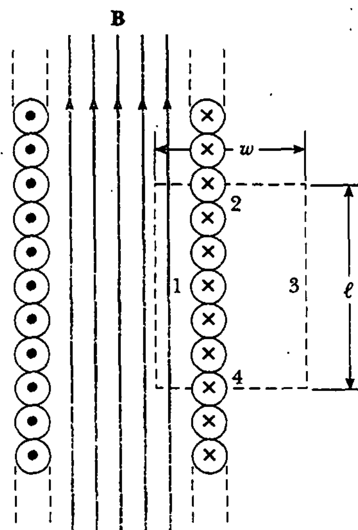


Figura 30.18 Vista transversal de un solenoide ideal, donde el campo magnético interior es uniforme y el campo exterior es cero. La ley de Ampère aplicada a la trayectoria punteada roja puede usarse para calcular la magnitud del campo interior.

Se puede usar la ley de Ampère para obtener una expresión para el campo magnético interior en un solenoide ideal. En la figura 30.18 se muestra una sección longitudinal de parte del solenoide ideal conduciendo una corriente I. Puesto que el solenoide es ideal, **B** en el espacio interior es uniforme y paralelo al eje, y **B** en el espacio exterior es cero. Considere la trayectoria rectangular de longitud ℓ y ancho w mostrada en la figura 30.18. Se puede aplicar la ley de Ampère a esta trayectoria al evaluar la integral de $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ sobre cada lado del rectángulo. La contribución a lo largo del lado 3 es cero, puesto que $B = 0$ en esta región. Las contribuciones de los lados 2 y 4 son cero porque **B** es perpendicular a $d\mathbf{s}$ a lo largo de estas trayectorias. El lado 1 brinda una contribución $B\ell$ a la integral, pues a lo largo de esta trayectoria **B** es uniforme y paralela a $d\mathbf{s}$. En consecuencia, la integral sobre la trayectoria rectangular cerrada es

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\text{trayectoria 1}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = B\int_{\text{trayectoria 1}} ds = B\ell$$

El lado derecho de la ley de Ampère incluye la corriente total que pasa por el área delimitada por la trayectoria de integración. En este caso, la corriente total a través de la trayectoria rectangular es igual a la corriente que pasa por cada vuelta multiplicada por el número de vueltas. Si N es el número de vueltas en la longitud ℓ, entonces la corriente total a través del rectángulo es NI. Por tanto, la ley de Ampère aplicada a esta trayectoria produce

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = B\ell = \mu_0 NI$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 nI \qquad \textbf{(30.17)}$$

Campo magnético dentro de un solenoide

donde $n = N/\ell$ es el número de vueltas por unidad de longitud.

También podría obtener este resultado reconsiderando el campo magnético de un toroide (véase el ejemplo 30.5). Si el radio r del toro en la figura 30.13 que contiene N vueltas es mucho mayor que el radio a de la sección transversal del toroide, entonces una sección corta del toroide se acerca a un solenoide para el cual $n = N/2\pi r$. En este límite la ecuación 30.16 concuerda con la 30.17.

La ecuación 30.17 es válida sólo para puntos cerca del centro (esto es, lejos de los extremos) de un solenoide muy largo. Como usted tal vez esperaba, el campo cerca de cada extremo es más pequeño que el valor dado por la ecuación 30.17. En el extremo mismo de un solenoide largo, la magnitud del campo es la mitad de la correspondiente al campo en el centro.

Experimento sorpresa

Enrolle unas cuantas vueltas de alambre alrededor de una brújula, esencialmente poniéndola dentro de un solenoide. Coloque los extremos del alambre a las dos terminales de una batería de lámpara. ¿Qué le ocurre a la brújula? ¿El efecto es tan fuerte como cuando la brújula está afuera de las vueltas de alambre?

web

Para un análisis más detallado acerca del campo magnético a lo largo del eje de un solenoide, visite **www.saunderscollege.com/physics/**



FLUJO MAGNÉTICO

12.5 El flujo asociado con un campo magnético se define de una manera similar a la usada para definir el flujo eléctrico (véase la Ec. 24.3). Considere un elemento de área dA sobre una superficie de forma arbitraria, como se muestra en la figura 30.19. Si el campo magnético en este elemento es **B**, entonces el flujo magnético a través del elemento es $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}$, donde $d\mathbf{A}$ es un vector perpendicular a la superficie cuya magnitud es igual al área dA. Por tanto, el flujo magnético total Φ_B que atraviesa la superficie es

$$\Phi_B \equiv \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} \qquad \textbf{(30.18)}$$

Definición de flujo magnético

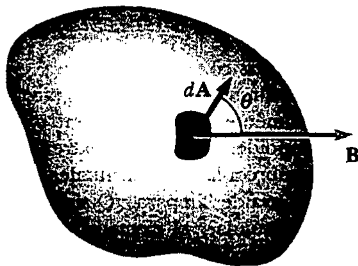
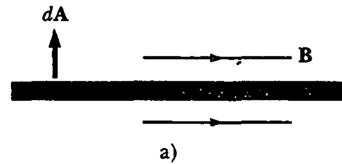


Figura 30.19 El flujo magnético a través de un elemento de área dA es $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = BdA\cos\theta$, donde $d\mathbf{A}$ es un vector perpendicular a la superficie.



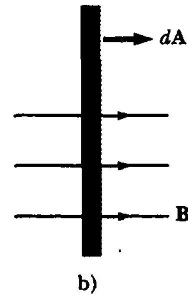


Figura 30.20 Flujo magnético a través de un plano que yace en un campo magnético. a) El flujo a través del plano es cero cuando el campo magnético es paralelo a la superficie del plano. b) El flujo a través del plano es un máximo cuando el campo magnético es perpendicular al plano.

Considere el caso especial de un plano de área A y un campo uniforme **B** que forma un ángulo θ con $d\mathbf{A}$. El flujo magnético a través del plano en este caso es

$$\Phi_B = BA\cos\theta \qquad \textbf{(30.19)}$$

Si el campo magnético es paralelo al plano, como en la figura 30.20a, entonces $\theta = 90°$ y el flujo es cero. Si el campo es perpendicular al plano, como en la figura 30.20b, entonces $\theta = 0°$ y el flujo es BA (el valor máximo).

La unidad de flujo es el $\text{T}\cdot\text{m}^2$, el cual se define como *weber* (Wb); $1\ \text{Wb} = 1\ \text{T}\cdot\text{m}^2$.

EJEMPLO 30.8 Flujo magnético a través de una espira rectangular

Una espira rectangular de ancho a y longitud b se localiza cerca de un alambre largo que conduce una corriente I (Fig. 30.21). La distancia entre el alambre y el lado más cercano de la espira es c. El alambre es paralelo al lado largo de la espira. Encuentre el flujo magnético total a través de la espira debido a la corriente en el alambre.

Solución De la ecuación 30.14 se sabe que la intensidad del campo magnético creado por el alambre a una distancia r del alambre es

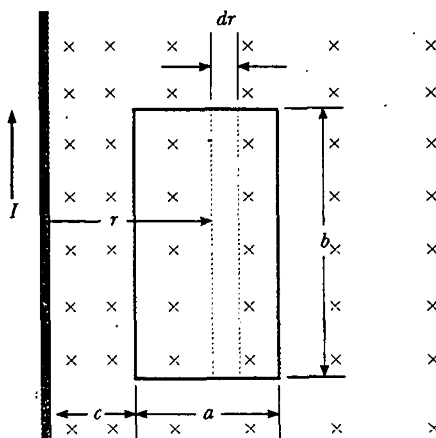


Figura 30.21 El campo magnético debido al alambre que conduce una corriente I no es uniforme sobre la espira rectangular.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

El factor $1/r$ indica que el campo varía sobre la espira y está dirigido hacia el interior de la página, como se muestra en la figura 30.21. Puesto que **B** es paralelo a $d\mathbf{A}$ en cualquier punto dentro de la espira, el flujo magnético a través de un elemento de área dA es

$$\Phi_B = \int B\,dA = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,dA$$

(Ya que **B** no es uniforme sino que depende de r, no puede sacarse de la integral.)

Para integrar, exprese primero el elemento de área (la región mostrada en la Fig. 30.21) como $dA = b\,dr$. En vista de que r es ahora la única variable en la integral, se tiene

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_c^{a+c}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln r\bigg]_c^{a+c}$$

$$= \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\left(\frac{a+c}{c}\right) = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\left(1+\frac{a}{c}\right)$$

Ejercicio Aplique la fórmula de expansión en serie para $\ln(1+x)$ (véase la Apéndice B.5) a esta ecuación para mostrar que produce un resultado razonable cuando la espira está alejada del alambre en comparación con las dimensiones de la espira (en otras palabras, cuando $c \gg a$).

Respuesta $\Phi_B \to 0$.

30.6 LA LEY DE GAUSS EN EL MAGNETISMO

12.5 En el capítulo 24 se encontró que el flujo eléctrico a través de una superficie cerrada que rodea a una carga neta es proporcional a la carga (ley de Gauss). En otras palabras, el número de líneas de campo eléctrico que salen de la superficie depende sólo de la carga neta dentro de ella. Esta propiedad se basa en el hecho de que las líneas de campo eléctrico se originan y terminan en cargas eléctricas.

La situación es bastante diferente para campos magnéticos, los cuales son continuos y forman circuitos cerrados. En otras palabras, las líneas de campo magnético no empiezan o terminan en cualquier punto —como ilustran las líneas de campo magnético del imán de barra en la figura 30.22. Advierta que para cualquier superficie cerrada, tal como la delimitada por la línea punteada roja en la figura 30.22, el número de líneas que entran en la superficie es igual al número que sale de la misma, por lo que el flujo magnético neto es cero. Esto contrasta con el caso de una superficie cerrada que rodea a una carga de un dipolo eléctrico (Fig. 30.23), donde el flujo eléctrico neto no es cero.

La **ley de Gauss del magnetismo** establece que

el flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada es siempre cero:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \qquad (30.20)$$

Ley de Gauss para el magnetismo

Este enunciado se basa en el hecho experimental, mencionado al principio del capítulo 29, de que **nunca se han detectado y quizá no existan polos magnéticos aislados (monopolos)**. No obstante, los científicos continúan la búsqueda porque ciertas teorías que de otro modo tienen éxito en explicar comportamientos físicos fundamentales, sugieren la posible existencia de monopolos.

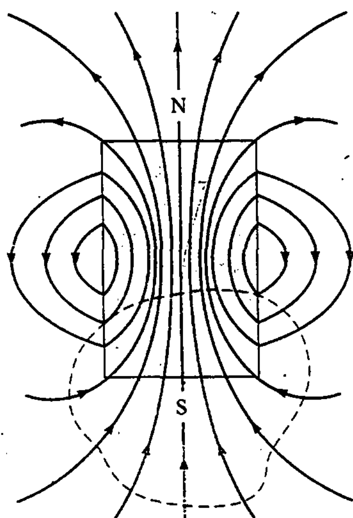


Figura 30.22 Las líneas de campo magnético de un imán de barra forman espiras cerradas. Advierta que el flujo magnético neto a través de la superficie cerrada (línea roja punteada) que rodea uno de los polos (o cualquier otra superficie cerrada) es cero.

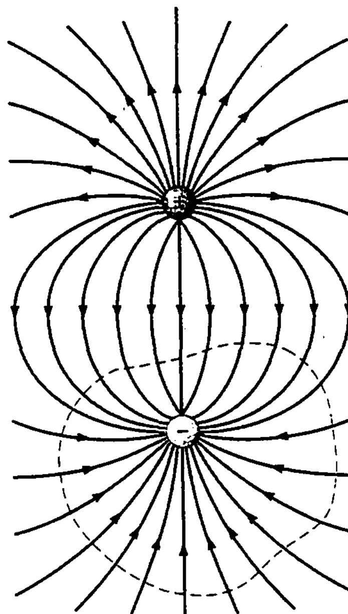


Figura 30.23 Las líneas de campo eléctrico que rodean un dipolo eléctrico comienzan en la carga positiva y terminan en la carga negativa. El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada que rodea una de las cargas no es cero.

CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO Y LA FORMA GENERAL DE LA LEY DE AMPÈRE

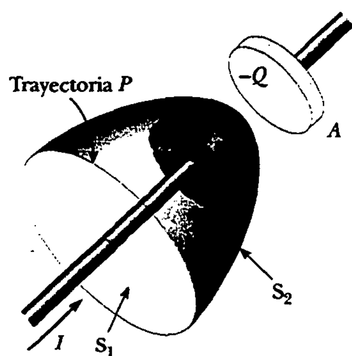


Figura 30.24 Dos superficies S_1 y S_2 cerca de la placa de un capacitor están limitadas por la misma trayectoria *P*. La corriente de conducción en el alambre sólo pasa a través de S_1. Esto conduce a una contradicción en la ley de Ampère, la cual se resuelve sólo si uno postula una corriente de desplazamiento a través de S_2.

Se ha visto que las cargas en movimiento producen campos magnéticos. Cuando un conductor que lleva corriente tiene una alta simetría, se puede usar la ley de Ampère para calcular el campo magnético que crea. En la ecuación 30.13, $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$, la integral de línea es sobre cualquier trayectoria cerrada a través de la cual pasa la corriente de conducción, y la corriente de conducción está definida por $I = dq/dt$. (En esta sección se usa el término *corriente de conducción* para referir la corriente conducida por el alambre, para distinguirla de un nuevo tipo de corriente que se introducirá en breve.) Ahora se mostrará que **la ley de Ampère en esta forma sólo es válida si el campo eléctrico es constante en el tiempo**. Maxwell reconoció esta limitación y modificó la ley de Ampère para incluir campos eléctricos que varían en el tiempo.

Puede entender este problema considerando un capacitor que se está cargando como se ilustra en la figura 30.24. Cuando una corriente de conducción está presente, la carga sobre la placa positiva varía pero *no pasa corriente de conducción a través del espacio entre las placas.* Considere ahora las dos superficies S_1 y S_2 en la figura 30.24, delimitadas por la misma trayectoria *P*. La ley de Ampère señala que $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ alrededor de esta trayectoria debe ser igual a $\mu_0 I$ donde I es la corriente total que pasa por cualquier superficie delimitada por la trayectoria *P*.

12.9 Cuando la trayectoria *P* se considera como la frontera de S_1, $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ es $\mu_0 I$ debido a que la corriente de conducción pasa a través de S_1. Sin embargo, cuando la trayectoria se considera como la frontera de S_2, $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0$ porque ninguna corriente de conducción pasa a través de S_2. Así, ¡se llega a una situación contradictoria que surge de la discontinuidad de la corriente! Maxwell resolvió este problema postulando un término adicional en el lado derecho de la ecuación 30.13, la cual incluye un factor llamado **corriente de desplazamiento** I_d, definida como[3]

Corriente de desplazamiento

$$I_d \equiv \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{30.21}$$

donde ϵ_0 es la permitividad del espacio libre (véase la sección 23.3) y $\Phi_E = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$ es el flujo eléctrico (véase la Ec. 24.3).

A medida que el capacitor se está cargando (o descargando), el campo eléctrico variable entre las placas debe considerarse equivalente a una corriente que actúa como una continuación de la corriente de conducción en el alambre. Cuando la expresión para la corriente de desplazamiento dada por la ecuación 30.21 se añade a la corriente de conducción al lado derecho de la ley de Ampère, se resuelve la dificultad representada en la figura 30.24. No importa qué superficie delimitada por la trayectoria *P* se elija, alguna corriente de conducción o desplazamiento pasará a través de ella. Con este nuevo término I_d, se puede expresar la forma general de la ley de Ampère (algunas veces llamada **ley de Ampère-Maxwell**) como[4]

Ley de Ampère-Maxwell

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{30.22}$$

[3] *Desplazamiento* en este contexto no tiene el significado que se le da en el capítulo 2. A pesar de las imprecisiones implícitas, la palabra está arraigada históricamente en el lenguaje de la física, de manera que se seguirá empleando.

[4] Estrictamente hablando, esta expresión sólo es válida en el vacío. Si un material magnético está presente, uno debe cambiar μ_0 y ϵ_0 en el lado derecho de la ecuación 30.22 a la permeabilidad μ_m y la permitividad ϵ características del material. De manera alternativa, uno puede incluir una corriente de magnetización I_m en el lado derecho de la ecuación 30.22 para hacer a la ley de Ampère completamente general. En una escala microscópica, I_m es tan real como I.

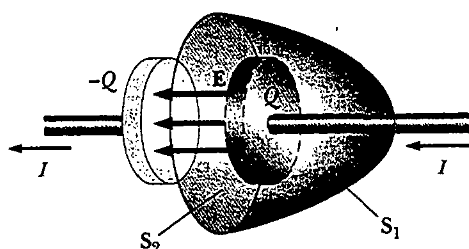


Figura 30.25 Puesto que sólo existe en los alambres unidos a las placas del capacitor, la corriente de conducción $I = dQ/dt$ pasa por S_1 pero no por S_2. Sólo la corriente de desplazamiento $I_d = \epsilon_0\, d\Phi_E/dt$ pasa por S_2. Las dos corrientes deben ser iguales por continuidad.

El significado de esta expresión puede entenderse haciendo referencia a la figura 30.25. El flujo eléctrico a través de la superficie S_2 es $\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = EA$, donde A es el área de las placas del capacitor y E es la intensidad del campo eléctrico uniforme entre las placas. Si Q es la carga sobre las placas en cualquier instante, entonces $E = Q/\epsilon_0 A$ (véase la sección 26.2). Por tanto, el flujo eléctrico a través de S_2 es simplemente

$$\Phi_E = EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Por consiguiente, la corriente de desplazamiento que pasa por S_2 es

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{dQ}{dt} \qquad \textbf{(30.23)}$$

Esto es, ¡la corriente de desplazamiento que pasa por S_2 es precisamente igual a la corriente de conducción I a través de S_1!

Al considerar la superficie S_2 se puede identificar la corriente de desplazamiento como la fuente del campo magnético sobre la frontera de la superficie. La corriente de desplazamiento tiene su origen físico en el campo eléctrico variable en el tiempo. El punto central de este formalismo es, entonces, el hecho de que

los campos magnéticos son producidos tanto por corrientes de conducción como por campos eléctricos que varían con el tiempo.

Este resultado fue un ejemplo notable del trabajo teórico de Maxwell, y contribuyó a mayores avances en la comprensión del electromagnetismo.

Pregunta sorpresa 30.6

¿Cuál es la corriente de desplazamiento para un capacitor de 3 μF completamente cargado?

EJEMPLO 30.9 Corriente de desplazamiento en un capacitor

Un voltaje sinusoidal variable se aplica a través de un capacitor de 8.00 μF. La frecuencia del voltaje es de 3.00 kHz y la amplitud del voltaje igual a 30.0 V. Encuentre la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor.

Solución La frecuencia angular de la fuente, a partir de la ecuación 13.6, es $\omega = 2\pi f = 2\pi(3.00 \times 10^3 \text{ Hz}) = 1.88 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$. En consecuencia, el voltaje a través del capacitor en términos de t es

$$\Delta V = \Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t = (30.0 \text{ V}) \text{ sen}(1.88 \times 10^4 t)$$

Puede usar la ecuación 30.23 y el hecho de que la carga en el capacitor es $Q = C\,\Delta V$ para determinar la corriente de desplazamiento:

$$I_d = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(C\Delta V) = C\frac{d}{dt}(\Delta V)$$

$$= (8.00 \times 10^{-6} \text{F}) \frac{d}{dt}[(30.0\text{V}) \text{ sen}(1.88 \times 10^4 t)]$$

$$= (4.52\text{A}) \cos(1.88 \times 10^4 t)$$

La corriente de desplazamiento varía sinusoidalmente con el tiempo y tiene un valor máximo de 4.52 A.

Sección opcional



30.8 MAGNETISMO EN LA MATERIA

El campo magnético producido por una corriente en una bobina de alambre proporciona un indicio de lo que podría provocar que ciertos materiales muestren fuertes propiedades magnéticas. Antes se encontró que una bobina como la mostrada en la figura 30.17 tiene un polo norte y un polo sur. En general, *cualquier* espira de corriente tiene un campo magnético y, por tanto, un momento de dipolo magnético, incluyendo las espiras de corriente a nivel atómico descritas en algunos modelos del átomo. En consecuencia, los momentos magnéticos en una sustancia magnetizada se pueden describir como si surgieran de esas espiras de corriente a nivel atómico. Para el modelo de Bohr del átomo, estas espiras de corriente están asociadas con el movimiento de electrones alrededor de núcleos en órbitas circulares. También hay un momento magnético intrínseco para electrones, protones, neutrones y otras partículas; éste surge de una propiedad denominada *espín*.

Los momentos magnéticos de átomos

Es instructivo empezar este análisis con un modelo clásico del átomo en el cual los electrones se mueven en órbitas circulares alrededor del núcleo mucho más masivo. En este modelo un electrón orbital constituye una delgada espira de corriente (debido a que es una carga en movimiento) y el momento magnético del electrón se asocia con su movimiento orbital. Aunque este modelo tiene muchas deficiencias, sus predicciones concuerdan bien con la teoría correcta, que está expresada en términos de la física cuántica.

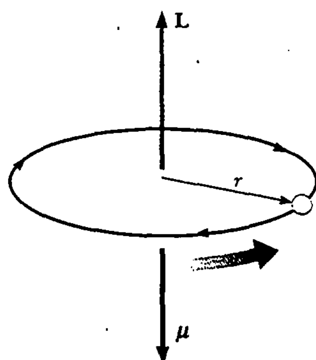


Figura 30.26 Un electrón que se mueve en una órbita circular de radio r tiene un *momentum* angular **L** en una dirección y un momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ en la dirección opuesta.

Considere un electrón que se mueve a rapidez constante v en una órbita circular de radio r alrededor del núcleo, como se muestra en la figura 30.26. Puesto que el electrón recorre una distancia de $2\pi r$ (la circunferencia del círculo) en un tiempo T, su rapidez orbital es $v = 2\pi r/T$. La corriente I asociada con este electrón orbital es su carga e dividida por T. Al emplear $T = 2\pi/\omega$ y $\omega = v/r$, se tiene

$$I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi} = \frac{ev}{2\pi r}$$

El momento magnético asociado con esta espira de corriente es $\mu = IA$, donde $A = \pi r^2$ es el área encerrada por la órbita. Por tanto,

$$\mu = IA = \left(\frac{ev}{2\pi r}\right)\pi r^2 = \tfrac{1}{2}evr \qquad \textbf{(30.24)}$$

Puesto que la magnitud del *momentum* angular orbital del electrón es $L = m_e vr$ (Ec. 11.16 con $\phi = 90°$) el momento magnético puede escribirse como

Momento magnético orbital

$$\mu = \left(\frac{e}{2m_e}\right)L \qquad \textbf{(30.25)}$$

Este resultado demuestra que **el momento magnético del electrón es proporcional a su *momentum* angular orbital.** Observe que como el electrón está cargado negativamente, los vectores $\boldsymbol{\mu}$ y **L** apuntan en direcciones opuestas. Ambos vectores son perpendiculares al plano de la órbita, como indica la figura 30.26.

Momento angular está cuantizado

Un resultado fundamental de la física cuántica es que el *momentum* angular orbital está cuantizado y es igual a múltiplos de $\hbar = h/2\pi = 1.05 \times 10^{-34}$ J·s, donde h es la constante de Planck. El valor no cero más pequeño del momento magnético del electrón que resulta de su movimiento orbital es

$$\mu = \sqrt{2}\,\frac{e}{2m_e}\hbar \qquad \textbf{(30.26)}$$

En el capítulo 42 se verá cómo surgen expresiones como la ecuación 30.26.

En virtud de que todas las sustancias contienen electrones, tal vez usted se pregunte por qué no todas las sustancias son magnéticas. La principal razón es que en la mayor parte de las sustancias, el momento magnético de un electrón en un átomo se cancela por el de otro electrón orbitando en la dirección opuesta. El resultado neto es que, en la mayor parte de los materiales, **el efecto magnético producido por el movimiento orbital de los electrones es o cero o muy pequeño.**

En adición a su momento magnético orbital, un electrón tiene otra propiedad intrínseca llamada **espín**, que también contribuye a su momento magnético. A este respecto el electrón puede verse como girando en torno a su eje mientras orbita al núcleo, como se muestra en la figura 30.27. (Advertencia: esta descripción clásica no debe considerarse literalmente, pues el espín surge de dinámicas relativistas que deben incorporarse al análisis mecánico-cuántico.) La magnitud del *momentum* angular S asociada con el espín es del mismo orden de magnitud que el *momentum* angular L debido al movimiento orbital. La magnitud del *momentum* angular del espín predicha por la teoría cuántica es

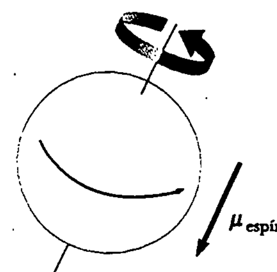


Figura 30.27 Modelo clásico de un electrón girando. Este modelo proporciona una magnitud incorrecta para el momento magnético, números cuánticos incorrectos y demasiados grados de libertad.

Momentum angular del espín

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$$

El momento magnético asociado característicamente al espín de un electrón tiene el valor

$$\mu_{espín} = \frac{e\hbar}{2m_e} \qquad \textbf{(30.27)}$$

Esta combinación de constantes se llama **magnetón de Bohr**:

Magnetón de Bohr

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27 \times 10^{-24}\ \mathrm{J/T} \qquad \textbf{(30.28)}$$

De esta forma, los momentos magnéticos atómicos pueden expresarse como múltiplos del magnetón de Bohr. (Observe que $1\ \mathrm{J/T} = 1\ \mathrm{A\cdot m^2}$.)

En átomos que contienen muchos electrones, éstos suelen aparearse con sus espines opuestos entre sí; por tanto, los momentos magnéticos de espín se cancelan. Sin embargo, los átomos con número impar de electrones deben tener al menos un electrón no apareado y un momento magnético de espín. El momento magnético total de un átomo es la suma vectorial de los momentos magnéticos del orbital y del espín; en la tabla 30.1 se proporcionan algunos ejemplos. Advierta que el helio y el neón tienen momentos cero ya que sus momentos orbital y espín individuales se cancelan.

TABLA 30.1
Momentos magnéticos de algunos átomos y iones

Átomo o ión	Momento magnético (10^{-24} J/T)
H	9.27
He	0
Ne	0
Ce^{3+}	19.8
Yb^{3+}	37.1

Los núcleos de un átomo también tienen un momento magnético asociado con sus protones y neutrones constituyentes. Sin embargo, el momento magnético de un protón o neutrón es mucho más pequeño que el de un electrón y usualmente puede ignorarse. Esto puede entenderse inspeccionando la ecuación 30.28 y reemplazando la masa del electrón con la masa de un protón o un neutrón. Puesto que las masas del protón y del neutrón son mucho mayores que la del electrón, sus momentos magnéticos son del orden de 10^3 veces más pequeños que los del electrón.

Vector de magnetización e intensidad de campo magnético

Vector de magnetización **M**

El estado magnético de una sustancia se describe por medio de una cantidad denominada **vector de magnetización M. La magnitud de este vector se define como el momento magnético por unidad de volumen de la sustancia.** Como tal vez usted esperaba, el campo magnético total **B** en un punto en una sustancia depende tanto del campo (externo) aplicado $\mathbf{B}_0$ como de la magnetización de la sustancia.

Para comprender los problemas involucrados al medir el campo magnético total **B** en tales situaciones, considere esto: los científicos usan pequeñas sondas que

utilizan el efecto Hall (véase la sección 29.6) para medir campos magnéticos. ¿Qué leería tal sonda si fuese colocada dentro del solenoide mencionado en el experimento sorpresa de la página 951 cuando usted inserta la brújula? Como la brújula es un material magnético, la sonda mediría un campo magnético total **B** que es la suma del campo (externo) $\mathbf{B}_0$ del solenoide y el campo (magnetización) $\mathbf{B}_m$ debido a la brújula. Esto indica que se necesita una vía para distinguir entre campos magnéticos originados de corrientes y aquellos originados de materiales magnéticos. Considere una región en la que existe un campo magnético $\mathbf{B}_0$ producido por un conductor por el que circula corriente. Si ahora llena esa región con una sustancia magnética, el campo magnético total **B** en esa región es $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_m$, donde $\mathbf{B}_m$ es el campo producido por la sustancia magnética. Esta contribución puede expresarse en términos del vector de magnetización de la sustancia como $\mathbf{B}_m = \mu_0\mathbf{M}$; por tanto, el campo magnético total en la región se convierte en

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0\mathbf{M} \qquad \textbf{(30.29)}$$

Intensidad de campo magnético **H**

Cuando se analizan campos magnéticos que surgen de magnetización, es conveniente introducir una cantidad de campo llamada **intensidad de campo magnético H** en la sustancia. La intensidad de campo magnético representa el efecto de la corriente de conducción en alambres sobre una sustancia. Para enfatizar la distinción entre la intensidad de campo **H** y el campo **B**, a este último se le suele llamar *densidad de flujo magnético* o la *inducción magnética*. La intensidad de campo magnético es un vector definido por medio de la relación $\mathbf{H} = \mathbf{B}_0/\mu_0 = (\mathbf{B}/\mu_0) - \mathbf{M}$. Por tanto, la ecuación 30.29 puede ser escrita

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \qquad \textbf{(30.30)}$$

Las cantidades **H** y **M** tienen las mismas unidades. En unidades del SI, puesto que **M** es momento magnético por unidad de volumen, las unidades son (ampere)(metro)^2/(metro)^3, o amperes por metro.

Para entender mejor estas expresiones, considere la región del toro de un toroide que conduce una corriente I. Si este espacio es un vacío, $\mathbf{M} = 0$ (pues ningún material magnético está presente), el campo magnético total es el que surge sólo de la corriente y $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 = \mu_0\mathbf{H}$. Puesto que $B_0 = \mu_0 nI$ en la región del toro, donde n es el número de vueltas por unidad de longitud del toroide, $H = B_0/\mu_0 = \mu_0 nI/\mu_0$, o

$$H = nI \qquad \textbf{(30.31)}$$

En este caso el campo magnético B en la región del toro se debe sólo a la corriente en el bobinado del toroide.

Si ahora se hace el toro con alguna sustancia y la corriente I se mantiene constante, entonces **H** en la región del toro permanece invariable (porque sólo depende de la corriente) y tiene magnitud nI. Sin embargo, el campo total **B** es diferente de aquel cuando la región del toro era un vacío. De acuerdo con la ecuación 30.30, se ve que parte de **B** surge del término $\mu_0\mathbf{H}$ asociado con la corriente en el toroide, y otra parte surge del término $\mu_0\mathbf{M}$ debido a la magnetización de la sustancia de la cual está hecho el toro.



El oxígeno, una sustancia paramagnética, es atraído hacia un campo magnético. El oxígeno líquido en esta fotografía se suspende entre los polos del imán. *(Leon Lewandowski)*

Clasificación de sustancias magnéticas

Las sustancias se pueden clasificar como pertenecientes a una de tres categorías, dependiendo de sus propiedades magnéticas. Los materiales **paramagnéticos** y los **ferromagnéticos** son aquellos hechos de átomos que tienen momentos magnéticos permanentes. Los materiales **diamagnéticos** son aquellos hechos de átomos que no tienen momentos magnéticos permanentes.

Para las sustancias paramagnéticas y diamagnéticas, el vector de magnetización **M** es proporcional a la intensidad de campo magnético **H**. Para dichas sustancias, colocadas en un campo magnético externo, se puede escribir

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H} \qquad \textbf{(30.32)}$$

TABLA 30.2 Susceptibilidades magnéticas de algunas sustancias paramagnéticas y diamagnéticas a 300 K

Sustancia paramagnética	χ	Sustancia diamagnética	χ
Aluminio	2.3×10^{-5}	Bismuto	-1.66×10^{-5}
Calcio	1.9×10^{-5}	Cobre	-9.8×10^{-6}
Cromo	2.7×10^{-4}	Diamante	-2.2×10^{-5}
Litio	2.1×10^{-5}	Oro	-3.6×10^{-5}
Magnesio	1.2×10^{-5}	Plomo	-1.7×10^{-5}
Niobio	2.6×10^{-4}	Mercurio	-2.9×10^{-5}
Oxígeno	2.1×10^{-6}	Nitrógeno	-5.0×10^{-9}
Platino	2.9×10^{-4}	Plata	-2.6×10^{-5}
Tungsteno	6.8×10^{-5}	Silicio	-4.2×10^{-6}

donde χ (letra griega chi) es un factor adimensional llamado **susceptibilidad magnética.** Para sustancias paramagnéticas, χ es positiva y **M** está en la misma dirección que **H**. Para sustancias diamagnéticas, χ es negativa y **M** es opuesto a **H**. (Es importante advertir que esta relación lineal entre **M** y **H** no se aplica a sustancias ferromagnéticas.) Las susceptibilidades de algunas sustancias se proporcionan en la tabla 30.2.

Susceptibilidad magnética χ

La sustitución de la ecuación 30.32 para **M** en la ecuación 30.30 da como resultado

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi\mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H}$$

o

$$\mathbf{B} = \mu_m\mathbf{H} \tag{30.33}$$

donde la constante μ_m recibe el nombre de **permeabilidad magnética** de la sustancia y está relacionada con la susceptibilidad mediante

$$\mu_m = \mu_0(1 + \chi) \tag{30.34}$$

Permeabilidad magnética μ_m

Las sustancias pueden clasificarse en términos de cómo se compara su permeabilidad magnética μ_m con μ_0 (la permeabilidad del espacio libre) como sigue:

Paramagnética $\mu_m > \mu_0$

Diamagnética $\mu_m < \mu_0$

Puesto que χ es muy pequeña para sustancias paramagnéticas y diamagnéticas (véase la tabla 30.2), μ_m es casi igual a μ_0 para estas sustancias. Sin embargo, para las sustancias ferromagnéticas, μ_m es por lo común varios miles de veces más grande que μ_0 (lo cual significa que χ es muy grande para las sustancias ferromagnéticas).

Aunque la ecuación 30.33 proporciona una relación simple entre **B** y **H**, debe interpretarse con cuidado cuando se trabaje con sustancias ferromagnéticas. Como se mencionó con antelación, **M** no es una función lineal de **H** para las sustancias ferromagnéticas. Esto se debe a que el valor de μ_m no es sólo una característica de la sustancia ferromagnética, sino que también depende del estado previo de la sustancia y de los procesos a que se sometió conforme se movió desde su estado previo hasta su estado presente. Esto se investigará con mayor profundidad después del ejemplo siguiente.

EJEMPLO 30.10 Un toroide lleno de hierro

Un toroide enrollado con 60.0 vueltas/m de alambre conduce una corriente de 5.00 A. El toro es de hierro, el cual tiene una permeabilidad magnética de $\mu_m = 5\ 000\mu_0$ bajo las condiciones dadas. Encuentre H y B dentro del hierro.

Solución Utilizando las ecuaciones 30.31 y 30.33 se obtiene

$$H = nI = \left(60.0\frac{\text{vueltas}}{\text{m}}\right)(5.00\text{ A}) = 300\frac{\text{A}\cdot\text{vueltas}}{\text{m}}$$

$$B = \mu_m H = 5000\mu_0 H$$
$$= 5000\left(4\pi\times10^{-7}\frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}\right)\left(300\frac{\text{A}\cdot\text{vueltas}}{\text{m}}\right) = 1.88\text{ T}$$

¡Este valor de B es 5 000 veces el valor en ausencia de hierro!

Ejercicio Determine la magnitud del vector magnetización dentro del toro de hierro.

Respuesta $M = 1.5 \times 10^6$ A/m.

Pregunta sorpresa 30.7

La corriente en un solenoide que tiene aire en su interior crea un campo magnético $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$. Describa cualitativamente qué ocurre con la magnitud de **B** conforme se colocan en el interior a) aluminio, b) cobre y c) hierro.

Ferromagnetismo

Un pequeño número de sustancias cristalinas, cuyos átomos tienen momentos magnéticos permanentes muestran intensos efectos magnéticos que reciben el nombre de **ferromagnetismo.** Algunos ejemplos de sustancias ferromagnéticas son hierro, cobalto, níquel, gadolinio y disprosio. Dichas sustancias contienen momentos magnéticos atómicos que tienden a alinearse paralelos entre sí incluso en un campo magnético externo débil. Una vez que los momentos están alineados, la sustancia permanece magnetizada después de que el campo externo se elimina. Este alineamiento permanente se debe a un intenso acoplamiento entre momentos vecinos, lo cual sólo puede entenderse en función de la mecánica cuántica.

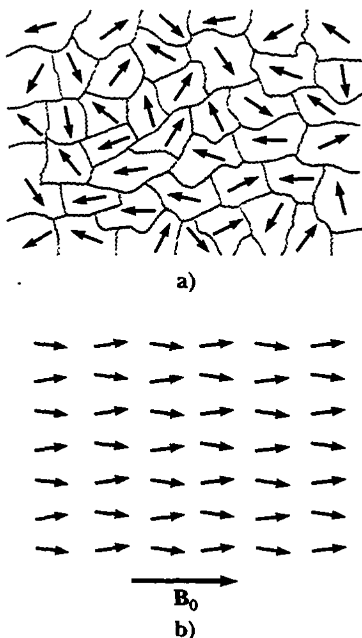


Figura 30.28 a) Orientación aleatoria de momentos magnéticos atómicos en una sustancia desmagnetizada. b) Cuando se aplica un campo externo $\mathbf{B}_0$, los momentos magnéticos atómicos tienden a alinearse con el campo, produciendo en la muestra un vector de magnetización neto **M**.

Todos los materiales ferromagnéticos están constituidos con regiones microscópicas llamadas **dominios,** regiones dentro de las cuales se alinean todos los momentos magnéticos. Estos dominios tienen volúmenes de aproximadamente 10^{-12} a 10^{-8} m^3 y contienen de 10^{17} a 10^{21} átomos. Las fronteras entre los diversos dominios que tienen diferentes orientaciones se conocen como **paredes de dominio.** En una muestra desmagnetizada, los dominios están orientados al azar de modo que el momento magnético neto es cero, como se muestra en la figura 30.28a. Cuando la muestra se pone en un campo magnético externo, los momentos magnéticos de los átomos tienden a alinearse con el campo, lo cual produce una muestra magnetizada, como en la figura 30.28b. Las observaciones muestran que los dominios inicialmente orientados a lo largo del campo externo aumentarán de tamaño a expensas de los dominios orientados menos favorablemente. Cuando se elimina el campo externo, la muestra puede retener una magnetización neta en la dirección del campo original. A temperaturas ordinarias, la agitación térmica no es suficiente para alterar esta orientación preferida de los momentos magnéticos.

Un arreglo experimental característico para medir las propiedades magnéticas de un material ferromagnético se compone de un toro hecho del material enrollado con N vueltas de alambre, como se muestra en la figura 30.29, donde los bobinados son representados en negro y se refieren como la *bobina primaria.* Este aparato se conoce a veces como **anillo Rowland.** Una *bobina secundaria* (los alambres rojos en la Fig. 30.29) conectada a un galvanómetro se usa para medir el flujo magnético total a través del toro. El campo magnético **B** en el toro se mide aumentando la corriente en el toroide desde cero hasta I. A medida que la corriente cambia, el flujo magnético a través de la bobina secundaria cambia por una cantidad BA, donde A

es el área de la sección transversal del toroide. Como se descubrirá en el capítulo 31, debido a este flujo cambiante, se induce una fem en la bobina secundaria que es proporcional a la rapidez de cambio del flujo magnético. Si el galvanómetro se calibra de manera apropiada, es posible obtener un valor para **B** correspondiente a cualquier valor de la corriente en la bobina primaria. El campo magnético **B** se mide primero en la ausencia del toro y luego con el toro en su lugar. Las propiedades magnéticas del material del toro se obtienen luego de una comparación de las dos mediciones.

Considere ahora un toro hecho con hierro desmagnetizado. Si la corriente en la bobina primaria aumenta de cero hasta cierto valor I, la magnitud de la intensidad del campo magnético H aumenta linealmente con I de acuerdo con la expresión $H = nI$. Además, la magnitud del campo total B se incrementa también con el aumento de la corriente, como se muestra por la curva desde el punto O al punto a en la figura 30.30. En el punto O, los dominios en el hierro están orientados al azar, lo que corresponde a $B_m = 0$. Conforme la corriente aumenta en la bobina primaria, provoca que el campo externo $\mathbf{B}_0$ se incremente, los dominios se alinean cada vez más hasta que todos están casi alineados en el punto a. En este punto el núcleo de hierro se acerca a la *saturación*, que es la condición en la cual todos los dominios en el hierro están alineados.

Después, suponga que la corriente se reduce a cero, por lo que se elimina el campo externo. La curva B *versus* H, denominada **curva de magnetización**, sigue ahora la trayectoria ab indicada en la figura 30.30. Advierta que en el punto b, **B** no es cero, aun cuando el campo externo es $\mathbf{B}_0 = 0$. La razón es que el hierro está ahora magnetizado debido al alineamiento de un gran número de sus dominios (esto es, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_m$). En este punto se afirma que el hierro tiene una magnetización *remanente*.

Si la corriente en la bobina primaria se invierte de modo que la dirección del campo magnético externo se invierte, los dominios se reorientan hasta que la muestra está otra vez desmagnetizada en el punto c, donde $B = 0$. Un aumento en la corriente inversa provoca que el hierro se magnetice en la dirección opuesta, acercándose a la saturación en el punto d en la figura 30.30. Una secuencia similar de acontecimientos ocurre cuando la corriente se reduce a cero y luego se aumenta en la dirección (positiva) original. En este caso la curva de magnetización sigue la trayectoria def. Si la corriente se incrementa lo suficiente, la curva de magnetización regresa al punto a, donde la muestra tiene otra vez su magnetización máxima.

El efecto que se acaba de describir, llamado **histéresis magnética**, muestra que la magnetización de una sustancia ferromagnética depende de la historia de la sustancia, así como de la magnitud del campo aplicado. (La palabra *histéresis* literalmente significa "regresar hacia atrás".) A menudo se afirma que una sustancia ferromagnética tiene "memoria", pues permanece magnetizada después de que se elimina el campo externo. La espira cerrada en la figura 30.30 se conoce como una espira de histéresis. Su forma y tamaño dependen de las propiedades de la sustancia ferromagnética y de la intensidad del campo aplicado máximo. La espira de histéresis para

Experimento sorpresa

Probablemente usted habrá realizado este experimento antes. Magnetice una aguja mediante el frotamiento repetido a través de un imán de barra. Pruebe la intensidad del campo magnético de la aguja al levantar algunos sujetapapeles. Ahora golpee la aguja varias veces con un martillo, y de nuevo pruebe la intensidad de su magnetismo. Explique qué ocurre en el acero de la aguja, en términos de dominios.

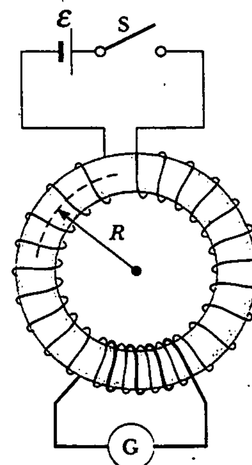


Figura 30.29 Un arreglo de enrollado toroidal empleado para medir las propiedades magnéticas de un material. El toroide está hecho del material bajo estudio, y el circuito que contiene al galvanómetro mide el flujo magnético.

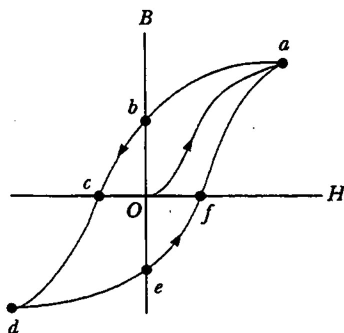


Figura 30.30 Curva de magnetización para un material ferromagnético.

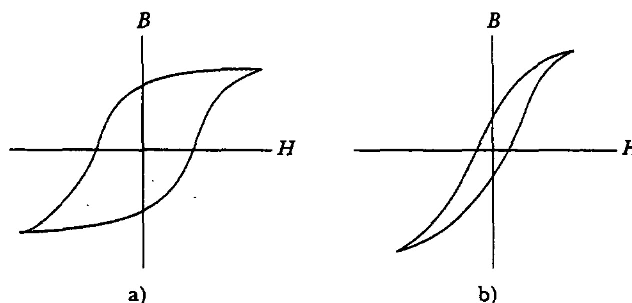


Figura 30.31 Espiras de histéresis para a) un material ferromagnético duro y b) un material ferromagnético blando.

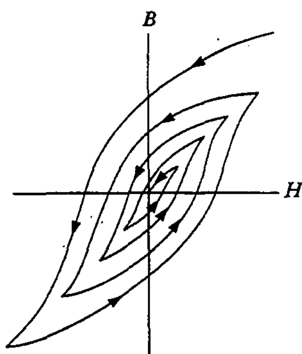


Figura 30.32 Desmagnetización de un material ferromagnético mediante su transportación a través de espiras de histéresis sucesivas.

materiales ferromagnéticos "duros" es característicamente ancha, como la mostrada en la figura 30.31a, lo que corresponde a una gran magnetización remanente. Dichos materiales no pueden ser fácilmente desmagnetizados por medio de un campo externo. Los materiales ferromagnéticos "blandos", como el hierro, tienen una espira de histéresis muy estrecha y magnetización remanente pequeña (Fig. 30.31b.) Estos materiales se magnetizan y desmagnetizan fácilmente. Un ferromagnético blando e ideal no exhibiría histéresis y, por tanto, no tendría magnetización remanente. Una sustancia ferromagnética se puede desmagnetizar llevándola por espiras de histéresis sucesivas, debido a la reducción aplicada al campo magnético, como se muestra en la figura 30.32.

Pregunta sorpresa 30.8

¿Cuál material haría un mejor imán permanente: uno cuya espira de histéresis se viera como en la figura 30.31a o uno cuya espira se viera como en la figura 30.31b?

La curva de magnetización es útil por otra razón: **El área encerrada por la curva de magnetización representa el trabajo requerido para llevar el material por el ciclo de histéresis.** La energía adquirida por el material en el proceso de magnetización se origina en la fuente del campo externo —esto es, la fem en el circuito de la bobina toroidal. Cuando el ciclo de magnetización se repite, los procesos disipativos dentro del material debido al realineamiento de los dominios da como resultado una transformación de energía magnética en energía interna, la cual se evidencia por una elevación en la temperatura de la sustancia. Por esta razón los dispositivos sujetos a campos alternos (como los adaptadores de ca para teléfonos celulares, herramientas eléctricas y cosas por el estilo) usan núcleos fabricados con sustancias ferromagnéticas blandas, los cuales tienen espiras de histéresis estrechas y, en correspondencia, pequeñas pérdidas de energía por ciclo.

Los discos magnéticos de computadora almacenan información al alternar la dirección de **B** para porciones de una fina capa de material ferromagnético. Los discos flexibles tienen la capa sobre una hoja circular de plástico. Los discos duros tienen varias fuentes rígidas con recubrimientos magnéticos a cada lado. Las cintas de audio y video trabajan de la misma manera que los discos flexibles, excepto que el material ferromagnético está sobre una larga tira de plástico. Las finas bobinas de alambre en la cabeza grabadora se colocan cerca del material magnético (el cual pasa con rapidez por la cabeza). Al variar la corriente a través de la bobina se crea un campo que magnetiza el material de grabación. Para recuperar la información, el material magnetizado se mueve frente a una bobina de reproducción. El magnetismo variable del material induce una corriente en la bobina, como se analizará en el capítulo 32. Entonces esta corriente es amplificada por el equipo de audio o video, o es procesada por los circuitos de la computadora.

Paramagnetismo

Las sustancias paramagnéticas tienen una susceptibilidad magnética positiva aunque pequeña ($0 < \chi << 1$), lo cual se debe a la presencia de átomos (o iones) que tienen momentos magnéticos permanentes. Estos momentos interactúan sólo débilmente entre sí y se orientan al azar si no hay campo magnético externo. Cuando una sustancia paramagnética se pone en un campo magnético externo, sus momentos atómicos tienden a alinearse con el campo. Sin embargo, este proceso de alineamiento debe competir con el movimiento térmico, que tiende a volver aleatorias las orientaciones de los momentos magnéticos.

Pierre Curie (1859-1906) y otros después de él encontraron experimentalmente que, bajo una amplia gama de condiciones, la magnetización de una sustancia paramagnética es proporcional al campo magnético aplicado e inversamente proporcional a la temperatura absoluta:

$$M = C\frac{B_0}{T} \quad \textbf{(30.35)}$$

Esta relación se conoce como **ley de Curie** en honor a su descubridor, y la constante C se denomina **constante de Curie**. Esta ley muestra que, cuando $B_0 = 0$, la magnetización es cero, lo que corresponde a una orientación aleatoria de los momentos magnéticos. Conforme la proporción del campo magnético a la temperatura se vuelve mayor, la magnetización se aproxima a su valor de saturación, que corresponde a un alineamiento completo de sus momentos, y la ecuación 30.35 ya no es válida.

Cuando la temperatura de una sustancia ferromagnética alcanza o sobrepasa una temperatura crítica llamada **temperatura de Curie,** la sustancia pierde su magnetización residual y se vuelve paramagnética (Fig. 30.33). Debajo de la temperatura de Curie, los momentos magnéticos se alinean y la sustancia es ferromagnética. Arriba de la temperatura de Curie, la agitación térmica es suficientemente grande para provocar una orientación al azar de los momentos, y la sustancia se vuelve paramagnética. Las temperaturas de Curie de diferentes sustancias ferromagnéticas se proporcionan en la tabla 30.3.

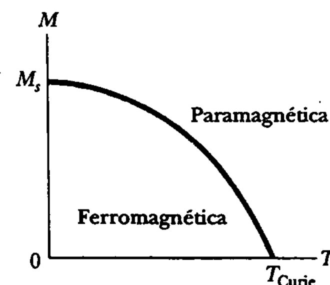


Figura 30.33 Magnetización *versus* temperatura absoluta para una sustancia ferromagnética. Los momentos magnéticos se alinean por debajo de la temperatura de Curie T_{Curie}, donde la sustancia es ferromagnética. La sustancia se vuelve paramagnética (momentos magnéticos no alineados) sobre T_{Curie}.

TABLA 30.3 Temperaturas de Curie para varias sustancias ferromagnéticas

Sustancia	T_{Curie} (K)
Hierro	1 043
Cobalto	1 394
Níquel	631
Gadolinio	317
Fe_2O_3	893

Diamagnetismo

Cuando un campo magnético externo se aplica a una sustancia diamagnética, se induce un débil momento magnético en la dirección opuesta al campo aplicado. Esto provoca que las sustancias diamagnéticas sean repelidas débilmente por un imán. Si bien el diamagnetismo está presente en toda la materia, sus efectos son mucho más pequeños que los del paramagnetismo o el ferromagnetismo, y son evidentes sólo cuando estos otros efectos no existen.

Se puede obtener cierta comprensión del diamagnetismo considerando un modelo clásico de dos electrones de un átomo orbitando el núcleo en direcciones opuestas pero con la misma rapidez. Los electrones permanecen en sus órbitas circulares debido a la fuerza electrostática atractiva ejercida por el núcleo cargado positivamente. Debido a que los momentos magnéticos de los dos electrones son iguales en magnitud y opuestos en dirección, se cancelan entre sí y el momento magnético del átomo es cero. Cuando se aplica un campo magnético externo, los electrones experimentan una fuerza adicional $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Esta fuerza agregada se combina con la fuerza electrostática para aumentar la rapidez orbital del electrón cuyo momento magnético es antiparalelo al campo y disminuir la rapidez del electrón cuyo momento magnético es paralelo al campo. Como consecuencia, los dos momentos magnéticos de los electrones ya no se cancelan, y la sustancia adquiere un momento magnético neto que se opone al campo aplicado.

web

¡Visite **www.exploratorium.edu/snacks/diamagnetism_www/index.html** para un experimento que muestra cómo las uvas son repelidas por imanes!



Figura 30.34 Un pequeño imán permanente levita sobre un disco del superconductor $YBa_2Cu_3O_7$ enfriado a temperatura de nitrógeno líquido (77 K). *(U.S. Department of Energy/Science Source/Photo Researchers, Inc.)*

web Para una descripción más detallada de las inusuales propiedades de los superconductores, visite **www.saunderscollege.com/physics/**

Como recordará del capítulo 27, un superconductor es una sustancia en la cual la resistencia eléctrica es cero debajo de cierta temperatura crítica. Ciertos tipos de superconductores muestran también diamagnetismo perfecto en el estado de superconducción. Como resultado, un campo magnético aplicado es expulsado por el superconductor de modo que el campo es cero en su interior. Este fenómeno de expulsión de flujo se conoce como **efecto Meissner**. Si un imán permanente se acerca a un superconductor, los dos objetos se repelerán entre sí. Esto se ilustra en la figura 30.34, la cual muestra un pequeño imán permanente que levita sobre un superconductor mantenido a 77 K.

EJEMPLO 30.11 Magnetización de saturación

Estime la magnetización de saturación en un cilindro largo de hierro, suponiendo que hay un espín de electrón no pareado por átomo.

Solución La magnetización de saturación se obtiene cuando todos los momentos magnéticos en la muestra están alineados. Si la muestra contiene n átomos por unidad de volumen, entonces la magnetización de saturación M_s tiene el valor

$$M_s = n\mu$$

donde μ es el momento magnético por átomo. Puesto que la masa molar del hierro es 55 g/mol y su densidad es 7.9 g/cm³, el valor de n para el hierro es de 8.6×10^{28} átomos/m³. Suponiendo que cada átomo aporta un magnetón de Bohr (debido a un espín no pareado) al momento magnético, se obtiene

$$M_s = \left(8.6 \times 10^{28}\ \frac{\text{átomos}}{\text{m}^3}\right)\left(9.27 \times 10^{-24}\ \frac{\text{A}\cdot\text{m}^2}{\text{átomo}}\right)$$

$$= 8.0 \times 10^5\ \text{A/m}$$

Esto es aproximadamente la mitad de la magnetización de saturación determinada de forma experimental para el hierro, lo cual indica que hay en realidad dos espines de electrón no pareados por átomo.

Sección opcional



30.9 EL CAMPO MAGNÉTICO DE LA TIERRA

Cuando se habla de que un imán de brújula tiene un polo norte y uno sur, se debería decir más propiamente que tiene un polo que "busca el norte" y uno que "busca el sur". Por esto se entiende que un polo del imán buscará, o apuntará hacia, el polo norte geográfico de la Tierra. Puesto que el polo norte de un imán es atraído hacia el polo norte geográfico de la Tierra, se concluye que **el polo magnético sur de la Tierra está ubicado cerca del polo geográfico norte, y el polo magnético norte de la Tierra está localizado cerca del polo geográfico sur.** En realidad, la configuración del campo magnético terrestre, ilustrado en la figura 30.35, es muy similar a la que se alcanzaría enterrando un gigantesco imán de barra profundamente en el interior de la Tierra.

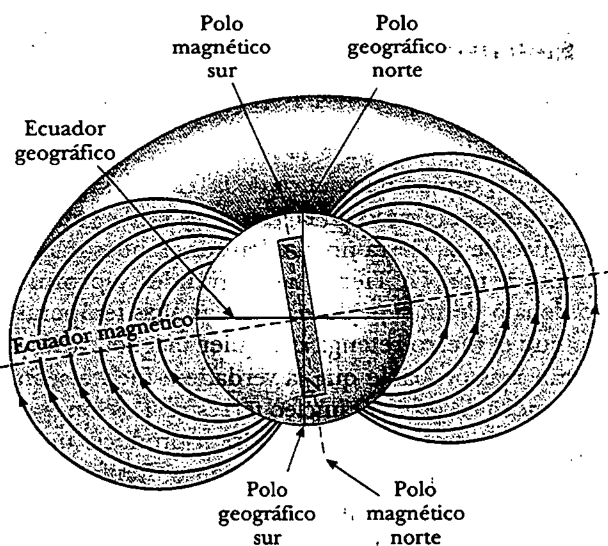


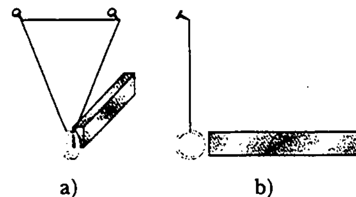
Figura 30.35 Líneas del campo magnético de la Tierra. Advierta que un polo magnético sur está cerca del polo geográfico norte, y un polo magnético norte está cerca del polo geográfico sur.

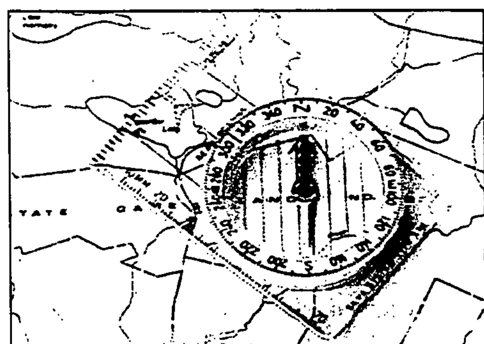
Si la aguja de una brújula se suspende en un eje que le permite girar en el plano vertical, así como en el plano horizontal, la aguja está horizontal con respecto a la superficie terrestre sólo cerca del ecuador. Conforme la brújula se mueve hacia el norte, la aguja gira de modo que apunta más y más hacia la superficie de la Tierra. Por último, en un punto cerca de la Bahía Hudson en Canadá, el polo norte de la aguja apunta directamente hacia abajo. Este sitio, encontrado por primera vez en 1832, se considera como la localidad del polo magnético sur de la Tierra. Este sitio está aproximadamente a 1 300 millas del Polo geográfico Norte de la Tierra y su posición exacta varía lentamente con el tiempo. De manera similar, el polo magnético norte de la Tierra se encuentra a casi 1 200 millas del Polo geográfico Sur terrestre.

Debido a esta distancia entre los polos geográfico norte y magnético sur, sólo es aproximadamente correcto decir que la aguja de una brújula apunta hacia el norte. La diferencia entre el norte real, definido como el Polo geográfico Norte, y el norte indicado por una brújula varía de punto a punto sobre la Tierra, y la diferencia se conoce como *declinación magnética.* Por ejemplo, a lo largo de una línea que pasa por Florida y los Grandes Lagos, una brújula indica el norte verdadero, mientras que en el estado de Washington, se alinea 25° al este del norte real.

Experimento sorpresa

Un anillo de oro es repelido muy débilmente por un imán. Para ver esto suspenda un anillo de oro de 14 o 18 kilates sobre una larga espira de hilo, como se muestra en a). Golpee suavemente el anillo y estime su periodo de oscilación. Ahora haga que el anillo regrese al reposo, dejándolo colgar durante unos cuantos momentos para que usted pueda verificar que no se está moviendo. Rápidamente acerque un imán muy intenso a unos cuantos milímetros del anillo, teniendo cuidado de no golpearlo, como se muestra en b). Ahora aleje el imán. Repita esta acción muchas veces, igualando el periodo de oscilación que estimó con anterioridad. Esto es similar a empujar a un niño en un columpio. Una pequeña fuerza aplicada en la frecuencia de resonancia da como resultado una oscilación de gran amplitud. Si usted tiene un anillo de platino, podrá ver un efecto similar, excepto que el platino es atraído débilmente a un imán debido a que es paramagnético.





El extremo norte de la aguja de una brújula apunta al polo magnético *sur* de la Tierra. La dirección "norte" de la brújula varía del verdadero norte geográfico dependiendo de la declinación magnética a la cual apunta sobre la superficie de la Tierra. *(George Semple)*

Pregunta sorpresa 30.9

Si se quisiese cancelar el campo magnético de la Tierra haciendo pasar una enorme espira de corriente alrededor del ecuador, ¿hacia qué lado debería fluir la corriente: de este a oeste o de oeste a este?

Aunque el patrón del campo magnético de la Tierra es similar al que podría establecer un imán de barra enterrado en la Tierra, es fácil entender por qué la fuente del campo magnético de la Tierra no pueden ser grandes masas de material magnetizado permanentemente. La Tierra tiene grandes y profundos depósitos de mineral de hierro debajo de su superficie, pero las altas temperaturas en el núcleo de la Tierra evitan que el hierro retenga cualquier magnetización permanente. Los científicos consideran más probable que la verdadera fuente sean las corrientes de convección que conducen carga en el núcleo terrestre. Los iones cargados o los electrones que circulan en el interior líquido podrían producir un campo magnético, del mismo modo que lo hace una espira de corriente. También hay fuerte evidencia de que la intensidad del campo magnético de un planeta se relaciona con la rapidez de rotación del mismo. Por ejemplo, Júpiter gira más rápido que la Tierra, y las sondas espaciales indican que el campo magnético de Júpiter es más intenso que el de la Tierra. Venus, por otra parte, gira más lentamente que la Tierra, y se ha encontrado que su campo magnético es más débil. La investigación de la causa del magnetismo terrestre permanece abierta.

Hay un interesante aspecto colateral respecto del campo magnético de la Tierra. Se ha descubierto que la dirección del campo se ha invertido varias veces durante los últimos millones de años. Evidencias de lo anterior son proporcionadas por el basalto, un tipo de roca que contiene hierro y que se forma de material arrojado por la actividad volcánica sobre el piso oceánico. Cuando la lava se enfría, se solidifica y mantiene una huella de la dirección del campo magnético terrestre. Las rocas son fechadas por otros medios para proporcionar una cronografía de estas inversiones periódicas del campo magnético.

RESUMEN

La **ley de Biot-Savart** señala que el campo magnético $d\mathbf{B}$ en un punto P debido a un elemento de longitud $d\mathbf{s}$ que conduce una corriente estable I es

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\mathbf{s}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \qquad \textbf{(30.1)}$$

donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A es la **permeabilidad del espacio libre,** r es la distancia del elemento al punto P, y $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario que apunta desde $d\mathbf{s}$ al punto P. Se puede encontrar el campo total en P integrando esta expresión sobre toda la distribución de corriente.

El campo magnético a una distancia a de un alambre largo y recto por el que circula una corriente I es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \qquad \textbf{(30.5)}$$

Las líneas de campo son círculos concéntricos con el alambre.

La fuerza magnética por unidad de longitud entre dos alambres paralelos separados por una distancia a y que conducen las corrientes I_1 e I_2 tiene una magnitud

$$\frac{F_B}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} \qquad \textbf{(30.12)}$$

La fuerza es atractiva si las corrientes están en la misma dirección, y repulsiva si están en direcciones opuestas.

La **ley de Ampère** establece que la integral de línea de $\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a $\mu_0 I$, donde I es la corriente estable total que pasa por cualquier superficie delimitada por la trayectoria cerrada:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I \qquad \textbf{(30.13)}$$

Empleando la ley de Ampère, se encuentra que los campos dentro de un toroide y un solenoide son

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad \text{(toroide)} \qquad \textbf{(30.16)}$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 n I \quad \text{(solenoide)} \qquad \textbf{(30.17)}$$

donde N es el número total de vueltas.

El **flujo magnético** Φ_B a través de una superficie está definido por la integral de superficie

$$\Phi_B \equiv \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} \qquad \textbf{(30.18)}$$

La **ley de Gauss del magnetismo** establece que el flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada es cero.

La forma general de la ley de Ampère, la cual también se conoce como **ley Ampère-Maxwell,** es

$$\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad \textbf{(30.22)}$$

Esta ley describe el hecho de que los campos magnéticos son producidos tanto por corrientes de conducción como por campos eléctricos variables.

PREGUNTAS

1. ¿Es uniforme el campo magnético creado por una espira de corriente? Explique.
2. Una corriente en un conductor produce un campo magnético que puede calcularse utilizando la ley de Biot-Savart. Puesto que la corriente se define como la rapidez de flujo de carga, ¿qué se puede concluir acerca del campo magnético producido por cargas estacionarias? ¿Qué acerca de las producidas por cargas en movimiento?
3. Dos alambres paralelos conducen corrientes en direcciones opuestas. Describa la naturaleza del campo magnético creado por los alambres en puntos a) entre los alambres y b) afuera de los alambres en un plano que los contiene.
4. Explique por qué dos alambres paralelos que conducen corrientes en direcciones opuestas se repelen entre sí.
5. Cuando se ensambla un circuito eléctrico, una práctica común es torcer juntos dos alambres que conducen corrientes iguales en direcciones opuestas. ¿Por qué esta técnica reduce los campos magnéticos parásitos?
6. ¿La ley de Ampère es válida para todas las trayectorias cerradas que circundan un conductor? ¿Por qué no es útil para calcular **B** para todas esas trayectorias?
7. Compare la ley de Ampère con la de Biot-Savart. ¿Cuál es por lo general más útil para calcular **B** en el caso de un conductor por el que circula corriente?
8. ¿El campo dentro de un toroide es uniforme? Explique.
9. Describa las similitudes entre la ley de Ampère en magnetismo y la ley de Gauss en electrostática.
10. Un tubo de cobre hueco conduce una corriente a través de su longitud. ¿Por qué **B** = 0 dentro del tubo? ¿**B** es diferente de cero afuera del tubo?
11. ¿Por qué **B** no es cero afuera de un solenoide? ¿Por qué **B** = 0 afuera de un toroide? (Recuerde que las líneas de **B** deben formar trayectorias cerradas.)
12. Describa el cambio en el campo magnético en el interior de un solenoide que conduce una corriente estable I a) si la longitud del solenoide se duplica pero el número de vueltas permanece igual, y b) si el número de vueltas se duplica, pero la longitud permanece invariable.
13. Una espira conductora plana se localiza en un campo magnético uniforme dirigido a lo largo del eje x. ¿Para qué orientación de la espira el flujo a través del mismo es un máximo? ¿Un mínimo?
14. ¿Qué nuevo concepto incluyó la forma generalizada de Maxwell de la ley de Ampère?
15. Muchas espiras de alambre se enrollan alrededor de un clavo y luego se conectan a una batería. Identifique las fuentes de **M**, **H** y **B**.

16. Un imán atrae un pedazo de hierro. El hierro puede entonces atraer otro pedazo de hierro. Con base en el alineamiento de dominios, explique qué sucede en cada pedazo de hierro.
17. Usted es un astronauta perdido en un planeta que no tiene campo magnético y no cuenta con equipo de prueba. Usted cuenta con dos imanes de hierro: uno magnetizado y el otro no. ¿Cómo podría usted determinar cuál es cuál?
18. ¿Por qué golpear un imán con un martillo provoca que el magnetismo se reduzca?
19. ¿Un clavo será atraído a cualquier polo de un imán? Explique lo que está sucediendo dentro del clavo cuando se pone cerca de un imán.
20. Un soberano hindú sugirió una vez que se le sepultara en un féretro magnético con la polaridad arreglada de modo que él siempre estuviera suspendido entre el cielo y la tierra. ¿Es posible tal levitación magnética? Analice.
21. ¿Por qué **M** = 0 en el vacío? ¿Cuál es la relación entre **B** y **H** en el vacío?
22. Explique por qué algunos átomos tienen momentos magnéticos permanentes y otros no.
23. ¿Qué factores contribuyen al momento magnético total de un átomo?
24. ¿Por qué es negativa la susceptibilidad magnética de una sustancia diamagnética?
25. ¿Por qué puede ignorarse el efecto del diamagnetismo en una sustancia paramagnética?
26. Explique la importancia de la temperatura de Curie en una sustancia ferromagnética.
27. Analice las diferencias entre sustancias ferromagnéticas, paramagnéticas y diamagnéticas.
28. ¿Cuál es la diferencia entre materiales ferromagnéticos duros y blandos?
29. ¿La superficie de un disco de computadora debe hacerse de una sustancia ferromagnética dura o blanda?
30. Explique por qué es deseable emplear materiales ferromagnéticos duros para fabricar imanes permanentes.
31. ¿Esperaría usted que la cinta de una grabadora fuera atraída hacia un imán? (Inténtelo, pero no con una grabación que desee conservar.)
32. Con sólo un imán de gran intensidad y un destornillador, ¿cómo podría magnetizar y luego desmagnetizar el destornillador?
33. La figura Q30.33 muestra dos imanes permanentes, cada uno con un hoyo en su centro. Observe que el imán superior levita sobre el inferior. a) ¿Cómo ocurre esto? b) ¿Cuál es el propósito del lápiz? c) ¿Qué puede usted decir acerca de los polos de los imanes a partir de esta observación? d) Si se invirtiera el imán superior, ¿qué supone usted que ocurriría?

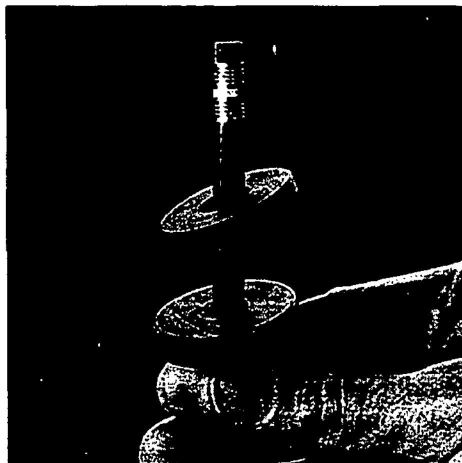


Figura Q30.33 Levitación magnética usando dos imanes cerámicos. *(Cortesía de Central Scientific Company)*

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** = use computadora para resolver el problema = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 30.1 La ley de Biot-Savart

1. En el modelo del átomo de hidrógeno de Niels Bohr de 1913, un electrón circunda el protón a una distancia de 5.29×10^{-11} m a una rapidez de 2.19×10^{6} m/s. Calcule la intensidad del campo magnético que este movimiento produce en la posición del protón.
2. Una trayectoria de corriente con la forma mostrada en la figura P30.2 produce un campo magnético en P, el centro del arco. Si el arco subtiende un ángulo de 30.0° y el radio del arco es de 0.600 m, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo producido en P si la corriente es de 3.00 A?

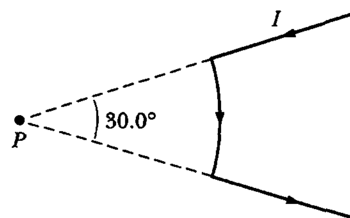


Figura P30.2

3. a) Un conductor en forma de un cuadrado de longitud de lado $\ell = 0.400$ m conduce una corriente $I = 10.0$ A (Fig. P30.3). Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en el centro del cuadrado. b) Si este conductor se forma como una sola vuelta circular y conduce la misma corriente, ¿cuál es el valor del campo magnético en el centro?

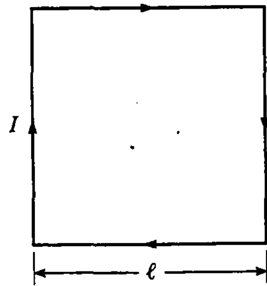


Figura P30.3

4. Calcule la magnitud del campo magnético en un punto a 100 cm de un largo y delgado conductor que porta una corriente de 1.00 A.

WEB 5. Determine el campo magnético en un punto P localizado a una distancia x de la esquina de un alambre infinitamente largo doblado en un ángulo recto, como se muestra en la figura P30.5. Por el alambre circula una corriente estable I.

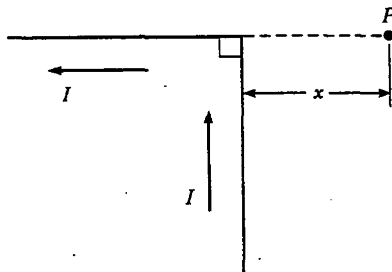


Figura P30.5

6. A un alambre que conduce una corriente de 5.00 A se le va a dar la forma de una espira circular de una vuelta. Si el valor requerido del campo magnético en el centro de la espira es 10.0 μT, ¿cuál es el radio requerido?

7. Un conductor consiste de una espira circular de radio R = 0.100 m y de dos largas secciones rectas, como se muestra en la figura P30.7. El alambre yace en el plano del papel y conduce una corriente I = 7.00 A. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el centro de la espira.

8. Un conductor consta de una espira circular de radio R y dos largas secciones rectas, como se ve en la figura P30.7. El alambre está en el plano del papel y conduce una corriente I. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el centro de la espira.

9. El segmento de alambre en la figura P30.9 conduce una corriente I = 5.00 A, donde el radio del arco circular es R = 3.00 cm. Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el origen.

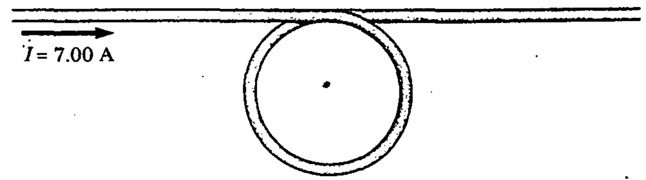


Figura P30.7 Problemas 7 y 8.

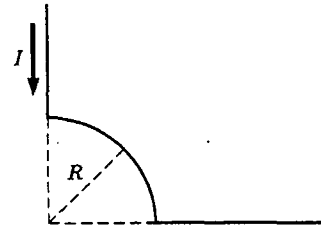


Figura P30.9

10. Considere una espira de corriente circular y plano de radio R que conduce una corriente I. Elija el eje x a lo largo del eje de la espira, con el origen en el centro del mismo. Grafique la relación de la magnitud del campo magnético en la coordenada x a la del origen, para x = 0 a x = 5R. Puede ser útil emplear una calculadora programable o una computadora para resolver este problema.

11. Considere la espira que conduce corriente mostrada en la figura P30.11, formada de líneas radiales y segmentos de círculos cuyos centros están en el punto P. Encuentre la magnitud y dirección de **B** en P.

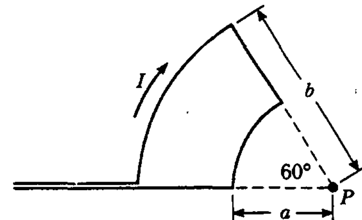


Figura P30.11

12. Determine el campo magnético (en términos de I, a y d) en el origen debido a la espira de corriente mostrada en la figura P30.12.

13. La espira en la figura P30.13 conduce una corriente I. Determine el campo magnético en el punto A en función de I, R y L.

14. Tres largos conductores paralelos llevan corrientes de I = 2.00 A. La figura P30.14 es una vista de los extremos de los conductores, con cada una de las corrientes saliendo de la página. Si a = 1.00 cm, determine la magnitud y dirección del campo magnético en los puntos A, B y C.

15. Dos largos conductores paralelos conducen las corrientes I_1 = 3.00 A e I_2 = 3.00 A, ambas dirigidas hacia aden-

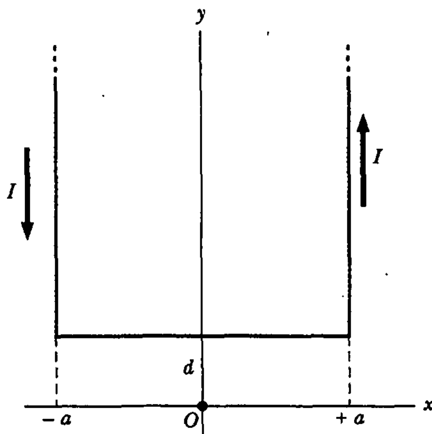


Figura P30.12

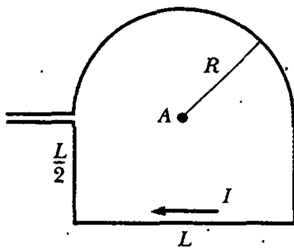


Figura P30.13

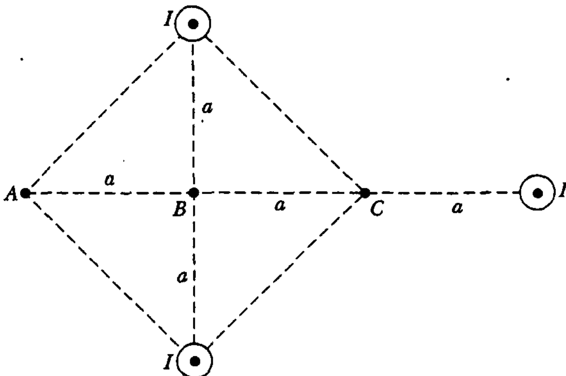


Figura P30.14

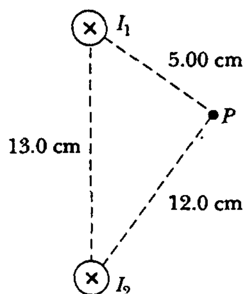


Figura P30.15

tro de la página en la figura P30.15. Determine la magnitud y dirección del campo magnético resultante en P.

Sección 30.2 La fuerza magnética entre dos conductores paralelos

16. Dos largos conductores paralelos separados por 10.0 cm conducen corrientes en la misma dirección. El primer alambre conduce una corriente $I_1 = 5.00$ A, y el segundo conduce $I_2 = 8.00$ A. a) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético creado por I_1 y que actúa sobre I_2? b) ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre I_2 por I_1? c) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético creado por I_2 en la ubicación de I_1? d) ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud ejercida por I_2 sobre I_1?

17. En la figura P30.17 la corriente en el largo alambre recto es $I_1 = 5.00$ A y el alambre se ubica en el plano de la espira rectangular, la cual conduce 10.0 A. Las dimensiones son $c = 0.100$ m, $a = 0.150$ m y $\ell = 0.450$ m. Determine la magnitud y dirección de la fuerza neta ejercida sobre la espira por el campo magnético creado por el alambre.

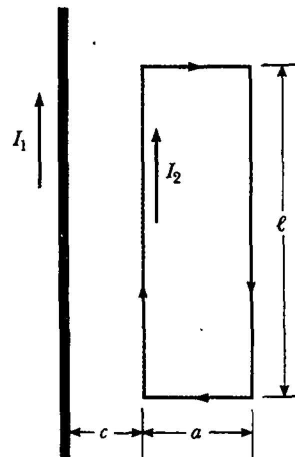


Figura P30.17

18. La unidad de flujo magnético debe su nombre a Wilhelm Weber. La magnitud práctica de la unidad del campo magnético recibe su nombre de Johann Karl Friedrich Gauss. Ambos fueron científicos en Göttingen, Alemania. Además de sus logros individuales, ellos construyeron juntos un telégrafo en 1833. Éste consistió de una batería y un interruptor que fue colocado en un extremo de una línea de transmisión de 3 km de largo y era operado por un electroimán en el otro extremo. (Andre Ampère sugirió los señalamientos eléctricos en 1821; Samuel Morse construyó una línea de telégrafo entre Baltimore y Washington en 1844.) Suponga que la línea de transmisión de Weber y Gauss está diagramada en la figura P30.18. Dos alambres paralelos largos, cada uno con una masa por unidad de longitud de 40.0 g/m, se apoyan en un plano horizontal por cuerdas de 6.00 cm de largo. Cuando ambos alambres conducen la misma corriente I, los alambres se repelen entre sí de tal

modo que el ángulo θ entre las cuerdas de soporte es 16.0°. a) ¿Las corrientes están en direcciones iguales u opuestas? b) Encuentre la magnitud de la corriente.

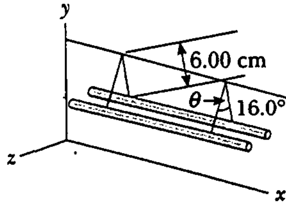


Figura P30.18

Sección 30.3 Ley de Ampère

WEB 19. Cuatro largos conductores paralelos llevan iguales corrientes de $I = 5.00$ A. Una vista de los extremos de los conductores se muestra en la figura P30.19. La dirección de la corriente es hacia adentro de la página en los puntos A y B (indicado por las cruces) y hacia afuera de la página en los puntos C y D (indicado por los puntos). Calcule la magnitud y dirección del campo magnético en el punto P, localizado en el centro del cuadrado cuyos lados tienen una longitud de 0.200 m.

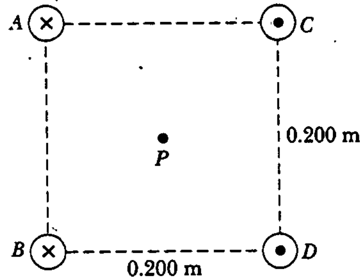


Figura P30.19

20. Un largo alambre recto se encuentra sobre una mesa horizontal y conduce una corriente de 1.20 μA. En el vacío, un protón se mueve paralelo al alambre (opuesto a la corriente) a una velocidad constante de 2.30×10^4 m/s a una distancia d sobre el alambre. Determine el valor de d. Puede ignorar el campo magnético debido a la Tierra.
21. La figura P30.21 es una vista transversal de un cable coaxial. El conductor del centro está rodeado por una capa de caucho, la cual está rodeada por otro conductor exterior, al cual lo rodea otra capa de caucho. En una aplicación particular, la corriente en el conductor interior es de 1.00 A hacia afuera de la página, y la corriente en el conductor exterior es de 3.00 A hacia el interior de la página. Determine la magnitud y la dirección del campo magnético en los puntos a y b.
22. El campo magnético a 40.0 cm de distancia de un alambre largo y recto que conduce una corriente de 2.00 A es 1.00 μT. a) ¿A qué distancia es de 0.100 μT? b) En algún instante los dos conductores en un gran cable de extensión doméstica conducen iguales corrientes de 2.00 A en direcciones opuestas. Los dos alambres están separados 3.00 mm. Encuentre el campo magnético a 40.0 cm del punto medio del cordón recto, en el plano de los dos alambres. c) ¿A qué distancia es un décimo? d) El alambre central en un cable coaxial conduce una corriente de 2.00 A en una dirección, y el recubrimiento alrededor del mismo conduce 2.00 A de corriente en la dirección opuesta. ¿Cuál es el campo magnético que el cable crea en puntos exteriores?

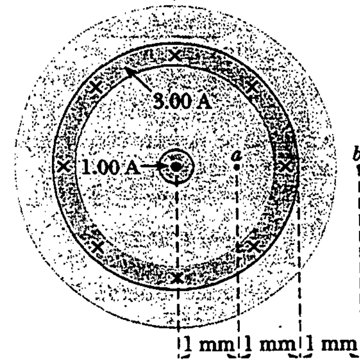


Figura P30.21

23. Las bobinas magnéticas de un reactor de fusión tokamak tienen la forma de un toroide con un radio interior de 0.700 m y radio exterior de 1.30 m. Si el toroide tiene 900 vueltas de alambre de gran diámetro, cada una de las cuales conduce una corriente de 14.0 kA, encuentre la intensidad del campo magnético dentro del toroide a lo largo de a) el radio interior y b) el radio exterior.
24. Un conductor cilíndrico de radio $R = 2.50$ cm porta una corriente de $I = 2.50$ A a lo largo de su longitud; esta corriente está distribuida de manera uniforme a través de la sección transversal del conductor. a) Calcule el campo magnético en el punto medio a lo largo del radio del alambre (es decir, en $r = R/2$). b) Encuentre la distancia más allá de la superficie del conductor a la cual la magnitud del campo magnético tiene el mismo valor que la magnitud del campo en $r = R/2$.

WEB 25. Un manojo de 100 largos alambres aislados y rectos forman un cilindro de radio $R = 0.500$ cm. a) Si cada alambre conduce 2.00 A, ¿cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza magnética por unidad de longitud que actúa sobre un alambre localizado a 0.200 cm del centro del manojo? b) ¿Un alambre en el borde exterior del manojo experimentaría una fuerza mayor o menor que el valor calculado en el inciso a)?

26. El metal niobio se vuelve superconductor cuando se enfría por abajo de 9 K. Si la superconductividad desaparece cuando el campo magnético superficial excede 0.100 T, determine la corriente máxima que un alambre de niobio de 2.00 mm de diámetro puede conducir y seguir siendo superconductor, en ausencia de cualquier campo magnético externo.
27. Un largo conductor cilíndrico de radio R conduce una corriente I, como se muestra en la figura P30.27. Sin embargo, la densidad de corriente J no es uniforme en la

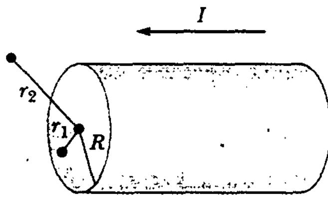


Figura P30.27

sección transversal del conductor, sino que es una función del radio de acuerdo con $J = br$, donde b es una constante. Encuentre una expresión para el campo magnético B a) a una distancia $r_1 < R$, y b) a una distancia $r_2 > R$, medida desde el eje.

28. En la figura P30.28, ambas corrientes están en la dirección x negativa. a) Dibuje el patrón de campo magnético en el plano yz. b) ¿A qué distancia d a lo largo del eje z el campo magnético es un máximo?

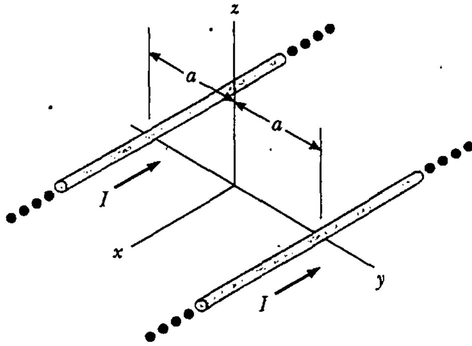


Figura P30.28

Sección 30.4 El campo magnético de un solenoide

29. ¿Qué corriente se requiere en el bobinado de un largo solenoide que tiene 1 000 vueltas distribuidas uniformemente a lo largo de una longitud de 0.400 m para producir en el centro del solenoide un campo magnético de 1.00×10^{-4} T de magnitud?

30. Un solenoide superconductor va a generar un campo magnético de 10.0 T. a) Si el enrollado del solenoide tiene 2 000 vueltas/m, ¿qué corriente se requiere? b) ¿Cuál fuerza por unidad de longitud ejerce sobre los bobinados el campo magnético?

31. Un solenoide de radio $R = 5.00$ cm está hecho de un largo trozo de alambre de radio $r = 2.00$ mm, longitud $\ell = 10.0$ m ($\ell >> R$) y resistividad $\rho = 1.70 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m. Encuentre el campo magnético en el centro del solenoide si el alambre es conectado a una batería que tiene una fem $\mathcal{E} = 20.0$ V.

32. Una espira cuadrada, de una sola vuelta de alambre, tiene una longitud lateral de 2.00 cm y conduce una corriente de 0.200 A en el sentido de las manecillas del reloj. La espira está dentro de un solenoide, con el plano de la espira perpendicular al campo magnético del solenoide. El solenoide tiene 30 vueltas/cm y conduce una corriente de 15.0 A en el sentido de las manecillas del reloj. Encuentre la fuerza sobre cada lado de la espira y el momento de torsión que actúa sobre la espira.

Sección 30.5 Flujo magnético

33. Un cubo de longitud de lado $\ell = 2.50$ cm está colocado como se muestra en la figura P30.33. A través de él hay una región de campo magnético uniforme dado por $\mathbf{B} = (5.00\mathbf{i} + 4.00\mathbf{j} + 3.00\mathbf{k})$ T. a) Calcule el flujo a través de la cara sombreada. b) ¿Cuál es el flujo total a través de las seis caras?

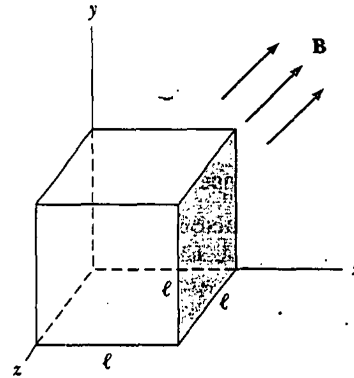
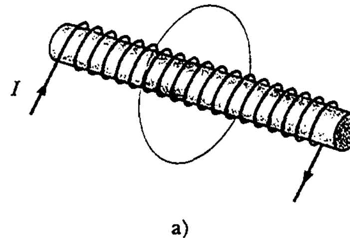
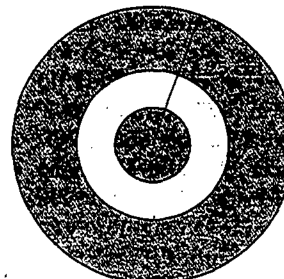


Figura P30.33

34. Un solenoide de 2.50 cm de diámetro y 30.0 cm de largo tiene 300 vueltas y conduce 12.0 A. a) Calcule el flujo a través de la superficie de un disco de 5.00 cm de radio que está colocado perpendicular a y centrado en el eje del solenoide, como en la figura P30.34a. b) La figura P30.34b muestra una vista lateral aumentada del mismo solenoide. Calcule el flujo a través del área azul, la cual se define por medio de un anillo que tiene un radio interior de 0.400 cm y un radio exterior de 0.800 cm.



a)



b)

Figura P30.34

35. Considere la superficie hemisférica cerrada de la figura P30.35. Si el hemisferio está en un campo magnético uniforme que forma un ángulo θ con la vertical, calcule el flujo magnético a través de a) la superficie plana S_1 y b) la superficie hemisférica S_2.

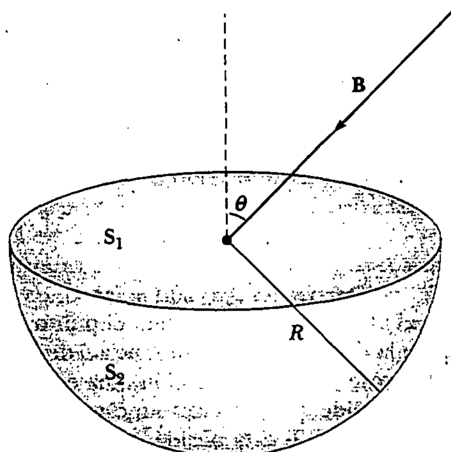


Figura P30.35

Sección 30.6 **La ley de Gauss en el magnetismo**

Sección 30.7 **Corriente de desplazamiento y la forma general de la ley de Ampère**

36. Una corriente de 0.200 A está cargando un capacitor que tiene placas circulares de 10.0 cm de radio. Si la separación de placas es de 4.00 mm, a) ¿cuál es la rapidez de incremento en el tiempo del campo eléctrico entre las placas? b) ¿Cuál es el campo magnético entre las placas a 5.00 cm del centro?

37. Una corriente de 0.100 A está cargando un capacitor que tiene placas cuadradas de 5.00 cm de lado. Si la separación de las placas es de 4.00 mm, encuentre a) la tasa de cambio en el tiempo del flujo eléctrico entre las placas, y b) la corriente de desplazamiento entre las placas.

(Opcional)
Sección 30.8 **Magnetismo en la materia**

38. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno de 1913, el electrón está en una órbita circular de 5.29×10^{-11} m de radio, y su rapidez es de 2.19×10^{6} m/s. a) ¿Cuál es la magnitud del momento magnético debido al movimiento del electrón? b) Si el electrón gira en sentido contrario a las manecillas del reloj en un círculo horizontal, ¿cuál es la dirección de este vector de momento magnético?

39. Un toroide con radio medio de 20.0 cm y 630 vueltas (véase la Fig. 30.29) se llena con acero pulverizado cuya susceptibilidad magnética χ es 100. Si la corriente en los bobinados es de 3.00 A, encuentre B (supuesto uniforme) dentro del toroide.

40. Un campo magnético de 1.30 T se establece en un toroide de núcleo de hierro. El toroide tiene un radio medio de 10.0 cm y permeabilidad magnética de $5\,000\mu_0$. ¿Qué corriente se requiere si hay 470 vueltas de alambre en el bobinado? El espesor del anillo de hierro es pequeño comparado con 10 cm, de modo que el campo en el material es casi uniforme.

41. Una bobina de 500 vueltas se enrolla sobre un anillo de hierro ($\mu_m = 750\mu_0$) con un radio medio de 20.0 cm y 8.00 cm^2 de área de sección transversal. Calcule el flujo magnético Φ_B en este anillo de Rowland cuando la corriente en la bobina es de 0.500 A.

42. Un anillo uniforme de 2.00 cm de radio y 6.00 μC de carga total gira a una rapidez angular constante de 4.00 rad/s alrededor de un eje perpendicular al plano del anillo y que pasa por su centro. ¿Cuál es el momento magnético del anillo giratorio?

43. Calcule la intensidad del campo magnético H de una sustancia magnetizada en la cual la magnetización es de 880 kA/m y el campo magnético tiene una magnitud de 4.40 T.

44. En la saturación el alineamiento de los espines del hierro puede contribuir tanto como 2.00 T al campo magnético total B. Si cada electrón contribuye con un momento magnético de 9.27×10^{-24} A·m^2 (un magnetón de Bohr), ¿cuántos electrones por átomo contribuyen al campo saturado de hierro? (*Sugerencia:* el hierro contiene 8.50×10^{28} átomos/m^3.)

45. a) Muestre que la ley de Curie puede establecerse en los siguientes términos: la susceptibilidad magnética de una sustancia paramagnética es inversamente proporcional a la temperatura absoluta, de acuerdo con $\chi = C\mu_0/T$, donde C es la constante de Curie. b) Evalúe la constante de Curie para el cromo.

(Opcional)
Sección 30.9 **Campo magnético de la Tierra**

46. Una bobina circular de 5 vueltas y un diámetro de 30.0 cm se orienta en un plano vertical con su eje perpendicular a la componente horizontal del campo magnético terrestre. Una brújula horizontal ubicada en el centro de la bobina se desvía 45.0° del norte magnético por medio de una corriente de 0.600 A en la bobina. a) ¿Cuál es la componente horizontal del campo magnético terrestre? b) La corriente en la bobina se interrumpe. Una "brújula sumergida" es una brújula magnética montada de tal forma que pueda rotar en un plano vertical norte-sur. En esta ubicación una brújula sumergida forma un ángulo de 13.0° desde la vertical. ¿Cuál es la magnitud total del campo magnético terrestre en esta posición?

47. El momento magnético de la Tierra es aproximadamente 8.00×10^{22} A·m^2. a) Si éste fuera causado por la magnetización completa de un gigantesco depósito de hierro, ¿a cuántos electrones dispares correspondería esto? b) A dos electrones no pareados por átomo de hierro, ¿a cuántos kilogramos de hierro correspondería lo anterior? (La densidad del hierro es de 7 900 kg/m^3, y hay aproximadamente 8.50×10^{28} átomos/m^3.)

PROBLEMAS ADICIONALES

48. Un relámpago puede conducir una corriente de 1.00×10^{4} A durante un breve lapso. ¿Cuál es el campo magné-

tico resultante a 100 m del relámpago? Suponga que el relámpago se extiende alejándose sobre y bajo el punto de observación.

49. La magnitud del campo magnético de la Tierra en cualquiera de sus polos es aproximadamente 7.00×10^{-5} T. Suponga que el campo se desvanece, antes de su siguiente inversión. Los exploradores, marinos y vendedores de alambre alrededor del mundo se reúnen en un programa para reemplazar el campo. Un plan es usar una espira de corriente alrededor del ecuador, sin tomar en cuenta la magnetización de cualquier material dentro de la Tierra. Determine la corriente que generaría tal campo si se desarrollara este plan. (Considere el radio de la Tierra como $R_T = 6.37 \times 10^6$ m.)

Dos conductores paralelos portan corriente en direcciones opuestas, como se indica en la figura P30.50. Un conductor lleva una corriente de 10.0 A. El punto A está en el punto medio entre los alambres, y el punto C se encuentra a una distancia $d/2$ a la derecha de la corriente de 10.0 A. Si $d = 18.0$ cm e I se ajusta de manera que el campo magnético en C sea cero, encuentre a) el valor de la corriente I, y b) el valor del campo magnético en A.

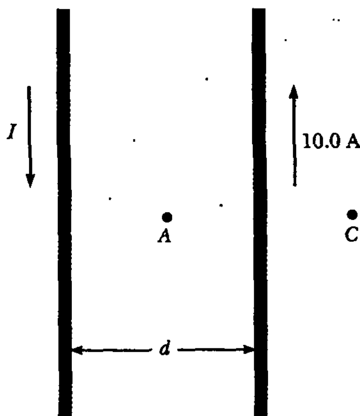


Figura P30.50

Suponga que usted instala una brújula en el centro del tablero de un carro. Calcule una estimación del orden de magnitud del campo magnético que es producido en esta ubicación por la corriente cuando usted activa los faros. ¿Cómo se compara su estimación con el campo magnético de la Tierra? Usted puede suponer que el tablero está hecho en su mayor parte de plástico.

Imagine un largo alambre cilíndrico de radio R que tiene una densidad de corriente $J(r) = J_0(1 - r^2/R^2)$ para $r \leq R$ y $J(r) = 0$ para $r > R$, donde r es la distancia desde el eje del alambre. a) Encuentre el campo magnético resultante adentro ($r \leq R$) y afuera ($r > R$) del alambre. b) Grafique la magnitud del campo magnético como una función de r. c) Encuentre la posición donde la magnitud del campo magnético es un máximo, y el valor de dicho campo máximo.

Una tira metálica de ancho w, delgada y muy larga, conduce una corriente I a lo largo de su longitud, como se muestra en la figura P30.53. Encuentre el campo magnético en el punto P en el diagrama. El punto P está en el plano de la tira, alejado una distancia b de la tira.

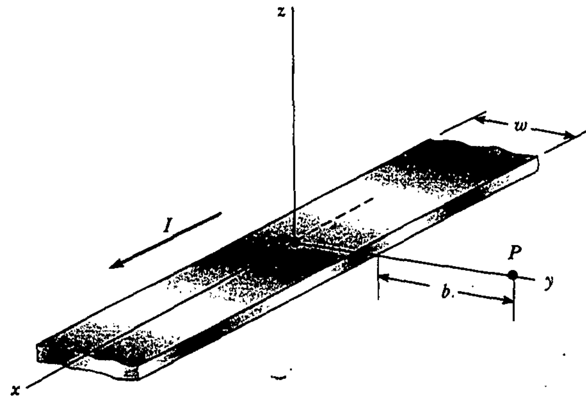


Figura P30.53

54. Para un proyecto de investigación, una estudiante necesita un solenoide que produzca un campo magnético interior de 0.030 0 T. Ella decide usar una corriente de 1.00 A y un alambre de 0.500 mm de diámetro. Enrolla el solenoide en capas sobre una forma aislante de 1.00 cm de diámetro y 10.0 cm de largo. Determine el número de capas de alambre que ella necesita y la longitud total del alambre.

WEB 55. Un anillo no conductor con 10.0 cm de radio, está cargado uniformemente con una carga total positiva de 10.0 μC. El anillo gira a una rapidez angular constante de 20.0 rad/s alrededor de un eje que pasa por su centro, perpendicular al plano del anillo. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético sobre el eje del anillo, a 5.00 cm de su centro?

56. Un anillo no conductor de radio R está cargado uniformemente con una carga total positiva q. El anillo gira a una rapidez angular constante ω alrededor de un eje que pasa por su centro, perpendicular al plano del anillo. ¿Cuál es la magnitud del campo magnético sobre el eje del anillo a una distancia $R/2$ de su centro?

57. Dos bobinas circulares de radio R están colocadas en forma perpendicular a un eje común. Los centros de las bobinas están separados por una distancia R y una corriente estable I fluye en la misma dirección alrededor de cada bobina, como se muestra en la figura P30.57. a) Demuestre que el campo magnético sobre el eje a una distancia x del centro de una bobina es

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2}\left[\frac{1}{(R^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(2R^2 + x^2 - 2Rx)^{3/2}}\right]$$

b) Demuestre que dB/dx y d^2B/dx^2 son ambas cero en un punto a la mitad entre las bobinas. Esto significa que el campo magnético en la región en el punto medio entre las bobinas es uniforme. Las bobinas en esta configuración reciben el nombre de **bobinas Helmholtz**.

58. Dos bobinas de alambre idénticas, circulares y planas, tienen cada una 100 vueltas y un radio de 0.500 m. Las bobinas se arreglan como un conjunto de bobinas Helm-

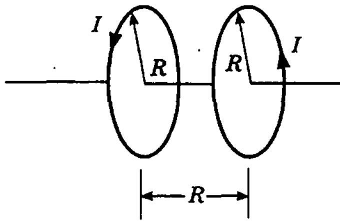


Figura P30.57 Problemas 57 y 58.

holtz (véase la Fig. P30.57), paralelas y con una separación de 0.500 m. Si cada una de ellas conduce una corriente de 10.0 A, determine la magnitud del campo magnético en un punto a la mitad entre las bobinas y sobre el eje común de las mismas.

59. Dos espiras circulares son paralelas, coaxiales y están casi en contacto, a 1.00 mm de separación (Fig. P30.59). Cada espira tiene 10.0 cm de radio. La espira superior conduce una corriente de 140 A en el sentido de las manecillas de reloj. Por la espira inferior circula una corriente de 140 A en sentido contrario al de las manecillas de reloj. a) Calcule la fuerza magnética que la espira inferior ejerce sobre la superior. b) La espira superior tiene una masa de 0.021 0 kg. Calcule su aceleración, suponiendo que las únicas fuerzas que actúan sobre ella son la fuerza de la parte a) y su peso. (*Sugerencia:* piense cómo se parece una espira a un gusano montado en la otra espira.)

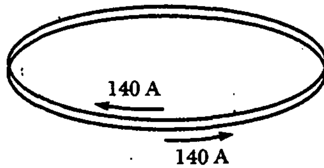


Figura P30.59

60. ¿Qué objetos experimentan una fuerza en un campo eléctrico? El capítulo 23 responde esta pregunta: cualquier carga eléctrica, estacionaria o en movimiento, distinta a la carga que crea el campo. ¿Qué crea un campo eléctrico? Cualquier carga eléctrica, estacionaria o en movimiento, también como se estudió en el capítulo 23. ¿Qué objetos experimentan una fuerza en un campo magnético? Una corriente eléctrica o una carga eléctrica en movimiento distintas a la corriente o la carga que crearon el campo, como se descubrió en el capítulo 29. ¿Qué crea un campo magnético? Una corriente eléctrica, como encontró en la sección 30.11, o una carga eléctrica en movimiento, como en este problema. a) Para exhibir cómo una carga en movimiento crea un campo magnético, considere una carga q que se mueve a velocidad $\mathbf{v}$. Defina el vector unitario $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ que apunta de la carga a alguna ubicación. Muestre que el campo magnético en dicha ubicación es

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

b) Encuentre la magnitud del campo magnético a 1.00 mm al lado de un protón que se mueve a 2.00×10^7 m/s. c) Encuentre la fuerza magnética sobre un segundo protón en este punto, moviéndose a la misma rapidez en la dirección opuesta. d) Encuentre la fuerza eléctrica sobre el segundo protón.

61. Se ha sugerido el uso de *cañones de riel* para lanzar proyectiles al espacio sin necesidad de cohetes químicos, así como para armas de guerra antimisiles tierra-aire. Un modelo a escala de un cañón de riel (Fig. P30.61) consta de dos largos rieles horizontales paralelos separados 3.50 cm, puenteados por una barra *BD* de 3.00 g de masa. La barra originalmente está en reposo en el punto medio de los rieles y es libre de deslizarse sin fricción. Cuando se cierra el interruptor, la corriente eléctrica en el circuito *ABCDEA* se establece muy rápidamente. Los rieles y la barra tienen baja resistencia eléctrica, y la corriente está limitada a una constante de 24.0 A por la fuente de poder. a) Encuentre la magnitud del campo magnético a 1.75 cm de un solo alambre recto muy largo, el cual conduce una corriente de 24.0 A. b) Encuentre el vector de campo magnético en el punto *C* en el diagrama, el punto medio de la barra, inmediatamente después de que se cierra el interruptor. (*Sugerencia:* considere qué conclusiones puede derivar de la ley Biot-Savart.) c) En otros puntos a lo largo de la barra *BD*, el campo está en la misma dirección que en el punto *C*, pero mayor en magnitud. Suponga que el campo magnético efectivo promedio a lo largo de *BD* es cinco veces mayor que el campo en *C*. Con esta suposición encuentre el vector fuerza sobre la barra. d) Encuentre el vector aceleración con el cual la barra comienza a moverse. e) ¿La barra se mueve con aceleración constante? f) Encuentre la velocidad de la barra después de que ha viajado 130 cm hacia el extremo de los rieles.

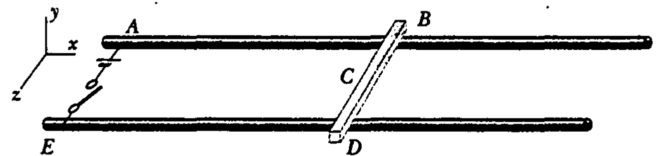


Figura P30.61

62. Dos largos conductores paralelos portan corrientes en la misma dirección, como se indica en la figura P30.62. El conductor A lleva una corriente de 150 A y se mantiene firmemente en su posición. El conductor B lleva una corriente I_B y se deja que se deslice libremente arriba y abajo (paralelo a A) entre un conjunto de guías no conductoras. Si la masa por unidad de longitud del conductor B es 0.100 g/cm, ¿qué valor de la corriente I_B resultará en equilibrio cuando la distancia entre los dos conductores es de 2.50 cm?

63. Sobre el rodillo izquierdo de una larga banda no conductora se esparce carga como en la figura P30.63. La banda conduce la carga, con una densidad de carga superficial uniforme σ, conforme se mueve a una rapidez v entre los rodillos, como se muestra. La carga se elimina con un limpiaparabrisas en el rodillo derecho. Considere un punto exactamente arriba de la superficie de la banda móvil. a) Encuentre una expresión para la magnitud del campo magnético **B** en este punto. b) Si la

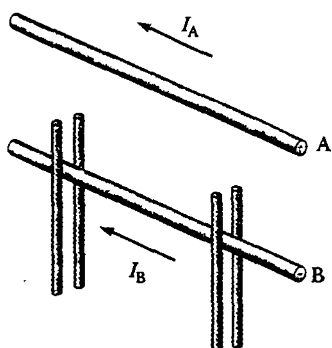


Figura P30.62

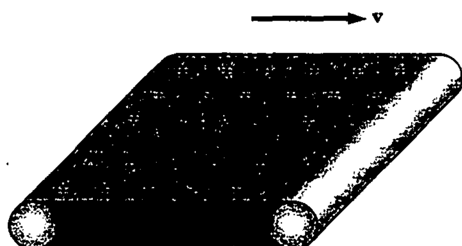


Figura P30.63

banda está cargada positivamente, ¿cuál es la dirección de **B**? (Advierta que la banda puede considerarse como una lámina infinita.)

Una sustancia paramagnética particular alcanza 10.0% de su magnetización de saturación cuando se pone en un campo magnético de 5.00 T a una temperatura de 4.00 K. La densidad de los átomos magnéticos en la muestra es de 8.00×10^{27} átomos/m^3, y el momento magnético por átomo es de 5.00 magnetones de Bohr. Calcule la constante de Curie para esta sustancia.

Un imán de barra (masa = 39.4 g, momento magnético = 7.65 J/T, longitud = 10.0 cm) se conecta al techo por medio de una cuerda. Un campo magnético externo uniforme se aplica horizontalmente, como se muestra en la figura P30.65. El imán está en equilibrio, formando un ángulo θ con la horizontal. Si $\theta = 5.00°$, determine la magnitud del campo magnético aplicado.

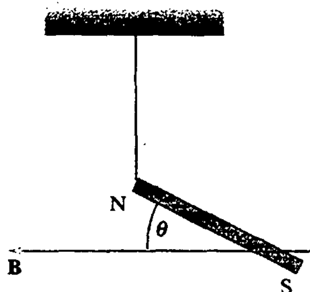


Figura P30.65

66. Un alambre recto infinitamente largo que conduce una corriente I_1 está parcialmente rodeado por una espira, como se muestra en la figura P30.66. La espira tiene una longitud L y un radio R, y conduce una corriente I_2. El eje de la espira coincide con el alambre. Calcule la fuerza ejercida sobre la espira.

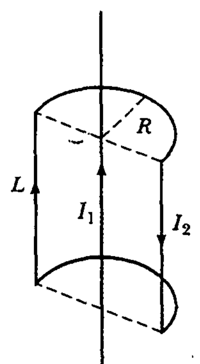


Figura P30.66

67. Un alambre se dobla en la forma mostrada en la figura P30.67a, y se mide un campo magnético en P_1 cuando la corriente en el alambre es I. El mismo alambre se forma después del modo que se ilustra en la figura P30.67b, y el campo magnético se mide en el punto P_2 cuando la corriente es otra vez I. Si la longitud total del alambre es la misma en cada caso, ¿cuál es la relación de B_1/B_2?

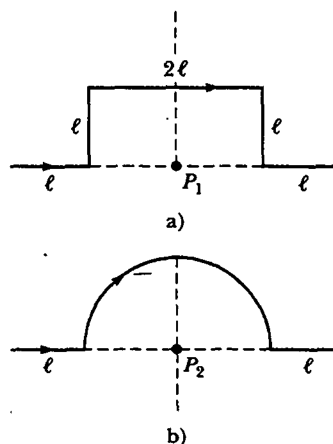


Figura P30.67

68. En 1962 se efectuaron mediciones del campo magnético de un gran tornado en el Observatorio Geofísico en Tulsa, Oklahoma. Si el campo del tornado fue $B = 15.0$ nT y apuntaba al norte cuando el tornado estaba a 9.00 km al este del observatorio, ¿qué corriente circulaba arriba o abajo del embudo del tornado, modelado como un largo alambre recto?

69. Un alambre tiene la forma de un cuadrado con longitud de lado L (Fig. P30.69). Muestre que cuando la corriente en la espira es I, el campo magnético en el punto P, a una distancia x del centro del cuadrado a lo largo de su eje, es

$$B = \frac{\mu_0 I L^2}{2\pi(x^2 + L^2/4)\sqrt{x^2 + L^2/2}}$$

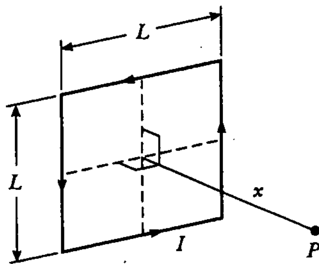


Figura P30.69

70. La fuerza sobre un dipolo magnético $\boldsymbol{\mu}$ alineado con un campo magnético no uniforme en la dirección x está dada por $F_x = |\boldsymbol{\mu}| dB/dx$. Suponga que dos espiras de alambre planas, tienen cada una radio R y conducen una corriente I. a) Si las espiras se arreglan coaxialmente y se separan mediante una distancia variable x, la cual es grande comparada con R, muestre que la fuerza magnética entre ellas varía como $1/x^4$. b) Evalúe la magnitud de esta fuerza si $I = 10.0$ A, $R = 0.500$ cm y $x = 5.00$ cm.

71. Un alambre por el que circula una corriente I se dobla en la forma de una espiral exponencial, $r = e^\theta$, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$, como muestra la figura P30.71. Para completar una espira, los extremos de la espiral se conectan por medio de un alambre recto a lo largo del eje x. Encuentre la magnitud y dirección de **B** en el origen. *Sugerencia:* emplee la ley de Biot-Savart. El ángulo β entre una línea radial y su línea tangente en cualquier punto sobre la curva $r = f(\theta)$ se relaciona con la función de la siguiente manera:

$$\tan\beta = \frac{r}{dr/d\theta}$$

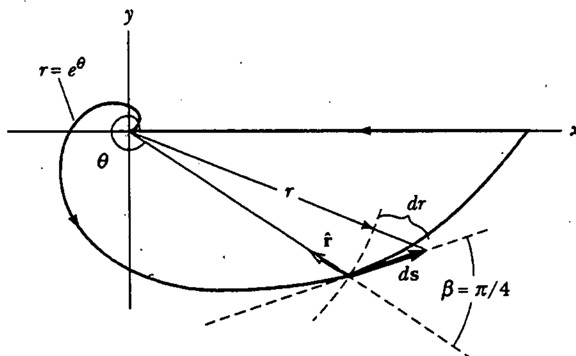


Figura P30.71

Por tanto, en este caso $r = e^\theta$, $\tan\beta = 1$ y $\beta = \pi/4$. Por tanto, el ángulo entre $d\mathbf{s}$ y $\hat{\mathbf{r}}$ es $\pi - \beta = 3\pi/4$. Además,

$$ds = \frac{dr}{\text{sen}\,\pi/4} = \sqrt{2}\,dr$$

72. La tabla P30.72 contiene datos tomados para un material ferromagnético. a) Construya una curva de magnetización a partir de los datos. Recuerde que $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0\mathbf{M}$. b) Determine la proporción B/B_0 para cada par de valores de B y B_0, y elabore una gráfica de B/B_0 *versus* B_0. (La fracción B/B_0 se conoce como permeabilidad relativa y es una medida del campo magnético inducido.)

TABLA P30.72

B(T)	B_0(T)
0.2	4.8×10^{-5}
0.4	7.0×10^{-5}
0.6	8.8×10^{-5}
0.8	1.2×10^{-4}
1.0	1.8×10^{-4}
1.2	3.1×10^{-4}
1.4	8.7×10^{-4}
1.6	3.4×10^{-3}
1.8	1.2×10^{-1}

73. **Problema de repaso.** Una esfera de radio R tiene una densidad de carga volumétrica constante ρ. Determine el campo magnético en el centro de la esfera cuando ésta gira como un cuerpo rígido a velocidad angular ω alrededor de un eje que pasa por su centro (Fig. P30.73).

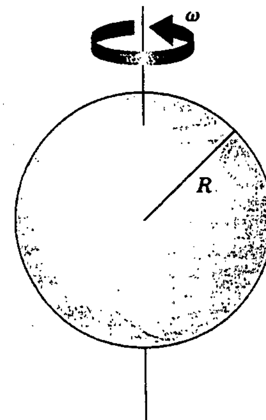


Figura P30.73 Problemas 73 y 74.

74. **Problema de repaso.** Una esfera de radio R tiene una densidad de carga volumétrica constante ρ. Determine el

momento de dipolo magnético de la esfera cuando ésta gira como un cuerpo rígido a velocidad angular ω alrededor de un eje que pasa por su centro (véase la Fig. P30.73).

75. Un largo conductor cilíndrico de radio a tiene dos cavidades cilíndricas de diámetro a a lo largo de toda su longitud, como se muestra en la sección transversal de la figura P30.75. Una corriente I se dirige hacia afuera de la página y es uniforme por toda la sección transversal del conductor. Encuentre la magnitud y dirección del campo magnético en función de μ_0, I, r y a, en a) el punto P_1 y b) el punto P_2.

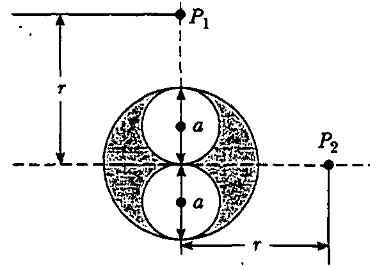


Figura P30.75

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

30.1 c) $F_1 = F_2$ debido a la tercera ley de Newton. Otra forma de llegar a este resultado es notar que la ecuación 30.11 proporciona el mismo resultado si la multiplicación de corrientes es (2 A)(6 A) o (6 A)(2 A).

30.2 Acercándose más; las bobinas actúan como alambres que conducen corrientes paralelas y, en consecuencia, se atraen entre sí.

30.3 *b, d, a, c.* La ecuación 30.13 indica que el valor de la integral de línea depende sólo de la corriente neta a través de cada trayectoria cerrada. La trayectoria *b* encierra 1 A, la trayectoria *d* encierra 3 A, la trayectoria *a* encierra 4 A y la trayectoria *c* encierra 6 A.

30.4 *b*, luego $a = c = d$. Las trayectorias *a*, *c* y *d* dan todas el mismo valor no cero $\mu_0 I$ porque el tamaño y la forma de las trayectorias no importan. La trayectoria *b* no encierra la corriente y, por tanto, su integral de línea es cero.

30.5 Fuerza neta, sí; momento de torsión neto, no. Las fuerzas sobre las partes superior e inferior de la espira se cancelan porque son iguales en magnitud pero opuestas en dirección. La corriente en el lado izquierdo de la espira es paralela a I_1, y, en consecuencia, la fuerza F_L ejercida por I_1 sobre este lado es atractiva. La corriente en el lado derecho de la espira es antiparalela a I_1, así que la fuerza F_R ejercida por I_1 sobre este lado de la espira es repulsiva. Puesto que el lado izquierdo está más cerca del alambre 1, $F_L > F_R$ y una fuerza neta está dirigida hacia el alambre 1. Como las fuerzas sobre los cuatro lados de la espira están en el plano de la espira, no hay momento de torsión neto.

30.6 Cero; no fluyen cargas dentro de un capacitor completamente cargado, de modo que no ocurren cambios en la cantidad de carga sobre las placas, y el campo eléctrico entre las placas es constante. Sólo cuando el campo eléctrico está cambiando existe una corriente de desplazamiento.

30.7 a) Aumenta ligeramente; b) disminuye ligeramente; c) aumenta de manera considerable. Las ecuaciones 30.33 y 30.34 indican que, cuando cada metal está en su lugar, el campo total es $\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H}$. La tabla 30.2 indica que $\mu_0(1 + \chi)\mathbf{H}$ es ligeramente mayor que $\mu_0\mathbf{H}$ para el aluminio y ligeramente menor para el cobre. Para el hierro el campo puede ser miles de veces más intenso, como se vio en el ejemplo 30.10.

30.8 Uno cuya espira se parezca a la figura 30.31a porque la magnetización remanente en el punto correspondiente al punto *b* en la figura 30.30 es mayor.

30.9 De oeste a este. Las líneas del campo magnético de la Tierra entran al planeta en la Bahía de Hudson y emergen de la Antártida; por tanto, las líneas de campo resultantes de la corriente tendrían que ir en la dirección opuesta. Compare la figura 30.6a con la 30.35.

Calvin y Hobbes

por Bill Watterson









ACERTIJO

Antes de que esta máquina expendedora entregue su producto, realiza varias pruebas sobre las monedas que se han insertado. ¿Cómo puede determinar de qué material está hecha la moneda sin dañarla y sin que el cliente espere demasiado tiempo los resultados? *(George Semple)*

capítulo

31

Ley de Faraday

Líneas generales del capítulo

Hasta ahora, el estudio de la electricidad y el magnetismo se ha centrado en los campos eléctricos producidos por cargas estacionarias y campos magnéticos generados por cargas móviles. Este capítulo se ocupa de los campos eléctricos que se originan a partir de campos magnéticos variables.

Los experimentos conducidos por Michael Faraday en Inglaterra en 1831, e independientemente por Joseph Henry en Estados Unidos ese mismo año, mostraron que una fem podría inducirse en un circuito mediante un campo magnético variable. Como verá pronto, una fem (y, por tanto, también una corriente) pueden inducirse de muchas formas —por ejemplo, mediante el movimiento de una espira cerrada de alambre dentro de una región en la que existe un campo magnético. Los resultados de esos experimentos condujeron a una ley muy básica e importante del electromagnetismo conocida como *ley de inducción de Faraday*. Esta ley establece que la magnitud de la fem inducida en un circuito es igual a la rapidez de cambio en el tiempo del flujo magnético a través del circuito.

Con el tratamiento de la ley de Faraday se completa la introducción a las leyes fundamentales del electromagnetismo. Estas leyes pueden resumirse en un conjunto de cuatro ecuaciones conocidas como *ecuaciones de Maxwell*. Junto con la *ley de fuerza de Lorentz*, la cual se analiza brevemente, representan una teoría completa que describe la interacción de los objetos cargados. Las ecuaciones de Maxwell relacionan los campos eléctricos y magnéticos entre sí y su fuente última, a saber, las cargas eléctricas.



31.1 LEY DE INDUCCIÓN DE FARADAY

12.6 y 12.7 Para ver cómo puede inducirse una fem mediante un campo magnético variable, considere una espira de alambre conectada a un galvanómetro, como se muestra en la figura 31.1. Cuando un imán se mueve hacia la espira, la aguja del galvanómetro se desviará en una dirección, arbitrariamente mostrada hacia la derecha en la figura 31.1a. Cuando el imán se aleja de la espira, la aguja se desviará en la dirección opuesta, como se ve en la figura 31.1c. Si el imán se mantiene estacionario en relación con la espira (Fig. 31.1b), no se observa ninguna desviación. Por último, si el imán se mantiene estacionario y la espira se mueve, ya sea hacia o alejándose del imán, la aguja se desviará. A partir de estas observaciones se concluye que la espira "sabe" que el imán se está moviendo en relación con él, pues experimenta un cambio en la intensidad del campo magnético. Por tanto, parece que existe una relación entre la corriente y el campo magnético variable.

Estos resultados son muy importantes en vista de que **¡se establece una corriente aun cuando no haya baterías en el circuito!** A esta corriente se le llama *corriente inducida*, la cual se produce mediante una *fem inducida*.

Ahora se describirá el experimento realizado por Faraday[1] que se ilustra en la figura 31.2. Una bobina primaria se conecta a un interruptor y a una batería. La bobina se enrolla alrededor de un anillo, y una corriente en la bobina produce un campo magnético cuando el interruptor se cierra. Una bobina secundaria también se enrolla alrededor de un anillo y se conecta a un galvanómetro. No hay batería presente en el circuito secundario, y la bobina secundaria no está conectada a la primaria. Cualquier corriente detectada en el circuito secundario puede ser inducida por algún agente externo.



Una demostración de la inducción electromagnética. Una diferencia de potencial variable se aplica a la bobina inferior. Una fem es inducida en la bobina superior, como indica la lámpara iluminada. ¿Qué ocurre con la intensidad de la lámpara conforme la bobina superior se mueve sobre el tubo vertical? *(Cortesía de Central Scientific Company)*

[1] Un físico llamado J. D. Colladon fue el primero en realizar el experimento del imán móvil. Para minimizar el efecto del campo magnético variable sobre su galvanómetro colocó el medidor en un cuarto adyacente. Por tanto, conforme movía imán en la espira, no podía ver la desviación de la aguja del medidor. Cuando regresaba al cuarto cercano para leer el galvanómetro la aguja había regresado a cero, porque él había detenido el movimiento del imán. Desafortunadamente para Colladon, debe haber movimiento relativo entre la espira y el imán para inducir una fem y observar una correspondiente corriente inducida. En consecuencia, los estudiantes de física aprenden la ley de inducción de Faraday en lugar de la "ley de inducción de Colladon".

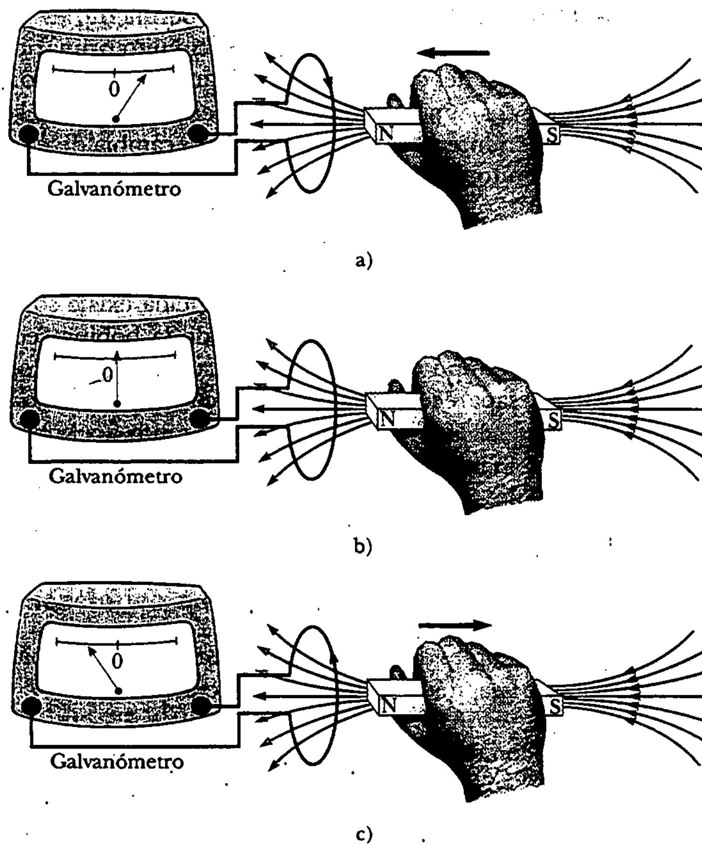


Figura 31.1 a) Cuando un imán se mueve hacia una espira de alambre conectada a un galvanómetro, el galvanómetro se desvía como se muestra, lo cual indica que una corriente es inducida en la espira. b) Cuando el imán se mantiene estacionario, no hay corriente inducida en la espira, aun cuando el imán esté dentro de la espira. c) Cuando el imán se mueve alejándose de la espira, el galvanómetro se desvía en la dirección opuesta, lo cual indica que la corriente inducida es opuesta a la mostrada en la parte a). Al cambiar la dirección del movimiento del imán cambia la dirección de la corriente inducida mediante dicho movimiento.

A primera vista, usted podría pensar que no se detectaría ninguna corriente en el circuito secundario. Sin embargo, sucede algo asombroso cuando se cierra o abre repentinamente el interruptor en el circuito primario. En el instante en que se cierra el interruptor, la aguja del galvanómetro se desvía en una dirección y luego regresa a cero. En el instante en que se abre el interruptor, la aguja se desvía en la dirección opuesta y de nuevo regresa a cero. Por último, el galvanómetro registra cero cuando en el circuito primario hay una corriente estable o no hay ninguna corrien-

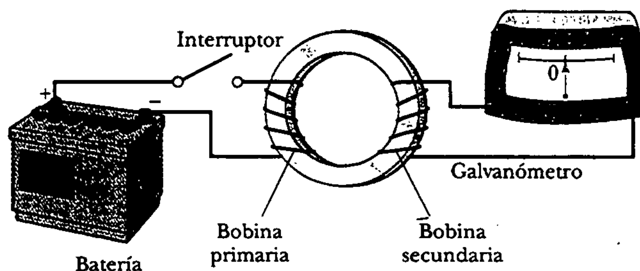
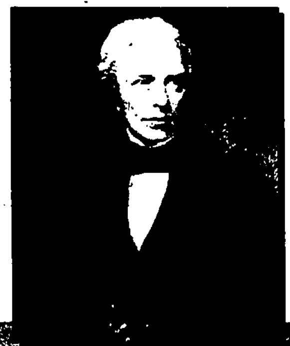


Figura 31.2 El experimento de Faraday. Cuando se cierra el interruptor en el circuito primario, el galvanómetro en el circuito secundario se desvía momentáneamente. La fem inducida en el circuito secundario es causada por el campo magnético variable a través de la bobina secundaria.



Michael Faraday (1791-1867) Faraday, físico y químico británico, es considerado con frecuencia como el más grande científico experimental del siglo XIX. Sus muchas contribuciones al estudio de la electricidad incluyen la invención del motor eléctrico, el generador eléctrico y el transformador, así como el descubrimiento de la inducción electromagnética y las leyes de la electrólisis. Enormemente influido por la religión, rechazó trabajar en el desarrollo del gas venenoso para el ejército británico. *(Con el generoso permiso del presidente y consejero de la Real Sociedad)*

te. La clave para comprender lo que ocurre en este experimento es notar primero que cuando se cierra el interruptor, la corriente en el circuito primario produce un campo magnético en la región del circuito, y es este campo magnético el que penetra el circuito secundario. Más aún, cuando se cierra el interruptor, el campo magnético producido por la corriente en el circuito primario cambia de cero a algún valor durante algún tiempo finito, y es este campo variable el que induce una corriente en el circuito secundario.

Como resultado de estas observaciones Faraday concluyó que **una corriente eléctrica puede inducirse en un circuito (el circuito secundario en la configuración) mediante un campo magnético variable.** La corriente inducida existe sólo durante un breve tiempo mientras el campo magnético a través de la bobina secundaria está cambiando. Una vez que el campo magnético alcance un valor estable, la corriente en la bobina secundaria desaparece. De hecho, el circuito secundario se comporta como si hubiera una fuente de fem conectada a él durante un breve instante. Es usual afirmar que **una fem inducida se produce en el circuito secundario mediante un campo magnético variable.**

Los experimentos mostrados en las figuras 31.1 y 31.2 tienen una cosa en común: en cada caso se induce una fem en el circuito cuando el flujo magnético a través del circuito cambia con el tiempo. En general,

> la fem inducida en un circuito es directamente proporcional a la rapidez de cambio en el tiempo del flujo magnético a través del circuito.

Este enunciado, conocido como **ley de inducción de Faraday**, puede escribirse como

Ley de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{31.1}$$

donde $\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ es el flujo magnético a través del circuito (véase la sección 30.5).

Si el circuito es una bobina que consta de N espiras, todas de la misma área, y si Φ_B es el flujo a través de una espira, es inducida una fem en cada espira; por tanto, la fem total inducida en la bobina está dada por la expresión

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{31.2}$$

El signo negativo en las ecuaciones 31.1 y 31.2 es de importante significado físico, el cual se analizará en la sección 31.3.

Suponga que una espira que encierra un área A se encuentra en un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$, como se muestra en la figura 31.3. El flujo magnético a través de la espira es igual a $BA \cos \theta$; por tanto, la fem inducida puede expresarse como

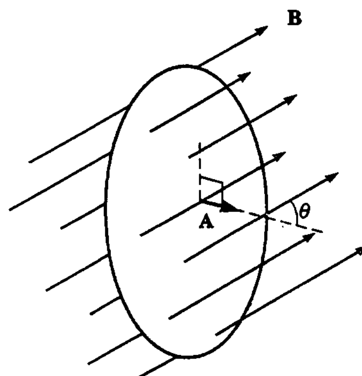


Figura 31.3 Una espira conductora que encierra un área A en la presencia de un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$. El ángulo entre $\mathbf{B}$ y la normal sobre la espira es θ.

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(BA\cos\theta) \tag{31.3}$$

A partir de esta expresión se ve que puede inducirse una fem en el circuito de varias maneras:

- La magnitud de **B** puede variar con el tiempo.
- El área encerrada por la espira puede cambiar con el tiempo.
- El ángulo θ entre **B** y la normal a la espira puede cambiar con el tiempo.
- Puede ocurrir cualquier combinación de las anteriores.

Pregunta sorpresa 31.1

La ecuación 31.3 se puede usar para calcular la fem inducida cuando el polo norte de un imán se mueve hacia una espira de alambre, a lo largo del eje perpendicular al plano de la espira que pasa a través de su centro. ¿Qué cambios son necesarios en la ecuación cuando el polo sur se mueve hacia la espira?

Experimento sorpresa

Una cinta de casete está hecha de finas partículas de óxido metálico unidas a una larga tira plástica. Una corriente en una pequeña espira conductora magnetiza las partículas en un patrón relacionado con la música que se está grabando. Durante la reproducción, la cinta en movimiento pasa frente a una segunda pequeña espira (dentro de la cabeza reproductora) e induce una corriente que luego se amplifica. Jale una tira de cinta afuera de un casete (uno que a usted no le importe destruir) y vea si es atraída o repelida por un imán de refrigerador. Si no tiene un casete, intente esto con un viejo disco flexible que ya tenga listo para la basura.

Algunas aplicaciones de la ley de Faraday

El interruptor de falla a tierra (GFI, por sus siglas en inglés) es un interesante dispositivo de seguridad que protege a los usuarios de aparatos eléctricos contra choques eléctricos. Su operación aprovecha la ley de Faraday. En el GFI mostrado en la figura 31.4, el alambre 1 va de la toma de corriente de la pared al aparato que será protegido, y el alambre 2 parte del aparato y regresa a la toma de corriente de la pared. Un anillo de hierro rodea a los dos alambres y una bobina de detección se enrolla alrededor de una parte del anillo. Puesto que las corrientes en los alambres están en direcciones opuestas, el flujo magnético neto a través de la bobina de detección debido a las corrientes es cero. Sin embargo, si cambia la corriente de retorno en el alambre 2, el flujo magnético neto a través de la bobina de detección no es más grande que cero. (Esto puede ocurrir, por ejemplo, si el aparato se moja, permitiendo que la corriente se fugue a tierra.) Debido a que la corriente doméstica se está alternando (lo cual significa que su dirección se mantiene invirtiéndose), el flujo magnético a través de la bobina de detección cambia con el tiempo, induciendo una fem en la bobina. Esta fem inducida se usa para activar un interruptor de circuito, que detiene la corriente antes de que alcance un nivel nocivo.

Otra interesante aplicación de la ley de Faraday es la producción de sonido en una guitarra eléctrica (Fig. 31.5). La bobina, que en este caso se llama *bobina fonocaptora*, se pone cerca de la cuerda vibrante, la cual está hecha de un metal que puede magnetizarse. Un imán permanente dentro de la bobina magnetiza la porción de la cuerda más cercana a la bobina. Cuando la cuerda vibra a cierta frecuencia, su



Esta estufa eléctrica cocina comida con base en el principio de inducción. Una corriente oscilante se pasa a través de una bobina colocada debajo de la superficie de cocción, la cual está hecha de un vidrio especial. La corriente produce un campo magnético oscilatorio, el cual induce una corriente en el utensilio de cocina. Puesto que el utensilio de cocina tiene alguna resistencia eléctrica, la energía eléctrica asociada con la corriente inducida se transforma en energía interna, lo cual provoca que el utensilio y su contenido se calienten. *(Cortesía de Corning, Inc.)*

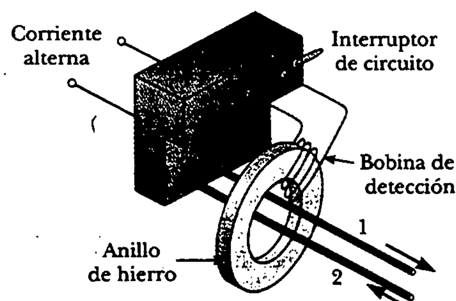


Figura 31.4 Componentes esenciales de un interruptor de falla a tierra.

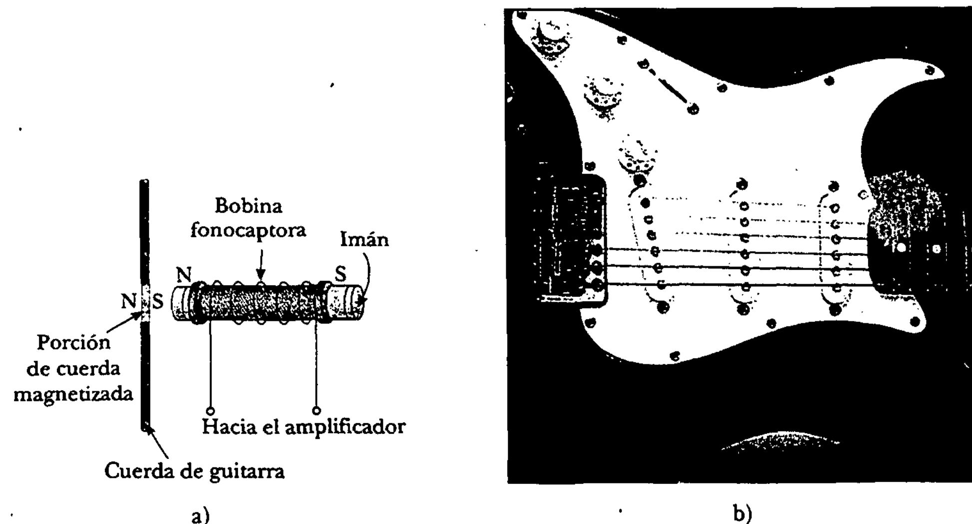


Figura 31.5 a) En una guitarra eléctrica, una cuerda vibratoria induce una fem en una bobina fonocaptora. b) Los círculos debajo de las cuerdas metálicas de esta guitarra eléctrica detectan las notas que se tocan y envía esta información a través de un amplificador y a las bocinas. (Un interruptor sobre la guitarra permite que el músico seleccione cuál juego de seis se usa.) ¿Cómo siente un "captor" de guitarra qué música se está tocando? *(b, Charles D. Winters)*

segmento magnetizado produce un flujo magnético variable a través de la bobina. El flujo variable induce una fem en la bobina, la cual alimenta a un amplificador. La salida del amplificador se envía a los altavoces, lo cual produce las ondas sonoras que se escuchan.

EJEMPLO 31.1 Una manera de inducir una fem en una bobina

Una bobina consta de 200 vueltas de alambre y tiene una resistencia total de 2.0 Ω. Cada vuelta es un cuadrado de 18 cm de lado, y se activa un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la bobina. Si el campo cambia linealmente de 0 a 0.50 T en 0.80 s, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida en la bobina mientras está cambiando el campo?

Solución El área de una vuelta de la bobina es $(0.18 \text{ m})^2 = 0.032\,4 \text{ m}^2$. El flujo magnético a través de la bobina en $t = 0$ es cero, puesto que $B = 0$ en dicho momento. En $t = 0.80$ s, el flujo magnético a través de una vuelta es $\Phi_B = BA = (0.50 \text{ T})(0.032\,4 \text{ m}^2) = 0.016\,2 \text{ T·m}^2$. Por tanto, la magnitud de la fem inducida es, a partir de la ecuación 31.2

$$|\mathcal{E}| = \frac{N\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{200(0.0162\text{T}\cdot\text{m}^2 - 0\text{ T}\cdot\text{m}^2)}{0.80\text{ s}}$$

$$= 4.1\text{T}\cdot\text{m}^2/\text{s} = 4.1\text{V}$$

Usted debe ser capaz de demostrar que $1 \text{ T·m}^2/\text{s} = 1$ V.

Ejercicio ¿Cuál es la magnitud de la corriente inducida en la bobina mientras el campo está cambiando?

Respuesta 2.0 A.

EJEMPLO 31.2 Un campo B que decae exponencialmente

Una espira de alambre que encierra un área A se coloca en una región donde el campo magnético es perpendicular al plano de la espira. La magnitud de **B** varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $B = B_{\text{máx}}e^{-at}$, donde a es alguna constante. Esto es, en $t = 0$ el campo es $B_{\text{máx}}$, y para $t > 0$ el campo disminuye exponencialmente (Fig. 31.6). Determine la fem inducida en la espira como una función del tiempo.

Solución Puesto que **B** es perpendicular al plano de la espira, el flujo magnético a través de éste en el tiempo $t > 0$ es

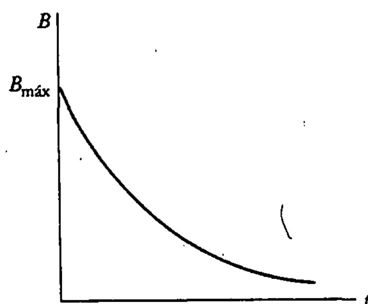


Figura 31.6 Disminución exponencial en la magnitud del campo magnético con el tiempo. La fem y la corriente inducidas varían con el tiempo en la misma forma.

$$\Phi_B = BA\cos 0 = AB_{máx}e^{-at}$$

Puesto que $AB_{máx}$ y a son constantes, la fem inducida calculada a partir de la ecuación 31.1 es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -AB_{máx}\frac{d}{dt}e^{-at} = aAB_{máx}e^{-at}$$

Esta expresión indica que la fem inducida decae exponencialmente en el tiempo. Observe que la fem máxima ocurre en $t = 0$, donde $\mathcal{E}_{máx} = aAB_{máx}$. La gráfica de $\mathcal{E}$ *versus* t es similar a la curva de B *versus*-t mostrada en la figura 31.6.

EJEMPLO CONCEPTUAL 31.3 ¿Qué está conectado a qué?

Dos focos están conectados a lados opuestos de una espira de alambre, como se muestra en la figura 31.7. Un campo magnético en disminución (confinado al área circular mostrada en la figura) induce una fem en la espira que causa que los dos focos brillen. ¿Qué ocurre con la brillantez de los focos cuando se cierra el interruptor?

Solución El foco 1 da luz más brillante, y el foco 2 se apaga. Una vez que se cierra el interruptor, el foco 1 está en la espira grande que consta del alambre al cual está unido y el alambre conectado al interruptor. Puesto que el flujo magnético variable está completamente encerrado dentro de esta espira, existe una corriente en el foco 1. Éste ahora es más brillante que antes de que se cerrara el interruptor porque ahora es la única resistencia en la espira. Como resultado, la corriente en el foco 1 es mayor que cuando el foco 2 también estaba en la espira.

Una vez que se cierra el interruptor, el foco 2 está en la espira que consta de los alambres unidos a ella y los conectados al interruptor. No hay flujo magnético variable a través de esta espira y, por tanto, no hay fem inducida.

Ejercicio ¿Qué ocurriría si el interruptor estuviese en un alambre ubicado a la izquierda del foco 1?

Respuesta El foco 1 se apagaría, y el foco 2 daría luz más brillante.

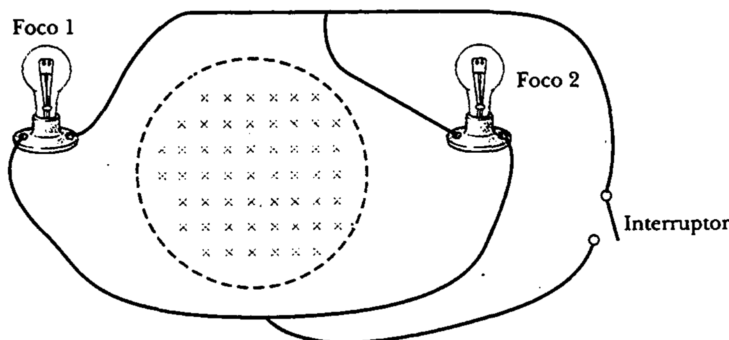


Figura 31.7

31.2 FEM EN MOVIMIENTO

En los ejemplos 31.1 y 31.2 se consideran casos en los que se induce una fem en un circuito estacionario colocado en un campo magnético cuando el campo cambia con el tiempo. En esta sección se describe la llamada **fem de movimiento,** que es la fem inducida en un conductor que se mueve a través de un campo magnético constante.

El conductor recto de longitud ℓ que se muestra en la figura 31.8 se mueve a través de un campo magnético uniforme dirigido hacia adentro de la página. Por simplicidad, suponga que el conductor se mueve en una dirección perpendicular al campo con velocidad constante bajo la influencia de algún agente externo. Los elec-

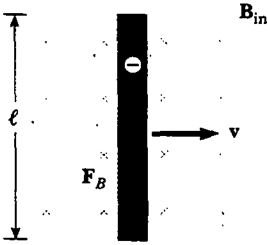


Figura 31.8 Un conductor eléctrico recto de longitud ℓ se mueve a velocidad **v** a través de un campo magnético uniforme **B** dirigido perpendicular a **v**. Una diferencia de potencial $\Delta V = B\ell v$ se mantiene entre los extremos del conductor.

trones en el conductor experimentan una fuerza $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que está dirigida a lo largo de la longitud ℓ, perpendicular tanto a **v** como a **B** (Ec. 29.1). Influidos por esta fuerza, los electrones se moverán al extremo inferior del conductor y se acumularán ahí, dejando una carga positiva neta en el extremo superior. Como resultado de esta separación de carga, se produce un campo eléctrico dentro del conductor. Las cargas se acumulan en ambos extremos hasta que la fuerza magnética hacia abajo qvB se equilibra por la fuerza eléctrica ascendente qE. En este punto los electrones dejan de moverse. La condición de equilibrio requiere que

$$qE = qvB \quad \text{o} \quad E = vB$$

El campo eléctrico producido en el conductor (una vez que los electrones dejan de moverse y E es constante) se relaciona con la diferencia de potencial a través de los extremos del conductor de acuerdo con la relación $\Delta V = E\ell$ (Ec. 25.6). De este modo,

$$\Delta V = E\ell = B\ell v \quad \textbf{(31.4)}$$

donde el extremo superior está a un potencial eléctrico más alto que el extremo inferior. Así, **se mantiene una diferencia de potencial entre los extremos del conductor siempre que éste continúe su movimiento a través del campo magnético uniforme.** Si la dirección del movimiento se invierte, lo mismo ocurre con la polaridad de la diferencia de potencial.

Una situación más interesante ocurre cuando el conductor en movimiento es parte de una trayectoria de conducción cerrada. Esta situación es particularmente útil para ilustrar cómo un flujo magnético variable puede causar una corriente inducida en un circuito cerrado. Considere un circuito constituido por una barra de conducción de longitud ℓ que se desliza a lo largo de dos rieles conductores paralelos y fijos, como se muestra en la figura 31.9a.

Por simplicidad, suponga que la barra tiene resistencia cero y que la parte estacionaria del circuito tiene una resistencia R. Un campo magnético **B**, uniforme y constante, se aplica perpendicularmente al plano del circuito. Cuando la barra se jala hacia la derecha a una velocidad **v**, influida por una fuerza aplicada $\mathbf{F}_{app}$, las cargas libres en la barra experimentan una fuerza magnética dirigida a lo largo de la longitud de la barra. Esta fuerza establece una corriente inducida porque las cargas son libres de moverse en una trayectoria conductora cerrada. En este caso la rapidez de cambio de flujo magnético a través de la espira y la correspondiente fem de movimiento inducida a través de la barra móvil, son proporcionales al cambio en el área de la espira. Como se verá, si la barra se jala hacia la derecha a velocidad constante, el trabajo efectuado por la fuerza aplicada aparece como energía interna en el resistor R (véase la sección 27.6).

Puesto que el área encerrada por el circuito en cualquier instante es ℓx, donde x es el ancho del circuito en cualquier instante, el flujo magnético a través de dicha área es

$$\Phi_B = B\ell x$$

Usando la ley de Faraday, y notando que x cambia con el tiempo a una rapidez $dx/dt = v$, se encuentra que la fem de movimiento inducida es

Fem de movimiento

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\ell x) = -B\ell\frac{dx}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -B\ell v \quad \textbf{(31.5)}$$

Puesto que la resistencia del circuito es R, la magnitud de la corriente inducida es

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{B\ell v}{R} \quad \textbf{(31.6)}$$

El diagrama del circuito equivalente para este ejemplo se muestra en la figura 31.9b.

Examine el sistema empleando consideraciones de energía. Puesto que no hay batería en el circuito, uno puede preguntar acerca del origen de la corriente inducida y la energía eléctrica en el sistema. Se puede entender la fuente de esta corriente y energía al observar que la fuerza aplicada realiza trabajo sobre la barra conductora; y, por esa razón, mueve las cargas a través de un campo magnético. Su movimiento a través del campo ocasiona que las cargas se muevan a lo largo de la barra a cierta velocidad de arrastre promedio y, en consecuencia, se establece una corriente. Puesto que la energía se debe conservar, el trabajo efectuado por la fuerza aplicada sobre la barra durante algún intervalo de tiempo debe ser igual a la energía eléctrica suministrada por la fem inducida en ese mismo periodo. Además, si la barra se mueve a rapidez constante, el trabajo hecho sobre ella debe ser igual a la energía entregada al resistor durante este intervalo de tiempo.

Conforme se mueve a través del campo magnético uniforme **B**, la barra experimenta una fuerza magnética $\mathbf{F}_B$ de magnitud $I\ell B$ (véase la sección 29.2). La dirección de esta fuerza es opuesta al movimiento de la barra, hacia la izquierda en la figura 31.9a. Puesto que la barra se mueve a velocidad constante, la fuerza aplicada debe ser igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza magnética, o hacia la derecha en la figura 31.9a. (Si $\mathbf{F}_B$ actuara en la dirección del movimiento, causaría que la barra se acelerara. Esta situación violaría el principio de la conservación de la energía.) Usando la ecuación 31.6, y el hecho de que $F_{\text{app}} = I\ell B$, se encuentra que la potencia entregada por la fuerza aplicada es

$$\mathcal{P} = F_{\text{app}}v = (I\ell B)v = \frac{B^2\ell^2v^2}{R} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \qquad \textbf{(31.7)}$$

A partir de la ecuación 27.23 se observa que esta potencia es igual a la rapidez a la cual la energía se entrega al resistor I^2R, como se habría esperado. También es igual a la potencia $I\mathcal{E}$ suministrada por la fem de movimiento. Este ejemplo es una clara demostración de la conversión de energía mecánica primero a energía eléctrica y finalmente a energía interna en el resistor.

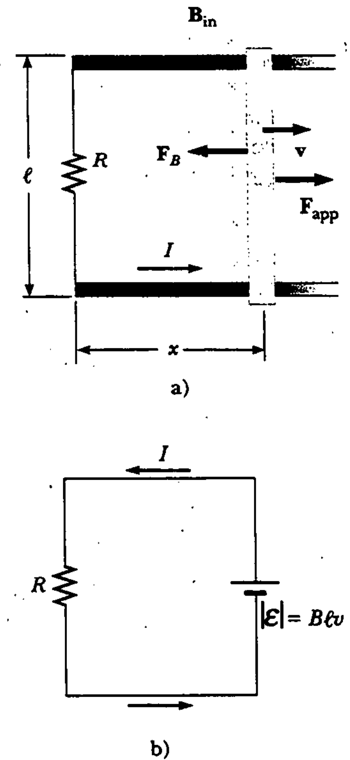


Figura 31.9 a) Una barra conductora se desliza con una velocidad **v** a lo largo de dos rieles conductores bajo la acción de una fuerza aplicada $\mathbf{F}_{\text{app}}$. La fuerza magnética $\mathbf{F}_B$ se opone al movimiento, y una corriente I en el sentido contrario de las manecillas del reloj se induce en la espira. b) El diagrama de circuito equivalente para la configuración mostrada en la parte a).

Pregunta sorpresa 31.2

Mientras un avión vuela de Los Ángeles a Seattle, pasa a través del campo magnético de la Tierra. Como resultado, se desarrolla una fem de movimiento entre las puntas de las alas. ¿Cuál punta tiene carga positiva?

EJEMPLO 31.4 Fem de movimiento inducida en una barra rotatoria

Una barra conductora de longitud ℓ gira a una rapidez angular constante ω alrededor de un pivote en un extremo. Un campo magnético uniforme **B** está dirigido perpendicularmente al plano de rotación, como se muestra en la figura 31.10. Determine la fem de movimiento inducida entre los extremos de la barra.

Solución Considere un segmento de la barra de longitud dr, que adquiere una velocidad **v**. De acuerdo con la ecuación 31.5, la magnitud de la fem inducida en este segmento es

$$d\mathcal{E} = Bv\ dr$$

Puesto que cada segmento de la barra se mueve perpendicularmente a **B**, una fem $d\mathcal{E}$ de la misma forma se genera a través de cada segmento. Al sumar las fem inducidas en todos los segmentos, los cuales están en serie, se obtiene la fem total entre los extremos de la barra:

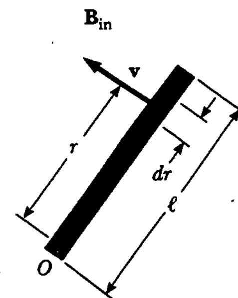


Figura 31.10 Una barra conductora gira en torno a un pivote en uno de sus extremos en un campo magnético uniforme que es perpendicular al plano de rotación. Una fem de movimiento se induce a través de los extremos de la barra.

$$\mathcal{E} = \int Bv\, dr$$

Para integrar esta expresión advierta que la rapidez lineal de un elemento se relaciona con la rapidez angular ω a través de la relación $v = r\omega$. Por tanto, puesto que B y ω son constantes, se encuentra que

$$\mathcal{E} = B\int v\, dr = B\omega \int_0^{\ell} r\, dr = \tfrac{1}{2} B\omega\ell^2$$

EJEMPLO 31.5 Fuerza magnética que actúa sobre una barra deslizante

La barra conductora ilustrada en la figura 31.11, de masa m y longitud ℓ, se mueve sobre dos rieles paralelos sin fricción en presencia de un campo magnético uniforme dirigido hacia adentro de la página. A la barra se le da una velocidad inicial $\mathbf{v}_i$ hacia la derecha y se suelta en $t = 0$. Encuentre la velocidad de la barra como una función del tiempo.

Solución La corriente inducida está en la dirección contraria a la de las manecillas del reloj, y la fuerza magnética es $F_B = -I\ell B$, donde el signo negativo significa que la fuerza es hacia la izquierda y retarda el movimiento. Ésta es la única fuerza horizontal que actúa sobre la barra y, consecuentemente, la segunda ley de Newton aplicada al movimiento en la dirección horizontal produce

$$F_x = ma = m\frac{dv}{dt} = -I\ell B$$

A partir de la ecuación 31.6 se sabe que $I = B\ell v/R$, de modo que esta expresión se puede escribir como

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2\ell^2}{R}v$$

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}\right)dt$$

Integrando esta ecuación mediante la condición inicial de que $v = v_i$ en $t = 0$ se encuentra que

$$\int_{v_i}^{v} \frac{dv}{v} = \frac{-B^2\ell^2}{mR}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{v}{v_i}\right) = -\left(\frac{B^2\ell^2}{mR}\right)t = -\frac{t}{\tau}$$

donde la constante $\tau = mR/B^2\ell^2$. A partir de este resultado se ve que la velocidad puede expresarse en la forma exponencial

$$v = v_i e^{-t/\tau}$$

Esta expresión indica que la velocidad de la barra disminuye exponencialmente con el tiempo bajo la acción de una fuerza magnética retardadora.

Ejercicio Para la barra en este ejemplo encuentre expresiones para la corriente inducida y la magnitud de la fem inducida como funciones del tiempo.

Respuesta $I = \frac{B\ell v_i}{R}e^{-t/\tau}$; $\mathcal{E} = B\ell v_i e^{-t/\tau}$. (Ambas disminuyen exponencialmente con el tiempo.)

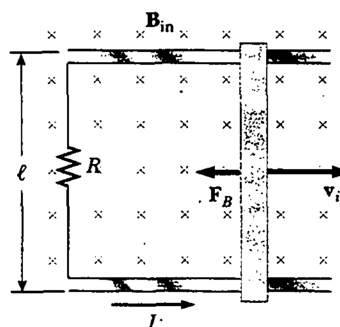


Figura 31.11 A una barra conductora de longitud ℓ que se desliza sobre dos rieles conductores fijos se le da una velocidad inicial $\mathbf{v}_i$ hacia la derecha.

31.3 LEY DE LENZ

12.7 La ley de Faraday (Ec. 31.1) indica que la fem inducida y el cambio en el flujo tienen signos algebraicos opuestos. Esto tiene una interpretación física muy real que se conoce como **ley de Lenz**[2]:

[2] Desarrollada por el físico alemán Heinrich Lenz (1804-1865).

La polaridad de la fem inducida es tal que tiende a producir una corriente que crea un flujo magnético, el cúal se opone al cambio del flujo magnético a través del área encerrada por la espira de corriente.

Esto es, la corriente inducida tiende a evitar el cambio del flujo magnético original a través del circuito desde la transformación. Como se verá, esta ley es una consecuencia de la ley de la conservación de la energía.

Para comprender la ley de Lenz regrese al ejemplo de una barra que se mueve hacia la derecha sobre dos rieles paralelos en presencia de un campo magnético uniforme, al cual se hará referencia como campo magnético *externo* (Fig. 31.12a). A medida que la barra se mueve hacia la derecha, el flujo magnético a través del área encerrada por el circuito aumenta con el tiempo, ya que el área se incrementa. La ley de Lenz señala que la corriente inducida debe estar dirigida de modo que el flujo magnético que produzca se oponga al cambio en el flujo magnético externo. En vista de que el flujo magnético externo está aumentando hacia adentro de la página, la corriente inducida, si se va a oponer a este cambio, debe producir un flujo dirigido hacia afuera de la página. Por consiguiente, la corriente inducida debe estar dirigida en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando la barra se mueve hacia la derecha. (Emplee la regla de la mano derecha para verificar esta dirección.) Si la barra se mueve hacia la izquierda, como se observa en la figura 31.12b, el flujo magnético externo a través del área encerrada por la espira disminuye con el tiempo. Puesto que el flujo está dirigido hacia adentro de la página, la dirección de la corriente inducida debe estar en el sentido de las manecillas del reloj, de modo que produzca un flujo que también esté dirigido hacia adentro de la página. En cualquier caso, la corriente inducida tiende a mantener el flujo original que atraviesa el área encerrada por la espira de corriente.

Examine esta situación desde el punto de vista de las consideraciones de energía. Suponga que se da a la barra un ligero empujón hacia la derecha. En el análisis anterior se encontró que este movimiento establece en la espira una corriente en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Vea qué sucede si se supone que la corriente es en la dirección de las manecillas del reloj, tal que la dirección de la fuerza magnética ejercida sobre la barra sea hacia la derecha. Esta fuerza aceleraría la barra y aumentaría su velocidad. Esto, a su vez, causaría que el área encerrada por la espira aumentara más rápidamente, lo que daría como resultado un incremento en la corriente inducida, y esto a su vez causaría un aumento en la fuerza que provocaría un incremento en la corriente, y así sucesivamente. En efecto, el sistema adquiriría energía sin energía de entrada adicional. Esto sin duda es inconsistente con toda la experiencia y con la ley de la conservación de la energía. De este modo, uno está obligado a concluir que la corriente debe ser en la dirección contraria a la de las manecillas del reloj.

Considere otra situación, una en la que un imán de barra se mueve hacia una espira metálica estacionaria, como se ve en la figura 31.13a. Conforme el imán se mueve a la derecha hacia la espira, el flujo magnético externo a través de éste aumenta con el tiempo. Para contrarrestar este aumento en el flujo hacia la derecha, la corriente inducida produce un flujo hacia la izquierda, como se ilustra en la figura 31.13b; por tanto, la corriente inducida está en la dirección mostrada. Observe que las líneas de campo magnético asociadas con la corriente inducida se oponen al movimiento del imán. Conociendo que polos magnéticos iguales se repelen entre sí, se concluye que la cara izquierda de la espira de corriente es en esencia un polo norte y la cara derecha es un polo sur.

Si el imán se moviera hacia la izquierda, como se muestra en la figura 31.13c, su flujo a través del área encerrada por la espira, la cual está dirigida hacia la derecha, disminuiría en el tiempo. Ahora la corriente inducida en la espira está en la dirección mostrada en la figura 31.13d porque esta dirección de corriente produce un flujo magnético en la misma dirección que el flujo externo. En este caso la cara izquierda de la espira es un polo sur y la cara derecha es un polo norte.

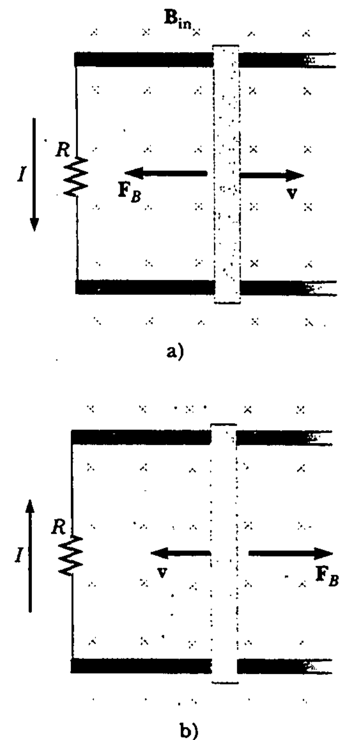


Figura 31.12 a) Conforme la barra conductora se desliza sobre los dos rieles conductores fijos, el flujo magnético a través del área encerrada por la espira aumenta en el tiempo. Por la ley de Lenz, la corriente inducida debe estar en sentido contrario a las manecillas del reloj a fin de producir un flujo magnético en oposición dirigido hacia afuera de la página. b) Cuando la barra se mueve a la izquierda, la corriente inducida debe estar en el sentido de las manecillas del reloj. ¿Por qué?

Experimento sorpresa

Para este experimento se necesitan manos firmes, una moneda y un imán intenso. Después de verificar que la moneda no es atraída hacia el imán, equilibre con cuidado la moneda sobre su canto. (Esto no funcionará con otras monedas porque requieren demasiada fuerza para volcarse.) Sostenga un polo del imán a un milímetro de la cara de la moneda, pero no la empuje. Ahora aleje muy rápidamente el imán de la moneda. ¿Hacia dónde se ladea la moneda? ¿La moneda cae de la misma manera la mayor parte de las veces? Explique qué está ocurriendo en términos de la ley de Lenz. Usted querrá referirse a la figura 31.13.

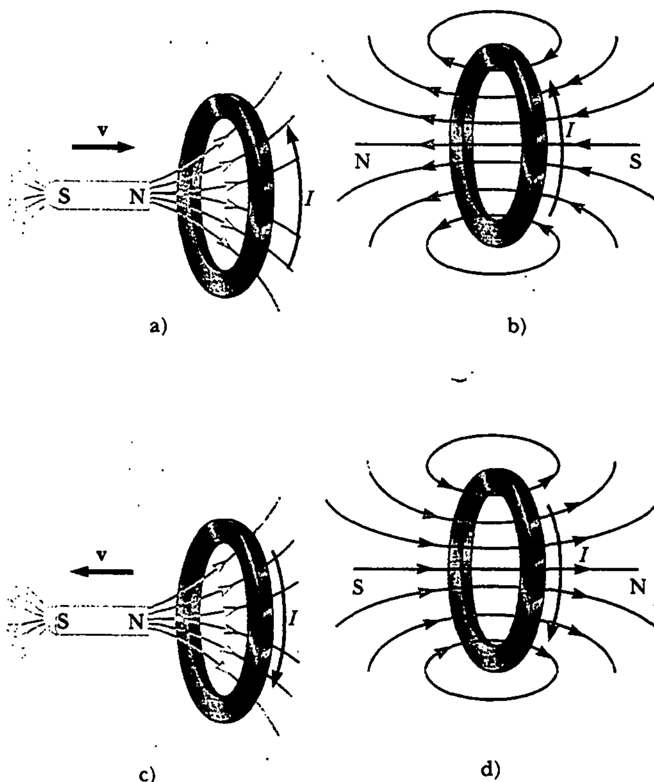


Figura 31.13 a) Cuando el imán se mueve hacia la espira conductora estacionaria, se induce una corriente en la dirección mostrada. b) Esta corriente inducida produce su propio flujo magnético que está dirigido hacia la izquierda y así contrarresta el creciente flujo externo a la derecha. c) Cuando el imán se mueve alejándose de la espira conductora estacionaria, se induce una corriente en la dirección mostrada. d) Esta corriente inducida produce un flujo magnético que está dirigido hacia la derecha y así contrarresta el flujo externo decreciente a la derecha.

Pregunta sorpresa 31.3

La figura 31.14 muestra un imán que se está moviendo en la vecindad de un solenoide conectado a un galvanómetro. El polo sur del imán es el polo más cercano al solenoide, y el

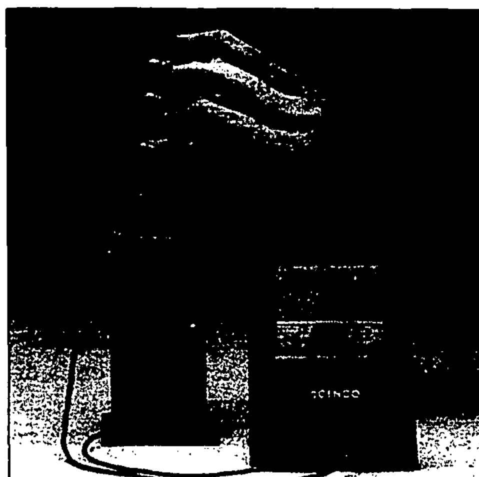


Figura 31.14 Cuando un imán se mueve hacia o desde un solenoide unido a un galvanómetro, se induce una corriente eléctrica, indicada por la desviación momentánea de la aguja del galvanómetro. *(Richard Megna/Fundamental Photographs)*

galvanómetro indica una corriente en el solenoide en el sentido de las manecillas del reloj (vista desde arriba). ¿La persona está insertando o sacando el imán?

Ejemplo conceptual Aplicación de la ley de Lenz

Un anillo metálico se coloca cerca de un solenoide, como se muestra en la figura 31.15a. Encuentre la dirección de la corriente inducida en el anillo a) en el instante en que se cierra el interruptor en el circuito que contiene al solenoide, b) después de que el interruptor ha estado cerrado durante varios segundos, y c) en el instante en que se abre el interruptor.

Solución a) En el instante en que se cierra el interruptor, la situación cambia de una condición en la cual no pasa flujo magnético a través del anillo a una en la que el flujo pasa a través de él en la dirección mostrada en la figura 31.15b. Para contrarrestar este cambio en el flujo, la corriente inducida en el anillo debe establecer un campo magnético dirigido de izquierda a derecha en la figura 31.15b. Para esto es necesario una corriente dirigida como se indica.

b) Después de que el interruptor ha estado cerrado por varios segundos no hay cambio en el flujo magnético a través de la espira; por tanto, la corriente inducida en el anillo es cero.

c) La apertura del interruptor cambia la situación de una en la cual el flujo magnético pasa por el anillo a una en la cual no hay flujo magnético. La dirección de la corriente inducida es como se muestra en la figura 31.15c porque la corriente en esta dirección produce un campo magnético que está dirigido de derecha a izquierda, con lo que contrarresta la disminución en el campo producida por el solenoide.

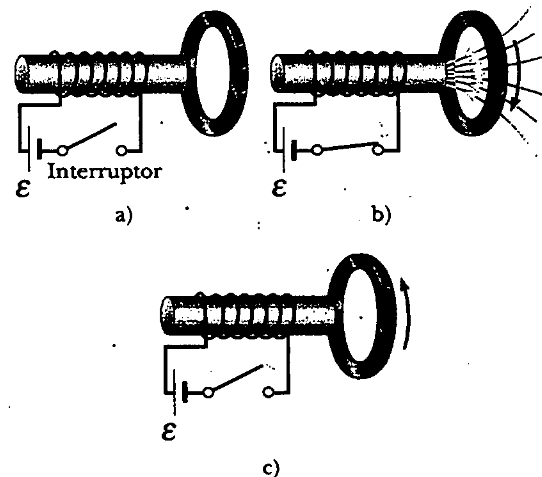


Figura 31.15

Ejemplo conceptual Una espira que se mueve a través de un campo magnético

Una espira metálica rectangular de dimensiones ℓ y w y resistencia R se mueve con rapidez constante v hacia la derecha, como se muestra en la figura 31.16a, pasando a través de un campo magnético uniforme **B** dirigido hacia adentro de la página y que se extiende una distancia $3w$ a lo largo del eje x. Definiendo x como la posición del lado derecho de la espira a lo largo del eje x, grafique, como funciones de x, a) el flujo magnético a través del área encerrada por la espira, b) la fem de movimiento inducida, y c) la fuerza aplicada externa necesaria para contrarrestar a la fuerza magnética y mantener v constante.

Solución a) La figura 31.16b muestra el flujo a través del área encerrada por la espira como función de x. Antes de que la espira entre al campo el flujo es cero. A medida que ingresa en él, el flujo aumenta linealmente con la posición hasta que el extremo izquierdo de la espira entra en el campo. Por último, el flujo a través de la espira disminuye linealmente hasta cero cuando la espira abandona el campo.

b) Antes de que la espira entre al campo no hay fem de movimiento inducida en él, puesto que no hay campo presente (Fig. 31.16c). Conforme el lado derecho de la espira ingresa al campo, el flujo magnético hacia adentro de la página empieza a crecer. Por consiguiente, de acuerdo con la ley de Lenz, la corriente inducida es en sentido contrario al de las manecillas del reloj, pues debe producir un campo magnético dirigido hacia afuera de la página. La fem de movimiento $-B\ell v$ (a partir de la Ec. 31.5) surge de la fuerza magnética experimentada por cargas en el lado derecho de la espira. Cuando la espira está por completo en el campo, el cambio en el flujo magnético es cero y, por tanto, la fem de movimiento desaparece. Esto ocurre porque, una vez que el lado izquierdo de la espira ingresa al campo, la fem de movimiento inducida en él cancela la fem de movimiento presente en el lado derecho de la espira. A medida que el lado derecho de la espira deja el campo, el flujo interior comienza a disminuir, se induce una corriente en el sentido de las manecillas del reloj y la fem inducida es $B\ell v$. Tan pronto como el lado izquierdo sale del campo la fem se reduce a cero.

c) La fuerza externa que se debe aplicar a la espira para mantener este movimiento se grafica en la figura 31.16d. Antes de que la espira entre al campo no hay fuerza magnética sobre él; en consecuencia, la fuerza aplicada debe ser cero si v es constante. Cuando el lado derecho de la espira entra al campo, la fuerza aplicada necesaria para mantener la rapidez constante debe ser igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza magnética ejercida sobre ese lado: $F_B = -I\ell B = -B^2\ell^2 v/R$. Cuando la espira está por completo en el campo, el flujo a través de él no cambia con el tiempo. Por tanto, la fem neta inducida en la espira es cero y la corriente también es cero. Por consiguiente, no es necesaria ninguna fuerza externa para mantener el movimiento. Por último, a medida que el lado derecho sale del campo, la fuerza aplicada debe ser igual en mag-

nitud y opuesta en dirección a la fuerza magnética que actúa sobre el lado izquierdo de la espira.

A partir de este análisis se concluye que la potencia sólo se suministra cuando la espira está entrando o saliendo del campo. Asimismo, este ejemplo muestra que la fem de movimiento inducida en la espira puede ser cero ¡aun cuando haya movimiento a través del campo! Una fem de movimiento se induce en la espira sólo cuando el flujo magnético a través de éste *cambia en el tiempo.*

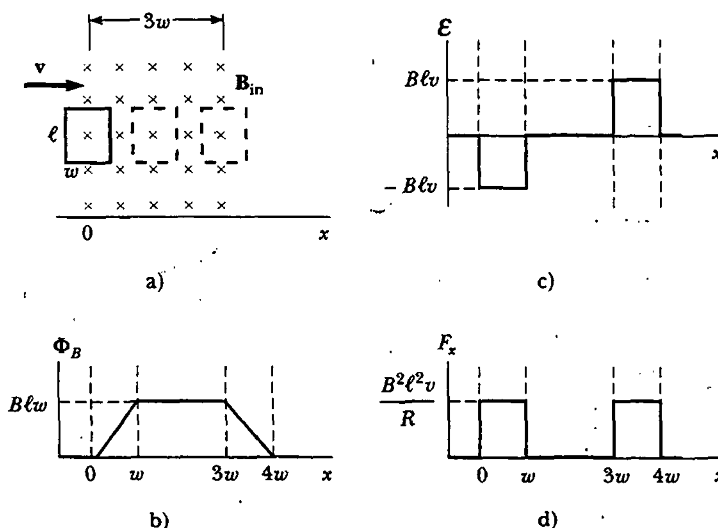


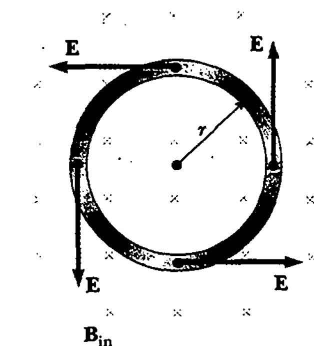
Figura 31.16 a) Una espira rectangular conductora de ancho w y longitud ℓ que se mueve a velocidad **v** a través de un campo magnético uniforme que se extiende una distancia $3w$. b) Flujo magnético a través del área encerrada por la espira como función de la posición de la espira. c) Fem inducida como función de la posición de la espira. d) Fuerza aplicada requerida para velocidad constante como función de la posición de la espira.



31.4 FEM INDUCIDA Y CAMPOS ELÉCTRICOS

12.8 Se ha visto que un flujo magnético variable induce una fem y una corriente en una espira de conducción. En consecuencia, se debe concluir que **un campo eléctrico se crea en el conductor como resultado del flujo magnético variable.** Sin embargo, este campo eléctrico inducido tiene dos propiedades importantes que lo distinguen del campo electrostático producido por cargas estacionarias: el campo inducido no es conservativo y varía en el tiempo.

Se puede ilustrar este punto considerando una espira de conducción de radio r situada en un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la espira, como se ve en la figura 31.17. Si el campo magnético cambia con el tiempo, entonces, de acuerdo con la ley de Faraday (Ec. 31.1), una fem $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$ se induce en la espira. La inducción de una corriente en la espira implica la presencia de un campo eléctrico inducido **E**, el cual debe ser tangente a la espira, ya que todos los puntos en el mismo son equivalentes. El trabajo hecho al mover una carga de prueba q una vez alrededor de la espira es igual a $q\mathcal{E}$. Puesto que la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga es $q\mathbf{E}$, el trabajo realizado por esta fuerza al mover la carga una vez alrededor de la espira está dada por $qE(2\pi r)$, donde $2\pi r$ es la circunferencia de la espira. Estas dos expresiones para el trabajo deben ser iguales; por tanto, se ve que



'igura 31.17 Una espira conducora de radio r en un campo magnétio uniforme perpendicular al plano le la espira. Si **B** cambia en el tiemo, un campo eléctrico es inducido n una dirección tangente a la circunerencia de la espira.

$$q\mathcal{E} = qE(2\pi r)$$

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$$

Usando este resultado, junto con la ecuación 31.1 y el hecho de que $\Phi_B = BA = \pi r^2 B$ para una espira circular, se encuentra que el campo eléctrico inducido puede expresarse como

$$E = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \qquad \textbf{(31.8)}$$

Si se especifica la variación en el tiempo del campo magnético, el campo eléctrico inducido se puede calcular con facilidad a partir de la ecuación 31.8. El signo negativo indica que el campo eléctrico inducido se opone al cambio en el campo magnético.

La fem para cualquier trayectoria cerrada puede expresarse como la integral de línea de $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ sobre dicha trayectoria: $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$. En casos más generales, E no puede ser constante, y la trayectoria no puede ser un círculo. Por tanto, la ley de inducción de Faraday, $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$, puede escribirse en la forma general como

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(31.9)}$$

Ley de Faraday en la forma general

Es importante reconocer que **el campo eléctrico inducido E en la ecuación 31.9 es no conservativo y variable en el tiempo, y se genera a partir de un campo magnético variable.** El campo E que satisface la ecuación 31.9 podría no ser un campo electrostático por la siguiente razón: si el campo fuese electrostático y, por tanto, conservativo, la integral de línea de $\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$ a lo largo de una espira cerrada sería cero; esto estaría en contradicción con la ecuación 31.9.

Ejemplo 31.8 Campo eléctrico inducido por un campo magnético variable en un solenoide

Un largo solenoide de radio R tiene n vueltas de alambre por unidad de longitud y conduce una corriente que varía sinusoidalmente en el tiempo cuando $I = I_{máx} \cos \omega t$, donde $I_{máx}$ es la máxima corriente y ω es la frecuencia angular de la fuente de corriente alternante (Fig. 31.18). a) Determine la magnitud del campo eléctrico inducido afuera del solenoide, a una distancia $r > R$ de su eje central largo.

Solución Primero considere un punto externo y tome la trayectoria para la integral de línea como un círculo de radio r centrado en el solenoide, como está ilustrado en la figura 31.18. Por simetría se ve que la magnitud de **E** es constante sobre esta trayectoria y tangente a ella. El flujo magnético a través del área encerrada por esta trayectoria es $BA = B\pi R^2$, por lo que la ecuación 31.9 produce

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}(B\pi R^2) = -\pi R^2\frac{dB}{dt}$$

$$1) \qquad \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = E(2\pi r) = -\pi R^2\frac{dB}{dt}$$

El campo magnético dentro de un largo solenoide está dado por la ecuación 30.17, $B = \mu_0 nI$. Cuando se sustituye $I = I_{máx} \cos \omega t$ en esta ecuación y luego se sustituye el resultado en la ecuación 1), se encuentra que

$$E(2\pi r) = -\pi R^2 \mu_0 n I_{máx}\frac{d}{dt}(\cos \omega t) = \pi R^2 \mu_0 n I_{máx}\,\omega \operatorname{sen} \omega t$$

$$2) \qquad E = \frac{\mu_0 n I_{máx}\,\omega R^2}{2r}\operatorname{sen}\omega t \qquad (\text{para } r > R)$$

Por consiguiente, el campo eléctrico varía sinusoidalmente con el tiempo, y su amplitud disminuye con $1/r$ afuera del solenoide.

b) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico inducido dentro del solenoide a una distancia r de su eje?

Solución Para un punto interior ($r < R$) el flujo que circunda a una espira de integración está dado por $B\pi r^2$. Utilizando el mismo procedimiento que en el inciso a) se encuentra que

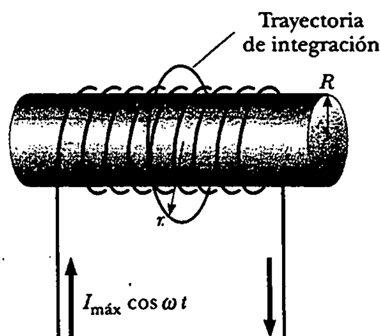


Figura 31.18 Un largo solenoide conduce una corriente variable en el tiempo dada por $I = I_0 \cos \omega t$. Un campo eléctrico es inducido tanto en el interior como en el exterior del solenoide.

$$E(2\pi r) = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \mu_0 n I_{\text{máx}} \omega \operatorname{sen} \omega t$$

$$3) \qquad E = \frac{\mu_0 n I_{\text{máx}} \omega}{2} r \operatorname{sen} \omega t \qquad (\text{para } r < R)$$

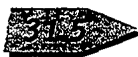
Esto muestra que la amplitud del campo eléctrico inducido dentro del solenoide por el flujo magnético variable a través del solenoide aumenta linealmente con r y varía sinusoidalmente con el tiempo.

Ejercicio Muestre que las ecuaciones 2) y 3) para las regiones exterior e interior del solenoide se igualan en la frontera $r = R$.

Ejercicio ¿El campo eléctrico sería diferente si el solenoide tuviese un centro de hierro?

Respuesta Sí, podría ser mucho más intenso porque el campo magnético es máximo (y, por tanto, el cambio en el flujo) a través del solenoide podría ser miles de veces mayor. (Véase el ejemplo 30.10.)

Sección opcional



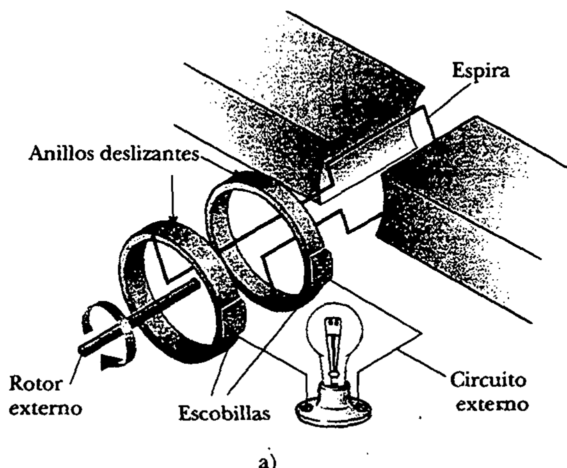
GENERADORES Y MOTORES



Las turbinas hacen girar los generadores en una planta de potencia hidroeléctrica. *(Luis Castaneda/The Image Bank)*

Los generadores eléctricos se usan para producir energía eléctrica. Para comprender cómo funcionan considere el **generador de corriente alterna** (ca), un dispositivo que convierte la energía mecánica en energía eléctrica. En su forma más simple se compone de una espira de alambre que gira por medios externos en un campo magnético (Fig. 31.19a).

En las centrales eléctricas comerciales la energía requerida para rotar la espira puede obtenerse de numerosas fuentes. Por ejemplo, en una planta hidroeléctrica el agua que cae directamente sobre los álabes de una turbina produce el movimiento rotatorio; en una planta carboeléctrica, la energía liberada por el carbón en combustión se usa para convertir agua en vapor y éste se dirige hacia los álabes de la turbina. Cuando la espira gira en un campo magnético, el flujo magnético a través del área encerrada por la espira cambia con el tiempo; esto induce una fem y una corriente en la espira de acuerdo con la ley de Faraday. Los extremos de la espira se conectan a anillos deslizantes que giran con la espira. Las conexiones desde estos anillos deslizantes, las cuales actúan como terminales de salida del generador al circuito externo se hacen por medio de escobillas estacionarias en contacto con los anillos deslizantes.



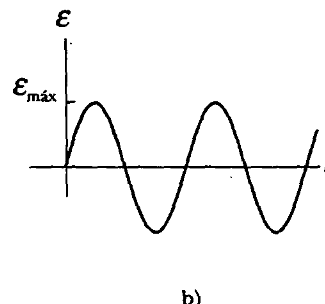


Figura 31.19 a) Diagrama esquemático de un generador ca. Una fem es inducida sobre una espira que gira en un campo magnético. b) La fem inducida alterna en la espira graficada como función del tiempo.

Suponga que, en lugar de una sola vuelta, la espira tiene N vueltas (una situación más práctica), todas de la misma área A, y que gira en un campo magnético con una rapidez angular constante ω. Si θ es el ángulo entre el campo magnético y la normal al plano de la espira, como se ve en la figura 31.20, entonces el flujo magnético a través de la espira en cualquier momento t es

$$\Phi_B = BA\cos\theta = BA\cos\omega t$$

donde se ha usado la relación $\theta = \omega t$ entre el desplazamiento angular y la rapidez angular (véase la Ec. 10.3). (El reloj se ha fijado de modo que $t = 0$ cuando $\theta = 0$.) Por consiguiente, la fem inducida en la bobina es

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -NAB\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = NAB\omega\ \text{sen}\ \omega t \qquad \textbf{(31.10)}$$

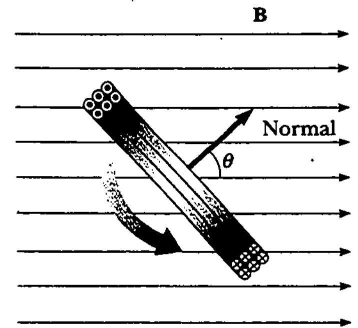


Figura 31.20 Una espira que encierra un área A y contiene N vueltas, gira a rapidez angular constante ω en un campo magnético. La fem inducida en la espira varía sinusoidalmente en el tiempo.

Este resultado muestra que la fem varía senoidalmente con el tiempo, como se grafica en la figura 31.19b. A partir de la ecuación 31.10 se ve que la fem máxima tiene el valor

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} = NAB\omega \qquad \textbf{(31.11)}$$

la cual ocurre cuando $\omega t = 90°$ o $270°$. En otras palabras, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{máx}}$ cuando el campo magnético está en el plano de la bobina y la rapidez de cambio en el tiempo del flujo es un máximo. Aún más, la fem es cero cuando $\omega t = 0$ o $180°$, es decir, cuando **B** es perpendicular al plano de la bobina y la rapidez de cambio en el tiempo del flujo es cero.

La frecuencia de los generadores comerciales en Estados Unidos y Canadá es de 60 Hz, en tanto que en algunos países europeos se utiliza la de 50 Hz. (Recuerde que $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia en hertz.)

EJEMPLO 31.[illegible] **Fem inducida en un generador**

Un generador ca consta de ocho vueltas de alambre cada una de área $A = 0.090\ 0\ \text{m}^2$, y la resistencia total del alambre es de $12.0\ \Omega$. La espira gira en un campo magnético de 0.500 T a una frecuencia constante de 60.0 Hz. a) Encuentre la máxima fem inducida.

Solución Advierta primero que $\omega = 2\pi f = 2\pi(60.0\ \text{Hz}) = 377\ \text{s}^{-1}$. De este modo, la ecuación 31.11 produce

$$\mathcal{E}_{\text{máx}} = NAB\omega = 8(0.090\ 0\ \text{m}^2)(0.500\ \text{T})(377\ \text{s}^{-1}) = 136\ \text{V}$$

b) ¿Cuál es la máxima corriente inducida cuando las terminales de salida están conectadas a un conductor de baja resistencia?

Solución A partir de la ecuación 27.8, y de los resultados del inciso a), se tiene

$$I_{\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{máx}}}{R} = \frac{136\ \text{V}}{12.0\ \Omega} = 11.3\ \text{A}$$

Ejercicio Determine la variación en el tiempo de la fem y la corriente inducidas.

Respuesta $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{máx}}\ \text{sen}\ \omega t = (136\ \text{V})\text{sen}\ 377t$; $I = I_{\text{máx}}\ \text{sen}\ \omega t = (11.3\ \text{A})\text{sen}\ 377t$.

El **generador de corriente directa** (cd) se ilustra en la figura 31.21a. Estos generadores se emplean, por ejemplo, para cargar baterías de almacenamiento en autos antiguos. Los componentes son esencialmente los mismos que los del generador de ca, excepto que los contactos de la espira rotatoria se hacen utilizando un anillo separado llamado *conmutador*.

En esta configuración la salida de voltaje siempre tiene la misma polaridad y pulsa con el tiempo, como se ve en la figura 31.21b. La razón para esto puede entenderse notando que los contactos para el anillo separado invierten sus papeles cada

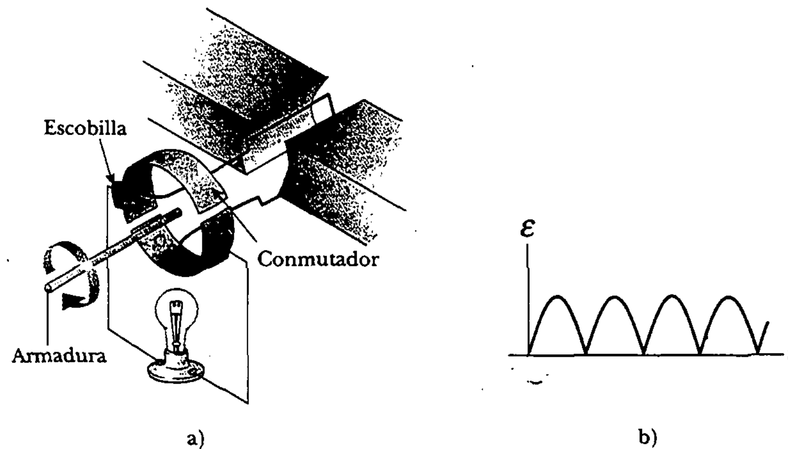


Figura 31.21 a) Diagrama esquemático de un generador de cd. b) La magnitud de la fem varía en el tiempo pero la polaridad nunca cambia.

medio ciclo. Al mismo tiempo, la polaridad de la fem inducida se invierte; por tanto, la polaridad del anillo separado (la cual es la misma que la polaridad del voltaje de salida) permanece igual.

Una corriente cd pulsante no es apropiada para la mayor parte de las aplicaciones. Para obtener una corriente cd más estable, los generadores de cd comerciales utilizan muchas bobinas y conmutadores distribuidos de manera que los pulsos sinusoidales de las diversas bobinas estén fuera de fase. Cuando estos pulsos se superponen, la salida de cd casi está libre de fluctuaciones.

Los **motores** son dispositivos que convierten energía eléctrica en energía mecánica. En esencia, un motor es un generador que funciona a la inversa. En vez de generar una corriente mediante la rotación de una espira, se suministra una corriente a la espira por una batería y el momento de torsión que actúa sobre la espira que conduce corriente ocasiona que ésta gire.

Puede hacerse trabajo mecánico útil uniendo la armadura rotatoria a algún dispositivo externo. Sin embargo, cuando la espira gira en un campo magnético, el flujo magnético variable induce una fem en el mismo; esta fem inducida siempre actúa para reducir la corriente en la espira. Si éste no fuera el caso, se violaría la ley de Lenz. La fem inversa aumenta en magnitud cuando se incrementa la rapidez rotacional de la armadura. (El concepto *fem inversa* se utiliza para indicar una fem que tiende a reducir la corriente suministrada.) Puesto que el voltaje disponible para suministrar la corriente es igual a la diferencia entre el voltaje de suministro y la fem inversa, la corriente a través de la bobina giratoria está limitada por la fem inversa.

Cuando se activa un motor inicialmente no hay fem inversa; en consecuencia, la corriente es muy grande debido a que está limitada sólo por la resistencia de las bobinas. Cuando las bobinas empiezan a girar, la fem inversa inducida se opone al voltaje aplicado y la corriente en las bobinas se reduce. Si la carga mecánica aumenta, el motor se frena; esto ocasiona que la fem inversa disminuya. Esta reducción en la fem inversa aumenta la corriente en las bobinas y, en consecuencia, también incrementa la potencia necesaria de la fuente de voltaje externa. Por esta razón los requerimientos de potencia para arrancar un motor y mantenerlo funcionando son más grandes en el caso de cargas pesadas que en el de ligeras. Si se deja que el motor opere sin carga mecánica, la fem inversa reduce la corriente a un valor apenas lo suficientemente grande para superar las pérdidas de energía debidas a la energía interna y a la fricción. Si una carga muy pesada oprime el motor de modo que no pueda girar, la falta de una fem inversa puede conducir a una corriente peligrosamente alta en los alambres del motor. Si el problema no se corrige, podría ocasionarse un incendio.

EJEMPLO 31.10 La corriente inducida en un motor

Suponga que un motor en el que las bobinas tienen una resistencia total de 10 Ω se alimenta con un voltaje de 120 V. Cuando el motor está funcionando a su máxima rapidez, la fem inversa es de 70 V. Encuentre la corriente en las bobinas a) cuando el motor se acciona por primera vez, y b) cuando ha alcanzado su rapidez máxima.

Solución a) Cuando el motor se activa, a fem inversa es cero (pues las bobinas están sin movimiento). De este modo, la corriente en las bobinas es un máximo y es igual a

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{120\ \text{V}}{10\ \Omega} = 12\ \text{A}$$

b) A la máxima rapidez la fem inversa tiene su máximo valor. Así, el voltaje efectivo del suministro es el de la fuente externa menos la fem inversa. Por tanto, la corriente se reduce a

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{inversa}}}{R} = \frac{120\ \text{V} - 70\ \text{V}}{10\ \Omega} = \frac{50\ \text{V}}{10\ \Omega} = 5.0\ \text{A}$$

Ejercicio Si la corriente en el motor es 8.0 A en cierto instante, ¿cuál es la fem inversa en este momento?

Respuesta 40 V.

Sección opcional

31.6 CORRIENTES PARÁSITAS

Como se ha visto, una fem y una corriente se inducen en un circuito mediante un flujo magnético variable. De la misma manera, corrientes circulantes denominadas **corrientes parásitas** están inducidas en piezas voluminosas de metal que se mueven a través de un campo magnético. Esto puede demostrarse fácilmente dejando que una placa plana de cobre o aluminio unida al extremo de una barra rígida oscile como un péndulo a través de un campo magnético (Fig. 31.22). Cuando la placa entra al campo, el flujo magnético cambiante induce una fem en la placa, la cual a su vez provoca que los electrones libres en la placa se muevan, produciendo corrientes parásitas en remolino. De acuerdo con la ley de Lenz, la dirección de las corrientes parásitas debe oponerse al cambio que las causa. Por esta razón las corrientes parásitas deben producir polos magnéticos efectivos en la placa, los cuales son repelidos por los polos del imán; esto da origen a una fuerza repulsiva que se opone al movimiento de la placa. (Si lo opuesto fuera cierto, la placa aceleraría y su energía aumentaría después de cada oscilación, violando así la ley de la conservación de

Experimento sorpresa

Cuelgue un imán intenso de dos cuerdas, de modo que se balancee como péndulo en un plano. Inicie su oscilación y determine aproximadamente cuánto tiempo pasa antes de que detenga su balanceo. Inicie su oscilación de nuevo y rápidamente acerque la superficie plana de una hoja de papel aluminio hasta un milímetro del plano de oscilación, cuidando de no tocar el imán. ¿Cuánto tarda ahora en detenerse el imán en oscilación?

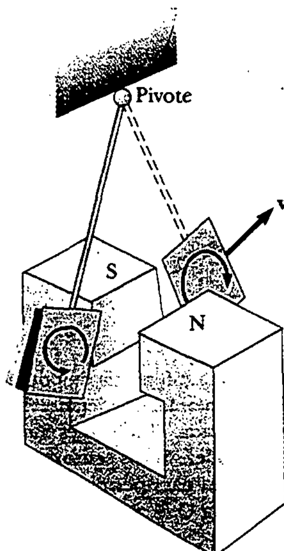


Figura 31.22 Formación de corrientes parásitas en una placa conductora que se mueve a través de un campo magnético. Conforme la placa ingresa o sale del campo, el flujo magnético variable induce una fem, la cual causa corrientes parásitas en la placa.

la energía.) Como tal vez habrá notado mientras realizaba el experimento sorpresa de la página xxx, usted puede "sentir" la fuerza retardadora jalando una lámina de cobre o aluminio a través del campo de un imán intenso.

Como se indica en la figura 31.23, con **B** hacia adentro de la página, la corriente parásita inducida está en dirección contraria a la de las manecillas del reloj cuando la placa oscilante entra al campo en la posición 1. Esto se debe a que el flujo magnético externo hacia adentro de la página a través de las placas está aumentando y, por tanto, por la ley de Lenz la corriente inducida debe proporcionar un flujo magnético hacia afuera de la página. Lo opuesto es cierto cuando la placa abandona el campo en la posición 2, donde la corriente está en dirección a las manecillas del reloj. Puesto que la corriente parásita inducida produce siempre una fuerza magnética retardadora $\mathbf{F}_B$ cuando la placa entra o sale del campo, con el tiempo la placa oscilante queda en reposo.

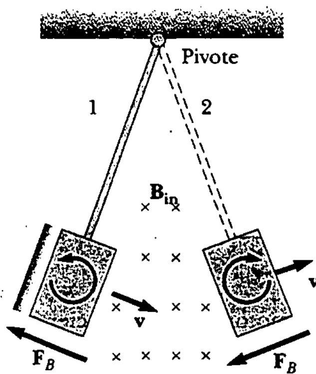


Figura 31.23 Conforme la placa conductora entra al campo (posición 1), las corrientes parásitas están en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Cuando la placa sale del campo (posición 2), las corrientes están en el sentido de las manecillas del reloj. En cualquier caso, la fuerza sobre la placa es opuesta a la velocidad, y finalmente la placa vuelve al reposo.

Si se hacen ranuras en la placa, como se ve en la figura 31.24, las corrientes parásitas y la fuerza retardadora correspondiente se reducen en gran medida. Esto puede entenderse en virtud de que los cortes en la placa evitan la formación de cualesquier espiras de corriente grandes.

Los sistemas de frenado de muchos trenes suburbanos y autos de tránsito rápido hacen uso de la inducción electromagnética y las corrientes parásitas. Un electroimán unido al tren se coloca cerca de los rieles de acero. (Un electroimán es en esencia un solenoide con un núcleo de hierro.) La acción de frenado ocurre cuando una gran corriente pasa a través del electroimán. El movimiento relativo del imán y los rieles induce corrientes parásitas en éstos, y la dirección de estas corrientes produce una fuerza de arrastre sobre el tren en movimiento. La pérdida de energía mecánica del tren se transforma en energía interna en los rieles y ruedas. Puesto que las corrientes parásitas decrecen en magnitud de forma estable a medida que el tren frena, el efecto de frenado es bastante suave. Los frenos de corrientes parásitas se usan también en algunas balanzas mecánicas y en diversas máquinas. Algunas herramientas eléctricas usan corrientes parásitas para detener rápidamente las aspas giratorias una vez que se apaga el dispositivo.

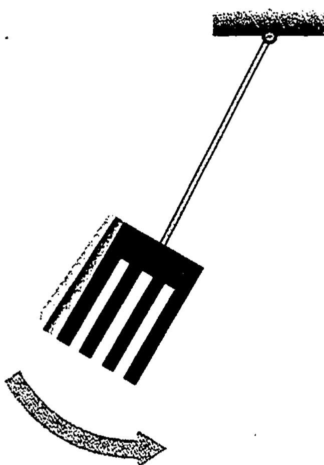


Figura 31.24 Cuando se cortan rendijas en la placa conductora, las corrientes parásitas se reducen y la placa se balancea más libremente a través del campo magnético.

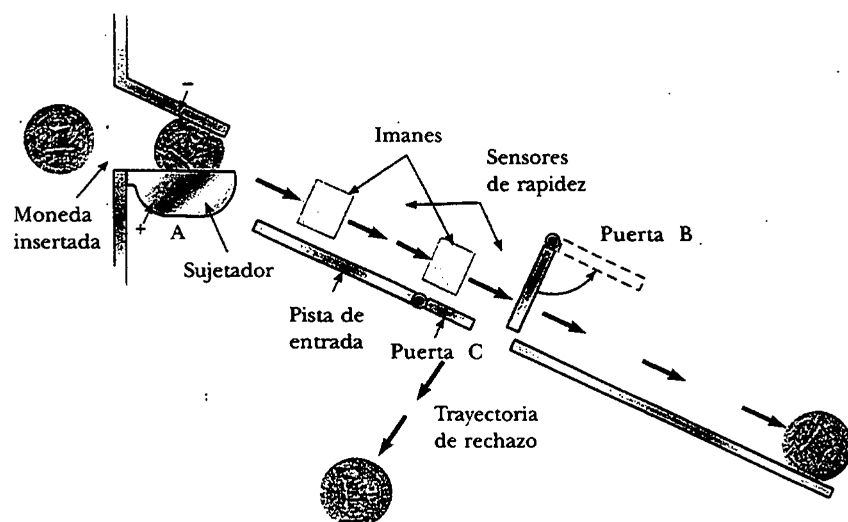


Figura 31.25 Cuando la moneda entra a la máquina expendedora, se aplica una diferencia de potencial a través de la moneda en A, y se mide su resistencia. Si la resistencia es aceptable, el sujetador baja, liberando a la moneda y permitiéndole rodar a lo largo de una pista de entrada. Dos imanes inducen corrientes parásitas en la moneda, y fuerzas magnéticas controlan su rapidez. Si los sensores de rapidez indican que la moneda tiene la rapidez correcta, la puerta B se balancea para permitir que la moneda sea aceptada. Si la moneda no se mueve a la rapidez correcta, la puerta C se abre para dejar que la moneda siga la trayectoria de rechazo.

Las corrientes parásitas con frecuencia son indeseables porque representan una transformación de energía mecánica en energía interna. Para reducir esta pérdida de energía las partes conductoras móviles a menudo se laminan —esto es, se acumulan en delgadas capas separadas por un material no conductor, como laca u óxido metálico. Esta estructura en capas aumenta la resistencia de posibles trayectorias de las corrientes parásitas y confina efectivamente las corrientes a capas individuales. Una estructura laminada de estas características se usa en los núcleos de transformadores y motores para minimizar corrientes parásitas e incrementar de ese modo la eficiencia de estos dispositivos.

Incluso una tarea tan simple como comprar una barra de dulce de una máquina expendedora involucra corrientes parásitas, como se muestra en la figura 31.25. Después de cruzar la ranura, la moneda se detiene momentáneamente mientras se verifica su resistencia eléctrica. Si su resistencia cae dentro de un rango aceptable, la moneda puede continuar hacia abajo de una rampa y atravesar un campo magnético. Conforme se mueve a través del campo, se producen corrientes parásitas en la moneda, y fuerzas magnéticas la frenan ligeramente. La cantidad de frenado depende de su composición metálica. Sensores miden la rapidez de la moneda después de que se mueve frente a los imanes, y esta rapidez se compara con valores esperados. Si la moneda es legal y pasa estas pruebas, se abre una puerta y la moneda es aceptada; de otro modo, una segunda puerta la mueve hacia la trayectoria de rechazo.



LAS MARAVILLOSAS ECUACIONES DE MAXWELL

12.10 Este capítulo concluye con la presentación de cuatro ecuaciones que pueden considerarse como la base de los fenómenos eléctricos y magnéticos. Estas ecuaciones, desarrolladas por James Clerk Maxwell, son tan fundamentales para los fenómenos electromagnéticos como las leyes de Newton lo son para los fenómenos mecánicos. De hecho, la teoría desarrollada por Maxwell tuvo mayores alcances que los que incluso él imaginó porque resultaron estar de acuerdo con la teoría especial de la relatividad, como Einstein demostró en 1905.

Las ecuaciones de Maxwell representan las leyes de la electricidad y el magnetismo que ya se han estudiado, pero tienen importantes consecuencias adicionales. En el capítulo 34 se mostrará que estas ecuaciones predicen la existencia de ondas electromagnéticas (patrones de recorrido de campos eléctricos y magnéticos), las cuales viajan con una rapidez $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 3.00 \times 10^8$ m/s, la rapidez de la luz. Además, la teoría muestra que dichas ondas son radiadas por cargas aceleradas.

Por simplicidad se presentan las **ecuaciones de Maxwell** como se aplican en el espacio libre, es decir, en ausencia de cualquier material dieléctrico o magnético. Las cuatro ecuaciones son:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \textbf{(31.12)}$$

Ley de Gauss

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad \textbf{(31.13)}$$

Ley de Gauss en magnetismo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \textbf{(31.14)}$$

Ley de Faraday

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad \textbf{(31.15)}$$

Ley de Ampère-Maxwell

La ecuación 31.12 es la ley de Gauss: **el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta dentro de esa superficie dividida por ϵ_0.** Esta ley relaciona el campo eléctrico con la distribución de carga que lo crea.

La ecuación 31.13, la cual puede considerarse como ley de Gauss en el magnetismo, establece que **el flujo magnético neto a través de una superficie cerrada es cero.** Esto significa que el número de líneas de campo magnético que entra a un volumen cerrado debe ser igual al número que sale de ese volumen. Esto implica que las líneas de campo magnético no pueden empezar o terminar en cualquier punto. Si eso pasara, significaría que hubo monopolos magnéticos aislados en esos puntos. El hecho de que no se hayan observado en la naturaleza monopolos magnéticos aislados puede tomarse como una confirmación de la ecuación 31.13.

La ecuación 31.14 es la ley de inducción de Faraday, la cual describe la creación de un campo eléctrico por un flujo magnético variable. Esta ley establece que **la fem, que es la integral de línea del campo eléctrico alrededor de cualquier trayectoria cerrada, es igual a la rapidez de cambio del flujo magnético a través de cualquier área de la superficie delimitada por esa trayectoria.** Una consecuencia de la ley de Faraday es la corriente inducida en una espira conductora situada en un campo magnético que cambia en el tiempo.

La ecuación 31.15, usualmente llamada ley de Ampère-Maxwell, es la forma generalizada de la ley de Ampère, la cual describe la creación de un campo magnético por campos y corrientes eléctricas: **la integral de línea del campo magnético alrededor de cualquier trayectoria cerrada es la suma de μ_0 por la corriente neta a través de esa trayectoria, y $\in_0\mu_0$ por la rapidez de cambio del flujo eléctrico a través de cualquier superficie delimitada por esa trayectoria.**

Una vez que los campos eléctrico y magnético se conocen en algún punto en el espacio, la fuerza que actúa sobre una partícula de carga q puede calcularse a partir de la expresión

Ley de fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad \textbf{(31.16)}$$

Esta relación recibe el nombre de **ley de fuerza de Lorentz.** (Esta relación se vio con anterioridad, como la ecuación 29.16.) Las ecuaciones de Maxwell, junto con esta ley de fuerza, describen por completo todas las interacciones electromagnéticas clásicas.

Es interesante observar la simetría de las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones 31.12 y 31.13 son simétricas, excepto por la ausencia del término para el monopolo magnético en la ecuación 31.13. Además, las ecuaciones 31.14 y 31.15 son simétricas en que las integrales de línea de **E** y **B** alrededor de una trayectoria cerrada se relacionan con la rapidez de cambio del flujo magnético y el flujo eléctrico, respectivamente. "Las maravillosas ecuaciones de Maxwell", como las llamó John R. Pierce,[3] son de fundamental importancia no sólo para el electromagnetismo sino para toda la ciencia. Heinrich Hertz escribió una vez, "Uno no puede escapar al sentimiento de que estas fórmulas matemáticas tienen una existencia independiente y una inteligencia propia, que son más sabias de lo que nosotros somos, más sabias incluso que sus descubridores, que dan más de lo que piden".

RESUMEN

La **ley de inducción de Faraday** establece que la fem inducida en un circuito es directamente proporcional a la rapidez de cambio en el tiempo del flujo magnético a través del circuito:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(31.1)}$$

donde $\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ es el flujo magnético.

[3] John R. Pierce, *Electrons and Waves*, New York, Doubleday Science Study Series, 1964. El capítulo 6 de este interesante libro se recomienda como una lectura suplementaria.

Cuando una barra conductora de longitud ℓ se mueve a una velocidad **v** a través de un campo magnético **B**, donde **B** es perpendicular a la barra y a **v**, la **fem de movimiento** inducida en ésta es

$$\mathcal{E} = -B\ell v \qquad \textbf{(31.5)}$$

La **ley de Lenz** establece que la corriente inducida y la fem inducida en un conductor están en tal dirección que se oponen al cambio que las produjo.

Una forma general de la **ley de inducción de Faraday** es

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(31.9)}$$

donde **E** es el campo eléctrico no conservativo que varía en el tiempo que es producido por el flujo magnético variable.

Cuando se usa con la ley de fuerza de Lorentz, $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, las **ecuaciones de Maxwell** describen todos los fenómenos electromagnéticos:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(31.12)}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \qquad \textbf{(31.13)}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(31.14)}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad \textbf{(31.15)}$$

La ley de Ampère-Maxwell (Ec. 31.15) describe cómo se puede producir un campo magnético tanto por una corriente de conducción como por un flujo eléctrico variable.

PREGUNTAS

1. Una espira de alambre se coloca en un campo magnético uniforme. ¿Para qué orientación de la espira el flujo magnético es un máximo? ¿Para qué orientación el flujo es cero? Realice algunos dibujos de estas dos situaciones.
2. A medida que la barra de conducción de la figura P31.2 se mueve hacia la derecha, se establece sobre ella un campo eléctrico dirigido hacia abajo. Explique por qué el campo eléctrico apuntaría hacia arriba si la barra se moviera hacia la izquierda.
3. Cuando la barra de la figura P31.2 se mueve perpendicular al campo, ¿se requiere una fuerza aplicada para mantenerla en movimiento con rapidez constante? Explique.
4. La barra que se muestra en la figura P31.4 se mueve sobre rieles hacia la derecha a una velocidad **v**, y el campo magnético constante y uniforme apunta hacia afuera de la página. ¿Por qué la corriente inducida está en la dirección de las manecillas del reloj? Si la barra se moviera hacia la izquierda, ¿cuál sería la dirección de la corriente inducida?
5. Explique por qué es necesaria una fuerza aplicada para mantener en movimiento la barra de la figura P31.4 a una rapidez constante.
6. Una gran espira circular de alambre se encuentra en el plano horizontal. Un imán de barra se deja caer a través de la espira. Si el eje del imán permanece horizontal cuando éste cae, describa la fem inducida en la espira. ¿Cómo se altera la situación si el eje del imán permanece vertical cuando cae?

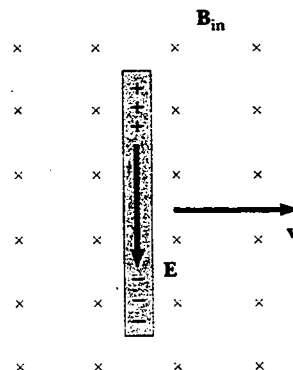
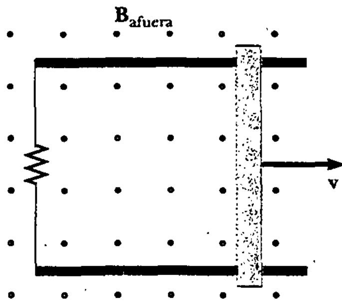
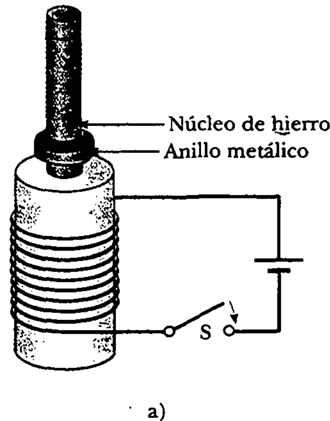


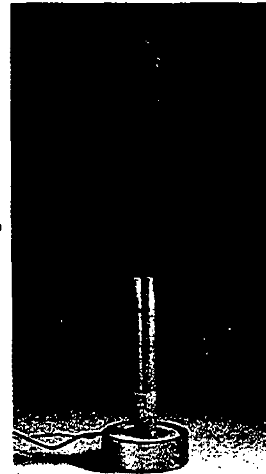
Figura P31.2 (Preguntas 2 y 3).



P31.4 (Preguntas 4 y 5).

7. Cuando un pequeño imán se mueve hacia un solenoide se induce una fem en la bobina. Sin embargo, si el imán se mueve alrededor por el interior de un toroide, no hay fem inducida. Explique.
8. ¿Al dejar caer un imán a lo largo de un tubo de cobre se produce una corriente en las paredes de éste? Explique.
9. ¿Cómo se produce la energía eléctrica en las presas (es decir, cómo se convierte en electricidad de corriente alterna la energía de movimiento del agua)?
10. En una balanza de viga algunas veces se utiliza una placa de aluminio para retardar las oscilaciones de la viga cerca del equilibrio. La placa se monta en el extremo de la viga y se mueve entre los polos de un pequeño imán en forma de herradura unido al armazón. ¿Por qué las oscilaciones de la viga se amortiguan fuertemente cerca del equilibrio?
11. ¿Qué sucede cuando aumenta la rapidez a la cual se hace girar la bobina de un generador?
12. ¿Podría inducirse una corriente en una bobina mediante la rotación de un imán dentro de la bobina? Si es así, ¿cómo?
13. Cuando el interruptor en la figura P31.13a se cierra, se establece una corriente en la bobina y el anillo metálico salta hacia arriba (Fig. P31.13b). Explique este comportamiento.





a) b)

Figura P31.13 (Preguntas 13 y 14). *(Fotografía cortesía de Central Scientific Company)*

14. Suponga que la batería mostrada en la figura P31.13a se reemplaza por una fuente de corriente alterna y que el interruptor se mantiene cerrado. Si se mantiene abajo, el anillo metálico en la parte superior del solenoide se calienta. ¿Por qué?
15. ¿Las ecuaciones de Maxwell permiten la existencia de monopolos magnéticos? Explique.

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante ☐ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** 💻 = use computadora para resolver el problema = Física interactiva ☐ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 31.1 Ley de inducción de Faraday
Sección 31.2 Fem en movimiento
Sección 31.3 Ley de Lenz

1. Una bobina rectangular de 50 vueltas y dimensiones de 5.00 cm × 10.0 cm se deja caer desde una posición donde $B = 0$ hasta una nueva posición donde $B = 0.500$ T y se dirige perpendicularmente al plano de la bobina. Calcule la magnitud de la fem promedio inducida en la bobina si el desplazamiento ocurre en 0.250 s.
2. Una espira plana de alambre que consta de una sola vuelta de área de sección transversal igual a 8.00 cm² es perpendicular a un campo magnético cuya magnitud aumenta uniformemente de 0.500 T a 2.50 T en 1.00 s. ¿Cuál es la corriente inducida resultante si la espira tiene una resistencia de 2.00 Ω?
3. Una bobina circular de alambre de 25 vueltas tiene un diámetro de 1.00 m. La bobina se coloca con su eje a lo largo de la dirección del campo magnético de la Tierra de 50.0 μT, y luego, en 0.200 s, se gira 180°. ¿Cuál es la fem promedio generada en la bobina?
4. Una espira rectangular de área A se pone en una región donde el campo magnético es perpendicular al plano de la espira. Se deja que la magnitud del campo varíe en el tiempo de acuerdo con la expresión $B = B_{máx}e^{-t/\tau}$, donde $B_{máx}$ y τ son constantes. El campo tiene un valor constante $B_{máx}$ para $t < 0$. a) Emplee la ley de Faraday para mostrar que la fem inducida en la espira está dada por

$$\mathcal{E} = (AB_{máx}/\tau)e^{-t/\tau}$$

b) Obtenga un valor numérico para $\mathcal{E}$ en $t = 4.00$ s cuando $A = 0.160$ m², $B_{máx} = 0.350$ T y $\tau = 2.00$ s. c) Para los

valores de A, $B_{máx}$ y τ dados en el inciso b), ¿cuál es el valor máximo de $\mathcal{E}$?

WEB **5.** Un poderoso electroimán produce un campo uniforme de 1.60 T sobre un área de sección transversal de 0.200 m². Alrededor del electroimán se coloca una bobina que tiene 200 vueltas y una resistencia total de 20.0 Ω. Luego la corriente en el electroimán disminuye suavemente hasta que alcanza cero en 20.0 ms. ¿Cuál es la corriente inducida en la bobina?

6. Hay un campo magnético de 0.200 T dentro de un solenoide que tiene 500 vueltas y un diámetro de 10.0 cm. ¿Cuán rápidamente (es decir, dentro de qué periodo) debe el campo reducirse a cero si la fem inducida promedio dentro de la bobina durante este intervalo de tiempo será 10.0 kV?

WEB **7.** Un anillo de aluminio con un radio de 5.00 cm y una resistencia de 3.00×10^{-4} Ω se coloca sobre la parte superior de un largo solenoide con núcleo de aire, 1 000 vueltas por metro y un radio de 3.00 cm, como se indica en la figura P31.7. Suponga que la componente axial del campo producido por el solenoide sobre el área del extremo del solenoide es la mitad de intensa que en el centro del solenoide. Suponga que el solenoide produce un campo despreciable afuera de su área de sección transversal. a) Si la corriente en el solenoide está aumentando a razón de 270 A/s, ¿cuál es la corriente inducida en el anillo? b) En el centro del anillo, ¿cuál es el campo magnético producido por la corriente inducida en el anillo? c) ¿Cuál es la dirección de este campo?

8. Un anillo de aluminio de radio r_1 y resistencia R se coloca sobre la parte superior de un largo solenoide con núcleo de aire, n vueltas por metro y radio r_2, como se indica en la figura P31.7. Suponga que la componente axial del campo producido por el solenoide sobre el área del extremo del solenoide es la mitad de intensa que en el centro del solenoide. Suponga que el solenoide produce un campo despreciable afuera de su área de sección transversal. a) Si la corriente en el solenoide está aumentando a una relación de $\Delta I/\Delta t$, ¿cuál es la corriente inducida en el anillo? b) En el centro del anillo, ¿cuál es el campo magnético producido por la corriente inducida en el anillo? c) ¿Cuál es la dirección de este campo?

9. Una espira de alambre en forma de un rectángulo de ancho ω y longitud L, y un largo alambre recto que conduce una corriente I se encuentran sobre una mesa como se indica en la figura P31.9. a) Determine el flujo magnético a través de la espira debido a la corriente I. b) Suponga que la corriente está cambiando con el tiempo de acuerdo con $I = a + bt$, donde a y b son constantes. Determine la fem inducida en la espira si $b = 10.0$ A/s, $h = 1.00$ cm, $\omega = 10.0$ cm y $L = 100$ cm. ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en el rectángulo?

10. Una bobina de 15 vueltas y 10.0 cm de radio rodea a un largo solenoide de 2.00 cm de radio y 1.00×10^3 vueltas por metro (Fig. P31.10). Si la corriente en el solenoide cambia como $I = (5.00\text{ A})\,\text{sen}(120t)$, encuentre la fem inducida en la bobina de 15 vueltas como función del tiempo.

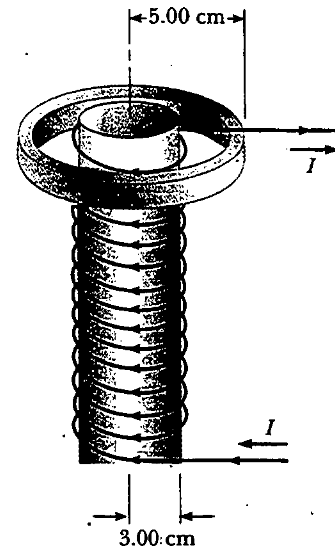


Figura P31.7 Problemas 7 y 8.

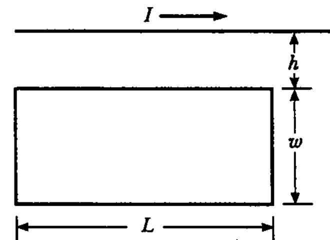


Figura P31.9 Problemas 9 y 73.

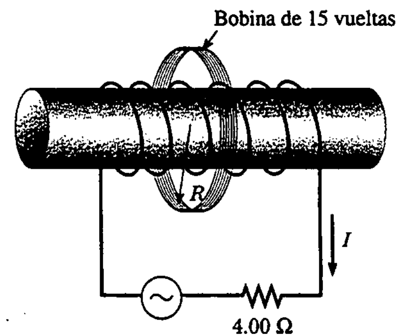


Figura P31.10

11. En la figura P31.11 encuentre la corriente que atraviesa la sección PQ, la cual tiene una longitud $a = 65.0$ cm. El circuito se localiza en un campo magnético cuya magnitud varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $B = (1.00 \times 10^{-3}\text{ T/s})\,t$. Suponga que la resistencia por longitud del alambre es 0.100 Ω/m.

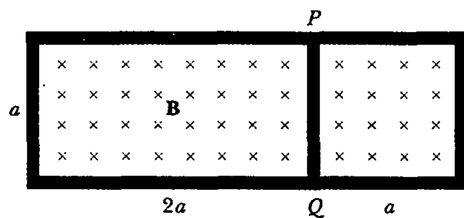


Figura P31.11

12. Una bobina circular de 30 vueltas de 4.00 cm de radio y 1.00 Ω de resistencia se pone en un campo magnético dirigido perpendicularmente al plano de la bobina. La magnitud del campo magnético varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $B = 0.010\,0t + 0.040\,0t^2$, donde t está en segundos y B está en teslas. Calcule la fem inducida en la bobina en $t = 5.00$ s.

13. Un largo solenoide tiene 400 vueltas por metro y conduce una corriente $I = (30.0 \text{ A})(1 - e^{-1.60t})$. Dentro del solenoide y coaxial con él se encuentra una bobina que tiene un radio de 6.00 cm y se compone de un total de 250 vueltas de alambre delgado (Fig. P31.13) ¿Qué fem induce en la bobina la corriente variable?

14. Un largo solenoide tiene n vueltas por metro y conduce una corriente $I = I_{\text{máx}}(1 - e^{-\alpha t})$. Dentro del solenoide y coaxial con él se encuentra una bobina que tiene un radio R y se compone de un total de N vueltas de alambre delgado (véase la Fig. P31.13). ¿Qué fem induce en la bobina la corriente variable?

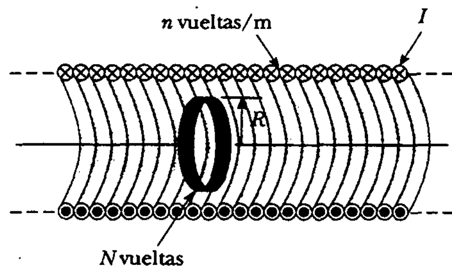


Figura P31.13 Problemas 13 y 14.

15. Una bobina que se enrolla con 50 vueltas de alambre en la forma de un cuadrado se coloca en un campo magnético de modo que la normal al plano de la bobina forme un ángulo de 30.0° con la dirección del campo. Cuando el campo magnético se incrementa uniformemente de 200 μT a 600 μT en 0.400 s, una fem de 80.0 mV de magnitud se induce en la bobina. ¿Cuál es la longitud total del alambre?

16. A una espira cerrada de alambre se le da la forma de un círculo con 0.500 m de radio. Se encuentra en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.400 T de magnitud. Si la forma del alambre se cambia a la de un cuadrado en 0.100 s mientras permanece en el mismo plano, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida promedio en el alambre durante este tiempo?

17. Un toroide que tiene una sección transversal rectangular ($a = 2.00$ cm por $b = 3.00$ cm) y un radio interior $R = 4.00$ cm se compone de 500 vueltas de alambre que conducen una corriente $I = I_{\text{máx}}$ sen ωt, con $I_{\text{máx}} = 50.0$ A y una frecuencia $f = \omega/2\pi = 60.0$ Hz. Una bobina que se compone de 20 vueltas de alambre se une al toroide, como se muestra en la figura P31.17. Determine la fem inducida en la bobina como una función del tiempo.

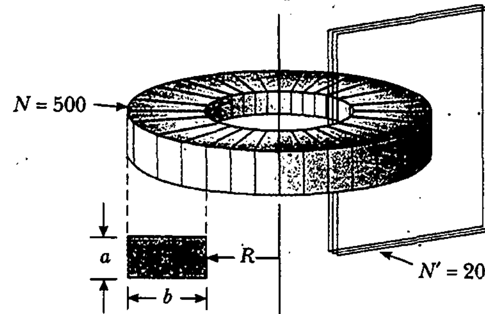


Figura P31.17

18. Una espira circular de una sola vuelta de radio R es coaxial a un largo solenoide de radio r, longitud ℓ y N vueltas (Fig. P31.18). El resistor variable está cambiando de manera que la corriente del solenoide disminuye linealmente de I_1 a I_2 en un intervalo Δt. Encuentre la fem inducida en la espira.

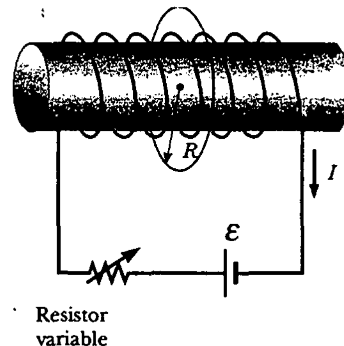


Figura P31.18

19. Una bobina circular que encierra un área de 100 cm² está integrada por 200 vueltas de alambre de cobre, como se muestra en la figura P31.19. Al principio, un campo

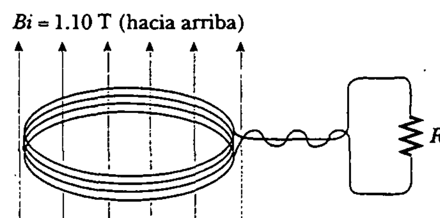


Figura P31.19

magnético uniforme de 1.10 T apunta perpendicularmente hacia arriba a través del plano de la bobina. La dirección del campo se invierte después. Durante el tiempo que el campo está cambiando su dirección, ¿cuánta carga fluye a través de la bobina si $R = 5.00\ \Omega$?

20. Considere el arreglo mostrado en la figura P31.20. Suponga que $R = 6.00\ \Omega$, $\ell = 1.20$ m y un campo magnético uniforme de 2.50 T apunta hacia adentro de la página. ¿A qué rapidez debe moverse la barra para producir una corriente de 0.500 A en el resistor?

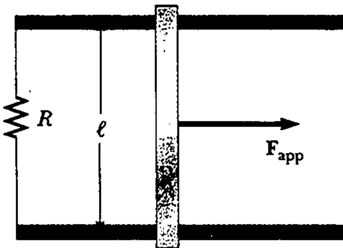


Figura P31.20 Problemas 20, 21 y 22.

21. La figura P31.20 muestra una vista superior de una barra que puede deslizarse sin fricción. El resistor es de $6.00\ \Omega$, y un campo magnético de 2.50 T se dirige perpendicularmente hacia abajo, adentro de la página. Sea $\ell = 1.20$ m. a) Calcule la fuerza aplicada que se requiere para mover la barra hacia la derecha a una rapidez constante de 2.00 m/s. b) ¿A qué rapidez se libera la energía en el resistor?

22. Una barra conductora de longitud ℓ se mueve sobre dos rieles horizontales sin fricción, como se muestra en la figura P31.20. Si una fuerza constante de 1.00 N mueve a la barra a 2.00 m/s a través de un campo magnético **B** que está dirigido hacia adentro de la página, a) ¿cuál es la corriente a través de un resistor R de $8.00\ \Omega$? b) ¿Cuál es la rapidez a la cual se entrega energía al resistor? c) ¿Cuál es la potencia mecánica entregada por la fuerza $\mathbf{F}_{app}$?

23. Un avión Boeing 747 con una envergadura de 60.0 m vuela horizontalmente a una rapidez de 300 m/s sobre Phoenix, Arizona, en un lugar donde el campo magnético terrestre es de 50.0 μT a 58.0° bajo la horizontal. ¿Qué voltaje se genera entre las puntas de las alas?

24. La espira cuadrada de la figura P31.24 está hecha de alambres con una resistencia total en serie de $10.0\ \Omega$. Se coloca en un campo magnético uniforme de 0.100 T con dirección perpendicular hacia el plano de la página. La espira, que está articulada en cada vértice, se jala como se ilustra hasta que la separación entre los puntos A y B es de 3.00 m. Si este proceso tarda 0.100 s, ¿cuál es la corriente promedio generada en la espira? ¿Cuál es la dirección de la corriente?

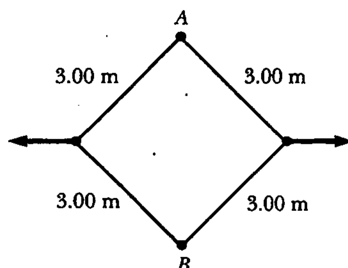


Figura P31.24

25. Un helicóptero tiene hélices de 3.00 m de longitud que se extienden hacia afuera desde un eje central y rotan a 2.00 rev/s. Si la componente vertical del campo magnético terrestre es 50.0 μT, ¿cuál es la fem inducida entre la punta de la hélice y el eje central?

26. Emplee la ley de Lenz para responder las siguientes preguntas relativas a la dirección de las corrientes inducidas: a) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en el resistor R mostrado en la figura P31.26a cuando el imán de barra se mueve hacia la izquierda? b) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en el resistor R inmediatamente después de que se cierra el interruptor S en la figura P31.26b? c) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en R cuando la corriente I en la figura P31.26c disminuye rápidamente hasta cero? d) Una barra de cobre se mueve hacia la derecha mientras su eje se mantiene perpendicular a un campo magnético, como se ve en la figura P31.26d. Si la parte superior de la barra se vuelve positiva en relación con la parte inferior, ¿cuál es la dirección del campo magnético?

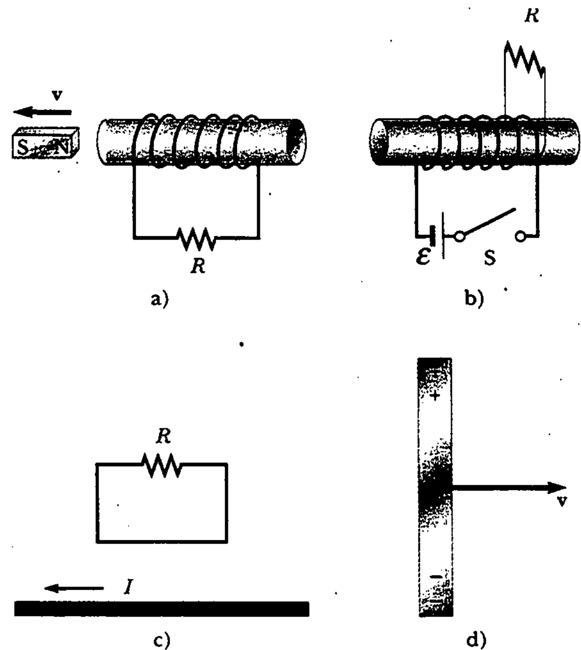


Figura P31.26

27. Una bobina rectangular con resistencia R tiene N vueltas, cada una de longitud ℓ y ancho w, como se muestra en la figura P31.27. La bobina se mueve dentro de un campo magnético uniforme **B** a velocidad **v**. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza resultante sobre la bobina a) cuando ésta entra al campo magnético, b) cuando se mueve dentro del campo, c) cuando sale del campo?

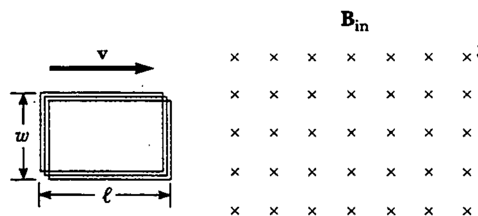


Figura P31.27

28. En 1832 Faraday propuso que el aparato mostrado en la figura P31.28 podría usarse para generar corriente eléctrica a partir del agua que fluía en el río Támesis.[4] Dos placas conductoras de longitudes a y anchos b se ponen frente a frente en los lados opuestos del río, a una distancia w de separación y sumergidas por completo. La velocidad de flujo del río es $\mathbf{v}$ y la componente vertical del campo magnético terrestre es B. a) Muestre que la corriente en el resistor de carga R es

$$I = \frac{abvB}{\rho + abR/w}$$

donde ρ es la resistividad eléctrica del agua. b) Calcule la corriente de cortocircuito ($R = 0$) si $a = 100$ m, $b = 5.00$ m, $v = 3.00$ m/s, $B = 50.0$ μT y $\rho = 100$ Ω·m.

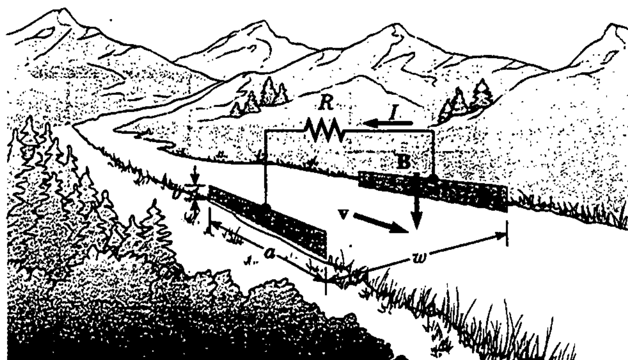


Figura P31.28

29. En la figura P31.29 el imán de barra se mueve hacia la espira. ¿$V_a - V_b$ es positiva, negativa o cero? Explique.
30. Una barra metálica gira a una relación constante en el campo magnético de la Tierra, como se muestra en la figura 31.10. La rotación ocurre en una región donde la componente del campo magnético terrestre perpendicular al plano de rotación es 3.30×10^{-5} T. Si la barra mide 1.00 m de largo y su rapidez angular es 5.00 π rad/s, ¿qué diferencia de potencial se desarrolla entre sus extremos?

[4] La idea para este problema y la figura P31.28 son de Oleg D. Jefimenko, *Electricity and Magnetism: An Introduction to the Theory of Electric and Magnetic Fields*. Star City, WV, Electret Scientific Co., 1989.

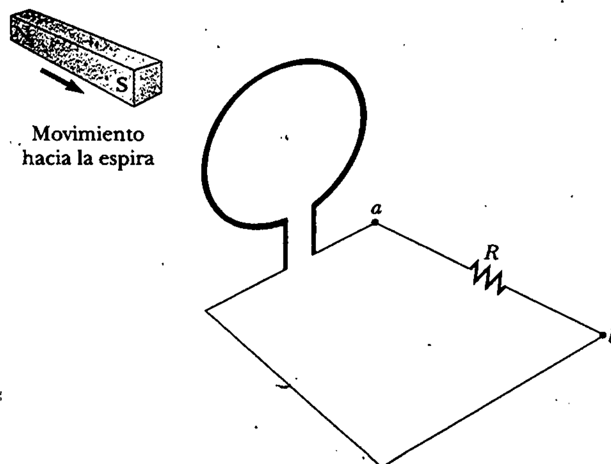


Figura P31.29

31. Dos rieles paralelos que tienen resistencia despreciable están separados 10.0 cm y se conectan por medio de un resistor de 5.00 Ω. El circuito contiene también dos barras metálicas con resistencias de 10.0 Ω y 15.0 Ω que se deslizan a lo largo de los rieles (Fig. P31.31). Las barras se alejan del resistor con rapidez constante de 4.00 m/s y 2.00 m/s, respectivamente. Se aplica un campo magnético uniforme, de 0.010 0 T de magnitud, perpendicular al plano de los rieles. Determine la corriente en el resistor de 5.00 Ω.

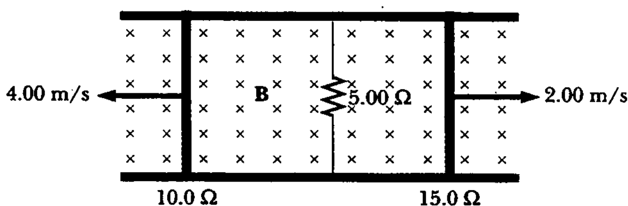


Figura P31.31

Sección 31.4 Fem inducida y campos eléctricos

32. Para la situación descrita en la figura P31.32 el campo magnético cambia con el tiempo de acuerdo con la expresión $B = (2.00t^3 - 4.00t^2 + 0.800)$ T y $r_2 = 2R = 5.00$

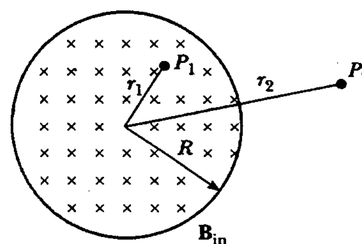


Figura P31.32 Problemas 32 y 33.

cm. a) Calcule la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre un electrón localizado en el punto P_2 cuando $t = 2.00$ s. b) ¿En qué tiempo esta fuerza es igual a cero?

33. Un campo magnético dirigido hacia adentro de la página cambia con el tiempo de acuerdo con $B = (0.030\,0t^2 + 1.40)$ T, donde t está en segundos. El campo tiene una sección transversal circular de radio $R = 2.50$ cm (véase la Fig. P31.32). ¿Cuáles son la magnitud y dirección del campo eléctrico en el punto P_1 cuando $t = 3.00$ s y $r_1 = 0.020\,0$ m?

34. Un solenoide tiene un radio de 2.00 cm y 1 000 vueltas por metro. Sobre un cierto intervalo de tiempo la corriente varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $I = 3\,e^{0.2t}$, donde I está en amperes y t en segundos. Calcule el campo eléctrico a 5.00 cm del eje del solenoide en $t = 10.0$ s.

35. Un largo solenoide con 1 000 vueltas por metro y 2.00 cm de radio conduce una corriente oscilante $I = (5.00$ A) sen$(100\pi t)$. a) ¿Cuál es el campo eléctrico inducido en un radio $r = 1.00$ cm a partir del eje del solenoide? b) ¿Cuál es la dirección de este campo eléctrico cuando la corriente está aumentando en la bobina en dirección contraria a la de las manecillas del reloj?

(Opcional)
Sección 31.5 Generadores y motores

36. En un alternador de automóvil de 250 vueltas el flujo magnético en cada vuelta es $\Phi_B = (2.50 \times 10^{-4}\ \text{T}\cdot\text{m}^2)$ $\cos(\omega t)$, donde ω es la rapidez angular del alternador. Éste se encuentra engranado para girar tres veces por cada revolución del motor. Cuando el motor está funcionando a una rapidez angular de 1 000 rev/min, determine a) la fem inducida en el alternador como una función del tiempo, y b) la máxima fem en el alternador.

WEB 37. Una bobina de 0.100 m^2 de área está girando a 60.0 rev/s con el eje de rotación perpendicular a un campo magnético de 0.200 T. a) Si hay 1 000 vueltas en la bobina, ¿cuál es el máximo voltaje inducido en él? b) Cuando el máximo voltaje inducido ocurre, ¿cuál es la orientación de la bobina respecto del campo magnético?

38. Una bobina cuadrada (20.0 cm × 20.0 cm) que consta de 100 vueltas de alambre gira alrededor de un eje vertical a 1 500 rev/min, como se indica en la figura P31.38. La componente horizontal del campo magnético terrestre en la posición de la bobina es 2.00×10^{-5} T. Calcule la máxima fem inducida en la bobina por este campo.

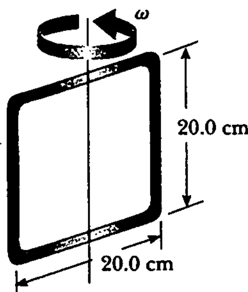


Figura P31.38

39. Un largo solenoide, cuyo eje coincide con el eje x, consta de 200 vueltas por metro de alambre que conduce una corriente estable de 15.0 A. Se forma una bobina enrollando 30 vueltas de alambre delgado alrededor de un armazón circular que tiene un radio de 8.00 cm. La bobina se pone dentro del solenoide y se monta sobre un eje que está a un diámetro de la bobina y coincide con el eje y. Después, la bobina se hace girar con una rapidez angular de 4.00π rad/s. (El plano de la bobina está en el plano yz en $t = 0$.) Determine la fem desarrollada en la bobina como función del tiempo.

40. Un imán de barra se hace girar a una rapidez angular constante ω alrededor de un eje, como se ilustra en la figura P31.40. Una espira conductora rectangular plana rodea al imán, y en $t = 0$ el imán está orientado como se muestra. Haga una gráfica cualitativa de la corriente inducida en la espira como función del tiempo graficando las corrientes en sentido contrario al de las manecillas del reloj como positivas y como negativas las que están en el sentido de éstas.

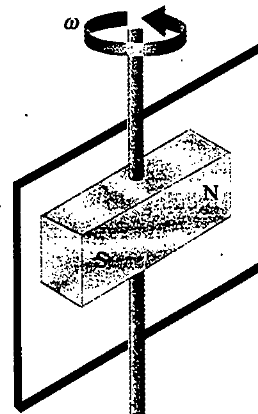


Figura P31.40

41. a) ¿Cuál es el momento de torsión máxima que entrega un motor eléctrico si éste tiene 80 vueltas de alambre enrolladas sobre una bobina rectangular, cuyas dimensiones son 2.50 cm por 4.00 cm? Suponga que el motor utiliza 10.0 A de corriente y que un campo magnético uniforme de 0.800 T existe dentro del motor. b) Si el motor gira a 3 600 rev/min, ¿cuál es la potencia pico producida por el motor?

42. Un conductor semicircular de radio $R = 0.250$ m se hace girar en torno al eje AC a una rapidez constante de 120 rev/min (Fig. P31.42). Un campo magnético uniforme en toda la mitad inferior de la figura se dirige hacia afuera del plano de rotación y tiene una magnitud de 1.30 T. a) Calcule el valor máximo de la fem inducida en el conductor. b) ¿Cuál es el valor de la fem inducida promedio para cada rotación completa? c) ¿Cómo cambiarían las respuestas a las partes a) y b) si **B** se dejara extender una distancia R sobre el eje de rotación? Dibuje la fem *versus* el tiempo d) cuando el campo es como se dibuja en la figura P31.42, y e) cuando el campo se extiende como se describe en la parte c).

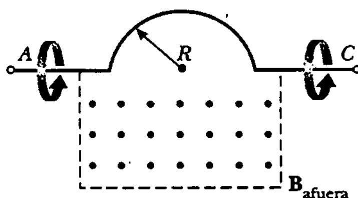


Figura P31.42

43. La espira rotatoria en un generador de ca es un cuadrado de 10.0 cm de lado. Se hace girar a 60.0 Hz en un campo uniforme de 0.800 T. Calcule a) el flujo que atraviesa la espira como una función del tiempo, b) la fem inducida en la espira, c) la corriente inducida en la misma para una resistencia de espira de 1.00 Ω, d) la potencia en la resistencia de la espira y e) el momento de torsión que debe ejercerse para rotarlo.

(Opcional)

Sección 31.6 Corrientes parásitas

44. Un alambre de 0.150 kg en la forma de un rectángulo cerrado de 1.00 m de ancho y 1.50 m de largo tiene una resistencia total de 0.750 Ω. Se deja que el rectángulo descienda por un campo magnético dirigido perpendicularmente a la dirección de movimiento del rectángulo (Fig. P31.44). El rectángulo se acelera hacia abajo conforme se aproxima a una rapidez terminal de 2.00 m/s, con su parte superior que aún no está en esta región del campo. Calcule la magnitud de **B**.

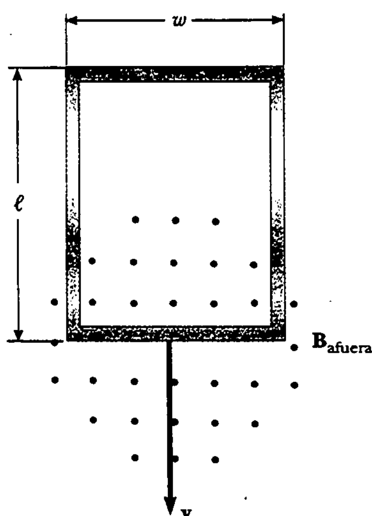


Figura P31.44 Problemas 44 y 45.

WEB 45. Una espira rectangular conductora de masa M, resistencia R y dimensiones w por ℓ desciende desde el reposo dentro de un campo magnético **B**, como en la figura P31.44. La espira se aproxima a una rapidez terminal v_t. a) Muestre que

$$v_t = \frac{MgR}{B^2w^2}$$

b) ¿Por qué v_t es proporcional a R? c) ¿Por qué es inversamente proporcional a B^2?

46. La figura P31.46 representa un freno electromagnético que utiliza corrientes parásitas. Un electroimán cuelga de un carro de ferrocarril cerca de un riel. Para detener al carro se envía una gran corriente estable a través de las bobinas del electroimán. El electroimán en movimiento induce corrientes parásitas en los rieles, cuyos campos se oponen al cambio en el campo del electroimán. Los campos magnéticos de las corrientes parásitas ejercen fuerza sobre la corriente en el electroimán y, consecuentemente, detienen al carro. La dirección del movimiento del carro y la dirección de la corriente en el electroimán se muestran de manera correcta en el dibujo. Determine cuál de las corrientes parásitas mostradas en los rieles es correcta. Explique su respuesta.

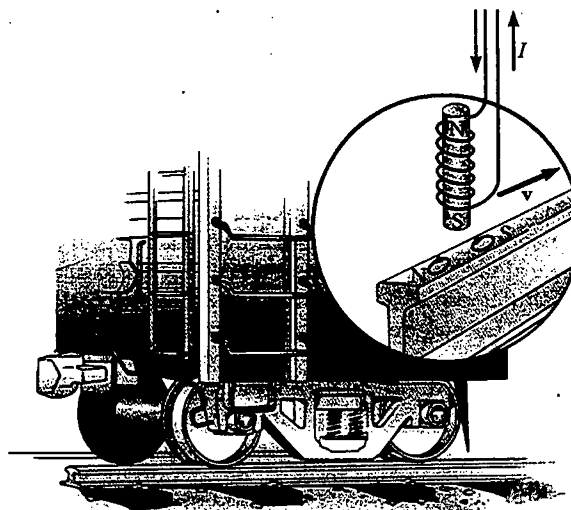


Figura P31.46

Sección 31.7 Las maravillosas ecuaciones de Maxwell

47. Un protón se mueve a través de un campo eléctrico uniforme **E** = 50.0**j** V/m y un campo magnético uniforme **B** = (0.200**i** + 0.300**j** + 0.400**k**) T. Determine la aceleración del protón cuando tiene una velocidad **v** = 200**i** m/s.

48. Un electrón se mueve a través de un campo eléctrico uniforme **E** = (2.50**i** + 5.00**j**) V/m y un campo magnético uniforme **B** = 0.400**k** T. Determine la aceleración del electrón cuando tiene una velocidad **v** = 10.0**i** m/s.

PROBLEMAS ADICIONALES

49. Una cuerda de acero de guitarra vibra (véase la Fig. 31.5). La componente del campo magnético perpendi-

cular al área de una bobina fonocaptora cercana está dada por

$$B = 50.0\text{ mT} + (3.20\text{ mT})\text{ sen }(2\pi 523\ t/\text{s})$$

La bobina fonocaptora circular tiene 30 vueltas y 2.70 mm de radio. Encuentre la fem inducida en la bobina como función del tiempo.

50. La figura P31.50 es una gráfica de la fem inducida *versus* tiempo para una bobina de N vueltas que gira a velocidad angular ω en un campo magnético uniforme dirigido perpendicular al eje de rotación de la bobina. Copie esta gráfica (a una escala mayor) y sobre el mismo juego de ejes muestre la gráfica de fem *versus* t a) si el número de vueltas en la bobina se duplica, b) si en lugar de esto se duplica la velocidad angular, y c) si la velocidad angular se duplica mientras el número de vueltas en la bobina se reduce a la mitad.

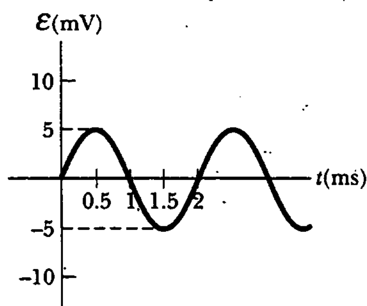


Figura P31.50

51. Un técnico que usa una pulsera de cobre que encierra un área de 0.005 00 m² coloca su mano en un solenoide cuyo campo magnético es de 5.00 T dirigido perpendicular al plano de la pulsera. La resistencia eléctrica alrededor de la circunferencia de la pulsera es 0.020 0 Ω. Una inesperada falla en la potencia provoca que el campo caiga a 1.50 T en un tiempo de 20.0 ms. Encuentre a) la corriente inducida en la pulsera, y b) la potencia entregada a la resistencia de la pulsera. (*Sugerencia:* como este problema da a entender, usted nunca debería llevar cualesquier objetos metálicos cuando trabaje en regiones de intensos campos magnéticos.)

52. Dos solenoides infinitamente largos (vistos por su sección transversal) pasan por un circuito como se muestra en la figura P31.52. La magnitud de **B** dentro de cada uno es la misma y está creciendo a razón de 100 T/s. ¿Cuál es la corriente en cada resistor?

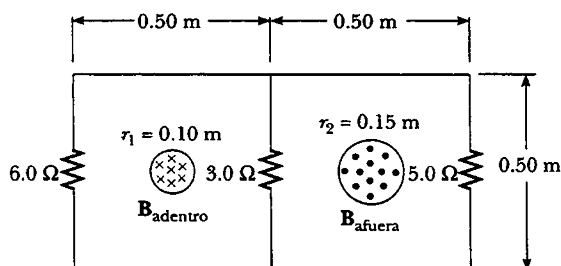


Figura P31.52

53. Una barra conductora de longitud $\ell = 35.0$ cm se libera para deslizarse sobre dos barras conductoras paralelas, como se muestra en la figura P31.53. Dos resistores $R_1 = 2.00\ \Omega$ y $R_2 = 5.00\ \Omega$ están conectados a los extremos de las barras para formar una espira. Un campo magnético constante $B = 2.50$ T se dirige perpendicularmente hacia adentro de la página. Un agente externo jala a la barra hacia la izquierda a una rapidez constante de $v = 8.00$ m/s. Encuentre a) las corrientes en ambos resistores, b) la potencia total entregada a la resistencia del circuito, y c) la magnitud de la fuerza aplicada que se necesita para mover la barra a esta velocidad constante.

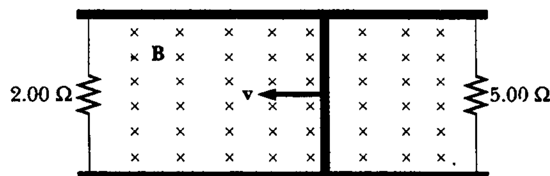


Figura P31.53

54. Suponga que usted enrolla alambre sobre el núcleo de un rollo de cinta de celofán para formar una bobina. Describa cómo puede usar un imán de barra para producir un voltaje inducido en la bobina. ¿Cuál es el orden de magnitud de la fem que usted generó? Establezca las cantidades que consideró como datos y sus valores.

55. Una barra de masa m, longitud d y resistencia R se desliza sin fricción sobre rieles paralelos, como se muestra en la figura P31.55. Una batería que mantiene una fem constante $\mathcal{E}$ se conecta entre los rieles y un campo magnético constante **B** se dirige perpendicularmente al plano de la página. Si la barra parte del reposo, muestre que en el tiempo t se mueve a una rapidez

$$v = \frac{\mathcal{E}}{Bd}\left(1 - e^{-B^2 d^2 t/mR}\right)$$



Figura P31.55

56. Un automóvil tiene una antena de radio vertical de 1.20 m de largo. El automóvil viaja a 65.0 km/h sobre un camino horizontal donde el campo magnético terrestre es de 50.0 μT dirigido hacia el norte y hacia abajo a un ángulo de 65.0° bajo la horizontal. a) Especifique la dirección en la que el automóvil debe moverse para generar la máxima fem de movimiento en la antena, con la par-

te superior de la misma positiva respecto de la inferior. b) Calcule la magnitud de esta fem inducida.

57. El plano de una espira cuadrada de alambre con longitud de lado $a = 0.200$ m es perpendicular al campo magnético terrestre en un punto donde $B = 15.0$ μT, como se muestra en la figura P31.57. La resistencia total de la espira y de los alambres que la conectan al galvanómetro es 0.500 Ω. Si la espira se colapsa repentinamente mediante fuerzas horizontales como se indica, ¿qué carga total pasa a través del galvanómetro?

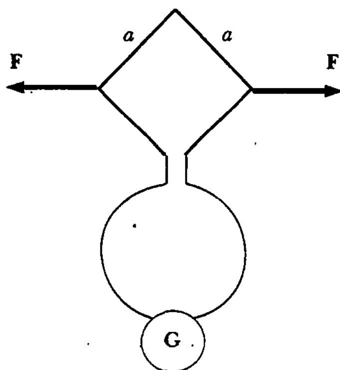


Figura P31.57

58. Los valores del campo magnético se determinan con frecuencia mediante el uso de un dispositivo llamado *bobina de búsqueda*. Esta técnica depende de la medición de la carga total que pasa por una bobina en un intervalo de tiempo durante el cual el flujo magnético vinculado a los bobinados cambia ya sea por el movimiento de la bobina o debido al cambio en el valor de B. a) Demuestre que conforme el flujo que atraviesa la bobina cambia de Φ_1 a Φ_2, la carga transferida a través de la bobina estará dada por $Q = N(\Phi_2 - \Phi_1)/R$, donde R es la resistencia de la bobina y el circuito asociado (galvanómetro) y N es el número de vueltas. b) Como un ejemplo específico calcule B cuando una bobina de 100 vueltas, 200 Ω de resistencia y área de sección transversal de 40.0 cm^2 produce los siguientes resultados. Una carga total de 5.00×10^{-4} C pasa por la bobina cuando ésta gira en un campo uniforme desde una posición en que el plano de la bobina es perpendicular al campo a una posición en que el plano de la bobina es paralelo al campo.

59. En la figura P31.59 el eje de rodamiento, de 1.50 m de largo, se empuja a lo largo de rieles horizontales a una rapidez constante $v = 3.00$ m/s. Un resistor $R = 0.400$ Ω se conecta a los rieles en los puntos a y b, directamente opuestos entre sí. (Las ruedas hacen un buen contacto eléctrico con los rieles, de modo que el eje, los rieles y R forman un circuito de espira cerrada. La única resistencia significativa en el circuito es R.) Hay un campo magnético uniforme $B = 0.080$ 0 T verticalmente hacia abajo. a) Encuentre la corriente inducida I en el resistor. b) ¿Qué fuerza horizontal F se requiere para mantener al eje rodando a una rapidez constante? c) ¿Qué extremo del resistor, a o b, está a un potencial eléctrico más alto? d) Después de que el eje rueda más allá del resistor, ¿la corriente en R invierte su dirección? Explique su respuesta.

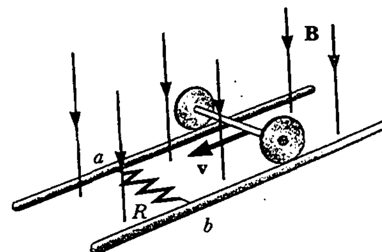


Figura P31.59

60. Una barra conductora se mueve a una velocidad constante **v** perpendicular a un largo alambre recto que conduce una corriente I como se muestra en la figura P31.60. Muestre que la magnitud de la fem generada entre los extremos de la barra es

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 v I}{2\pi r}\ell$$

En este caso observe que la fem disminuye con el aumento de r, como debería esperarse.

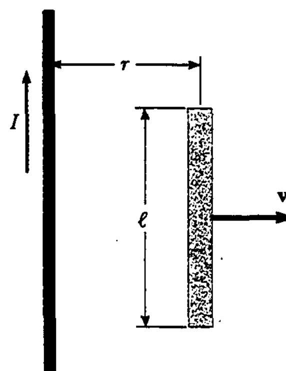


Figura P31.60

61. Una espira circular de alambre de radio r se encuentra en un campo magnético uniforme, con el plano de la espira perpendicular a la dirección del campo (Fig. P31.61). El campo magnético varía con el tiempo de acuerdo con $B(t) = a + bt$, donde a y b son constantes. a) Calcule el flujo magnético a través de la espira en $t = 0$. b) Calcule la fem inducida en la espira. c) Si la resistencia de la espira es R, ¿cuál es la corriente inducida? d) ¿A qué proporción se está entregando la energía eléctrica a la resistencia de la espira?

62. En la figura P31.62 un campo magnético uniforme disminuye a una relación constante $dB/dt = -K$, donde K es una constante positiva. Una espira circular de alambre de radio a que contiene una resistencia R y una capaci-

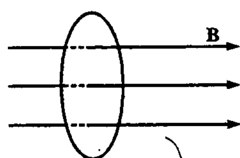


Figura P31.61

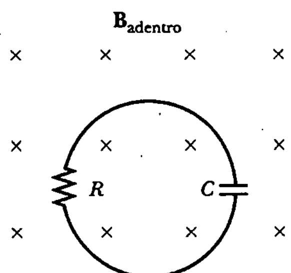


Figura P31.62

tancia C se pone con su plano normal al campo. a) Encuentre la carga Q sobre el capacitor cuando éste se encuentra totalmente cargado. b) ¿Cuál de las placas está a mayor potencial? c) Analice la fuerza que provoca la separación de las cargas.

63. Una bobina rectangular de 60 vueltas, dimensiones de 0.100 m por 0.200 m y resistencia total de 10.0 Ω, gira a rapidez angular de 30.0 rad/s alrededor del eje y en una región donde un campo magnético de 1.00 T está orientado a lo largo del eje x. La rotación se inicia de modo que el plano de la bobina es perpendicular a la dirección de **B** en $t = 0$. Calcule a) la fem inducida máxima en la bobina, b) la rapidez de cambio máxima del flujo magnético a través de la bobina, c) la fem inducida en $t = 0.050\ 0$ s, y d) el momento de torsión ejercido sobre la bobina por el campo magnético en el instante en que la fem es un máximo.

64. Una pequeña roldana circular de 0.500 cm de radio se mantiene directamente abajo de un largo alambre recto que conduce una corriente de 10.0 A. La roldana está ubicada a 0.500 m sobre la cubierta de la mesa (Figura P31.64). a) Si la roldana se deja caer desde el reposo, ¿cuál es la magnitud de la fem inducida promedio en ella desde el momento en que se suelta hasta el momento en que golpea la mesa? Suponga que el campo magnético casi es constante sobre el área de la roldana e igual al campo magnético en su centro. b) ¿Cuál es la dirección de la corriente inducida en la roldana?

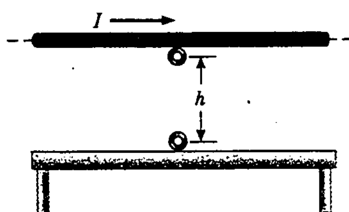


Figura P31.64

65. Para monitorear la respiración de un paciente de hospital, una delgada banda se envuelve alrededor del pecho del paciente. La banda es una bobina de 200 vueltas. Cuando el paciente inhala, el área circundada por la bobina aumenta en 39.0 cm². La magnitud del campo magnético terrestre es de 50.0 μT y forma un ángulo de 28.0° con el plano de la bobina. Si un paciente tarda 1.80 s en inhalar, encuentre la fem inducida promedio en la bobina durante este tiempo.

66. Una barra conductora de longitud ℓ se mueve a velocidad **v** paralela a un largo alambre que conduce una corriente estable I. El eje de la barra se mantiene perpendicular al alambre con el extremo cercano a una distancia r, como se muestra en la figura P31.66. Demuestre que la magnitud de la fem inducida en la barra es

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln\left(1 + \frac{\ell}{r}\right)$$

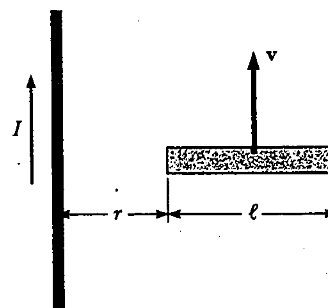


Figura P31.66

67. Una espira rectangular de dimensiones ℓ y w se mueve a una velocidad constante **v** alejándose de un largo alambre que conduce una corriente I en el plano de la espira (Fig. P31.67). La resistencia total de la espira es R.

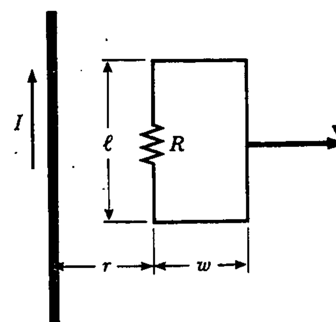


Figura P31.67

Obtenga una expresión que proporcione la corriente en la espira en el instante en que el lado cercano se encuentra a una distancia r del alambre.

68. Un alambre horizontal puede deslizarse libremente sobre los rieles verticales de un armazón conductor, como se muestra en la figura P31.68. El alambre tiene masa m y longitud ℓ, y la resistencia del circuito es R. Si un campo magnético uniforme se dirige perpendicularmente al armazón, ¿cuál es la rapidez terminal del alambre cuando éste cae bajo la fuerza de gravedad?

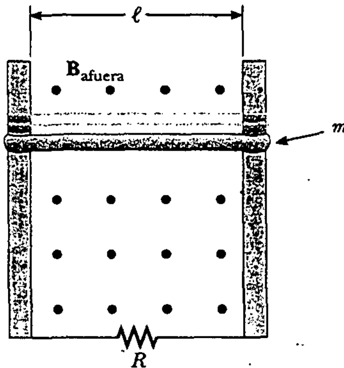


Figura P31.68

69. El flujo magnético que circunda a un anillo metálico varía con el tiempo t de acuerdo con $\Phi_B = 3(at^3 - bt^2)$ $T \cdot m^2$, con $a = 2.00$ s^{-3} y $b = 6.00$ s^{-2}. La resistencia del anillo es 3.00 Ω. Determine la máxima corriente inducida en el anillo durante el intervalo de $t = 0$ a $t = 2.00$ s.

70. **Problema de repaso.** La barra de masa m mostrada en la figura P31.70 se jala horizontalmente a través de rieles paralelos mediante una cuerda sin masa que pasa sobre una polea ideal y que está unida a una masa suspendida M. El campo magnético uniforme tiene una magnitud B, y la distancia entre los rieles es ℓ. Los rieles están conectados en un extremo mediante un resistor de carga R. Obtenga una expresión que proporcione la rapidez horizontal de la barra como una función del tiempo, suponiendo que la masa suspendida se suelta con la barra en reposo en $t = 0$. Suponga que no hay fricción entre los rieles y la barra.

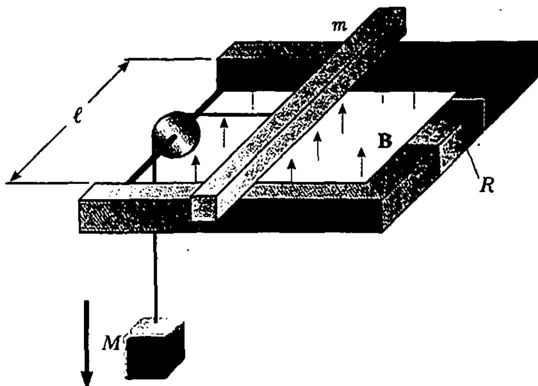


Figura P31.70

71. A un solenoide enrollado con 2 000 vueltas/m se le suministra una corriente que varía en el tiempo de acuerdo con $I = 4$ sen$(120\pi t)$, donde I está en A y t está en s. Una pequeña bobina circular coaxial de 40 vueltas y radio $r = 5.00$ cm se ubica dentro del solenoide cerca de su centro. a) Derive una expresión que describa la forma en que la fem en la bobina pequeña varía en el tiempo. b) ¿A qué relación promedio la energía se transforma en energía interna en la bobina pequeña si los bobinados tienen una resistencia total de 8.00 Ω?

72. Un alambre de 30.0 cm de largo se mantiene paralelo y a 80.0 cm arriba de un largo alambre que conduce 200 A y que descansa sobre el piso (Fig. P31.72). El alambre de 30.0 cm se suelta y cae, manteniéndose paralelo al alambre que conduce corriente a medida que va descendiendo. Suponga que el alambre que cae se acelera a 9.80 m/s² y obtenga una ecuación para la fem inducida en él. Exprese su resultado como una función del tiempo t después de que el alambre se suelta. ¿Cuál es la fem inducida 0.300 s después de que se suelta el alambre?

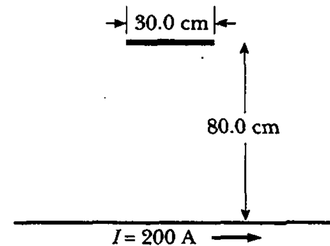


Figura P31.72

WEB 73. Un largo alambre recto conduce una corriente $I = I_{máx}$ sen$(\omega t + \phi)$ y se encuentra en el plano de una bobina rectangular de N vueltas de alambre, como se ilustra en la figura P31.9. Las cantidades $I_{máx}$, ω y ϕ son constantes. Determine la fem inducida en la bobina por el campo magnético creado por la corriente en el alambre recto. Suponga que $I_{máx} = 50.0$ A, $\omega = 200\ \pi s^{-1}$, $N = 100$, $h = w = 5.00$ cm, y $L = 20.0$ cm.

74. En la figura P31.74 se muestra una moneda que cuelga de un hilo entre los polos de un intenso imán en forma de herradura. La moneda gira a rapidez angular constante ω alrededor de un eje vertical. Permita que θ sea el ángulo entre la dirección de **B** y la normal a la cara de la moneda, y dibuje una gráfica del momento de torsión debido a las corrientes inducidas como una función de θ para $0 < \theta < 2\pi$.

75. El alambre que se muestra en la figura P31.75 se dobla en la forma de una tienda de campaña, con $\theta = 60.0°$ y $L = 1.50$ m, y se coloca en un campo magnético uniforme de 0.300 T de magnitud dirigido perpendicular a la cubierta de la mesa. El alambre es rígido, pero está articulado en los puntos a y b. Si la "tienda" se derrumba sobre la mesa en 0.100 s, ¿cuál es la fem inducida promedio en el alambre durante este tiempo?

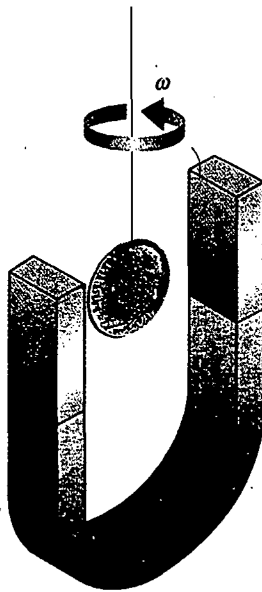


Figura P31.74

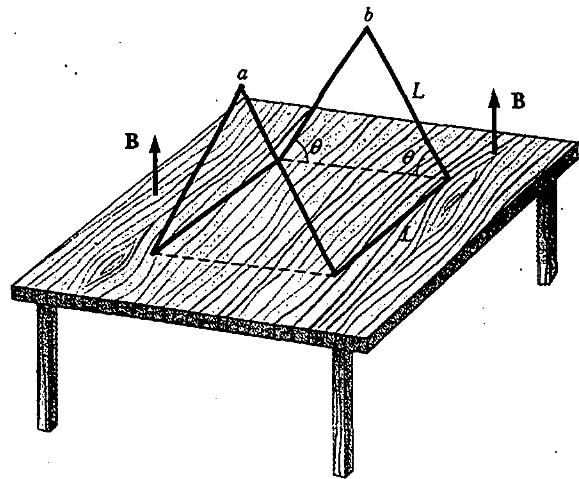


Figura P31.75

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

31.1 Como el campo magnético apunta ahora en la dirección opuesta, usted debe sustituir u con $\theta + \pi$. Ya que $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$, el signo de la fem inducida se invierte.

31.2 El que está en el lado oeste del avión. Como se vio en la sección 30.9, el campo magnético de la Tierra tiene una componente descendente en el hemisferio norte. Conforme el avión vuela hacia el norte, la regla de la mano derecha ilustrada en la figura 29.4 indica que la carga positiva experimenta una fuerza dirigida hacia el oeste. Por tanto, la punta del ala izquierda se vuelve cargada positivamente y la punta del ala derecha cargada negativamente.

31.3 Insertándola. Ya que el polo sur del imán está más cerca del solenoide, las líneas de campo creadas por el imán apuntan hacia arriba en la figura 31.14. Como la corriente inducida en el solenoide es en el sentido de las manecillas del reloj cuando se vé desde arriba, las líneas de campo magnético producidas por esta corriente apuntan hacia abajo en la figura 31.14. Si el imán se retirase, crearía un flujo decreciente hacia arriba. La corriente inducida contrarrestaría esta disminución mediante la producción de su propio flujo ascendente. Esto requeriría una corriente en sentido contrario al de las manecillas del reloj en el solenoide, lo opuesto a lo que se observa.

ACERTIJO

Las marcas en el pavimento son parte de un sensor que controla las luces de tráfico en esta intersección. ¿Qué son estas marcas y cómo detectan cuando un carro está esperando en la luz?
(© David R. Frazier)



capítulo

32 Inductancia

Líneas generales del capítulo

En el capítulo 31 se vio que las corrientes y fem se inducen en un circuito cuando el flujo magnético a través del área encerrada por el circuito cambia con el tiempo. Esta inducción electromagnética tiene algunas consecuencias prácticas, las cuales se describen en este capítulo. En primer lugar, se describe un efecto conocido como *autoinducción,* en el cual una corriente que varía en el tiempo en un circuito produce en éste una fem inducida que se opone a la fem que al inicio establece la corriente que varía con el tiempo. La autoinducción es la base del *inductor,* un elemento eléctrico que desempeña un importante papel en circuitos que utilizan corrientes que varían en el tiempo. Se analiza la energía almacenada en un campo magnético de un inductor y la densidad de energía asociada con el campo magnético.

Después se estudia cómo se induce una fem en un circuito como resultado de un flujo magnético variable producido por un segundo circuito; éste es el principio básico de la *inducción mutua.* Por último, se examinan las características de los circuitos que contienen inductores, resistores y capacitores en diversas combinaciones.

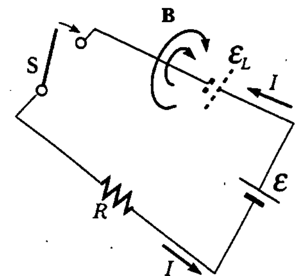


Figura 32.1 Después de que se cierra el interruptor la corriente produce un flujo magnético que atraviesa el área encerrada por la espira. Conforme la corriente aumenta hacia su valor de equilibrio, este flujo magnético cambia en el tiempo e induce una fem en la espira. El símbolo de batería dibujado con líneas punteadas representa la fem autoinducida.

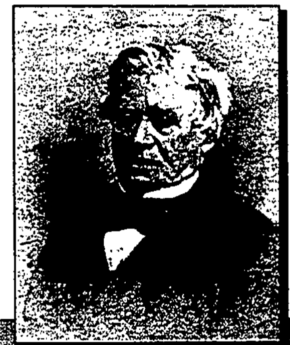


32.1 AUTOINDUCTANCIA

En este capítulo es necesario distinguir cuidadosamente entre fem y corrientes que son causadas por baterías u otras fuentes y aquellas que son inducidas por campos magnéticos variables. Se usa el adjetivo de *fuente* (como en los términos *fem de fuente* y *corriente de fuente*) para describir los parámetros asociados con una fuente física, y se usa el adjetivo *inducido* para describir aquellas fem y corrientes causadas por un campo magnético variable.

Considere un circuito que se compone de un interruptor, un resistor y una fuente de fem, como se muestra en la figura 32.1. Cuando el interruptor se mueve a la posición cerrada, la corriente de fuente no aumenta de inmediato de cero a su máximo valor, $\mathcal{E}/R$. La ley de inducción electromagnética de Faraday (Ec. 31.1) se puede usar para describir este efecto de la manera siguiente: A medida que la corriente de fuente aumenta con el tiempo, el flujo magnético a través de la espira de circuito debido a esta corriente también se incrementa con el tiempo. Este flujo creciente induce una fem en el circuito. La dirección de la fem inducida es tal que causaría una corriente inducida en la espira (si una corriente ya no estuviese fluyendo en la espira), lo cual establecería un campo magnético que se opondría al cambio en el campo magnético de origen. En consecuencia, la dirección de la fem inducida es opuesta a la dirección de la fem de fuente; de esto resulta que la corriente de fuente aumenta de manera gradual, más que instantánea, a su valor de equilibrio final. Este efecto se conoce como *autoinducción* debido a que el flujo variable a través del circuito y la fem inducida resultante surgen del circuito mismo. La fem $\mathcal{E}_L$ establecida en este caso recibe el nombre de **fem autoinducida.** También se llama con frecuencia **fem inversa.**

Como un segundo ejemplo de autoinducción considere la figura 32.2, la cual muestra una bobina enrollada sobre un centro cilíndrico de hierro. (Un dispositivo



Joseph Henry (1797-1878) Henry, un físico estadounidense, llegó a ser el primer director del Instituto Smithsoniano y el primer presidente de la Academia de Ciencias Naturales. Mejoró el diseño del electroimán y construyó uno de los primeros motores. También descubrió el fenómeno de la autoinducción pero no publicó sus hallazgos. La unidad de inductancia, el henry, lleva este nombre en su honor. *(North Wind Picture Archives)*

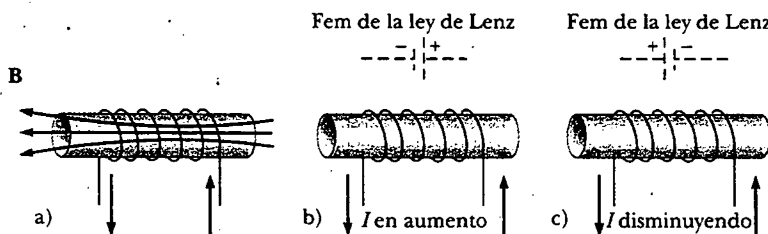


Figura 32.2 a) Una corriente en la bobina produce un campo magnético dirigido hacia la izquierda. b) Si la corriente aumenta, el flujo magnético en crecimiento crea una fem inducida que tiene la polaridad mostrada por la batería con líneas discontinuas. c) La polaridad de la fem inducida se invierte si la corriente disminuye.

práctico tendría varios cientos de vueltas.) Suponga que la corriente de fuente en la bobina o aumenta o disminuye con el tiempo. Cuando la corriente de fuente está en la dirección mostrada, un campo magnético dirigido de derecha a izquierda se establece dentro de la bobina, como se ve en la figura 32.2a. Conforme la corriente de fuente cambia con el tiempo, el flujo magnético a través de la bobina también cambia e induce una fem en la bobina. A partir de la ley de Lenz, la polaridad de esta fem inducida debe ser tal que se oponga al cambio en el campo magnético de la corriente de fuente. Si la corriente de fuente está aumentando, la polaridad de la fem inducida está dibujada en la figura 32.2b, y si la corriente de fuente está disminuyendo, la polaridad de la fem inducida es como se muestra en la figura 32.2c.

Para obtener una descripción cuantitativa de la autoinducción, recuerde de la ley de Faraday que la fem inducida es igual a la rapidez negativa de cambio en el tiempo del flujo magnético. El flujo magnético es proporcional al campo magnético debido a la corriente de fuente, el cual a su vez es proporcional a la corriente de fuente en el circuito. Por tanto, **una fem autoinducida $\mathcal{E}_L$ siempre es proporcional a la rapidez de cambio en el tiempo de la corriente de fuente.** Para una bobina de N vueltas muy próximas entre sí (un toroide o un solenoide ideal), que conducen una corriente de fuente I, se encuentra que

Fem autoinducida

$$\mathcal{E}_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad \textbf{(32.1)}$$

donde L es una constante de proporcionalidad —conocida como **inductancia** de la bobina— que depende de la geometría del circuito y de otras características físicas. A partir de esta expresión se ve que la inductancia de una bobina que contiene N vueltas es

Inductancia de una bobina de N vueltas

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \qquad \textbf{(32.2)}$$

donde se supone que el mismo flujo pasa a través de cada vuelta. Más tarde se usará esta ecuación para calcular la inductancia de algunas geometrías de circuito especiales.

De la ecuación 32.1 también se puede escribir la inductancia como la relación

Inductancia

$$L = -\frac{\mathcal{E}_L}{dI/dt} \qquad \textbf{(32.3)}$$

Igual que la resistencia es una medida de la oposición de la corriente ($R = \Delta V/I$), la inductancia es una medida de la oposición a un *cambio* en la corriente.

La unidad de inductancia del SI es el **henry** (H), la cual, como se puede ver en la ecuación 32.3, es 1 volt-segundo por ampere:

$$1\text{ H} = 1\ \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}}$$

El hecho de que la inductancia de un dispositivo depende de su geometría es análogo a la capacitancia de un capacitor que depende de la geometría de sus placas, como se encontró en el capítulo 26. Los cálculos de inducción pueden ser bastante difíciles de desarrollar para geometrías complicadas; sin embargo, los siguientes ejemplos incluyen situaciones simples para las cuales las inductancias se evalúan con facilidad.

EJEMPLO 32.1 Inductancia de un solenoide

Encuentre la inductancia de un solenoide enrollado uniformemente que tiene N vueltas y longitud ℓ. Suponga que ℓ es mucho más grande que el radio de los bobinados y que el núcleo del solenoide es aire.

Solución Se puede suponer que el campo magnético interior debido a la corriente de fuente es uniforme y está dado por la ecuación 30.17:

$$B = \mu_0 nI = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$$

donde $n = N/\ell$ es el número de vueltas por unidad de longitud. El flujo magnético a través de cada vuelta es

$$\Phi_B = BA = \mu_0 \frac{NA}{\ell} I$$

donde A es el área de la sección transversal del solenoide. Usando esta expresión y la ecuación 32.2 se encuentra que

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \quad \textbf{(32.4)}$$

Este resultado muestra que L depende de la geometría y que es proporcional al cuadrado del número de vueltas. Debido a que $N = n\ell$, el resultado se puede expresar en la forma

$$L = \mu_0 \frac{(n\ell)^2}{\ell} A = \mu_0 n^2 A\ell = \mu_0 n^2 V \quad \textbf{(32.5)}$$

donde $V = A\ell$ es el volumen del solenoide.

Ejercicio ¿Qué ocurriría a la inductancia si un material ferromagnético se colocara dentro del solenoide? 13

Respuesta La inductancia aumentaría. Para una corriente dada, el flujo magnético ahora es mucho más grande debido al incremento en el campo originado de la magnetización del material ferromagnético. Por ejemplo, si el material tiene una permeabilidad magnética de $500\mu_0$, la inductancia incrementaría por un factor de 500.

El hecho de que varios materiales en la vecindad de una bobina pueden alterar en forma sustancial la inductancia de la bobina se usa con grandes ventajas por los ingenieros de tráfico. Una bobina horizontal plana hecha de numerosas espiras de alambre se coloca en un surco poco profundo cavado en el pavimento del carril cercano a una intersección. (Véase la fotografía al comienzo de este capítulo.) Estas espiras se unen a circuitos que miden inductancia. Cuando un automóvil pasa sobre las espiras, el cambio en la inductancia causado por la gran cantidad de hierro que pasa sobre los mismos se usa para controlar las luces en la intersección.

EJEMPLO 32.2 Cálculo de inductancia y fem

a) Calcule la inductancia de un solenoide con núcleo de aire que contiene 300 vueltas si la longitud del solenoide es de 25.0 cm y su área de sección transversal es de 4.00 cm².

Solución Utilizando la ecuación 32.4 se obtiene

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$$

$$= (4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})\frac{(300)^2(4.00 \times 10^{-4}\,\text{m}^2)}{25.0 \times 10^{-2}\,\text{m}}$$

$$= 1.81 \times 10^{-4}\,\text{T}\cdot\text{m}^2/\text{A} = 0.181\,\text{mH}$$

b) Calcule la fem autoinducida en el solenoide si la corriente a través de él disminuye a una proporción de 50.0 A/s.

Solución Empleando la ecuación 32.1, y dado que $dI/dt = -50.0$ A/s, se obtiene

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} = -(1.81 \times 10^{-4}\,\text{H})(-50.0\,\text{A/s})$$

$$= 9.05\,\text{mV}$$

32.2 CIRCUITOS *RL*

13.6 Si un circuito contiene una bobina, como un solenoide, la autoinductancia de la bobina evita que la corriente en el circuito aumente o disminuya en forma instantánea. Un elemento de circuito que tiene una gran autoinductancia se denomina **inductor** y tiene el símbolo de circuito —ᴥᴥᴥ—. Siempre se supone que la autoinductancia del resto del circuito es despreciable comparada con la del inductor. Recuerde, sin embargo, que incluso un circuito sin una bobina tiene alguna autoinductancia que puede afectar el comportamiento del circuito.

Ya que la inductancia del inductor resulta en una fem inversa, **un inductor en un circuito se opone a los cambios en la corriente a través de dicho circuito.** Si el voltaje de la batería en el circuito se aumenta de manera que la corriente se eleve, el inductor se opone a este cambio, y la elevación no es instantánea. Si el vol-

taje de la batería disminuye, la presencia del inductor da como resultado una lenta caída en la corriente en lugar de una caída inmediata. Por tanto, el inductor provoca que el circuito se vuelva "perezoso" conforme reacciona a los cambios en la corriente.

Pregunta sorpresa 32.1

Un interruptor controla la corriente en un circuito que tiene una gran inductancia. ¿Es más probable que se produzca una chispa en el interruptor cuando éste se cierra o cuando se abre, o esto no importa?

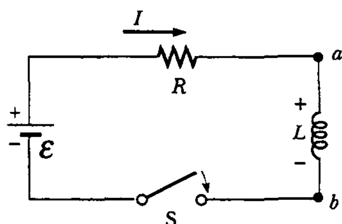


Figura 32.3 Un circuito en serie *RL*. Conforme la corriente aumenta hacia su valor máximo, en el inductor se induce una fem que se opone a la corriente en crecimiento.

Considere el circuito que se muestra en la figura 32.3, en el cual la batería tiene una resistencia interna despreciable. Éste es un **circuito *RL*** porque los elementos conectados a la batería son un resistor y un inductor. Suponga que el interruptor S se cierra en $t = 0$. La corriente en el circuito empieza a aumentar, y en el inductor se produce una fem inversa que se opone a la corriente en aumento. La fem inversa es, de la ecuación 32.1

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt}$$

Puesto que la corriente está aumentando, dI/dt es positiva; por tanto, $\mathcal{E}_L$ es negativa. Este valor negativo refleja la disminución en el potencial eléctrico que ocurre al ir de a a b a través del inductor, como se indica con los signos positivo y negativo en la figura 32.3.

Con esto en mente, se puede aplicar la regla de la espira de Kirchhoff a este circuito, al ser recorrido en la dirección de las manecillas del reloj:

$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \tag{32.6}$$

donde IR es la caída de voltaje a través del resistor. (Se han desarrollado las reglas de Kirchhoff para circuitos con corrientes estables, pero se pueden aplicar a un circuito en el cual la corriente esté cambiando si se las imagina como representantes del circuito en un *instante* de tiempo.) Ahora debe buscar una solución para esta ecuación diferencial, la cual es similar a la del circuito *RC* (véase la sección 28.4).

Una solución matemática de la ecuación 32.6 representa la corriente en el circuito como función del tiempo. Para obtener esta solución es conveniente cambiar variables despejando $x = \frac{\mathcal{E}}{R} - I$, de manera que $dx = -dI$. Con estas sustituciones, se puede escribir la ecuación 32.6 como

$$x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}dt$$

Integrando esta última expresión se tiene

$$\ln\frac{x}{x_0} = -\frac{R}{L}t$$

donde la constante de integración se ha considerado como $-\ln x_0$ y x_0 como el valor de x en el momento $t = 0$. Al aplicar el antilogaritmo de este resultado se obtiene

$$x = x_0 e^{-Rt/L}$$

Puesto que $I = 0$ en $t = 0$, observe a partir de la definición de x, que $x_0 = \mathcal{E}/R$. Por tanto, la última expresión es equivalente a

$$\frac{\mathcal{E}}{R} - I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-Rt/L}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

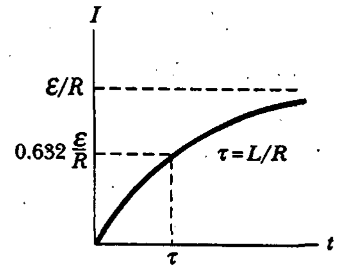


Figura 32.4 Gráfica de la corriente *versus* tiempo para el circuito *RL* mostrado en la figura 32.3. El interruptor se cierra en $t = 0$, y la corriente aumenta hacia su valor máximo $\mathcal{E}/R$. La constante de tiempo τ es el tiempo que le toma a I alcanzar el 63% de su valor máximo.

Esta expresión muestra el efecto del inductor. La corriente no se incrementa de manera instantánea a su valor de equilibrio final cuando el interruptor se cierra, en vez de eso se incrementa de acuerdo con una función exponencial. Si se remueve la inductancia en el circuito, lo cual se puede hacer dejando que L tienda a cero, el término exponencial se vuelve cero y se ve que en este caso la corriente no depende del tiempo —en ausencia de la inductancia, la corriente se incrementa de manera instantánea a su valor de equilibrio final.

Esta expresión también puede escribirse como

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \quad \textbf{(32.7)}$$

donde la constante τ es la **constante de tiempo** del circuito *RL*:

Constante de tiempo de un circuito *RL*

$$\tau = L/R \quad \textbf{(32.8)}$$

Físicamente, τ es el tiempo que tarda la corriente en el circuito en alcanzar $(1 - e^{-1}) = 0.63$ de su valor final $\mathcal{E}/R$. La constante de tiempo es un parámetro útil para comparar las respuestas en el tiempo de varios circuitos.

La figura 32.4 muestra una gráfica de la corriente *versus* tiempo en el circuito *RL*. Advierta que el valor de equilibrio de la corriente, el cual ocurre cuando t tiende al infinito, es $\mathcal{E}/R$. Esto puede verse igualando dI/dt a cero en la ecuación 32.6 y resolviendo para la corriente I. (En equilibrio, el cambio en la corriente es cero.) De este modo, se ve que la corriente aumenta muy rápido al inicio y después gradualmente se acerca al valor de equilibrio $\mathcal{E}/R$ conforme t tiende al infinito.

Investigue también la rapidez de cambio en el tiempo de la corriente en el circuito. Tomando la primera derivada con el tiempo de la ecuación 32.7 se tiene

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-t/\tau} \quad \textbf{(32.9)}$$

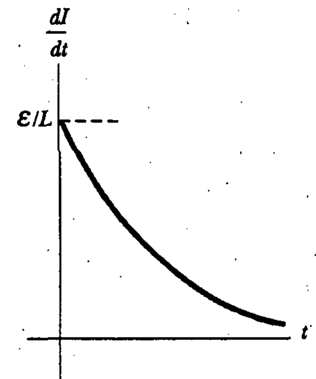


Figura 32.5 Gráfica de dI/dt *versus* tiempo para el circuito *RL* mostrado en la figura 32.3. La relación de cambio en el tiempo de la corriente es un máximo en $t = 0$, que es el instante en el cual se cierra el interruptor. La rapidez disminuye exponencialmente con el tiempo conforme I aumenta hacia su valor máximo.

A partir de este resultado se ve que la rapidez de cambio en el tiempo de la corriente es un máximo (igual a $\mathcal{E}/L$) en $t = 0$ y disminuye exponencialmente hasta cero a medida que t tiende al infinito (Fig. 32.5).

Ahora considere el circuito *RL* dispuesto como se muestra en la figura 32.6. El circuito contiene dos interruptores que operan de modo que cuando uno se cierra, el otro está abierto. Suponga que S_1 está cerrado durante un tiempo tan largo como para permitir que la corriente alcance su valor de equilibrio $\mathcal{E}/R$. En esta situación el circuito es descrito completamente por la espira exterior en la figura 32.6. Si S_2 se cierra en el instante en que el interruptor S_1 se abre, el circuito cambia de modo que ahora es descrito por completo sólo por la espira superior en la figura 32.6. La espira inferior ya no influye más en el comportamiento del circuito. En consecuencia, se tiene un circuito sin batería ($\mathcal{E} = 0$). Si aplica la ley de la espira de Kirchhoff a la espira superior en el instante en que los interruptores se activan, se obtiene

$$IR + L\frac{dI}{dt} = 0$$

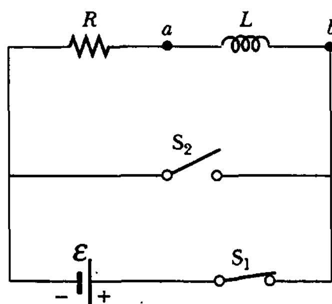


Figura 32.6 Un circuito *RL* que contiene dos interruptores. Cuando S_1 se cierra y S_2 se abre como se muestra, la batería está en el circuito. En el instante en que se cierra S_2, S_1 se abre, y la batería deja de formar parte del circuito.

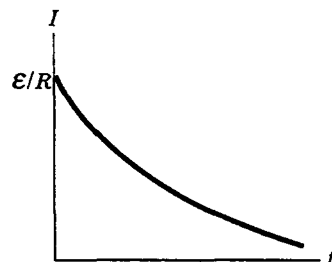


Figura 32.7 Corriente *versus* tiempo para la espira superior del circuito mostrado en la figura 32.6. Para $t < 0$, S_1 se cierra y S_2 se abre. En $t = 0$, S_2 se cierra y S_1 se abre, y la corriente tiene su valor máximo $\mathcal{E}/R$.

Se deja como un problema (problema 18) demostrar que la solución de esta ecuación diferencial es

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau} = I_0 e^{-t/\tau} \qquad \textbf{(32.10)}$$

donde $\mathcal{E}$ es la fem de la batería e $I_0 = \mathcal{E}/R$ es la corriente en $t = 0$, el instante en que S_2 se cierra conforme se abre S_1.

Si en el circuito no estuviese presente un inductor, la corriente inmediatamente disminuiría a cero si la batería se removiese. Cuando el inductor está presente, actúa para oponerse a la disminución en la corriente y para mantener la corriente. Una gráfica de la corriente en el circuito *versus* tiempo (Fig. 32.7) muestra que la corriente disminuye continuamente con el tiempo. Observe que la pendiente dI/dt siempre es negativa y tiene su valor máximo en $t = 0$. La pendiente negativa significa que $\mathcal{E}_L = -L(dI/dt)$ es ahora positiva; esto es, el punto *a* en la figura 32.6 está a un potencial eléctrico más bajo que el punto *b*.

Pregunta sorpresa 32.2

Dos circuitos como el mostrado en la figura 32.6 son idénticos excepto por el valor de *L*. En el circuito A la inductancia del inductor es L_A, y en el circuito B es L_B. El interruptor S_1 se cierra en $t = 0$, mientras que el interruptor S_2 permanece abierto. En $t = 0$, el interruptor S_1 se abre y el interruptor S_2 se cierra. Las relaciones de cambio en el tiempo resultantes para las dos corrientes están graficadas en la figura 32.8. Si supone que la constante de tiempo de cada circuito es mucho menor que 10 s, ¿cuál de lo siguiente es cierto? a) $L_A > L_B$; b) $L_A < L_B$; c) no hay suficiente información para decirlo.

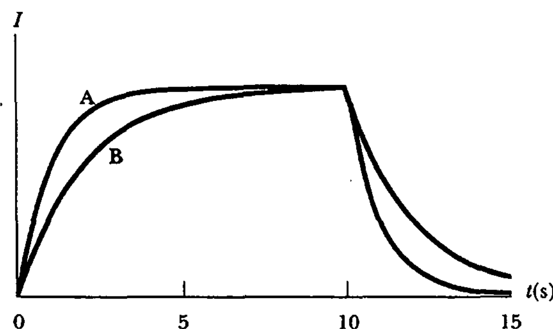


Figura 32.8

EJEMPLO 32.3 Constante de tiempo de un circuito RL

El interruptor en la figura 32.9a se cierra en $t = 0$. a) Encuentre la constante de tiempo del circuito.

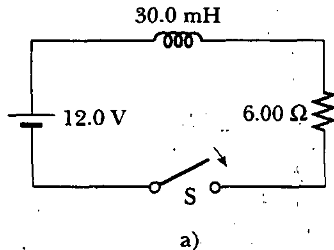
Solución La constante de tiempo está dada por la ecuación 32.8:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{30.0 \times 10^{-3}\,\text{H}}{6.00\,\Omega} = 5.00\,\text{ms}$$

b) Calcule la corriente en el circuito en $t = 2.00$ ms.

Solución Utilizando la ecuación 32.7 para la corriente como función del tiempo (con t y τ en milisegundos), se encuentra que en $t = 2.00$ ms:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}) = \frac{12.0\,\text{V}}{6.00\,\Omega}(1 - e^{-0.400}) = 0.659\,\text{A}$$



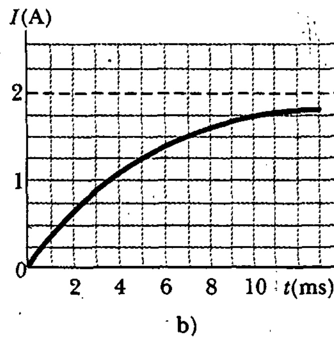


Figura 32.9 a) El interruptor en este circuito RL es activado para cerrarse en $t = 0$. b) Una gráfica de la corriente *versus* tiempo para el circuito en la parte a).

Una gráfica de la ecuación 32.7 para este circuito se proporciona en la figura 32.9b.

c) Compare la diferencia de potencial a través del resistor con aquella a través del inductor.

Solución En el instante en que se cierra el interruptor, no hay corriente y, por tanto, no hay diferencia de potencial a través del resistor. En este instante, el voltaje de la batería aparece por completo a través del inductor en la forma de una fem inversa de 12.0 V conforme el inductor intenta mantener la condición de corriente cero. (El extremo izquierdo del inductor está a un potencial eléctrico más alto que el extremo derecho.) Conforme el tiempo pasa, la fem a través del inductor disminuye y la corriente a través del resistor (y, en consecuencia, la diferencia de potencial a través del mismo) aumenta. La suma de las dos diferencias de potencial en todo momento es de 12.0 V, como se muestra en la figura 32.10.

Ejercicio Calcule la corriente en el circuito y el voltaje a través del resistor después de que el intervalo de tiempo transcurrido es igual a una constante de tiempo.

Respuesta 1.26 A, 7.56 V.

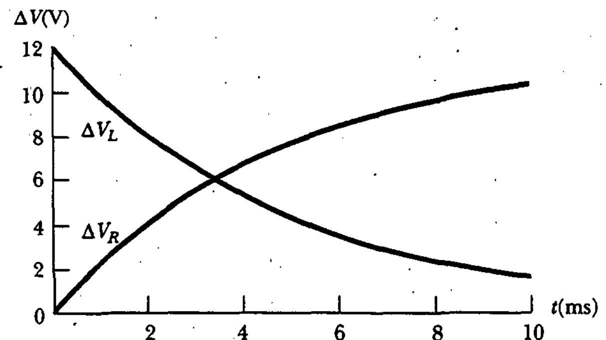


Figura 32.10 La suma de las diferencias de potencial a través del resistor y el inductor en la figura 32.9a es de 12.0 V (la fem de la batería) en todo momento.

32.3 ENERGÍA EN UN CAMPO MAGNÉTICO

13.6 Ya que la fem inducida en un inductor evita que una batería establezca una corriente instantánea, la batería tiene que efectuar trabajo contra el inductor para crear una corriente. Parte de la energía suministrada por la batería aparece como energía interna en el resistor, en tanto que la energía restante se almacena en el campo magnético del inductor. Si se multiplica cada término en la ecuación 32.6 por I, y se reordena la expresión, se obtendrá

$$I\mathcal{E} = I^2R + LI\frac{dI}{dt} \qquad \textbf{(32.11)}$$

Esta expresión indica que la rapidez a la cual la energía se suministra por la batería ($I\mathcal{E}$) es igual a la suma de la rapidez a la cual la energía se entrega al resistor, I^2R, y la rapidez a la cual la energía se almacena en el inductor, $LI(dI/dt)$. Así, la ecuación 32.11 es simplemente una expresión de la conservación de la energía. Si deja que U denote la energía almacenada en el inductor en cualquier momento, entonces la proporción dU/dt a la cual se almacena la energía puede escribirse como

$$\frac{dU}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

Para encontrar la energía total almacenada en el inductor se puede reescribir esta expresión como $dU = LI\,dI$ e integrar:

Energía almacenada en un inductor

$$U = \int dU = \int_0^I LI\,dI = L\int_0^I I\,dI$$

$$U = \tfrac{1}{2}LI^2 \qquad \textbf{(32.12)}$$

donde L es constante y ha sido removida de la integral. Esta expresión representa la energía almacenada en el campo magnético del inductor cuando la corriente es I. Observe que esta ecuación es similar en forma a la 26.11 para la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor, $U = Q^2/2C$. En cualquier caso, se ve que se requiere energía para establecer un campo.

También se puede determinar la densidad de energía de un campo magnético. Por simplicidad, considere un solenoide cuya inductancia esté dada por la ecuación 32.5:

$$L = \mu_0 n^2 A\ell$$

El campo magnético de un solenoide está dado por la ecuación 30.17:

$$B = \mu_0 nI$$

Sustituyendo la expresión para L e $I = B/\mu_0 n$ en la ecuación 32.12 se obtiene

$$U = \tfrac{1}{2}LI^2 = \tfrac{1}{2}\mu_0 n^2 A\ell\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}A\ell \qquad \textbf{(32.13)}$$

Debido a que $A\ell$ es el volumen del solenoide, la energía almacenada por unidad de volumen en el campo magnético que rodea al inductor es

Densidad de energía magnética

$$u_B = \frac{U}{A\ell} = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad \textbf{(32.14)}$$

Aunque esta expresión se dedujo para el caso especial de un solenoide, es válida para cualquier región del espacio en la cual haya un campo magnético. Advierta que la ecuación 32.14 es similar en forma a la 26.13 para la energía por unidad de volumen almacenada en un campo eléctrico, $u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2$. En ambos casos la densidad de energía es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo.

EJEMPLO 32.4 ¿Qué sucede con la energía en el inductor?

Considere otra vez al circuito RL mostrado en la figura 32.6, en el cual el interruptor S_2 se cierra en el instante en que se abre S_1 (en $t = 0$). Recuerde que la corriente en la espira superior disminuye exponencialmente con el tiempo de acuerdo con la expresión $I = I_0 e^{-t/\tau}$, donde $I_0 = \mathcal{E}/R$ es la corriente inicial en el circuito y $\tau = L/R$ es la constante de tiempo. Demuestre que toda la energía almacenada inicialmente en el campo magnético del inductor aparece como energía interna en el resistor conforme la corriente decae a cero.

Solución La relación dU/dt a la cual se suministra la energía al resistor (que es la potencia) es igual a I^2R, donde I es la corriente instantánea:

$$\frac{dU}{dt} = I^2R = (I_0e^{-Rt/L})^2R = I_0^2Re^{-Rt/L}$$

Para encontrar la energía total entregada al resistor, se integra esta expresión sobre los límites $t = 0$ a $t \to \infty$ (el límite superior es infinito debido a que transcurre un tiempo infinito para que la corriente llegue a cero):

$$1) \qquad U = \int_0^\infty I_0^2Re^{-2Rt/L}dt = I_0^2R\int_0^\infty e^{-2Rt/L}dt$$

El valor de la integral definida es $L/2R$ (esto se deja para que el estudiante lo demuestre en el ejercicio al final de este ejemplo) así que U se convierte en

$$U = I_0^2R\left(\frac{L}{2R}\right) = \frac{1}{2}LI_0^2$$

Observe que esto es igual a la energía inicial almacenada en el campo magnético del inductor, dada por la ecuación 32.13, como se probará.

Ejercicio Demuestre que la integral del lado derecho de la ecuación 1) tiene el valor $L/2R$.

EJEMPLO 32.5 El cable coaxial

Los cables coaxiales se usan con frecuencia para conectar dispositivos electrónicos, como su sistema de audio y un altavoz. Un largo cable coaxial se compone de dos cascarones conductores cilíndricos, concéntricos y delgados, de radios a y b y longitud ℓ, como se ve en la figura 32.11. Los cascarones conductores transportan la misma corriente I en direcciones opuestas. Suponga que el conductor interno conduce una corriente a un dispositivo y que el exterior actúa como una trayectoria de retorno que conduce una corriente de regreso a la fuente. a) Calcule la autoinductancia L de este cable.

Solución Para obtener L debe conocer el flujo magnético a través de cualquier sección transversal en la región entre los dos cascarones, como en el rectángulo azul claro en la figura 32.11.

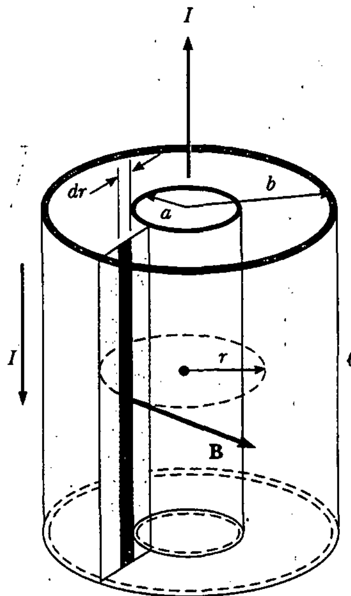


Figura 32.11 Sección de un largo cable coaxial. Los conductores interno y externo llevan corrientes iguales en direcciones opuestas.

La ley de Ampère (véase la sección 30.3) dice que el campo magnético en la región entre los cascarones es $B = \mu_0I/2\pi r$, donde r se mide desde el centro común de los cascarones. El campo magnético es cero afuera del cascarón exterior ($r > b$) porque la corriente neta que atraviesa el área encerrada por una trayectoria circular que rodea al cable es cero y, en consecuencia, de acuerdo con la ley de Ampère, $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0$. El campo magnético es cero dentro del cascarón interior debido a que éste es hueco y no hay corriente dentro de un radio $r < a$.

El campo magnético es perpendicular al rectángulo azul claro de longitud ℓ y ancho $b - a$, la sección transversal de interés. Puesto que el campo magnético varía con la posición radial a través de este rectángulo, se debe usar el cálculo para encontrar el flujo magnético total. Al dividir este rectángulo en tiras de ancho dr, como las tiras azul oscuro en la figura 32.11, se ve que el área de cada tira es $\ell\,dr$ y que el flujo a través de cada tira es $B\,dA = B\ell\,dr$. Por tanto, el flujo total a través de toda la sección transversal se encuentra mediante integración:

$$\Phi_B = \int B\,dA = \int_a^b \frac{\mu_0I}{2\pi r}\ell\,dr = \frac{\mu_0I\ell}{2\pi}\int_a^b\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0\ell}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Utilizando este resultado se encuentra que la autoinductancia del cable es

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0\ell}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

b) Calcule la energía total almacenada en el campo magnético del cable.

Solución Con la ecuación 32.12 y los resultados del inciso a) se obtiene

$$U = \tfrac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu_0\ell I^2}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

32.4 INDUCTANCIA MUTUA

Es común que el flujo magnético a través del área encerrada por un circuito varíe con el tiempo debido a corrientes variables en el tiempo en circuitos cercanos. Esta condición induce una fem a través de un proceso conocido como *inducción mutua*, llamado así porque depende de la interacción de dos circuitos.

Considere las dos bobinas enrolladas de alambre con vueltas muy próximas entre sí mostradas en la vista de sección transversal de la figura 32.12. La corriente I_1 en la bobina 1, que tiene N_1 vueltas, crea líneas de campo magnético, algunas de las cuales pasan a través de la bobina 2, la cual tiene N_2 vueltas. El flujo magnético causado por la corriente en la bobina 1 y que pasa a través de la bobina 2 se representa por medio de Φ_{12}. En analogía con la ecuación 32.2 se define la **inductancia mutua** M_{12} de la bobina 2 respecto de la bobina 1:

Definición de inductancia mutua

$$M_{12} \equiv \frac{N_2\Phi_{12}}{I_1} \quad (32.15)$$

Pregunta sorpresa 32.3

En relación con la figura 32.12, diga qué le ocurre a M_{12} a) si la bobina 1 se lleva más cerca de la bobina 2, y b) si la bobina 1 se gira de modo que yace en el plano de la página.

La pregunta sorpresa 32.3 demuestra que la inductancia mutua depende de la geometría de ambos circuitos y de sus orientaciones uno respecto del otro. A medida que la distancia de separación de los circuitos aumenta, la inductancia mutua disminuye en virtud de que el flujo que enlaza a los circuitos se reduce.

Si la corriente I_1 varía con el tiempo, se ve a partir de la ley de Faraday y de la ecuación 32.15 que la fem inducida por la bobina 1 en la bobina 2 es

$$\mathcal{E}_2 = -N_2\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -N_2\frac{d}{dt}\left(\frac{M_{12}I_1}{N_2}\right) = -M_{12}\frac{dI_1}{dt} \quad (32.16)$$

En el análisis precedente se supone que la corriente de fuente está en la bobina 1. También puede suponer una corriente de fuente I_2 en la bobina 2. Se puede repetir el análisis anterior para mostrar que existe una inductancia mutua M_{21}. Si la corriente I_2 varía con el tiempo, la fem inducida por la bobina 2 en la bobina 1 es

$$\mathcal{E}_1 = -M_{21}\frac{dI_2}{dt} \quad (32.17)$$

En la inducción mutua la fem inducida en una bobina siempre es proporcional a la rapidez a la cual la corriente en la otra bobina está cambiando. Aunque las cons-

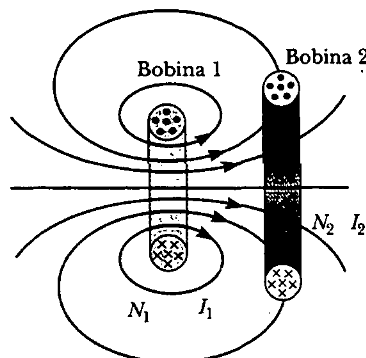


Figura 32.12 Vista transversal de dos bobinas adyacentes. Una corriente en la bobina 1 establece un flujo magnético, parte del cual pasa por la bobina 2.

tantes de proporcionalidad M_{12} y M_{21} parecen tener diferentes valores, puede demostrarse que son iguales. De este modo, con $M_{12} = M_{21} = M$, las ecuaciones 32.16 y 32.17 se transforman en

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{dI_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M\frac{dI_2}{dt}$$

Estas dos ecuaciones son similares en forma a la 32.1 para la fem autoinducida $\mathcal{E} = -L(dI/dt)$. La unidad de inductancia mutua es el henry.

Experimento sorpresa

Sintonice su radio en una estación relativamente débil. Ahora gire lentamente el aparato en torno a un eje vertical que pase por su centro. ¿Qué ocurre con la recepción? ¿Puede usted explicar esto en términos de la inducción mutua de la antena de transmisión de la estación y la antena de su radio?

Pregunta sorpresa 32.4

a) ¿Se puede tener inductancia mutua sin autoinductancia? b) ¿Qué hay acerca de la autoinductancia sin inductancia mutua?

EJEMPLO 32.6 Cargador de batería "inalámbrico"

Un cepillo dental eléctrico tiene una base diseñada para sostener el mango del cepillo cuando no está en uso. Como se muestra en la figura 32.13a, el mango tiene un agujero cilíndrico que encaja con soltura sobre un cilindro coincidente sobre la base. Cuando el mango se coloca sobre la base, una corriente variable en un solenoide dentro del cilindro de la base induce una corriente en una bobina dentro del mango. Esta corriente inducida carga la batería en el mango.

Usted puede modelar la base como un solenoide de longitud ℓ con N_B vueltas (Fig. 32.13b), que conduce una corriente de fuente I y tiene un área de sección transversal A. La bobina del mango contiene N_H vueltas. Encuentre la inductancia mutua del sistema.

Solución Ya que el solenoide de la base conduce una corriente de fuente I, el campo magnético en su interior es

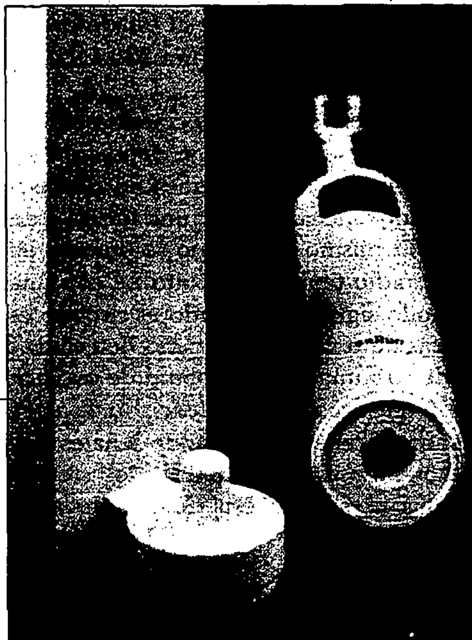
$$B = \frac{\mu_0 N_B I}{\ell}$$

Puesto que el flujo magnético Φ_{BH} a través de la bobina del mango causada por el campo magnético de la bobina de la base es BA, la inductancia mutua es

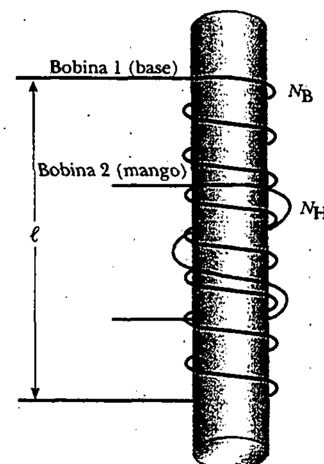
$$M = \frac{N_H \Phi_{BH}}{I} = \frac{N_H BA}{I} = \mu_0 \frac{N_H N_B A}{\ell}$$

Ejercicio Calcule la inductancia mutua de dos solenoides con $N_B = 1\,500$ vueltas, $A = 1.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$, $\ell = 0.02$ m y $N_H = 800$ vueltas.

Respuesta 7.5 mH.



a)



b)

Figura 32.13 a) Este cepillo dental eléctrico usa la inducción mutua de solenoides como parte de su sistema de carga de batería. b) Una bobina de N_H vueltas enrollada alrededor del centro de un solenoide de N_B vueltas.



OSCILACIONES EN UN CIRCUITO *LC*

13.7 Cuando un capacitor está conectado a un inductor, como se muestra en la figura 32.14, la combinación es un **circuito *LC***. Si el capacitor inicialmente está cargado y entonces se cierra el interruptor, tanto la corriente en el circuito como la carga en el capacitor oscilan entre valores máximos positivo y negativo. Si la resistencia del circuito es cero, ninguna energía se transforma en energía interna. En el siguiente análisis se desprecia la resistencia en el circuito. También suponga una situación idealizada en la cual la energía no se radia del circuito. Esta radiación se analizará en el capítulo 34, pero por el momento se despreciará. Con estas idealizaciones —resistencia cero y ninguna radiación— las oscilaciones en el circuito persisten de manera indefinida.

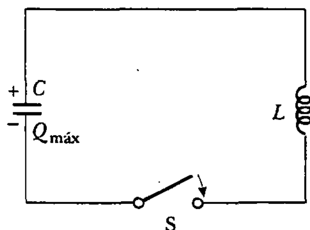


Figura 32.14 Un circuito *LC* simple. El capacitor tiene una carga inicial $Q_{máx}$, y el interruptor se cierra en $t = 0$.

Suponga que el capacitor tiene una carga inicial $Q_{máx}$ (la carga máxima) y que el interruptor se cierra en $t = 0$. Observe qué ocurre desde un punto de vista energético.

Cuando el capacitor está completamente cargado, la energía U en el circuito está almacenada en el campo eléctrico del capacitor y es igual a $Q^2_{máx}/2C$ (Ec. 26.11). En este momento la corriente en el circuito es cero, por lo cual no hay energía almacenada en el inductor. Después de que se cierra el interruptor, la proporción a la cual la carga deja o entra a las placas del capacitor (que es también la proporción a la cual cambia la carga sobre el capacitor) es igual a la corriente en el circuito. A medida que el capacitor empieza a descargarse luego de que se cierra el interruptor, la energía almacenada en su campo eléctrico disminuye. La descarga del capacitor representa una corriente en el circuito y, en consecuencia, parte de la energía está ahora almacenada en el campo magnético del inductor. Por tanto, la energía se transfiere desde el campo eléctrico del capacitor al campo magnético del inductor. Cuando el capacitor está completamente descargado, no almacena energía. En este momento la corriente alcanza su valor máximo y toda la energía está almacenada en el inductor. La corriente continúa en la misma dirección, disminuyendo en magnitud, con el capacitor eventualmente volviéndose cargado por completo una vez más pero ahora con la polaridad de sus placas opuesta a la polaridad inicial. Esto es seguido por otra descarga hasta que el circuito regresa a su estado original de carga máxima $Q_{máx}$ y la polaridad de placa mostrada en la figura 32.14. La energía continúa oscilando entre el inductor y el capacitor.

Las oscilaciones del circuito *LC* están en analogía electromagnética con las oscilaciones mecánicas de un sistema bloque-resorte, el cual se estudió en el capítulo 13. Mucho de lo que se ha analizado es aplicable a oscilaciones *LC*. Por ejemplo, se investigó el efecto de accionar un oscilador mecánico con una fuerza externa, lo cual conduce al fenómeno de *resonancia*. El mismo fenómeno se observa en el circuito *LC*. Por ejemplo, un sintonizador de radio tiene un circuito *LC* con una frecuencia natural, la cual se determina del modo siguiente: cuando el circuito es accionado por las oscilaciones electromagnéticas de una señal de radio detectada por la antena, el circuito sintonizador responde con una gran amplitud de oscilación eléctrica sólo para la frecuencia de la estación que iguala la frecuencia natural. Por tanto, sólo la señal de una estación pasa al amplificador, aun cuando señales de todas las estaciones están accionando el circuito al mismo tiempo. Cuando usted gira la perilla del sintonizador del radio para cambiar la estación, está cambiando la frecuencia natural del circuito, de modo que éste exhibirá una respuesta de resonancia hacia una frecuencia de activación diferente.

En la figura 32.15 se muestra una descripción gráfica de esta transferencia de energía entre el inductor y el capacitor en un circuito *LC*. El lado derecho de la figura muestra la transferencia de energía análoga en el sistema bloque-resorte oscilante estudiado en el capítulo 13. En cada caso la situación se muestra a intervalos de un cuarto del periodo de oscilación T. La energía potencial $\frac{1}{2}kx^2$ almacenada en un resorte alargado es análoga a la energía potencial eléctrica $Q^2_{máx}/2C$ almacena-

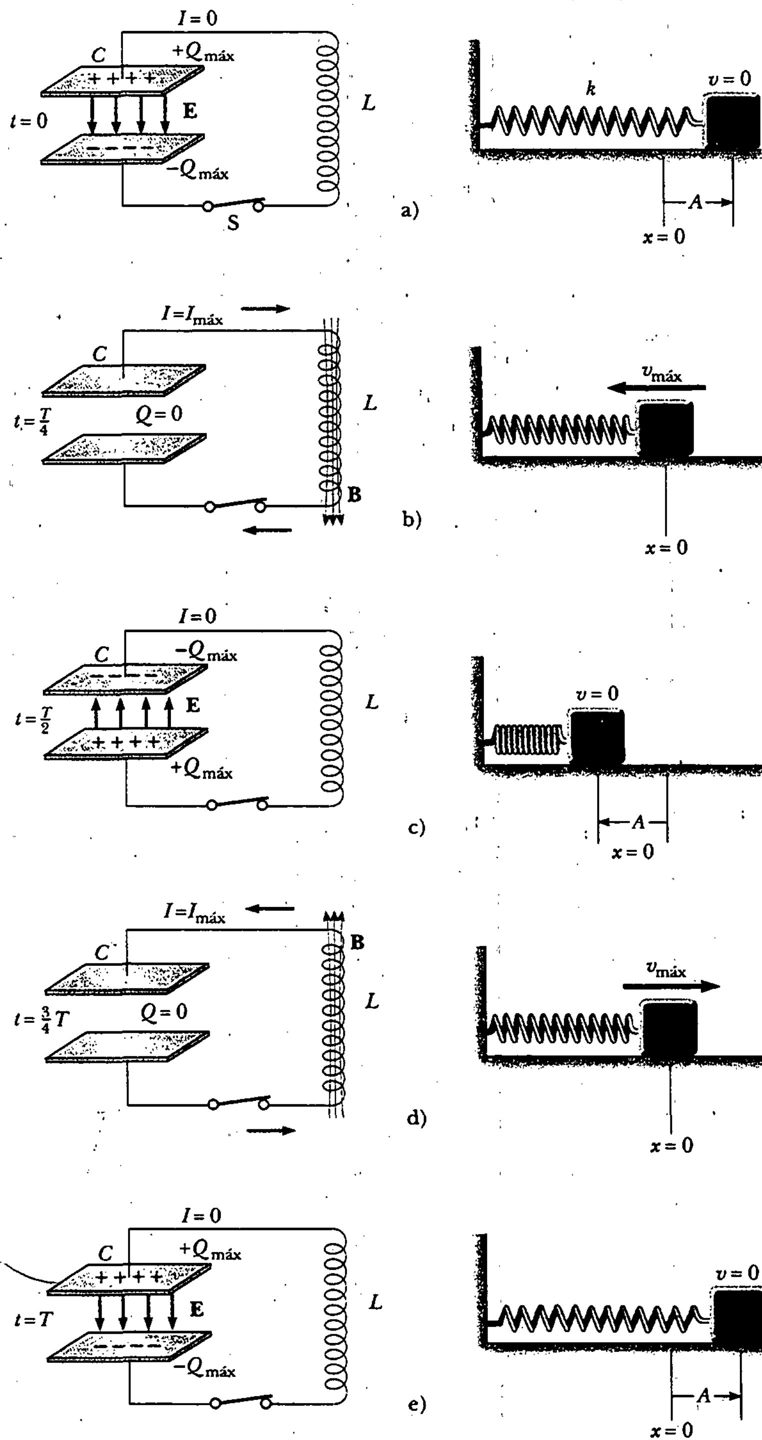


Figura 32.15 Transferencia de energía en un circuito LC sin resistencia y no radiante. El capacitor tiene una carga $Q_{máx}$ en $t = 0$, el instante en el cual se cierra el interruptor. La analogía mecánica de este circuito es un sistema bloque-resorte.

da en el capacitor. La energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ del bloque en movimiento es análoga a la energía magnética $\frac{1}{2}LI^2$ almacenada en el inductor, para la cual es necesaria la presencia de cargas en movimiento. En la figura 32.15a toda la energía se almacena como energía potencial eléctrica en el capacitor en $t = 0$. En la figura 32.15b, la cual es un cuarto de un periodo posterior, toda la energía está almacenada como energía magnética $\frac{1}{2}LI^2_{máx}$ en el inductor, donde $I_{máx}$ es la corriente máxima en el circuito. En la figura 32.15c la energía en el circuito LC se almacena completamente en el capacitor, ahora con la polaridad de las placas opuesta a como estaba en la figura 32.15a. En las partes d y e el sistema regresa a la configuración inicial sobre la segunda mitad del ciclo. En momentos distintos a aquellos mostrados en la figura, parte de la energía se almacena en el campo eléctrico del capacitor y parte se almacena en el campo magnético del inductor. En la oscilación mecánica análoga parte de la energía es energía potencial en el resorte y parte es energía cinética del bloque.

Considere algún tiempo arbitrario t después de que el interruptor se cierra, de modo que el capacitor tiene una carga $Q < Q_{máx}$ y la corriente es $I < I_{máx}$. En este momento ambos elementos almacenan energía, pero la suma de las dos energías debe ser igual a la energía inicial total U almacenada en el capacitor cargado completamente en $t = 0$:

Energía total almacenada en un circuito LC

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 \tag{32.18}$$

Ya que se ha supuesto que la resistencia del circuito es cero, ninguna energía se transforma en energía interna y, consecuentemente, *la energía total debe permanecer constante en el tiempo.* Esto significa que $dU/dt = 0$. Por tanto, al diferenciar la ecuación 32.18 respecto del tiempo mientras nota que Q e I varían con el tiempo, se obtiene

La energía total en un circuito LC ideal permanece constante; $dU/dt = 0$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2\right) = \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = 0 \tag{32.19}$$

Ésta se puede reducir a una ecuación diferencial en una variable al recordar que la corriente en el circuito es igual a la rapidez a la cual cambia la carga sobre el capacitor: $I = dQ/dt$. A partir de esto se deduce que $dI/dt = d^2Q/dt^2$. La sustitución de estas relaciones en la ecuación 32.19 produce

$$\frac{Q}{C} + L\frac{d^2Q}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q \tag{32.20}$$

Se puede despejar Q al advertir que esta expresión es de la misma forma que las ecuaciones análogas 13.16 y 13.17 para un sistema bloque-resorte:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

donde k es la constante de resorte, m la masa del bloque y $\omega = \sqrt{k/m}$. La solución de esta ecuación tiene la forma general

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

donde ω es la frecuencia angular del movimiento armónico simple, A es la amplitud del movimiento (el valor máximo de x) y ϕ es la constante de fase; los valores de A y ϕ dependen de las condiciones iniciales. Puesto que es de la misma forma que la ecuación diferencial de un oscilador armónico simple, se ve que la ecuación 32.20 tiene la solución

Carga *versus* tiempo para un circuito LC ideal

$$Q = Q_{máx}\cos(\omega t + \phi) \tag{32.21}$$

donde $Q_{máx}$ es la carga máxima del capacitor y la frecuencia angular ω es

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (32.22)$$

Frecuencia angular de oscilación

Advierta que la frecuencia angular de las oscilaciones depende sólo de la inductancia y la capacitancia del circuito. Ésta es la *frecuencia natural* de oscilación del circuito LC.

Debido a que Q varía sinusoidalmente, la corriente en el circuito varía en la misma forma. Esto se muestra fácilmente al diferenciar la ecuación 32.21 respecto del tiempo:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_{máx} \text{ sen } (\omega t + \phi) \quad (32.23)$$

Corriente *versus* tiempo para un circuito *LC* ideal

Para determinar el valor del ángulo de fase ϕ, examine las condiciones iniciales, las cuales en esta situación requieren que en $t = 0$, $I = 0$ y $Q = Q_{máx}$. Al considerar $I = 0$ en $t = 0$ en la ecuación 32.23 se obtiene

$$0 = -\omega Q_{máx} \text{ sen } \phi$$

la cual muestra que $\phi = 0$. Este valor para ϕ también es consistente con la ecuación 32.21 y con la condición de que $Q = Q_{máx}$ en $t = 0$. Por consiguiente, en este caso las expresiones para Q e I son

$$Q = Q_{máx} \cos \omega t \quad (32.24)$$

$$I = -\omega Q_{máx} \text{ sen } \omega t = -I_{máx} \text{ sen } \omega t \quad (32.25)$$

Las gráficas de Q contra t y de I *versus* t se presentan en la figura 32.16. Advierta que la carga en el capacitor oscila entre los valores extremos $Q_{máx}$ y $-Q_{máx}$, y que la corriente oscila entre $I_{máx}$ y $-I_{máx}$. Además, la corriente está 90° fuera de fase con la carga. Es decir, cuando la carga es un máximo, la corriente es cero, y cuando la carga es cero, la corriente tiene su valor máximo.

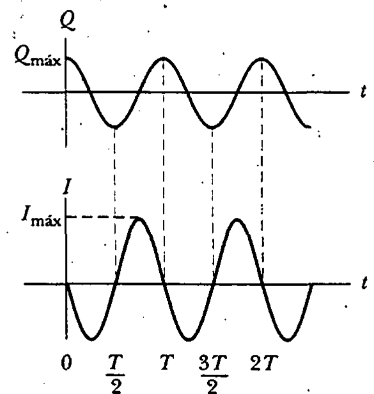


Figura 32.16 Gráfica de carga *versus* tiempo y corriente *versus* tiempo para un circuito *LC* sin resistencia y no radiante. Advierta que Q e I están 90° fuera de fase entre sí.

Pregunta sorpresa 32.5

¿Cuál es la relación entre las amplitudes de las dos curvas en la figura 32.16?

Regrese al análisis de la energía del circuito LC. Sustituyendo las ecuaciones 32.24 y 32.25 en la 32.18, se encuentra que la energía total es

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2_{máx}}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{LI^2_{máx}}{2} \text{ sen } \omega t \quad (32.26)$$

Esta expresión contiene todas las características descritas cualitativamente al principio de esta sección. Muestra que la energía del circuito LC oscila continuamente entre la energía almacenada en el campo eléctrico del capacitor y la energía almacenada en el campo magnético del inductor. Cuando la energía almacenada en el capacitor tiene su valor máximo, $Q^2_{máx}/2C$, la energía almacenada en el inductor es cero. Cuando la energía almacenada en el inductor tiene su valor máximo, $\frac{1}{2}LI^2_{máx}$, la energía almacenada en el capacitor es cero.

Gráficas de las variaciones en el tiempo de U_C y de U_L se muestran en la figura 32.17. La suma $U_C + U_L$ es una constante e igual a la energía total, $Q^2_{máx}/2C$ o $LI^2_{máx}/2$. La prueba analítica de lo anterior es directa. Las amplitudes de las dos gráficas en la figura 32.17 deben ser iguales porque la energía máxima almacenada en

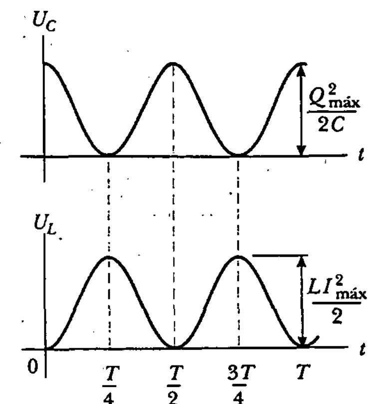


Figura 32.17 Gráficas de U_C *versus* t y U_L *versus* t para un circuito *LC* sin resistencia y no radiante. La suma de las dos curvas es constante e igual a la energía total almacenada en el circuito.

el capacitor (cuando $I = 0$) debe ser igual a la máxima energía almacenada en el inductor (cuando $Q = 0$). Esto se expresa matemáticamente como

$$\frac{Q_{\text{máx}}^2}{2C} = \frac{LI_{\text{máx}}^2}{2}$$

Utilizando esta expresión en la ecuación 32.26 para la energía total produce

$$U = \frac{Q_{\text{máx}}^2}{2C}(\cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t) = \frac{Q_{\text{máx}}^2}{2C} \quad \textbf{(32.27)}$$

debido a que $\cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t = 1$.

En esta situación idealizada, las oscilaciones en el circuito persisten de manera indefinida; sin embargo, recuerde que la energía total U del circuito permanece constante sólo si las transferencias y transformaciones de energía son despreciables. En los circuitos reales, siempre hay alguna resistencia y por ello la energía se transforma en energía interna. Al principio de esta sección se mencionó que también se está ignorando la radiación del circuito. En realidad, la radiación es inevitable en este tipo de circuito, y la energía total en el circuito disminuye continuamente como resultado de este proceso.

EJEMPLO 32.7 Un circuito *LC* oscilatorio

En la figura 32.18 el capacitor está inicialmente cargado cuando el interruptor S_1 está abierto y S_2 está cerrado. Luego, el interruptor S_1 se cierra en el mismo instante en que se abre S_2, de modo que el capacitor está conectado directamente a través del inductor. a) Encuentre la frecuencia de oscilación del circuito.

Solución Utilizando la ecuación 32.22 se obtiene para la frecuencia

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$
$$= \frac{1}{2\pi[(2.81 \times 10^{-3}\,\text{H})(9.00 \times 10^{-12}\,\text{F})]^{1/2}}$$
$$= 1.00 \times 10^6\,\text{Hz}$$

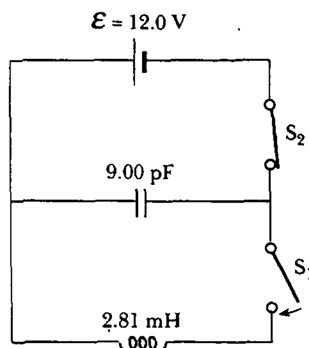


Figura 32.18 Primero el capacitor está completamente cargado con el interruptor S_1 abierto y S_2 cerrado. Luego, S_1 se cierra al mismo tiempo que se abre S_2.

b) ¿Cuáles son los valores máximos de carga sobre el capacitor y la corriente en el circuito?

Solución La carga inicial sobre el capacitor es igual a la carga máxima, y puesto que $C = Q/\mathcal{E}$, se tiene

$$Q_{\text{máx}} = C\mathcal{E} = (9.00 \times 10^{-12}\,\text{F})(12.0\,\text{V}) = 1.08 \times 10^{-10}\,\text{C}$$

En la ecuación 32.25 se ve cómo la corriente máxima está relacionada con la carga máxima:

$$I_{\text{máx}} = \omega Q_{\text{máx}} = 2\pi f Q_{\text{máx}}$$
$$= (2\pi \times 10^{-6}\,\text{s}^{-1})(1.08 \times 10^{-10}\,\text{C})$$
$$= 6.79 \times 10^{-4}\,\text{A}$$

c) Determine la carga y la corriente como funciones del tiempo.

Solución Las ecuaciones 32.24 y 32.25 proporcionan las siguientes expresiones para la variación en el tiempo de Q e I:

$$Q = Q_{\text{máx}} \cos \omega t$$
$$= (1.08 \times 10^{-10}\,\text{C}) \cos[(2\pi \times 10^6\,\text{rad/s})t]$$
$$I = -I_{\text{máx}} \operatorname{sen} \omega t$$
$$= (-6.79 \times 10^{-4}\,\text{A}) \operatorname{sen}[2\pi \times 10^6\,\text{rad/s})t]$$

Ejercicio ¿Cuál es la energía total almacenada en el circuito?

Respuesta 6.48×10^{-10} J.

Sección opcional



32.6 EL CIRCUITO *RLC*

13.7 Ahora se dirigirá la atención a un circuito más realista compuesto por un inductor, un capacitor y un resistor conectados en serie, como se muestra en la figura 32.19. Se deja que la resistencia del resistor represente toda la resistencia en el circuito. Suponga que el capacitor tiene una carga inicial $Q_{máx}$ antes de que el interruptor se cierre. Una vez que el interruptor queda cerrado y se establece una corriente, la energía total almacenada en el capacitor y el inductor en cualquier momento estará dada, como antes, por la ecuación 32.18. Sin embargo, la energía total ya no es constante, como lo fue en el circuito *LC*, porque el resistor causa transformación a energía interna. Puesto que la rapidez de transformación de energía interna en el interior de un resistor es I^2R, se tiene

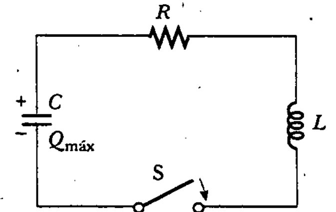


Figura 32.19 Un circuito *RLC* en serie. El capacitor tiene una carga $Q_{máx}$ en $t = 0$, el instante en que se cierra el interruptor.

$$\frac{dU}{dt} = -I^2R$$

donde el signo negativo significa que la energía U del circuito está disminuyendo con el tiempo. La sustitución de este resultado en la ecuación 32.19 da como resultado

$$LI\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = -I^2R \qquad \textbf{(32.28)}$$

Para convertir esta ecuación en una forma que permita comparar las oscilaciones eléctricas con su análogo mecánico, primero se usa el hecho de que $I = dQ/dt$ y se mueven todos los términos al lado izquierdo para obtener

$$LI\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C}I + I^2R = 0$$

Ahora se divide entre I:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} + IR = 0$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \qquad \textbf{(32.29)}$$

El circuito *RLC* es análogo al oscilador armónico amortiguado estudiado en la sección 13.6 e ilustrado en la figura 32.20. La ecuación de movimiento para este sistema mecánico es, a partir de la ecuación 13.32,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad \textbf{(32.30)}$$

Comparando las ecuaciones 32.29 y 32.30 se ve que Q corresponde a la posición x del bloque en cualquier instante, L a la masa m del bloque, R al coeficiente de amortiguamiento b, y C a $1/k$, donde k es la constante de fuerza del resorte. Estas y otras relaciones están listadas en la tabla 32.1.

Ya que la solución analítica de la ecuación 32.29 es complicada, sólo se da una descripción cualitativa del comportamiento del circuito. En el caso más simple, cuando $R = 0$, la ecuación 32.29 se reduce a la de un circuito *LC* simple, como se esperaba, y la carga y la corriente oscilan sinusoidalmente en el tiempo. Esto es equivalente a remover todo amortiguamiento en el oscilador armónico.

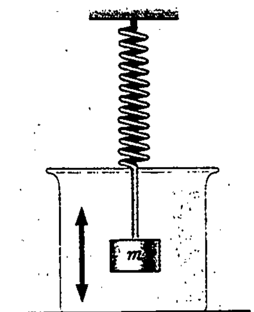


Figura 32.20 Un sistema bloque-resorte que se mueve en un medio viscoso con movimiento armónico amortiguado es análogo a un circuito *RLC*.

Cuando R es pequeña, una situación análoga al amortiguamiento ligero en el oscilador mecánico, la solución de la ecuación 32.29 es

$$Q = Q_{máx}e^{-Rt/2L}\cos\omega_d t \qquad \textbf{(32.31)}$$

TABLA 32.1 Analogías entre sistemas eléctricos y mecánicos

Circuito eléctrico		Sistema mecánico unidimensional
Carga	$Q \leftrightarrow x$	Desplazamiento
Corriente	$I \leftrightarrow v_x$	Velocidad
Diferencia de potencial	$\Delta V \leftrightarrow F_x$	Fuerza
Resistencia	$R \leftrightarrow b$	Coeficiente de amortiguamiento viscoso
Capacitancia	$C \leftrightarrow 1/k$	(k = constante del resorte)
Inductancia	$L \leftrightarrow m$	Masa
Corriente = derivada de la carga con el tiempo	$I = \frac{dQ}{dt} \leftrightarrow v_x = \frac{dx}{dt}$	Velocidad = derivada de la posición con el tiempo
Rapidez de cambio de la corriente = segunda derivada de la carga con el tiempo	$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} \leftrightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Aceleración = segunda derivada de la posición con el tiempo
Energía en inductor	$U_L = \frac{1}{2}LI^2 \leftrightarrow K = \frac{1}{2}mv^2$	Energía cinética de movimiento de masa
Energía en capacitor	$U_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \leftrightarrow U = \frac{1}{2}kx^2$	Energía potencial almacenada en un resorte
Rapidez de pérdida de energía debida a la resistencia	$I^2R \leftrightarrow bv^2$	Rapidez de pérdida de energía debida a la fricción
Circuito *RLC*	$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$	Masa amortiguada en un resorte

donde

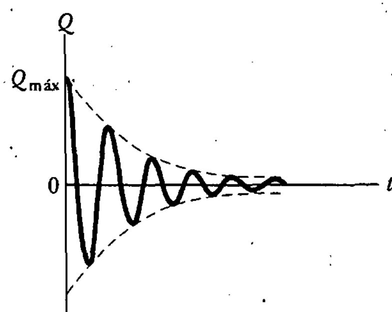
$$\omega_d = \left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]^{1/2} \tag{32.32}$$

es la frecuencia angular en la cual oscila el circuito. Esto es, el valor de la carga sobre el capacitor se sujeta a una oscilación armónica amortiguada en analogía con un sistema masa-resorte que se mueve en un medio viscoso. En la ecuación 32.32 se ve que, cuando $R \ll \sqrt{4L/C}$ (de modo que el segundo término en los corchetes es mucho menor que el primero), la frecuencia ω_d del oscilador amortiguado es cercana a la de un oscilador no amortiguado, $1/\sqrt{LC}$. Porque $I = dQ/dt$, se deduce que la corriente también experimenta una oscilación armónica amortiguada. En la figura 32.21a se presenta una gráfica de la carga *versus* tiempo para el oscilador amortiguado. Observe que el valor máximo de Q disminuye después de cada oscilación, justo como la amplitud de un sistema bloque-resorte amortiguado disminuye en el tiempo.

Pregunta sorpresa 32.6

La figura 32.21a tiene dos líneas azules discontinuas que forman una "envoltura" alrededor de la curva. ¿Cuál es la ecuación para la línea punteada superior?

Cuando se consideran valores mayores de R, se encuentra que las oscilaciones se amortiguan más rápidamente; de hecho, hay un valor de resistencia crítica $R_c = \sqrt{4L/C}$ sobre el cual no ocurren oscilaciones. Se dice que un sistema con $R = R_c$ está *críticamente amortiguado.* Cuando R excede a R_c, se afirma que el sistema está *sobreamortiguado* (Fig. 32.22).



a)

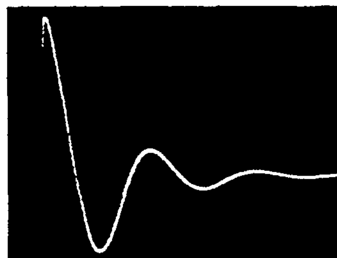

b)

Figura 32.21 a) Carga *versus* tiempo para un circuito *RLC* amortiguado. La carga decae en esta forma cuando $R \ll \sqrt{4L/C}$. La curva Q *versus* t representa una gráfica de la ecuación 32.31. b) Patrón de osciloscopio que muestra el decaimiento en las oscilaciones de un circuito *RLC*. Los parámetros usados fueron $R = 75\ \Omega$, $L = 10$ mH, $C = 0.19\ \mu$F y $f = 300$ Hz. *(Cortesía de J. Rudmin)*

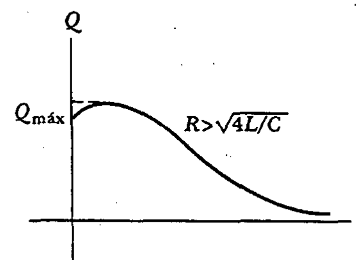


Figura 32.22 Gráfica de Q *versus* t para un circuito *RLC* sobreamortiguado, lo cual ocurre para valores de $R > \sqrt{4L/C}$.

RESUMEN

Cuando la corriente en una bobina cambia con el tiempo, en ella se induce una fem de acuerdo con la ley de Faraday. La **fem autoinducida** es

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} \qquad \textbf{(32.1)}$$

donde L es la **inductancia** de la bobina. La inductancia es una medida de cuánta oposición ofrece un dispositivo eléctrico a un cambio en la corriente que pasa por el dispositivo. La inductancia tiene la unidad SI de **henry** (H), donde $1\ \text{H} = 1\ \text{V}\cdot\text{s/A}$.

La inductancia de cualquier bobina es

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \qquad \textbf{(32.2)}$$

donde Φ_B es el flujo magnético que pasa por la bobina y N es el número total de vueltas. La inductancia de un dispositivo depende de su geometría. Por ejemplo, la inductancia de un solenoide con núcleo de aire es

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \qquad \textbf{(32.4)}$$

donde A es el área de la sección transversal y ℓ es la longitud del solenoide.

Si un resistor y un inductor están conectados en serie a una batería de fem $\mathcal{E}$, y si un interruptor en el circuito se cierra en $t = 0$, entonces la corriente en el circuito varía en el tiempo de acuerdo con la expresión

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \qquad \textbf{(32.7)}$$

donde $\tau = L/R$ es la constante de tiempo del circuito *RL*. Esto significa que la corriente aumenta hasta un valor de equilibrio de $\mathcal{E}/R$ después de un tiempo que es largo comparado con τ. Si se sustituye la batería del circuito por un alambre sin resistencia, la corriente decae exponencialmente con el tiempo de acuerdo con la expresión

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau} \qquad \textbf{(32.10)}$$

donde $\mathcal{E}/R$ es la corriente inicial en el circuito.

La energía almacenada en el campo magnético de un inductor que porta una corriente I es

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \qquad \textbf{(32.12)}$$

Esta energía es la contraparte magnética de la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor cargado.

La densidad de energía en un punto donde el campo magnético es B es

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad \textbf{(32.14)}$$

La inductancia mutua de un sistema de dos bobinas está dada por

$$M_{12} = \frac{N_2\Phi_{12}}{I_1} = M_{21} = \frac{N_1\Phi_{21}}{I_2} = M \qquad \textbf{(32.15)}$$

Esta inductancia mutua permite relacionar la fem inducida en una bobina con la corriente de fuente variable en una bobina cercana usando las relaciones

$$\mathcal{E}_2 = -M_{12}\frac{dI_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M_{21}\frac{dI_2}{dt} \qquad \textbf{(32.16, 32.17)}$$

En un circuito LC que tiene resistencia cero y no radia electromagnéticamente (una idealización), los valores de la carga en el capacitor y la corriente en el circuito varían en el tiempo de acuerdo con las expresiones

$$Q = Q_{\text{máx}}\cos(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(32.21)}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_{\text{máx}}\,\text{sen}\,(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(32.23)}$$

donde $Q_{\text{máx}}$ es la carga máxima en el capacitor, ϕ es la constante de fase y ω es la frecuencia angular de oscilación:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \textbf{(32.22)}$$

La energía en un circuito LC continuamente pasa de energía almacenada en el capacitor a energía almacenada en el inductor. La energía total del circuito LC en cualquier momento t es

$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2_{\text{máx}}}{2C}\cos^2\omega t + \frac{LI^2_{\text{máx}}}{2}\,\text{sen}^2\,\omega t \qquad \textbf{(32.26)}$$

En $t = 0$, toda la energía está almacenada en el campo eléctrico del capacitor ($U = Q^2_{\text{máx}}/2C$). Con el tiempo, la totalidad de esta energía se transfiere al inductor ($U = LI^2_{\text{máx}}/2$). Sin embargo, la energía total permanece constante debido a que las transformaciones de energía se ignoran en el circuito LC ideal.

PREGUNTAS

1. ¿Por qué la fem inducida que aparece en un inductor se conoce como "contrafem" o "fem inversa"?
2. La corriente en un circuito que contiene una bobina, resistor y batería alcanza un valor constante. ¿La bobina tiene una inductancia? ¿La bobina afecta el valor de la corriente?
3. ¿Qué parámetros afectan la inductancia de una bobina? ¿La inductancia de una bobina depende de la corriente en la misma?
4. ¿Cómo puede una larga pieza de alambre enrollarse sobre un carrete de manera que el alambre tenga una autoinductancia despreciable?
5. Un largo alambre delgado se enrolla como un solenoide con una autoinductancia L. Si se conecta entre las terminales de una batería, ¿cómo depende de L la corriente máxima?
6. Para el circuito RL en serie mostrado en la figura P32.6, ¿la fem inversa puede ser alguna vez mayor la fem de la batería? Explique.

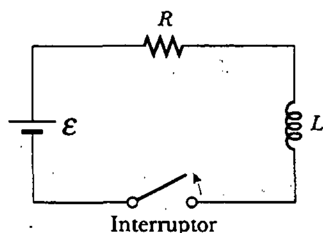


Figura P32.6

7. Considere esta tesis: "Joseph Henry, el primer físico profesional estadounidense, cambió la visión del universo durante unas vacaciones escolares en la academia Albany en 1830. Antes de esa fecha uno podría imaginar al universo como constituido de sólo una cosa: materia. En el experimento de Henry, después de que una batería se remueve de una bobina, la energía que mantiene a la corriente fluyendo por un rato no pertenece a alguna pieza de materia. Esta energía pertenece al campo magnético que rodea a la bobina. Con el descubrimiento de Henry de la autoinducción, la naturaleza forzó a admitir que el universo consiste de campos así como de materia." En su visión, ¿qué constituye al universo? Proporcione argumentos para su respuesta.
8. Analice las similitudes y diferencias entre la energía almacenada en el campo eléctrico de un capacitor cargado y la energía almacenada en el campo magnético de una bobina que conduce corriente.
9. ¿Cuál es la inductancia de dos inductores conectados en serie? ¿Tiene importancia si se trata de solenoides o toroides?
10. Los centros de dos espiras circulares están separados por una distancia fija. ¿Para qué orientación relativa de las espiras su inductancia mutua es un máximo?, ¿un mínimo? Explique.
11. Dos solenoides están conectados en serie de manera que cada uno conduce la misma corriente en cualquier instante. ¿Se presenta inductancia mutua? Explique.
12. En el circuito *LC* mostrado en la figura 32.15, la carga en el capacitor algunas veces es cero, aun cuando haya corriente en el circuito. ¿Cómo es esto posible?
13. Si la resistencia de los alambres en un circuito *LC* no fuera cero, ¿persistirían las oscilaciones? Explique.
14. ¿Cómo puede usted decir si un circuito *RLC* está sobre o subamortiguado?
15. ¿Cuál es la importancia del amortiguamiento crítico en un circuito *RLC*?
16. ¿Un objeto puede ejercer fuerza sobre sí mismo? Cuando una bobina induce una fem en sí misma, ¿ejerce una fuerza sobre sí misma?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** 💻 = use computadora para resolver el problema = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 32.1 Autoinductancia

1. Una bobina tiene una inductancia de 3.00 mH, y la corriente que la atraviesa cambia de 0.200 A a 1.50 A en un tiempo de 0.200 s. Encuentre la magnitud de la fem inducida promedio en la bobina durante este tiempo.
2. Un cordón de teléfono enrollado forma una espiral con 70 vueltas, un diámetro de 1.30 cm y una longitud sin alargar de 60.0 cm. Determine la autoinductancia de un conductor en el cordón sin alargar.
3. Un inductor de 2.00 H conduce una corriente estable de 0.500 A. Cuando el interruptor en el circuito se abre, la corriente efectivamente es cero en 10.0 ms. ¿Cuál es la fem inducida promedio en el inductor durante este tiempo?
4. Un pequeño solenoide de núcleo de aire tiene una longitud de 4.00 cm y un radio de 0.250 cm. Si la inductancia es de 0.060 0 mH, ¿cuántas vueltas por centímetro se requieren?
5. Calcule el flujo magnético a través del área encerrada por una bobina de 300 vueltas y 7.20 mH cuando la corriente en la misma es de 10.0 mA.
6. La corriente en un solenoide está aumentando a una proporción de 10.0 A/s. El área de sección transversal del solenoide es π cm², y hay 300 vueltas sobre sus 15.0 cm de longitud. ¿Cuál es la fem inducida que se opone al incremento de la corriente?
7. WEB Un inductor de 10.0 mH conduce una corriente $I = I_{máx}$ sen ωt, con $I_{máx} = 5.00$ A y $\omega/2\pi = 60.0$ Hz. ¿Cuál es la fem inversa como una función del tiempo?
8. Una fem de 24.0 mV es inducida en una bobina de 500 vueltas en el instante en que la corriente es de 4.00 A y está cambiando en proporción de 10.0 A/s. ¿Cuál es el flujo magnético que pasa por cada vuelta de la bobina?
9. Un inductor con forma de solenoide contiene 420 vueltas, su longitud es de 16.0 cm y tiene un área de sección transversal de 3.00 cm². ¿Qué rapidez uniforme de reducción de corriente a través del inductor induce una fem de 175 μV?
10. Un inductor con forma de solenoide contiene N vueltas, su longitud es ℓ y tiene un área de sección transversal A. ¿Qué rapidez uniforme de reducción de corriente a través del inductor induce una fem $\mathcal{E}$?
11. La corriente en un inductor de 90.0 mH cambia con el tiempo como $I = t^2 - 6.00t$ (en unidades del SI). Encuentre la magnitud de la fem inducida en a) $t = 1.00$ s y b) $t = 4.00$ s. c) ¿En qué momento la fem es cero?
12. Una corriente de 40.0 mA es conducida por un solenoide de núcleo de aire enrollado uniformemente con 450 vueltas, un diámetro de 15.0 mm y una longitud de 12.0 cm. Calcule a) el campo magnético dentro del solenoi-

de, b) el flujo magnético que pasa por cada vuelta, y c) la inductancia del solenoide. d) ¿Cuál de estas cantidades depende de la corriente?

13. Un solenoide tiene 120 vueltas enrolladas uniformemente alrededor de un núcleo de madera, el cual tiene un diámetro de 10.0 mm y una longitud de 9.00 cm. a) Calcule la inductancia del solenoide. b) El núcleo de madera se sustituye con una barra de hierro blando que tiene las mismas dimensiones, pero una permeabilidad magnética $\mu_m = 800\mu_0$. ¿Cuál es la nueva inductancia?

14. Un toroide tiene un radio mayor R y un radio menor r y se enrolla firmemente con N vueltas de alambre, como se muestra en la figura P32.14. Si $R >> r$, el campo magnético dentro de la región del toroide, de área de sección transversal $A = \pi r^2$, es esencialmente el de un largo solenoide que se ha doblado como un gran círculo de radio R. Utilizando el campo uniforme de un largo solenoide, muestre que la autoinductancia de dicho toroide es aproximadamente

$$L \cong \mu_0 N^2 A / 2\pi R$$

(Una expresión exacta para la inductancia de un toroide con una sección transversal rectangular se deduce en el problema 64.)

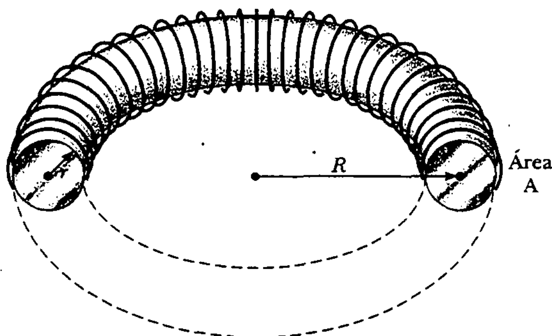


Figura P32.14

15. Una fem autoinducida en un solenoide de inductancia L cambia en el tiempo como $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-kt}$. Encuentre la carga total que pasa por el solenoide, si la carga es finita.

Sección 32.2 Circuitos *RL*

16. Calcule la resistencia en un circuito RL en el cual L = 2.50 H y la corriente aumenta hasta 90.0% de su valor final en 3.00 s.

17. Una batería de 12.0 V se conecta a un circuito en serie que contiene un resistor de 10.0 Ω y un inductor de 2.00 H. ¿Cuánto tardará la corriente en llegar a a) 50.0% y b) 90.0% de su valor final?

18. Muestre que $I = I_0 e^{-t/\tau}$ es una solución de la ecuación diferencial

$$IR + L\frac{dI}{dt} = 0$$

donde $\tau = L/R$ e I_0 es la corriente en $t = 0$.

19. Considere el circuito en la figura P32.19, tomando $\mathcal{E}$ = 6.00 V, L = 8.00 mH y R = 4.00 Ω. a) ¿Cuál es la constante de tiempo inductivo del circuito? b) Calcule la corriente en el circuito 250 μs después de que se cierra el interruptor. c) ¿Cuál es el valor de la corriente del estado estable final? d) ¿Cuánto tarda la corriente en alcanzar el 80.0% de su valor máximo?

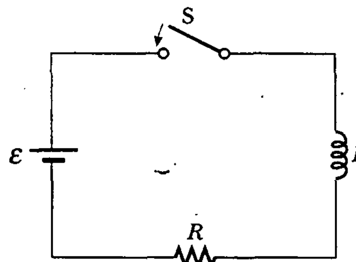


Figura P32.19 Problemas 19, 20, 21 y 24.

20. En el circuito mostrado en la figura P32.19, haga L = 7.00 H, R = 9.00 Ω y $\mathcal{E}$ = 120 V. ¿Cuál es la fem autoinducida 0.200 s después de que se cierra el interruptor?

WEB 21. Para el circuito RL mostrado en la figura P32.19, haga L = 3.00 H, R = 8.00 Ω y $\mathcal{E}$ = 36.0 V. a) Calcule la razón de la diferencia de potencial que atraviesa el resistor y la que pasa por el inductor cuando I = 2.00 A. b) Calcule el voltaje que atraviesa el inductor cuando I = 4.50 A.

22. Una batería de 12.0 V está conectada en serie con un resistor y un inductor. El circuito tiene una constante de tiempo de 500 μs, y la corriente máxima es de 200 mA. ¿Cuál es el valor de la inductancia?

23. Un inductor que tiene una inductancia de 15.0 H y una resistencia de 30.0 Ω se conecta entre las terminales de una batería de 100 V. ¿Cuál es la rapidez de aumento de la corriente a) en t = 0 y b) en t = 1.50 s?

24. Cuando el interruptor de la figura P32.19 se cierra, la corriente tarda 3.00 ms para llegar al 98.0% de su valor final. Si R = 10.0 Ω, ¿cuál es la inductancia?

25. El interruptor en la figura P32.25 se cierra en un tiempo t = 0. Encuentre la corriente en el inductor y la corriente que según esto pasan por el interruptor como funciones del tiempo.

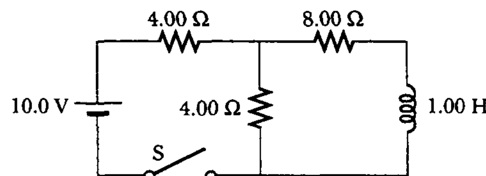


Figura P32.25

26. Un circuito RL en serie con L = 3.00 H y un circuito RC en serie con C = 3.00 μF tienen la misma constante de tiempo. Si los dos circuitos tienen la misma resistencia R, a) ¿cuál es el valor de R y b) cuál es la constante de tiempo?

27. Un pulso de corriente es alimentado al circuito parcial mostrado en la figura P32.27. La corriente comienza en cero, luego se vuelve 10.0 A entre $t = 0$ y $t = 200\ \mu s$, y luego es cero nuevamente. Determine la corriente en el inductor como función del tiempo.

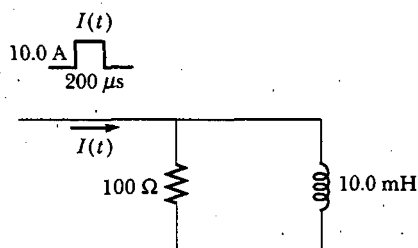


Figura P32.27

28. Una aplicación de un circuito *RL* es la generación de un alto voltaje que varía en el tiempo a partir de una fuente de bajo voltaje, como se muestra en la figura P32.28. a) ¿Cuál es la corriente en el circuito un largo tiempo después de que el interruptor ha estado en la posición A? b) Ahora el interruptor se desplaza rápidamente de A a B. Calcule el voltaje inicial a través de cada resistor y el inductor. c) ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que el voltaje a través del inductor disminuya hasta 12.0 V?

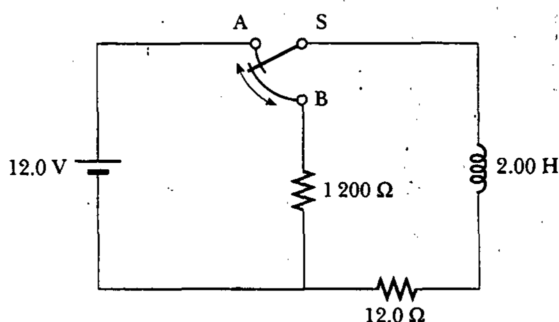


Figura P32.28

WEB 29. Un inductor de 140 mH y un resistor de 4.90 Ω se conectan con un interruptor a una batería de 6.00 V, como se muestra en la figura P32.29. a) Si el interruptor se mueve hacia la izquierda (conectando la batería), ¿cuánto tiempo transcurre antes de que la corriente alcance 220 mA? b) ¿Cuál es la corriente en el inductor 10.0 s después de que el interruptor se cierra? c) Ahora el interruptor se mueve rápidamente de A a B. ¿Cuánto tiempo pasa antes de que la corriente disminuya hasta 160 mA?

30. Considere dos inductores ideales, L_1 y L_2, los cuales tienen resistencia interna *cero* y están muy separados de modo que sus campos magnéticos no influyen entre ellos. a) Si estos conductores se conectan en serie, muestre que son equivalentes a un solo inductor ideal que tiene $L_{eq} = L_1 + L_2$. b) Si los mismos dos inductores se conectan en paralelo, demuestre que son equivalentes a un solo inductor ideal que tiene $1/L_{eq} = 1/L_1 + 1/L_2$. c) Considere ahora dos inductores L_1 y L_2 que tienen resistencias internas *no cero* R_1 y R_2, respectivamente. Suponga que todavía están tan alejados como para que sus campos magnéticos no influyan entre sí. Si estos inductores se conectan en serie, muestre que son equivalentes a un solo inductor que tiene $L_{eq} = L_1 + L_2$ y $R_{eq} = R_1 + R_2$. d) Si estos mismos inductores se conectan después en paralelo, ¿es necesariamente cierto que son equivalentes a un solo inductor ideal que tiene $1/L_{eq} = 1/L_1 + 1/L_2$ y $1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2$? Explique su respuesta.

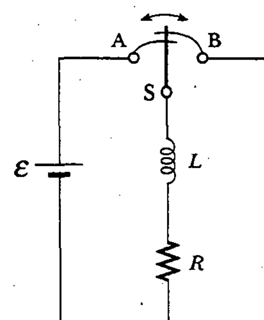


Figura P32.29

Sección 32.3 Energía en un campo magnético

31. Calcule la energía asociada con el campo magnético de un solenoide de 200 vueltas en el cual una corriente de 1.75 A produce un flujo de 3.70×10^{-4} T·m² en cada vuelta.

32. El campo magnético dentro de un solenoide superconductor es de 4.50 T. El solenoide tiene un diámetro interno de 6.20 cm y una longitud de 26.0 cm. Determine a) la densidad de energía magnética en el campo, y b) la energía almacenada en el campo magnético dentro del solenoide.

33. Un solenoide de núcleo de aire con 68 vueltas mide 8.00 cm de largo y tiene un diámetro de 1.20 cm. ¿Cuánta energía se almacena en su campo magnético cuando conduce una corriente de 0.770 A?

34. En $t = 0$ se aplica una fem de 500 V a una bobina que tiene una inductancia de 0.800 H y una resistencia de 30.0 Ω. a) Encuentre la energía almacenada en el campo magnético cuando la corriente alcanza la mitad de su valor máximo. b) Después de que la fem se conecta, ¿cuánto tarda la corriente en alcanzar este valor?

WEB 35. En un día claro hay un campo eléctrico vertical de 100 V/m cerca de la superficie terrestre. En el mismo lugar, el campo magnético de la Tierra tiene una magnitud de 0.500×10^{-4} T. Calcule las densidades de energía de los dos campos.

36. Un circuito *RL* en el cual $L = 4.00$ H y $R = 5.00\ \Omega$ está conectado a una batería de 22.0 V en $t = 0$. a) ¿Qué energía se almacena en el inductor cuando la corriente es de 0.500 A? b) ¿A qué proporción se almacena la energía en el inductor cuando $I = 1.00$ A? c) ¿Qué potencia suministra la batería al circuito cuando $I = 0.500$ A?

37. Una batería de 10.0 V, un resistor de 5.00 Ω y un inductor de 10.0 H se conectan en serie. Después de que la co-

rriente en el circuito alcanza su valor máximo, calcule a) la potencia suministrada por la batería, b) la potencia entregada al resistor, c) la potencia entregada al inductor, y d) la energía almacenada en el campo magnético del inductor.

38. Un campo eléctrico uniforme con una magnitud de 680 kV/m por todo un volumen cilíndrico origina una energía total de 3.40 μJ. ¿Qué campo magnético sobre esta misma región almacena la misma energía total?

39. Suponga que la magnitud del campo magnético afuera de una esfera de radio R es $B = B_0(R/r)^2$, donde B_0 es una constante. Determine la energía total almacenada en el campo magnético afuera de la esfera y evalúe su resultado para $B_0 = 5.00 \times 10^{-5}$ T y $R = 6.00 \times 10^6$ m, valores apropiados para el campo magnético terrestre.

Sección 32.4 Inductancia mutua

40. Dos bobinas están muy cercanas una de la otra. La primera bobina conduce una corriente variable en el tiempo dada por
$I(t) = (5.00\text{ A})e^{-0.025\,0t}\,\text{sen}(377t)$. En $t = 0.800$ s, el voltaje medido a través de la segunda bobina es -3.20 V. ¿Cuál es la inductancia mutua de las bobinas?

41. Dos bobinas, mantenidas en posiciones fijas, tienen una inductancia mutua de 100 μH. ¿Cuál es el voltaje pico en una cuando una corriente sinusoidal dada por
$I(t) = (10.0\text{ A})\ \text{sen}\,(1\,000t)$ fluye en la otra?

42. Se induce una fem de 96.0 mV en los devanados de una bobina cuando la corriente en una bobina cercana está aumentando a la proporción de 1.20 A/s. ¿Cuál es la inductancia mutua de las dos bobinas?

43. Dos solenoides A y B, que están muy próximos entre sí y comparten el mismo eje cilíndrico, tienen 400 y 700 vueltas, respectivamente. Una corriente de 3.50 A en la bobina A produce un flujo promedio de 300 μT·m^2 a través de cada vuelta de A, y un flujo de 90.0 μT·m^2 a través de cada vuelta de B. a) Calcule la inductancia mutua de los dos solenoides. b) ¿Cuál es la autoinductancia de A? c) ¿Qué fem se induce en B cuando la corriente en A aumenta a razón de 0.500 A/s?

44. Un solenoide de 70 vueltas mide 5.00 cm de largo y 1.00 cm de diámetro y conduce una corriente de 2.00 A. Una sola espira de alambre, de 3.00 cm de diámetro, se sostiene de manera que el plano de la espira es perpendicular al eje largo del solenoide, como se ilustra en la figura P31.18 (página 1004). ¿Cuál es la inductancia mutua de los dos si el plano de la espira pasa a través del solenoide a 2.50 cm de un extremo?

45. Dos espiras circulares de alambre de una sola vuelta tienen radios R y r, con $R \gg r$. Las espiras se encuentran en el mismo plano y son concéntricas. a) Muestre que la inductancia mutua del par es $M = \mu_0 \pi r^2/2R$. (*Sugerencia:* suponga que la espira más grande conduce una corriente I y calcule el flujo resultante a través de la espira más pequeña.) b) Evalúe M para $r = 2.00$ cm y $R = 20.0$ cm.

46. Sobre una tarjeta de circuito impreso, un conductor recto relativamente largo y una espira rectangular conductora se encuentran en el mismo plano, como se muestra en la figura P31.9 (página 1003). Si $h = 0.400$ mm, $w = 1.30$ mm y $L = 2.70$ mm, ¿cuál es su inductancia mutua?

47. Dos inductores que tienen autoinductancias L_1 y L_2 se conectan en paralelo, como se muestra en la figura P32.47a. La inductancia mutua entre los dos inductores es M. Determine la autoinductancia equivalente L_{eq} para el sistema (Fig. P32.47b).

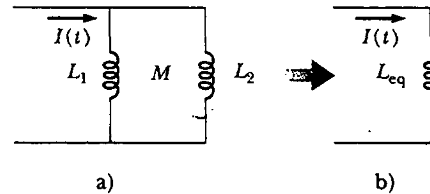


Figura P32.47

Sección 32.5 Oscilaciones en un circuito *LC*

48. Un capacitor de 1.00 μF se carga mediante un suministro eléctrico de 40.0 V. El capacitor completamente cargado se descarga después mediante un inductor de 10.0 mH. Encuentre la corriente máxima en las oscilaciones resultantes.

49. Un circuito LC se compone de un inductor de 20.0 mH y de un capacitor de 0.500 μF. Si la máxima corriente instantánea es 0.100 A. ¿cuál es la diferencia de potencial más alta en el capacitor?

50. En el circuito mostrado en la figura P32.50, $\mathcal{E} = 50.0$ V, $R = 250\ \Omega$ y $C = 0.500\ \mu$F. El interruptor S se cierra durante un largo tiempo y ningún voltaje se mide a través del capacitor. Justo después de que se abre el interruptor, el voltaje que se mide a través del capacitor alcanza un valor máximo de 150 V. ¿Cuál es la inductancia L?

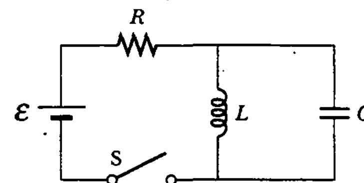


Figura P32.50

51. Una inductancia fija $L = 1.05\ \mu$H se emplea en serie con un capacitor variable en la sección de sintonización de un radio. ¿Qué capacitancia sintoniza el circuito en la señal de una estación que transmite a 6.30 MHz?

52. Calcule la inductancia de un circuito LC que oscila a 120 Hz cuando la capacitancia es 8.00 μF.

53. Un circuito LC como el de la figura 32.14 contiene un inductor de 82.0 mH y un capacitor de 17.0 μF que inicialmente conduce una carga de 180 μC. El interruptor se cierra en $t = 0$. a) Encuentre la frecuencia (en hertz) de las oscilaciones resultantes. En $t = 1.00$ ms, encuentre b) la carga en el capacitor y c) la corriente en el circuito.

54. El interruptor en la figura P32.54 se conecta a un punto a durante un largo tiempo. Después de que el interruptor se mueve al punto b, ¿cuáles son a) la frecuencia de oscilación del circuito LC, b) la carga máxima que aparece sobre el capacitor, c) la corriente máxima en el inductor y d) la energía total que posee el circuito en $t = 3.00$ s?

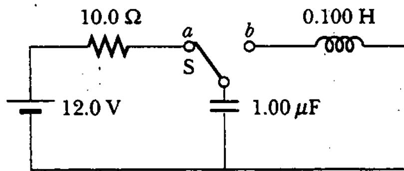


Figura P32.54

WEB 55. Un circuito LC, como el que se ilustra en la figura 32.14, está compuesto por un inductor de 3.30 H y un capacitor de 840 pF, que inicialmente tiene una carga de 105 μC. En $t = 0$ el interruptor se cierra. Calcule las siguientes cantidades en $t = 2.00$ ms: a) la energía almacenada en el capacitor, b) la energía almacenada en el inductor, y c) la energía total en el circuito.

(Opcional)
Sección 32.6 El circuito *RLC*

56. En la figura 32.19, considere $R = 7.60\ \Omega$, $L = 2.20$ mH y $C = 1.80\ \mu$F. a) Calcule la frecuencia de la oscilación amortiguada del circuito. b) ¿Cuál es la resistencia crítica?

57. Considere un circuito LC en el cual $L = 500$ mH y $C = 0.100\ \mu$F. a) ¿Cuál es la frecuencia resonante ω_0? b) Si una resistencia de 1.00 kΩ se introduce en este circuito, ¿cuál es la frecuencia de las oscilaciones (amortiguadas)? c) ¿Cuál es la diferencia porcentual entre las dos frecuencias?

58. Muestre que la ecuación 32.29 en el texto es la regla de la espira de Kirchhoff cuando se aplica a la figura 32.19.

59. Se inician oscilaciones eléctricas en un circuito en serie que contiene capacitancia C, inductancia L y resistencia R. a) Si $R \ll \sqrt{4L/C}$ (amortiguamiento débil), ¿cuánto tiempo transcurre antes de que la amplitud de la oscilación de corriente disminuya hasta 50.0% de su valor inicial? b) ¿Cuánto tiempo pasa para que la energía se reduzca a 50.0% de su valor inicial?

PROBLEMAS ADICIONALES

60. Inicialmente, el capacitor en un circuito LC en serie está cargado. Se cierra un interruptor, permitiendo que el capacitor se descargue, y t segundos después la energía almacenada en el capacitor es un cuarto de su valor inicial. Determine L si se conoce C.

61. Un inductor de 1.00 mH y un capacitor de 1.00 μF se conectan en serie. La corriente en el circuito se describe por medio de $I = 20.0t$, donde t está en segundos e I en amperes. El capacitor inicialmente no tiene carga. Determine a) el voltaje que atraviesa el inductor como una función del tiempo, b) el voltaje que pasa por el capacitor como una función del tiempo, c) el momento en que la energía almacenada en el capacitor excede por primera vez la del inductor.

62. Un inductor que tiene inductancia L y un capacitor de capacitancia C se conectan en serie. La corriente en el circuito aumenta linealmente en el tiempo como se describe por medio de $I = Kt$. El capacitor inicialmente no tiene carga. Determine a) el voltaje que atraviesa el inductor como función del tiempo, b) el voltaje que pasa por el capacitor como función del tiempo y c) el momento en que la energía almacenada en el capacitor excede por primera vez la del inductor.

63. Un capacitor en un circuito LC en serie tiene una carga inicial Q y se está descargando. Encuentre, en función de L y C, el flujo que pasa por cada una de las N vueltas en la bobina, cuando la carga sobre el capacitor es $Q/2$.

64. El toroide en la figura P32.64 consta de N vueltas y tiene una sección transversal rectangular. Sus radios interior y exterior son a y b, respectivamente. a) Muestre que

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

b) Empleando este resultado, calcule la autoinductancia de un toroide de 500 vueltas para el cual $a = 10.0$ cm, $b = 12.0$ cm y $h = 1.00$ cm. c) En el problema 14 se dedujo una fórmula aproximada para la inductancia de un toroide con $R \gg r$. Para tener una medida de la exactitud de este resultado utilice la expresión del problema 14 para calcular la inductancia aproximada del toroide descrito en el inciso b). Compare este resultado con la respuesta a la parte b).

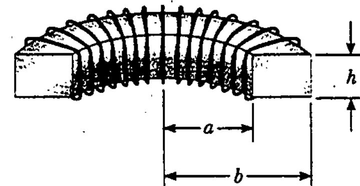


Figura P32.64

65. a) Una bobina circular plana realmente no produce un campo magnético uniforme en el área que encierra, pero estime la autoinductancia de una bobina circular plana, con radios R y N vueltas, suponiendo que el campo en su centro es uniforme sobre su área. b) Un circuito en una mesa de laboratorio consta de una batería de 1.5 V, un resistor de 270 Ω, un interruptor y, conectándolos, tres cordones de 30 cm de largo. Suponga que el circuito está dispuesto en forma circular. Considérelo como una bobina plana de una vuelta. Calcule el orden de magnitud de su autoinductancia y c) de la constante de tiempo que describe cuán rápido la corriente aumenta cuando usted cierra el interruptor.

66. Una barra de hierro blando ($\mu_m = 800\ \mu_0$) se usa como el núcleo de un solenoide. La barra tiene un diámetro de 24.0 mm y mide 10.0 cm de largo. Un pedazo de 10.0 m

de alambre de cobre de calibre 22 (diámetro = 0.644 mm) se enrolla alrededor de la barra en una sola capa uniforme, excepto en 10.0 cm de longitud en cada extremo, las cuales se van a usar para conexiones. a) ¿Cuántas vueltas de este alambre pueden enrollarse alrededor de la barra? (*Sugerencia*: el diámetro del alambre se suma al diámetro de la barra cuando se determina la circunferencia de cada vuelta. Además, el alambre forma la espiral diagonalmente a lo largo de la superficie de la barra.) b) ¿Cuál es la resistencia de este inductor? c) ¿Cuál es su inductancia?

67. Un alambre de material no magnético con radio R conduce una corriente distribuida de manera uniforme sobre su sección transversal. Si la corriente total conducida por el alambre es I, demuestre que la energía magnética por unidad de longitud dentro del alambre es $\mu_0 I^2/16\pi$.

68. Una bobina con 820 vueltas de alambre y 24.0 Ω de resistencia se coloca alrededor de un solenoide de 12 500 vueltas y 7.00 cm de largo, como se muestra en la figura P32.68. Tanto la bobina como el solenoide tienen áreas de sección transversal de 1.00×10^{-4} m². a) ¿Cuánto tarda la corriente del solenoide en alcanzar 63.2 por ciento de su valor máximo? Determine b) la fem inversa promedio producida por la autoinductancia del solenoide durante este intervalo, c) la rapidez promedio de cambio en el flujo magnético que pasa por la bobina durante este intervalo y d) la magnitud de la corriente inducida promedio en la bobina.

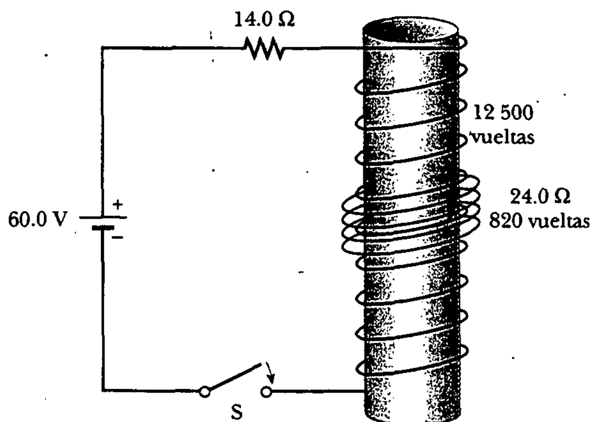


Figura P32.68

69. En $t = 0$ se cierra el interruptor en la figura P32.69. Empleando las leyes de Kirchhoff para las corrientes y voltajes instantáneos en este circuito de dos espiras, muestre que la corriente en el inductor es

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1}[1 - e^{-(R'/L)t}]$$

donde $R' = R_1 R_2/(R_1 + R_2)$.

70. En la figura P32.69 considere $\mathcal{E} = 6.00$ V, $R_1 = 5.00$ Ω y $R_2 = 1.00$ Ω. El inductor tiene resistencia despreciable. Cuando el interruptor se abre después de haber estado cerrado durante un largo tiempo, la corriente en el inductor cae a 0.250 A en 0.150 s. ¿Cuál es la inductancia del inductor?

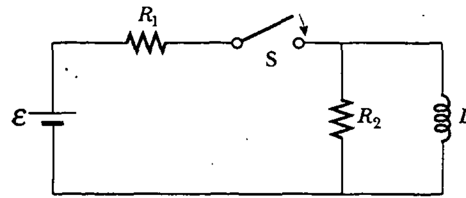


Figura P32.69 Problemas 69 y 70.

71. En la figura P32.71 el interruptor está cerrado para $t < 0$ y se establecen condiciones de estado estable. El interruptor se abre en $t = 0$. a) Encuentre el voltaje inicial $\mathcal{E}_0$ a través de L justo después de que $t = 0$. ¿Cuál extremo de la bobina está a mayor potencial: a o b? b) Realice gráficas a mano de las corrientes en R_1 y R_2 como una función del tiempo, considerando positivas las direcciones del estado estable. Muestre valores antes y después de $t = 0$. c) ¿Cuánto tiempo después de $t = 0$ la corriente en R_2 es 2.00 mA?

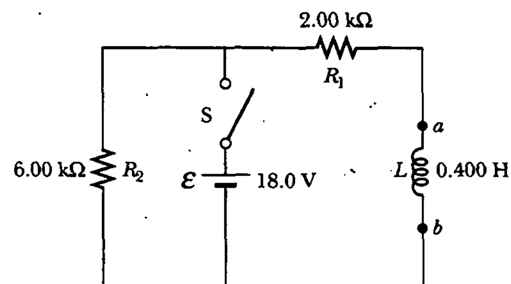


Figura P32.71

72. El interruptor en la figura P32.72 se cierra en $t = 0$. Antes de que esto suceda, el capacitor está descargado y todas las corrientes son cero. Determine las corrientes en L, C y R y las diferencias de potencial a través de L, C y R a) en el instante después de que se cierra el interruptor y b) mucho tiempo después de que se cierra.

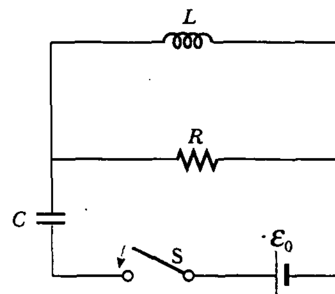


Figura P32.72

73. Para evitar daños por arqueo en un motor eléctrico, algunas veces se pone un resistor de descarga en paralelo con la armadura. Si el motor se desconecta súbitamente mientras está funcionando, este resistor limita el voltaje que aparece a través de las bobinas de la armadura. Considere un motor de cd de 12.0 V que tiene una armadura con una resistencia de 7.50 Ω y una inductancia de 450 mH. Suponga que la fem inversa en las bobinas de la armadura es 10.0 V cuando el motor está funcionando con rapidez normal. (El circuito equivalente para la armadura se muestra en la figura P32.73.) Calcule la resistencia máxima R que limita el voltaje en la armadura a 80.0 V cuando el motor está desconectado.

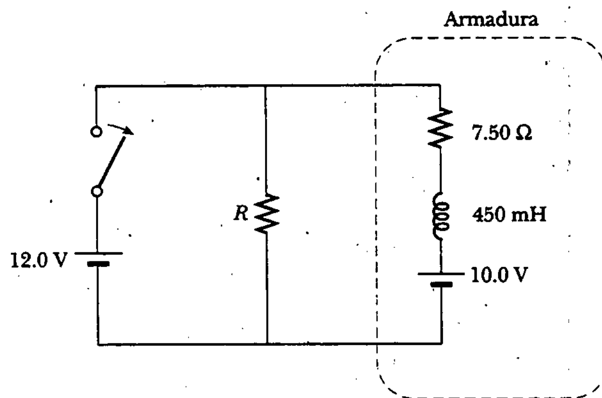


Figura P32.73

74. Un solenoide de 0.500 m de largo y núcleo de aire, contiene 1 000 vueltas y tiene un área de sección transversal de 1.00 cm². a) Si se ignoran los efectos de los extremos, ¿cuál es la autoinductancia? b) Un devanado secundario enrollado alrededor del centro del solenoide tiene 100 vueltas. ¿Cuál es la inductancia mutua? c) El devanado secundario conduce una corriente constante de 1.00 A y el solenoide está conectado a una carga de 1.00 kΩ. La corriente constante se interrumpe repentinamente. ¿Cuánta carga fluye a través del resistor de carga?

75. Los alambres de conexión de una antena de TV se construyen a menudo en la forma de dos alambres paralelos (Fig. P32.75). a) ¿Por qué esta configuración de conductores tiene una inductancia? b) ¿Qué constituye la espira de flujo en esta configuración? c) Ignorando cualquier flujo magnético dentro de los alambres, muestre que la inductancia de una longitud x de este tipo de conexión es

$$L = \frac{\mu_0 x}{\pi} \ln\left(\frac{w - a}{a}\right)$$

donde a es el radio de los alambres y w es su separación centro a centro.

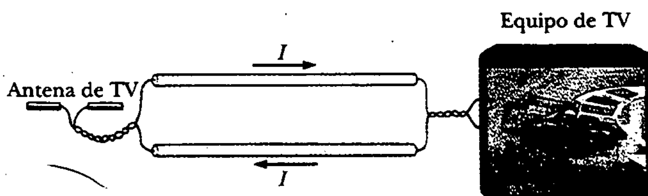


Figura P32.75

Nota: los problemas del 76 al 79 requieren la aplicación de ideas de este capítulo y de anteriores para algunas propiedades de los superconductores, los cuales fueron introducidos en la sección 27.5.

76. **Problema de repaso.** *La resistencia de un superconductor.* En un experimento realizado por S. C. Collins entre 1955 y 1958, una corriente fue mantenida en un anillo superconductor de plomo durante 2.50 años sin que se observe pérdida. Si la inductancia del anillo era de 3.14×10^{-8} H y la sensitividad del experimento fue de 1 parte en 10^9, ¿cuál fue la resistencia máxima del anillo? (*Sugerencia:* trate esto como una corriente de decaimiento en un circuito *RL*, y recuerde que $e^{-x} \cong 1 - x$ para x pequeña.)

77. **Problema de repaso.** Alguien propone un método novedoso de almacenamiento de energía eléctrica. Se construiría una enorme bobina superconductora subterránea, de 1.00 km de diámetro. Conduciría una corriente máxima de 50.0 kA a través de cada devanado de un solenoide de 150 vueltas de Nb_3Sn. a) Si la inductancia de esta enorme bobina fuese de 50.0 H, ¿cuál sería la energía total almacenada? b) ¿Cuál sería la fuerza compresiva por metro de longitud que actuaría entre dos devanados adyacentes separados 0.250 m?

78. **Problema de repaso.** *Transmisión eléctrica superconductora.* Se sugiere el uso de superconductores para la manufactura de líneas de transmisión eléctricas. Un solo cable coaxial (Fig. P32.78) podría conducir 1.00×10^3 MW (la salida de una gran planta eléctrica) a 200 kV, cd, a lo largo de una distancia de 1 000 km, sin pérdida. Un alambre interno con 2.00 cm de radio, hecho del superconductor Nb_3Sn, conduce la corriente I en una dirección. A su alrededor, un cilindro superconductor de 5.00 cm de radio conduciría la corriente inversa I. En tal sistema, ¿cuál es el campo magnético a) en la superficie del conductor interno y b) en la superficie interna del conductor externo? c) ¿Cuánta energía se almacenaría en el espacio entre los conductores en una línea superconductora de 1 000 km? d) ¿Cuál es la presión ejercida sobre el conductor externo?

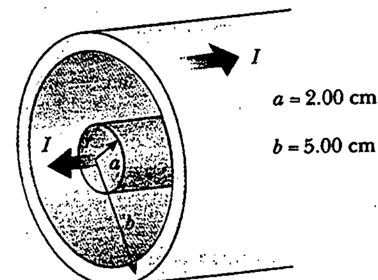


Figura P32.78

79. **Problema de repaso.** *El efecto Meissner.* Compare este problema con el problema 63 del capítulo 26 sobre la fuerza de atracción en un dieléctrico perfecto dentro de un campo eléctrico intenso. Una propiedad fundamental de un material superconductor tipo I es el *diamagnetismo perfecto*, o la demostración del *efecto Meissner*, ilustrado en la fotografía de la página 855 y de nuevo en la figura 30.34, y descrito del modo siguiente: El material superconductor tiene **B** = 0 en todo lugar dentro del mismo. Si una muestra del material se coloca dentro de un campo magnético producido externamente, o si se enfría para convertirlo en superconductor mientras está en un campo magnético, aparecen corrientes eléctricas sobre la superficie de la muestra. Las corrientes tienen precisamente la intensidad y orientación requeridas para hacer que el campo magnético total sea cero a través del interior de la muestra. El siguiente problema le ayudará a comprender la fuerza magnética que entonces puede actuar sobre la muestra superconductora.

Considere un solenoide vertical con una longitud de 120 cm y un diámetro de 2.50 cm constituido de 1 400 vueltas de alambre de cobre que conducen una corriente, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, de 2.00 A, como se muestra en la figura P32.79a. a) Encuentre el campo magnético en el vacío dentro del solenoide. b) Encuentre la densidad de energía del campo magnético y advierta que las unidades J/m^3 de la densidad de energía son las mismas que las unidades N/m^2 (= Pa) de la presión. c) Una barra superconductora de 2.20 cm de diámetro se inserta parcialmente en el solenoide. Su extremo superior está muy afuera del solenoide, donde el campo magnético es pequeño. El extremo inferior de la barra está profundamente dentro del solenoide. Identifique la dirección requerida para la corriente sobre la superficie curva de la barra, de modo que el campo magnético total sea cero en el interior de la barra. El campo creado por las supercorrientes es bosquejado en la figura P32.79b, y el campo total es bosquejado en la figura P32.79c. d) El campo del solenoide ejerce una fuerza sobre la corriente en el superconductor. Identifique la dirección de la fuerza sobre la barra. e) Calcule la magnitud de la fuerza al multiplicar la densidad de energía del campo del solenoide por el área del extremo inferior de la barra superconductora.

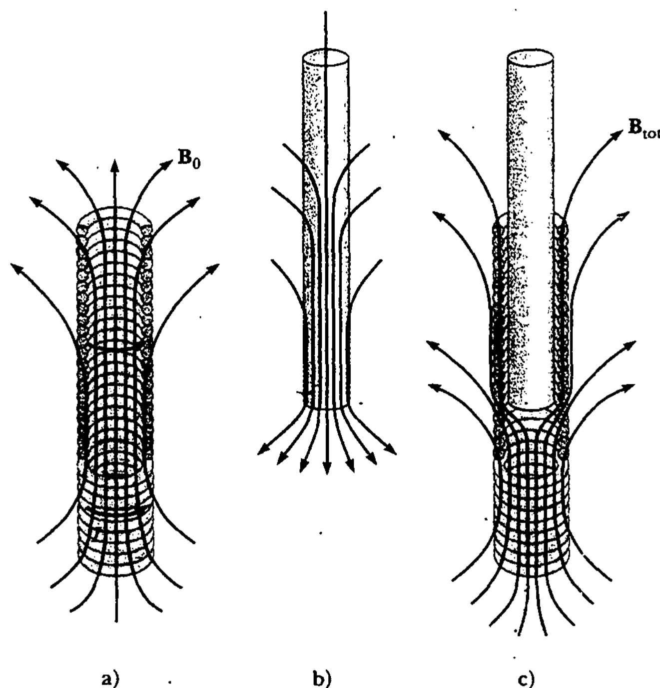


Figura P32.79

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

32.1 Cuando se está abriendo. Cuando el interruptor está inicialmente abierto, no hay corriente en el circuito; luego, cuando el interruptor se cierra, el inductor tiende a mantener la condición de no corriente, y como resultado hay muy poca oportunidad de chispa. Cuando el interruptor está cerrado al inicio, existe corriente en el circuito; entonces, cuando se abre el interruptor, la corriente disminuye. Una fem inducida se establece a través del inductor, y esta fem tiende a mantener la corriente original. La chispa puede ocurrir mientras la corriente puentea el espacio de aire entre los polos del interruptor.

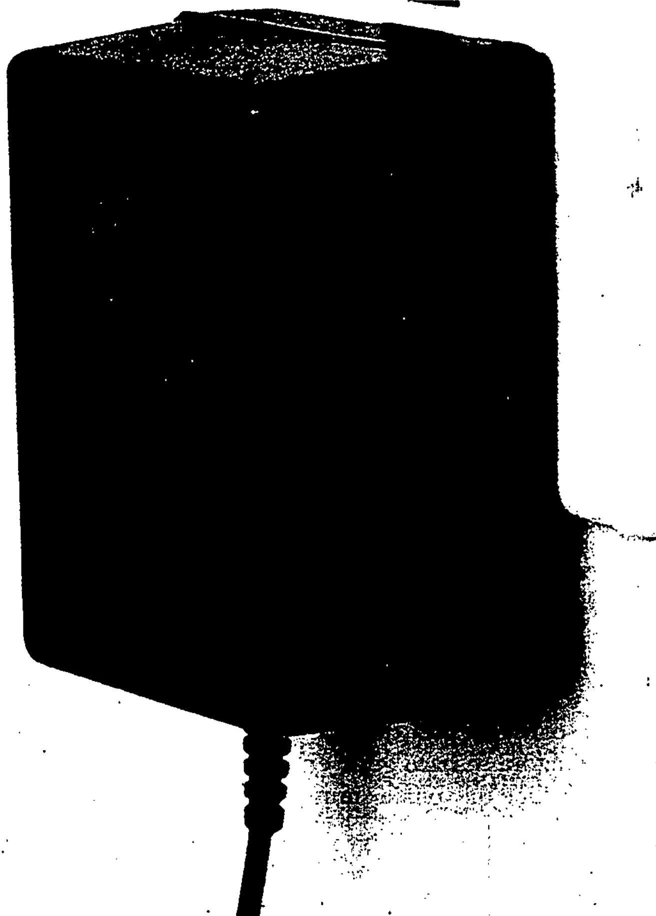
32.2 b). La figura 32.8 muestra que el circuito B tiene la mayor constante de tiempo porque en este circuito la corriente tarda más en alcanzar su valor máximo y luego más en disminuir a cero después de que se cierra el interruptor S_2. La ecuación 32.8 indica que, para resistencias iguales R_A y R_B, la condición $\tau_B > \tau_A$ significa que $L_A < L_B$.

32.3 a) M_{12} aumenta porque el flujo magnético que atraviesa la bobina 2 se incrementa. b) M_{12} disminuye porque la rotación de la bobina 1 disminuye el flujo que pasa por la bobina 2.

32.4 a) No. La inductancia mutua requiere un sistema de bobinas, y que cada bobina tenga autoinductancia. b) Sí. Una sola bobina tiene autoinductancia pero no inductancia mutua debido a que no interactúa con otras bobinas.

32.5 A partir de la ecuación 32.25, $I_{máx} = \omega Q_{máx}$. En consecuencia, la amplitud de la gráfica *I-t* es ω veces la amplitud de la gráfica *Q-t*.

32.6 La ecuación 32.31 sin el factor coseno. Las líneas discontinuas representan las amplitudes positiva y negativa (valores máximos) para cada periodo de oscilación, y es la parte $Q = Q_{máx}e^{-Rt/2L}$ de la ecuación 32.31 que proporciona el valor de la amplitud siempre en decaimiento.



ACERTIJO

Pequeñas "cajas negras" como ésta se usan comúnmente para suministrar potencia a dispositivos electrónicos, como los reproductores de discos compactos y radiograbadoras. Mientras tales dispositivos necesitan alrededor de 12 V para operar, los tomacorrientes de pared proporcionan una salida de 120 V. ¿Qué hacen las cajas negras, y cómo funcionan? *(George Semple)*

capítulo

33

Circuitos de corriente alterna

Líneas generales del capítulo

En el presente capítulo se describirán los circuitos de corriente alterna (ca). Cada vez que se enciende un aparato de televisión, un estéreo o cualquier otro de los muchos aparatos eléctricos que existen, se está haciendo uso de corrientes alternas que proporcionan la potencia necesaria para operarlos. El estudio comienza con la investigación de las características de los circuitos en serie simples que contienen resistores, inductores y capacitores, y que son activados por un voltaje sinusoidal. Se encontrará que la corriente alterna máxima en cada elemento es proporcional al voltaje alterno máximo a través de cada elemento. Se descubrirá también que cuando el voltaje aplicado es sinusoidal, la corriente en cada elemento también es sinusoidal, pero no necesariamente en fase con el voltaje aplicado. El capítulo concluye con dos secciones relacionadas con los transformadores, la transmisión de energía y los filtros *RC*.



FUENTES DE CA Y FASORES

Un circuito de ca se compone de elementos de circuito y un generador que proporciona la corriente alterna. Como recordará de la sección 31.5, el principio básico del generador de ca es una consecuencia directa de la ley de inducción de Faraday. Cuando una espira conductora se hace girar en un campo magnético a frecuencia angular constante ω, se induce un voltaje sinusoidal (fem) en la espira. Este voltaje instantáneo Δv es

$$\Delta v = \Delta V_{\text{máx}} \operatorname{sen} \omega t$$

donde $\Delta V_{\text{máx}}$ es el voltaje de salida máximo del generador de ca, o la **amplitud de voltaje.** A partir de la ecuación 13.6 la frecuencia angular es

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

donde f es la frecuencia del generador (la fuente de voltaje) y T es el periodo. El generador determina la frecuencia de la corriente en cualquier circuito conectado al generador. Ya que el voltaje de salida de un generador de ca varía sinusoidalmente con el tiempo, el voltaje es positivo durante una mitad del ciclo y negativo durante la otra mitad. Del mismo modo, la corriente en cualquier circuito operado por un generador de ca es una corriente alterna que también varía sinusoidalmente con el tiempo. Las plantas comerciales de generación eléctrica en Estados Unidos usan una frecuencia de 60 Hz, lo cual corresponde a una frecuencia angular de 377 rad/s.

El objetivo fundamental de este capítulo puede resumirse como sigue: Si un generador de ca está conectado a un circuito en serie que contiene resistores, inductores y capacitores, se quiere conocer la amplitud y el tiempo característicos de la corriente alterna. Con el propósito de simplificar el análisis de circuitos que contienen dos o más elementos, se usan construcciones gráficas conocidas como *diagramas de fasores.* En dichas construcciones, cantidades que se alternan (sinusoidales), como la corriente y el voltaje, se representan por medio de vectores rotatorios llamados **fasores.** La longitud del fasor representa la amplitud (valor máximo) de la cantidad, en tanto que la proyección del fasor sobre el eje vertical representa el valor instantáneo de esa cantidad. Como se verá, un diagrama de fasores simplifica mucho el contenido cuando se deben combinar varias corrientes que varían sinusoidalmente o voltajes que tienen diferentes fases.



RESISTORES EN UN CIRCUITO DE CA

Considere un circuito de ca simple compuesto por un resistor y un generador de ca —(~)—, como se observa en la figura 33.1. En cualquier instante la suma alge-

braica de los voltajes alrededor de una espira cerrada en un circuito debe ser cero (ecuación de la espira de Kirchhoff). Por tanto, $\Delta v - \Delta v_R = 0$, o[1]

$$\Delta v = \Delta v_R = \Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t \tag{33.1}$$

donde Δv_R es el **voltaje instantáneo a través del resistor**. Por consiguiente, la corriente instantánea en el resistor es

$$i_R = \frac{\Delta v_R}{R} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{R} \text{ sen } \omega t = I_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t \tag{33.2}$$

donde $I_{\text{máx}}$ es la corriente máxima:

$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{R}$$

Corriente máxima en un resistor

De acuerdo con las ecuaciones 33.1 y 33.2 se ve que el voltaje instantáneo a través del resistor es

$$\Delta v_R = I_{\text{máx}} R \text{ sen } \omega t \tag{33.3}$$

Analice la curva corriente-*versus*-tiempo mostrada en la figura 33.2a. En el punto *a* la corriente tiene un valor máximo en una dirección arbitrariamente denominada dirección positiva. Entre los puntos *a* y *b* la corriente está disminuyendo en magnitud pero sólo en la dirección positiva. En *b*, la corriente por un momento es cero; a continuación comienza a incrementarse en la dirección negativa entre los puntos *b* y *c*. En *c* la corriente ha alcanzado su valor máximo en la dirección negativa.

La corriente y el voltaje están llevando el paso entre sí porque ambas varían de manera idéntica con el tiempo. Ya que i_R y Δv_R varían como sen ωt y alcanzan sus valores máximos en el mismo momento, como se ve en la figura 33.2a, se dice que están **en fase**. En consecuencia, se puede decir que, para un voltaje sinusoidal aplicado, la corriente en un resistor siempre está en fase con el voltaje que atraviesa el resistor.

La corriente en un resistor está en fase con el voltaje

Un *diagrama de fasores* se usa para representar relaciones de fase corriente-voltaje. Las longitudes de las flechas corresponden a $\Delta V_{\text{máx}}$ e $I_{\text{máx}}$. Las proyecciones de las flechas del fasor sobre el eje vertical dan valores Δv_R e i_R. Como se mostró en la sección 13.5, si la flecha del fasor se supone rotando de manera estable con rapidez angular ω, su componente sobre el eje vertical oscila sinusoidalmente en el tiempo. En el caso del circuito resistivo de una sola espira de la figura 33.1, los fasores de corriente y voltaje se encuentran a lo largo de la misma línea, como en la figura 33.2b, porque i_R y Δv_R están en fase.

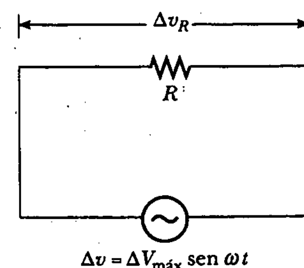


Figura 33.1 Un circuito que consta de un resistor de resistencia R conectado a un generador de ca, designado por el símbolo —(~)—.

Advierta que **el valor promedio de la corriente sobre un ciclo es cero**. Es decir, la corriente se mantiene en la dirección positiva para la misma cantidad de tiempo y en la misma magnitud mientras se mantiene en la dirección negativa. Sin embargo, la dirección de la corriente no tiene efecto en el comportamiento del resistor, lo cual puede entenderse reconociendo que los choques entre los electrones y los átomos fijos del resistor originan un aumento en la temperatura del resistor. A pesar de que el aumento de temperatura depende de la magnitud de la corriente, es independiente de la dirección de la misma.

El análisis anterior puede establecerse sobre bases cuantitativas recordando que la rapidez a la cual la energía eléctrica se convierte en energía interna en un resistor es la potencia $\mathcal{P} = i^2 R$, donde i es la corriente instantánea en el resistor. Puesto que esta rapidez es proporcional al cuadrado de la corriente, no hay diferencia si la corriente es directa o alterna —es decir, si el signo asociado con la corriente es positivo o negativo—. No obstante, el incremento de temperatura producido por una corriente alterna que tiene un valor máximo $I_{\text{máx}}$ no es el mismo que el producido

[1] Los símbolos en letra minúscula v e i se usan para indicar los valores instantáneos del voltaje y la corriente.

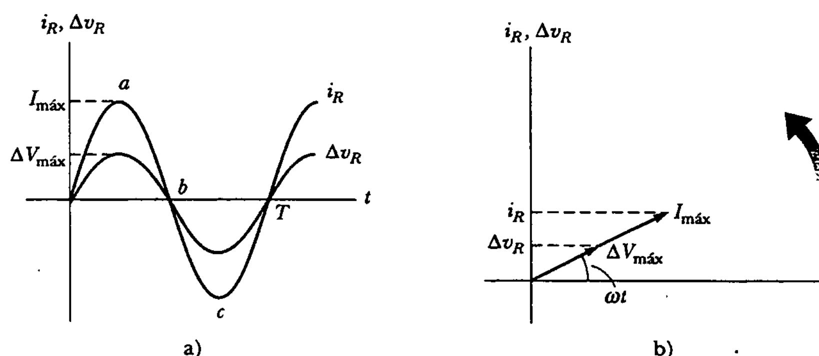


Figura 33.2 a) Gráficas de la corriente instantánea i_R y del voltaje instantáneo Δv_R a través de un resistor como funciones del tiempo. La corriente está en fase con el voltaje, lo cual significa que la corriente es cero cuando el voltaje es cero, máxima cuando el voltaje es máximo y mínima cuando el voltaje es mínimo. En el momento $t = T$ se ha completado un ciclo de la corriente y el voltaje variables en el tiempo. b) Diagrama de fasores para el circuito resistivo, el cual muestra que la corriente está en fase con el voltaje.

por una corriente directa del mismo valor, porque la corriente alterna está en su máximo valor sólo un breve instante durante cada ciclo (Fig. 33.3a). Lo que es importante en un circuito de ca es un valor promedio de corriente, referido como la **corriente rms**. Como se aprendió en la sección 21.1, la notación *rms* se refiere a las siglas en inglés de *raíz cuadrada media*, lo cual en este caso equivale a la raíz cuadrada del valor promedio del cuadrado de la corriente: $I_{rms} = \sqrt{\overline{i^2}}$. En virtud de que i^2 varía con $\text{sen}^2\omega t$, y porque el valor promedio de i^2 es $\frac{1}{2}I^2_{máx}$ (véase la Fig. 33.3b), la corriente rms es[2]

Corriente rms

$$I_{rms} = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}} = 0.707 I_{máx} \tag{33.4}$$

Dicha ecuación indica que una corriente alterna cuyo valor máximo es 2.00 A entrega a un resistor la misma potencia que una corriente directa que tenga un valor de (0.707)(2.00 A) = 1.41 A. Así, se puede decir que la potencia promedio entregada a un resistor que conduce una corriente alterna es

Potencia promedio entregada a un resistor

$$\mathcal{P}_{prom} = I^2_{rms} R$$

[2] El hecho de que la raíz cuadrada del valor promedio de i^2 sea igual a $I_{máx}/\sqrt{2}$ puede demostrarse como sigue: La corriente en el circuito varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $i = I_{máx}\,\text{sen}\,\omega t$, por lo que $i^2 = I^2_{máx}\,\text{sen}^2\omega t$. Por consiguiente, se puede encontrar el valor promedio de i^2 calculando el valor promedio de $\text{sen}^2\omega t$. Una gráfica de $\cos^2\omega t$ *versus* el tiempo es idéntica a una gráfica de $\text{sen}^2\omega t$ *versus* tiempo, excepto que los puntos están desplazados sobre el eje del tiempo. Por consiguiente, el promedio en el tiempo de $\text{sen}^2\omega t$ es igual al promedio en el tiempo de $\cos^2\omega t$ cuando se consideran uno o más ciclos completos. Es decir,

$$(\text{sen}^2\,\omega t)_{prom} = (\cos^2\,\omega t)_{prom}$$

Con ello y la identidad trigonométrica $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, se obtiene

$$(\text{sen}^2\,\omega t)_{prom} + (\cos^2\,\omega t)_{prom} = 2(\text{sen}^2\,\omega t)_{prom} = 1$$

$$(\text{sen}^2\,\omega t)_{prom} = \tfrac{1}{2}$$

Cuando tal resultado se sustituye en la expresión $i^2 = I^2_{máx}\,\text{sen}^2\omega t$, se obtiene $(i^2)_{prom} = \overline{i^2} = I^2_{rms} = I^2_{rms}/2$, o $I_{rms} = I_{máx}/\sqrt{2}$. El factor $1/\sqrt{2}$ sólo es válido para corrientes que varían sinusoidalmente. Otras formas de onda, como las variaciones como dientes de sierra, tienen factores diferentes.

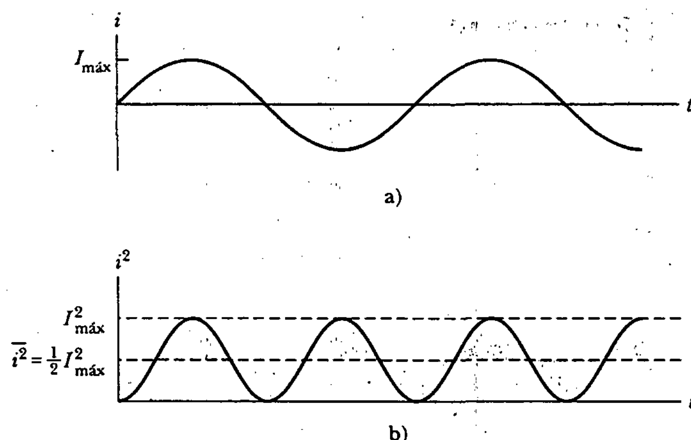


Figura 33.3 a) Gráfica de la corriente en un resistor como función del tiempo. b) Gráfica de la corriente al cuadrado en un resistor como función del tiempo. Advierta que las regiones sombreadas en gris *bajo* la curva y *sobre* la línea discontinua para $I^2_{máx}/2$ tienen la misma área que las regiones sombreadas en gris *sobre* la curva y *bajo* la línea discontinua para $I^2_{máx}/2$. En consecuencia, el valor promedio de i^2 es $I^2_{máx}/2$.

Los voltajes alternos también se analizan mejor en términos de voltajes rms, y la relación es idéntica a la de la corriente:

$$\Delta V_{rms} = \frac{\Delta V_{máx}}{\sqrt{2}} = 0.707\Delta V_{máx} \qquad \textbf{(33.5)}$$

Voltaje rms

Cuando se habla de medir un voltaje alterno de 120 V de una salida eléctrica, en realidad se hace referencia a un voltaje rms de 120 V. Un rápido cálculo utilizando la ecuación 33.5 indica que un voltaje alterno en realidad tiene un valor máximo cercano a 170 V. En este capítulo se emplean valores rms al analizar corrientes y voltajes alternos. Una razón de lo anterior es que los amperímetros y los voltímetros de ca se diseñan para leer valores rms. Además, con valores rms muchas de las ecuaciones usadas tienen la misma forma que sus contrapartes de corriente directa.

Pregunta sorpresa 33.1

¿Cuál de los siguientes enunciados puede ser cierto para un resistor conectado a un generador de ca? a) $\mathcal{P}_{prom} = 0$ e $i_{prom} = 0$; b) $\mathcal{P}_{prom} = 0$ e $i_{prom} > 0$; c) $\mathcal{P}_{prom} > 0$ e $i_{prom} = 0$; d) $\mathcal{P}_{prom} > 0$ e $i_{prom} > 0$.

EJEMPLO 33.1 ¿Qué es la corriente rms?

El voltaje de salida de un generador está dado por $\Delta v = (200\text{ V})\text{sen }\omega t$. Encuentre la corriente rms en el circuito cuando este generador se conecta a un resistor de 100 Ω.

Solución Comparando esta expresión para el voltaje de salida con la forma general $\Delta v = \Delta V_{máx}$ sen ωt, se ve que $\Delta V_{máx} = 200$ V. Así, el voltaje rms es

$$\Delta V_{rms} = \frac{\Delta V_{máx}}{\sqrt{2}} = \frac{200\text{ V}}{\sqrt{2}} = 141\text{ V}$$

En consecuencia,

$$I_{rms} = \frac{\Delta V_{rms}}{R} = \frac{141\text{ V}}{100\ \Omega} = 1.41\text{ A}$$

Ejercicio Encuentre la corriente máxima en el circuito.

Respuesta 2.00 A.

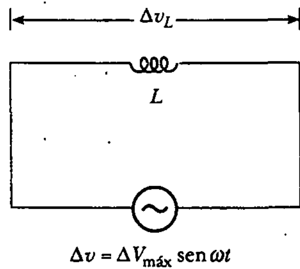


Figura 33.4 Un circuito compuesto por un inductor de inductancia L conectado a un generador de ca.



INDUCTORES EN UN CIRCUITO DE CA

Considere ahora un circuito de ca compuesto sólo por un inductor conectado a las terminales de un generador de ca, como se observa en la figura 33.4. Si $\Delta v_L = \mathcal{E}_L = -L(di/dt)$ es el voltaje instantáneo autoinducido a través del inductor (véase la Ec. 32.1), entonces la regla de la espira de Kirchhoff aplicada a este circuito produce $\Delta v + \Delta v_L = 0$, o

$$\Delta v - L\frac{di}{dt} = 0$$

Cuando se sustituye $\Delta V_{\text{máx}}$ sen ωt para Δv y se reordena se obtiene

$$L\frac{di}{dt} = \Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t \quad \textbf{(33.6)}$$

Resolviendo esta ecuación para di se encuentra que

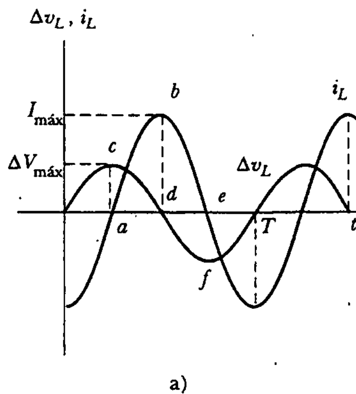
$$di = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{L} \text{ sen } \omega t \, dt$$

Integrando esta expresión[3] se obtiene la corriente instantánea en el inductor como una función del tiempo

$$i_L = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{L}\int \text{sen } \omega t \, dt = -\frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\omega L}\cos \omega t \quad \textbf{(33.7)}$$

Cuando se emplea la identidad trigonométrica $\cos \omega t = -\text{sen}(\omega t - \pi/2)$, la ecuación 33.7 se puede expresar como

$$i_L = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\omega L}\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \textbf{(33.8)}$$



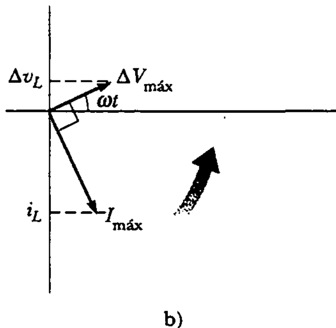


Figura 33.5 a) Gráficas de la corriente instantánea i_L y el voltaje instantáneo Δv_L a través de un inductor como funciones del tiempo. La corriente se demora hacia atrás del voltaje en 90°. b) Diagrama de fasores para el circuito inductivo en el que se muestra que la corriente deja atrás al voltaje en 90°.

Comparando este resultado con la ecuación 33.6 se ve que la corriente instantánea i_L en el inductor y el voltaje instantáneo v_L a través del inductor están fuera de fase por $(\pi/2)$ rad = 90°.

En general, los inductores en un circuito de ca producen una corriente que está fuera de fase con el voltaje de ca. Una gráfica del voltaje y la corriente *versus* tiempo se proporciona en la figura 33.5a. En el punto *a* la corriente comienza a incrementar en la dirección positiva. En este instante la rapidez de cambio de la corriente está en un máximo y, por ende, el voltaje a través del inductor también está a un máximo. Conforme la corriente aumenta entre los puntos *a* y *b*, di/dt (la pendiente de la curva de corriente) disminuye en forma gradual hasta que alcanza cero en el punto *b*. Como resultado, el voltaje a través del inductor está disminuyendo durante este mismo intervalo de tiempo, como indica el segmento de curva entre *c* y *d*. Inmediatamente después del punto *b*, la corriente empieza a disminuir, aunque todavía tiene la misma dirección que tenía durante el cuarto de ciclo anterior (desde *a* hasta *b*). Mientras la corriente disminuye a cero (de *b* a *e*), de nuevo se induce un voltaje en el inductor (*d* a *f*), pero la polaridad de este voltaje es opuesta a la del voltaje inducido entre *c* y *d* (pues las fem inversas siempre están dirigidas para oponerse al cambio en la corriente). Advierta que el voltaje alcanza su valor máximo un cuarto de un periodo antes de que la corriente llegue a su valor máximo. De este modo, se ve que

La corriente en un inductor se retrasa del voltaje por 90°

para un voltaje aplicado sinusoidal, la corriente en un inductor siempre está retrasada del voltaje a través del inductor en 90° (un cuarto de ciclo en el tiempo).

---

[3] La constante de integración se ignora aquí, puesto que depende de las condiciones iniciales, las que no son importantes en esta situación.

El diagrama de fasores para el circuito inductivo de la figura 33.4 se muestra en la figura 33.5b.

De la ecuación 33.7 se ve que la corriente en un circuito inductivo llega a sus valores máximos cuando cos $\omega t = -1$:

$$I_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\omega L} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{X_L} \quad \textbf{(33.9)}$$

Corriente máxima en un inductor

donde la cantidad X_L, denominada **reactancia inductiva,** es

$$X_L = \omega L \quad \textbf{(33.10)}$$

Reactancia inductiva

La ecuación 33.9 indica que, para un voltaje aplicado dado, la corriente máxima disminuye a medida que la reactancia inductiva aumenta. La expresión para la corriente rms en un inductor es similar a la ecuación 33.9, con I_{rms} sustituyendo a $I_{\text{máx}}$ y ΔV_{rms} reemplazando a $\Delta V_{\text{máx}}$.

La reactancia inductiva, al igual que la resistencia, tiene unidades de ohms. Sin embargo, a diferencia de la resistencia, la reactancia depende de la frecuencia, así como de las características del inductor. Observe que la reactancia de un inductor en un circuito de ca aumenta cuando crece la frecuencia de la corriente. Lo anterior se debe a que, a frecuencias más elevadas, la corriente instantánea debe cambiar más rápidamente de como lo hace a frecuencias más bajas; esto causa un aumento en la fem inducida máxima asociada con una corriente máxima dada.

Con las ecuaciones 33.6 y 33.9 se encuentra que el voltaje instantáneo a través del inductor es

$$\Delta v_L = -L\frac{di}{dt} = -\Delta V_{\text{máx}} \operatorname{sen} \omega t = -I_{\text{máx}} X_L \operatorname{sen} \omega t \quad \textbf{(33.11)}$$

EJEMPLO CONCEPTUAL

La figura 33.6 presenta un circuito compuesto de una combinación en serie de una fuente de voltaje alterno, un interruptor, un inductor y un foco. El interruptor se cierra y se deja que el circuito vuelva al equilibrio de modo que el foco brille de manera estable. Luego se inserta una barra de hierro en el interior del inductor. ¿Qué ocurre con la brillantez del foco, y por qué?

Solución El foco disminuye su luz. Conforme la barra se inserta, la inductancia aumenta debido a que el campo magnético dentro del inductor se incrementa. De acuerdo con la ecuación 33.10, este incremento en L significa que la reactancia inductiva del inductor también aumenta. El voltaje a través del inductor se incrementa mientras el voltaje que cruza el foco disminuye. Con menos voltaje a través suyo, el foco brilla de forma menos intensa. En las producciones teatrales de principios del siglo XX se utilizó dicho método para disminuir gradualmente las luces en el teatro.

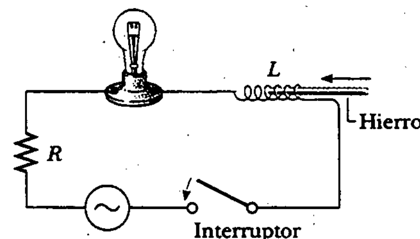


Figura 33.6

EJEMPLO Un circuito de ca puramente inductivo

En un circuito de ca puramente inductivo (véase la Fig. 33.4), $L = 25.0$ mH y el voltaje rms es de 150 V. Calcule la reactancia inductiva y la corriente rms en el circuito si la frecuencia es 60.0 Hz.

Solución La ecuación 33.10 produce

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2\pi(60.0\ \text{Hz})(25.0 \times 10^{-3}\ \text{H}) = 9.42\ \Omega$$

A partir de una versión modificada de la ecuación 33.9, la corriente rms es

$$I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{L,\text{rms}}}{X_L} = \frac{150\ \text{V}}{9.42\ \Omega} = 15.9\ \text{A}$$

Ejercicio Calcule la reactancia inductiva y la corriente rms en el circuito si la frecuencia es de 6.00 kHz.

Respuesta 942 Ω, 0.159 A.

Ejercicio Demuestre que las unidades de la reactancia inductiva en el SI son ohms.

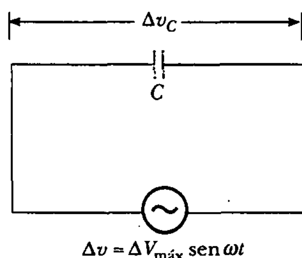


Figura 33.7 Un circuito que consta de un capacitor con capacitancia C conectado a un generador de ca.

33.4 CAPACITORES EN UN CIRCUITO DE CA

La figura 33.7 ilustra un circuito de ca compuesto por un capacitor conectado entre las terminales de un generador de ca. La regla de la espira de Kirchhoff aplicada a este circuito produce $\Delta v - \Delta v_C = 0$, o

$$\Delta v - \Delta v_C = \Delta V_{\text{máx}} \operatorname{sen} \omega t \tag{33.12}$$

donde Δv_C es el voltaje instantáneo a través del capacitor. De la definición de capacitancia se sabe que $C = q/\Delta v_C$; por tanto, la ecuación 33.12 produce

$$q = C\,\Delta V_{\text{máx}} \operatorname{sen} \omega t \tag{33.13}$$

donde q es la carga instantánea sobre el capacitor. Puesto que $i = dq/dt$, diferenciando la ecuación 33.13 se obtiene la corriente instantánea en el circuito:

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \omega C \Delta V_{\text{máx}} \cos \omega t \tag{33.14}$$

Empleando la identidad trigonométrica

$$\cos \omega t = \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

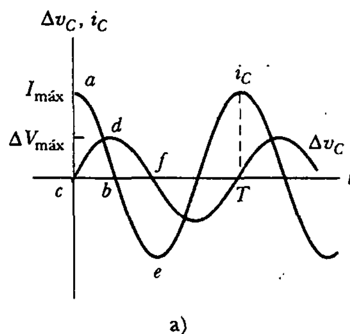
se puede expresar la ecuación 33.14 en la forma alternativa

$$i_C = \omega C \Delta V_{\text{máx}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{33.15}$$

Al comparar esta expresión con la ecuación 33.12 se ve que la corriente está $\pi/2$ rad $= 90°$ fuera de fase con el voltaje a través del capacitor. Una gráfica de la corriente y el voltaje *versus* tiempo (Fig. 33.8a) indica que la corriente alcanza su valor máximo un cuarto de ciclo más rápido de lo que el voltaje tarda en alcanzar su máximo valor.

Visto más de cerca, se ve que el segmento de la curva de corriente de a a b indica que la corriente parte desde un valor relativamente elevado, lo cual se comprende reconociendo que no existe carga sobre el capacitor en $t = 0$; en consecuencia, nada en el circuito, excepto la resistencia de los alambres, puede dificultar el flujo de carga en este instante. Sin embargo, la corriente disminuye conforme el voltaje a través del capacitor aumenta (de c a d sobre la curva de voltaje), y el capacitor se está cargando. Cuando el voltaje está en el punto d, la corriente se invierte y comienza a aumentar en la dirección opuesta (de b a e sobre la curva de corriente). Durante este tiempo, el voltaje a través del capacitor disminuye de d a f porque las placas ahora están perdiendo la carga que habían acumulado con anterioridad. Durante la segunda mitad del ciclo, la corriente inicialmente está en su valor máximo en la dirección opuesta (punto e) y a continuación disminuye conforme el voltaje a través del capacitor se acumula. El diagrama de fasores en la figura 33.8b también indica que

para un voltaje aplicado sinusoidalmente, la corriente en un capacitor siempre adelanta al voltaje en el capacitor en 90°.



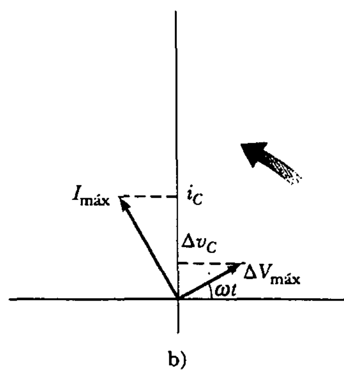


Figura 33.8 a) Gráficas de la corriente instantánea i_C y el voltaje instantáneo Δv_C a través de un capacitor como funciones del tiempo. El voltaje se retrasa respecto a la corriente en 90°. b) Diagrama de fasores para el circuito capacitivo que muestra que la corriente se adelanta al voltaje en 90°.

De acuerdo con la ecuación 33.14, se ve que la corriente en el circuito alcanza su valor máximo cuando cos $\omega t = 1$:

$$I_{\text{máx}} = \omega C \Delta V_{\text{máx}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{X_C} \quad \textbf{(33.16)}$$

donde X_C se denomina **reactancia capacitiva**:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \textbf{(33.17)}$$

Reactancia capacitiva

Advierta que la reactancia capacitiva también tiene unidades de ohms.

La corriente rms está dada por una expresión similar a la ecuación 33.16, con I_{rms} sustituyendo a $I_{\text{máx}}$ y ΔV_{rms} reemplazando a $\Delta V_{\text{máx}}$.

Al combinar las ecuaciones 33.12 y 33.16 se expresa el voltaje instantáneo a través del capacitor como

$$\Delta v_C = \Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t = I_{\text{máx}} X_C \text{ sen } \omega t \quad \textbf{(33.18)}$$

Las ecuaciones 33.16 y 33.17 indican que, a medida que la frecuencia de la fuente de voltaje aumenta, la reactancia capacitiva disminuye y, en consecuencia, la corriente máxima se incrementa. De nuevo, advierta que la frecuencia de la corriente está determinada por la frecuencia de la fuente de voltaje que opera al circuito. Mientras la frecuencia tiende a cero, la reactancia capacitiva tiende al infinito, por tanto la corriente se aproxima a cero. Lo anterior tiene sentido porque el circuito tiende a condiciones de corriente directa conforme ω se acerca a 0.

EJEMPLO 33.4 Un circuito de ca puramente capacitivo

Un capacitor de 8.00 μF se conecta a las terminales de un generador de ca de 60.0 Hz cuyo voltaje rms es 150 V. Encuentre la reactancia capacitiva y la corriente rms en el circuito.

Solución Con la ecuación 33.17, y aprovechando el hecho de que $\omega = 2\pi f = 377 \text{ s}^{-1}$, se obtiene

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(377 \text{ s}^{-1})(8.00 \times 10^{-6} \text{F})} = 332 \ \Omega$$

Por tanto, a partir de una ecuación 33.16 modificada, la corriente rms es

$$I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{X_C} = \frac{150 \text{ V}}{332 \ \Omega} = 0.452 \text{ A}$$

Ejercicio Si la frecuencia se duplica, ¿qué pasa con la reactancia capacitiva y la corriente?

Respuesta X_C se reduce a la mitad, $I_{\text{máx}}$ se duplica.



33.5 EL CIRCUITO *RLC* EN SERIE

13.7 La figura 33.9a muestra un circuito que contiene un resistor, un inductor y un capacitor conectados en serie entre las terminales de una fuente de voltaje alterno. Como antes, suponga que el voltaje aplicado varía sinusoidalmente con el tiempo. Es conveniente suponer que el voltaje aplicado instantáneo está dado por

$$\Delta v = \Delta V_{\text{máx}} \text{ sen } \omega t$$

mientras que la corriente varía como

$$i = I_{\text{máx}} \text{ sen } (\omega t - \phi)$$

Ángulo de fase ϕ

donde ϕ es el **ángulo de fase** entre la corriente y el voltaje aplicado. El objetivo es determinar ϕ e $I_{máx}$. La figura 33.9b muestra el voltaje *versus* tiempo a través de cada elemento en el circuito y sus relaciones de fase.

Con el propósito de resolver este problema se debe analizar el diagrama de fasores para este circuito. En primer lugar, advierta que, debido a que los elementos están en serie, la corriente en cualquier punto del circuito debe ser la misma en cualquier instante. Es decir, **la corriente en todos los puntos de un circuito de ca en serie tiene la misma amplitud y fase.** Por consiguiente, como se encontró en las secciones previas, el voltaje a través de cada elemento tiene diferentes amplitudes y fases, como se resume en la figura 33.10. En particular, el voltaje a través del resistor está en fase con la corriente, el voltaje a través del inductor adelanta a la corriente en 90°, y el voltaje a través del capacitor va retrasado de la corriente en 90°. Utilizando estas relaciones de fase, se pueden expresar los voltajes instantáneos a través de los tres elementos como

$$\Delta v_R = I_{máx} R \text{ sen } \omega t = \Delta V_R \text{ sen } \omega t \tag{33.19}$$

$$\Delta v_L = I_{máx} X_L \text{ sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \Delta V_L \cos \omega t \tag{33.20}$$

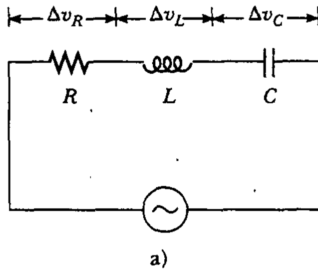
$$\Delta v_C = I_{máx} X_C \text{ sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\Delta V_C \cos \omega t \tag{33.21}$$

donde ΔV_R, ΔV_L y ΔV_C son los valores de voltaje máximo a través de los elementos:

$$\Delta V_R = I_{máx} R \qquad \Delta V_L = I_{máx} X_L \qquad \Delta V_C = I_{máx} X_C$$

En este punto se podría continuar notando que el voltaje instantáneo Δv a través de los tres elementos es igual a la suma

$$\Delta v = \Delta v_R + \Delta v_L + \Delta v_C$$



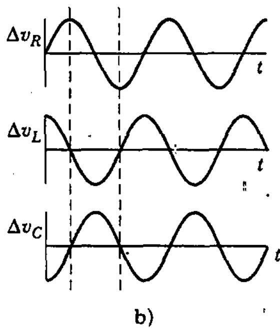


Figura 33.9 a) Un circuito en serie que consta de un resistor, un inductor y un capacitor conectado a un generador de ca. b) Relaciones de fase para los voltajes instantáneos en el circuito *RLC* en serie.

Pregunta sorpresa 33.2

Para el circuito de la figura 33.9a, ¿el voltaje de la fuente de ca es igual a a) la suma de los voltajes máximos a través de los elementos, b) la suma de los voltajes instantáneos a través de los elementos, o c) la suma de los voltajes rms a través de los elementos?

Aunque dicho enfoque analítico es correcto, es más simple obtener la suma examinando el diagrama de fasores. Porque la corriente en cualquier instante es la misma

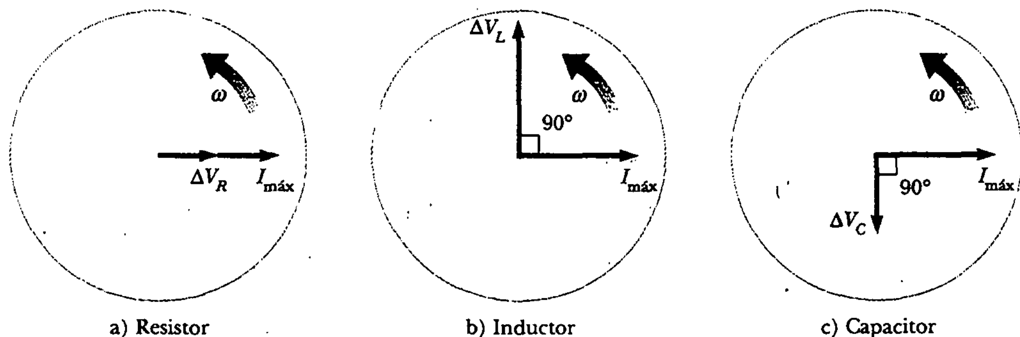


Figura 33.10 Relaciones de fase entre los fasores de voltaje y corriente para a) un resistor, b) un inductor y c) un capacitor conectados en serie.

en todos los elementos, se obtiene un diagrama de fasores del circuito. Combinamos los tres pares de fasores mostrados en la figura 33.10 para obtener la figura 33.11a, donde se usa un solo fasor $I_{máx}$ para representar la corriente en cada elemento. Para obtener la suma vectorial de los tres fasores de voltaje en la figura 33.11a se vuelve a dibujar el diagrama de fasores como en la figura 33.11b. De acuerdo con este diagrama, se ve que la suma vectorial de las amplitudes de voltaje ΔV_R, ΔV_L y ΔV_C es igual a un fasor cuya longitud es el máximo voltaje aplicado $\Delta V_{máx}$, donde el fasor $\Delta V_{máx}$ forma un ángulo ϕ con el fasor de corriente $I_{máx}$. Observe que los fasores de voltaje ΔV_L y ΔV_C están en direcciones opuestas a lo largo de la misma línea, por lo que se puede construir el fasor diferencia $\Delta V_L - \Delta V_C$, la cual es perpendicular al fasor ΔV_R. A partir de cualquiera de los triángulos rectos en la figura 33.11b se ve que

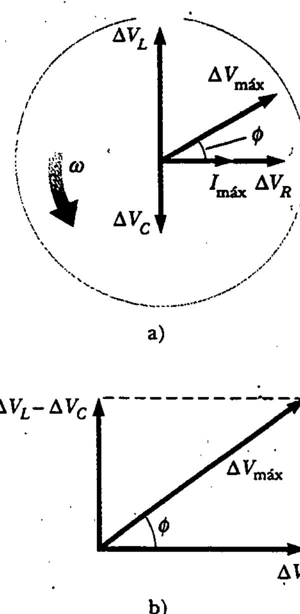


Figura 33.11 a) Diagrama de fasores para el circuito *RLC* en serie mostrado en la figura 33.9a. El fasor ΔV_R está en fase con el fasor de corriente $I_{máx}$, el fasor ΔV_L adelanta a $I_{máx}$ en 90°, y el fasor ΔV_C se retrasa de $I_{máx}$ en 90°. El voltaje total $\Delta V_{máx}$ forma un ángulo ϕ con $I_{máx}$. b) Versión simplificada del diagrama de fasores mostrado en a).

$$\Delta V_{máx} = \sqrt{\Delta V_R^2 + (\Delta V_L - \Delta V_C)^2} = \sqrt{(I_{máx}R)^2 + (I_{máx}X_L - I_{máx}X_C)^2}$$

$$\Delta V_{máx} = I_{máx}\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \textbf{(33.22)}$$

Por tanto, la corriente máxima se expresa como

$$I_{máx} = \frac{\Delta V_{máx}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

La **impedancia** Z del circuito se define como

$$Z \equiv \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \textbf{(33.23)}$$

donde la impedancia también tiene unidades de ohms. Consecuentemente, la ecuación 33.22 se escribe en la forma

$$\Delta V_{máx} = I_{máx}Z \quad \textbf{(33.24)}$$

Se puede considerar a la ecuación 33.24 como el equivalente de ca de la ecuación 27.8, la cual define la *resistencia* en un circuito de cd como la relación entre el voltaje a través de un conductor y la corriente en dicho conductor. Advierta que la impedancia, y, por tanto, la corriente, en un circuito de ca depende de la resistencia, la inductancia, la capacitancia y la frecuencia (puesto que las reactancias son dependientes de la frecuencia).

Eliminando el factor común $I_{máx}$ de cada fasor en la figura 33.11a se puede construir el *triángulo de impedancia* mostrado en la figura 33.12. A partir de estos diagramas de fasores se encuentra que el ángulo de fase ϕ entre la corriente y el voltaje es

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \quad \textbf{(33.25)}$$

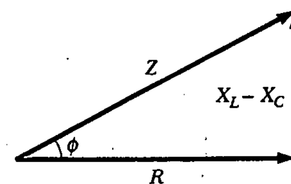


Figura 33.12 Un triángulo de impedancia para un circuito *RLC* en serie proporciona la relación $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$.

Además, a partir de la figura 33.12, se ve que $\cos\phi = R/Z$. Cuando $X_L > X_C$ (lo cual ocurre a elevadas frecuencias), el ángulo de fase es positivo, lo cual significa que la corriente está retrasada del voltaje aplicado, como se observa en la figura 33.11a. Cuando $X_L < X_C$, el ángulo de fase es negativo, lo que significa que la corriente adelanta al voltaje aplicado. Cuando $X_L = X_C$, el ángulo de fase es cero. Aquí la impedancia es igual a la resistencia y la corriente tiene su máximo valor, dado por $\Delta V_{máx}/R$. La frecuencia a la cual ocurre esto recibe el nombre de *frecuencia de resonancia* y se describe con mayor detalle en la sección 33.7.

La tabla 33.1 proporciona valores de impedancia y ángulos de fase para diversos circuitos en serie que contienen distintas combinaciones de elementos.

TABLA 33.1 Valores de impedancia y ángulos de fase para varias combinaciones de elementos de circuito[a]

Elementos de circuito	Impedancia Z	Ángulo de fase ϕ
R	$R0°$	0°
C	X_C	−90°
L	X_L	+90°
R C	$\sqrt{R^2 + X_C^2}$	Negativo, entre −90° y 0°
R L	$\sqrt{R^2 + X_L^2}$	Positivo, entre 0° y 90°
R L C	$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	Negativo si $X_C > X_L$ Positivo si $X_C < X_L$

[a] En cada caso un voltaje de ca (no mostrado) se aplica a través de los elementos.

Pregunta sorpresa 33.3

Marque cada parte de la figura 33.13 como $X_L > X_C$, $X_L = X_C$ o $X_L < X_C$.

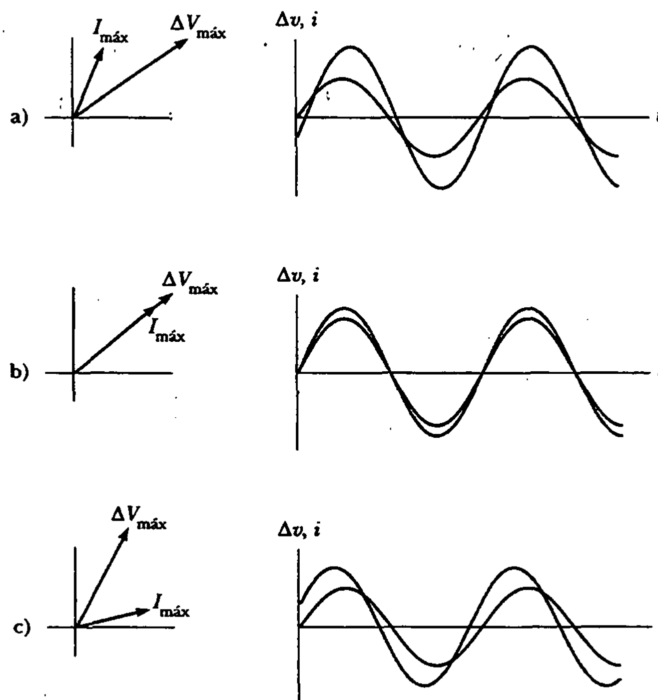


Figura 33.13

EJEMPLO 33.5 Determinación de L a partir de un diagrama de fasores

En un circuito *RLC* en serie, el voltaje aplicado tiene un valor máximo de 120 V y oscila a una frecuencia de 60.0 Hz. El circuito contiene un inductor cuya inductancia puede variarse, un resistor de 200 Ω y un capacitor de 4.00 μF. ¿Qué va-

lor de L debería elegir un ingeniero que analizara el circuito de modo que el voltaje a través del capacitor esté retrasado del voltaje aplicado en 30.0°?

Solución Las relaciones de fase para las caídas de voltaje a través de los elementos se presentan en la figura 33.14. De acuerdo con la figura, se ve que el ángulo de fase es $\phi = -60.0°$, lo cual se debe a que los fasores que representan a $I_{máx}$ y a ΔV_R están en la misma dirección (se encuentran en fase). En la ecuación 33.25 se encuentra que

$$X_L = X_C + R \tan \phi$$

La sustitución de las ecuaciones 33.10 y 33.17 (con $\omega = 2\pi f$) en esta expresión produce

$$2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C} + R \tan \phi$$

$$L = \frac{1}{2\pi f}\left[\frac{1}{2\pi f C} + R \tan \phi\right]$$

La sustitución de los valores dados en la ecuación produce $L = 0.84$ *H*.

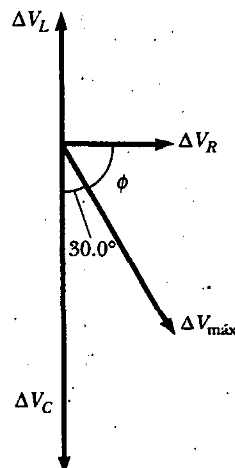


Figura 33.14

EJEMPLO 33. **Análisis de un circuito *RLC* en serie**

Un circuito *RLC* de ca en serie tiene $R = 425\ \Omega$, $L = 1.25$ H, $C = 3.50\ \mu$F, $\omega = 377\ s^{-1}$ y $\Delta V_{máx} = 150$ V. a) Determine la reactancia inductiva, la reactancia capacitiva y la impedancia del circuito.

Solución Las reactancias son $X_L = \omega L = 471\ \Omega$ y $X_C = 1/\omega C = 758\ \Omega$. La impedancia es

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$= \sqrt{(425\ \Omega)^2 + (471\ \Omega - 758\ \Omega)^2} = 513\ \Omega$$

b) Encuentre la corriente máxima en el circuito.

Solución

$$I_{máx} = \frac{V_{máx}}{Z} = \frac{150\ \text{V}}{513\ \Omega} = 0.292\ \text{A}$$

c) Encuentre el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje.

Solución

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{471\ \Omega - 758\ \Omega}{425\ \Omega}\right)$$

$$= -34.0°$$

Puesto que el circuito es más capacitivo que inductivo, ϕ es negativo y la corriente adelanta al voltaje aplicado.

d) Encuentre tanto el voltaje máximo como el voltaje instantáneo a través de cada elemento.

Solución Los voltajes máximos son

$$\Delta V_R = I_{máx} R = (0.292\ \text{A})\ (425\ \Omega) = 124\ \text{V}$$

$$\Delta V_L = I_{máx} X_L = (0.292\ \text{A})\ (471\ \Omega) = 138\ \text{V}$$

$$\Delta V_C = I_{máx} X_C = (0.292\ \text{A})\ (458\ \Omega) = 221\ \text{V}$$

Usando las ecuaciones 33.19, 33.20 y 33.21, se encuentra que los voltajes instantáneos a través de los tres elementos pueden escribirse como

$$\Delta v_R = (214\ \text{V})\ \text{sen}\ 377t$$

$$\Delta v_L = (138\ \text{V})\ \cos 377t$$

$$\Delta v_C = (-221\ \text{V})\ \cos 377t$$

Comentarios La suma de los voltajes máximos a través de cada elemento es $\Delta V_R + \Delta V_L + \Delta V_C = 483$. Advierta que esta suma es mucho más grande que el voltaje máximo del generador, 150 V. Como se vio en la pregunta sorpresa 33.2, la suma de los voltajes máximos es una cantidad insignificante, porque cuando se suman cantidades que varían sinusoidalmente, *tanto sus amplitudes como sus fases* deben tomarse en cuenta. Se sabe que los voltajes máximos a través de varios elementos ocurren en diferentes tiempos. Lo anterior significa

que los voltajes deben sumarse de manera tal que se tomen en cuenta las diferencias de fase. Cuando así ocurre, se satisface la ecuación 33.22. Usted debe tratar de verificar el resultado.

Ejercicio Construya un diagrama de fasores a escala, mostrando los voltajes a través de los elementos y el voltaje aplicado. A partir de su diagrama verifique que el ángulo de fase es de −34.0°.



POTENCIA EN UN CIRCUITO DE CA

No hay pérdidas de potencia asociadas con capacitores puros e inductores puros en un circuito de ca. Para ver por qué esto es cierto, primero analice la potencia en un circuito de ca que sólo contiene un generador y un capacitor.

Cuando la corriente comienza a aumentar en una dirección en un circuito de ca, la carga empieza a acumularse en el capacitor y aparece una caída de voltaje a través de él. Cuando esta caída de voltaje alcanza su valor máximo, la energía almacenada en el capacitor es $\frac{1}{2}C(\Delta V_{\text{máx}})^2$. Sin embargo, este almacenamiento de energía sólo es momentáneo. El capacitor se carga y descarga dos veces durante cada ciclo. La carga se entrega al capacitor durante dos cuartos de ciclo y se regresa a la fuente de voltaje durante los dos cuartos restantes. Por tanto, **la potencia promedio suministrada por la fuente es cero.** En otras palabras, **en un capacitor en un circuito de ca no ocurren pérdidas de potencia.**

De manera similar, la fuente de voltaje debe realizar trabajo contra la fem inversa del inductor. Cuando la corriente alcanza su valor máximo, la energía almacenada en el inductor es un máximo y está dada por $\frac{1}{2}LI^2_{\text{máx}}$. Cuando la corriente empieza a disminuir en el circuito, tal energía almacenada se devuelve a la fuente cuando el inductor intenta mantener la corriente en el circuito.

En el ejemplo 28.1 se encontró que la potencia entregada por una batería a un circuito de cd es igual al producto de la corriente y la fem de la batería. Del mismo modo, la potencia instantánea entregada por un generador de ca a un circuito es el producto de la corriente del generador y el voltaje aplicado. Para el circuito *RLC* que se muestra en la figura 33.9a la potencia instantánea $\mathcal{P}$ se expresa como

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = i\Delta v &= I_{\text{máx}} \operatorname{sen} (\omega t - \phi)\, \Delta V_{\text{máx}} \operatorname{sen} \omega t \\ &= I_{\text{máx}}\, \Delta V_{\text{máx}} \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t - \phi)\end{aligned} \tag{33.26}$$

Es claro que el resultado es una complicada función del tiempo y, por tanto, no es muy útil desde un punto de vista práctico. Lo que en general es más interesante es la potencia promedio sobre uno o más ciclos. Un promedio de este tipo puede calcularse usando primero la identidad trigonométrica $(\omega t - \phi) = \operatorname{sen} \omega t \cos \phi - \cos \omega t \operatorname{sen} \phi$. Sustituyendo esto en la ecuación 33.26 se obtiene

$$\mathcal{P} = I_{\text{máx}}\, \Delta V_{\text{máx}} \operatorname{sen}^2 \omega t \cos \phi - I_{\text{máx}}\, \Delta V_{\text{máx}} \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t \operatorname{sen} \phi \tag{33.27}$$

Después de ello tome el promedio en el tiempo de $\mathcal{P}$ a lo largo de uno o más ciclos, notando que $I_{\text{máx}}$, $\Delta V_{\text{máx}}$, ϕ y ω son todos constantes. El promedio en el tiempo del primer término de la derecha de la ecuación 33.27 incluye al valor promedio de $\operatorname{sen}^2 \omega t$, el cual es $\frac{1}{2}$ (como se indica en la nota a pie de página número 2). El promedio en el tiempo del segundo término a la derecha también es cero porque $\operatorname{sen} \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\omega t$, y el valor promedio de $\operatorname{sen} 2\omega t$ es cero. En consecuencia, se puede expresar la **potencia promedio** $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ como

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \tfrac{1}{2} I_{\text{máx}}\, \Delta V_{\text{máx}} \cos \phi \tag{33.28}$$

Es conveniente expresar la potencia promedio en términos de la corriente rms y el voltaje rms definidos por las ecuaciones 33.4 y 33.5:

$$\mathcal{P}_{\text{promec}} = I_{\text{rms}}\, \Delta V_{\text{rms}} \cos \phi \tag{33.29}$$

donde la cantidad $\cos\phi$ se denomina **factor de potencia**. Al estudiar la figura 33.11b se ve que la caída de voltaje máxima a través del resistor está dada por $\Delta V_R = \Delta V_{\text{máx}} \cos\phi = I_{\text{máx}}R$. Empleando la ecuación 33.5 y el hecho de que $\cos\phi = I_{\text{máx}}R/\Delta V_{\text{máx}}$, se encuentra que $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ puede expresarse como

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}\,\Delta V_{\text{rms}} \cos f = I_{\text{rms}}\left(\frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}}\right)\frac{I_{\text{máx}}}{\Delta V_{\text{máx}}} = I_{\text{rms}}\,\frac{I_{\text{máx}}R}{\sqrt{2}}$$

Después de realizar la sustitución $I_{\text{máx}} = \sqrt{2}\,I_{\text{rms}}$ de la ecuación 33.4 se tiene

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I^2_{\text{rms}}\,R \qquad \textbf{(33.30)}$$

Potencia promedio entregada a un circuito *RLC*

En otras palabras, **la potencia promedio entregada por el generador se convierte en energía interna en el resistor**, igual que en el caso de un circuito de cd. **No hay pérdida de potencia en un inductor o capacitor ideal.** Cuando la carga es puramente resistiva, entonces $\phi = 0$, $\cos\phi = 1$, y en la ecuación 33.29 se ve que

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}\,\Delta V_{\text{rms}}$$

La ecuación 33.29 indica que la potencia entregada por una fuente de ca a cualquier circuito depende de la fase, y este resultado tiene muchas aplicaciones interesantes. Por ejemplo, una fábrica que utiliza grandes motores en las máquinas, generadores o transformadores, tiene una gran carga inductiva (debido a todos los bobinados). Para entregar potencias más grandes a tales dispositivos en la fábrica sin hacer uso excesivo de enormes voltajes, los técnicos introducen capacitancia en los circuitos para cambiar la fase.

EJEMPLO **Potencia promedio en un circuito *RLC* en serie**

Calcule la potencia promedio entregada al circuito *RLC* en serie descrito en el ejemplo 33.6.

Solución Primero calcule el voltaje rms y la corriente rms usando los valores de $\Delta V_{\text{máx}}$ e $I_{\text{máx}}$ del ejemplo 33.6:

$$\Delta V_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = \frac{150\text{ V}}{\sqrt{2}} = 106\text{ V}$$

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = \frac{0.292\text{ A}}{\sqrt{2}} = 0.206\text{ A}$$

Puesto que $\phi = -34.0°$, el factor de potencia, $\cos\phi$, es 0.829; por tanto, la potencia promedio entregada es

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}\,\Delta V_{\text{rms}}\cos\phi = (0.206\text{ A})(106\text{ V})(0.829) = 18.1\text{ W}$$

El mismo resultado puede obtenerse empleando la ecuación 33.30.

RESONANCIA EN UN CIRCUITO *RLC* EN SERIE

Se dice que un circuito *RLC* en serie está **en resonancia** cuando la corriente tiene su
13.7 valor máximo. En general, la corriente rms puede escribirse

$$I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{Z} \qquad \textbf{(33.31)}$$

donde Z es la impedancia. Sustituyendo la expresión para Z proporcionada por la ecuación 33.23 en la 33.31 se obtiene

$$I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \qquad \textbf{(33.32)}$$

Ya que la impedancia depende de la frecuencia de la fuente, la corriente en el circuito *RLC* depende también de la frecuencia. La frecuencia ω_0 en la cual $X_L - X_C = 0$ se denomina **frecuencia de resonancia** del circuito. Para encontrar ω_0 use la condición $X_L = X_C$, a partir de la cual se obtiene $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$, o

Frecuencia de resonancia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \textbf{(33.33)}$$

Observe que esta frecuencia corresponde también a la frecuencia natural de oscilación de un circuito *LC* (véase la sección 32.5). Por consiguiente, la corriente en un circuito *RLC* en serie alcanza su valor máximo cuando la frecuencia del voltaje aplicado se iguala a la frecuencia natural del oscilador —la cual depende sólo de *L* y *C*—. Además, a esta frecuencia la corriente está en fase con el voltaje aplicado.

Pregunta sorpresa 33.4

¿Cuál es la impedancia de un circuito *RLC* en serie en resonancia? ¿Cuál es la corriente en el circuito en resonancia?

En la figura 33.15a se muestra una gráfica de la corriente rms *versus* la frecuencia para un circuito *RLC* en serie. Los datos suponen una constante $\Delta V_{rms} = 5.0$ mV, que $L = 5.0\ \mu$H y que $C = 2.0$ nF. Las tres curvas corresponden a tres valores de *R*. Advierta que en cada caso la corriente alcanza su valor máximo en la frecuencia resonante ω_0. Además, las curvas se vuelven más estrechas y altas a medida que disminuye la resistencia.

Al estudiar la ecuación 33.32 debe concluirse que, cuando $R = 0$, la corriente se volvería infinita en la resonancia. Aunque la ecuación predice esto, los circuitos reales siempre tienen cierta resistencia, lo cual limita el valor de la corriente.

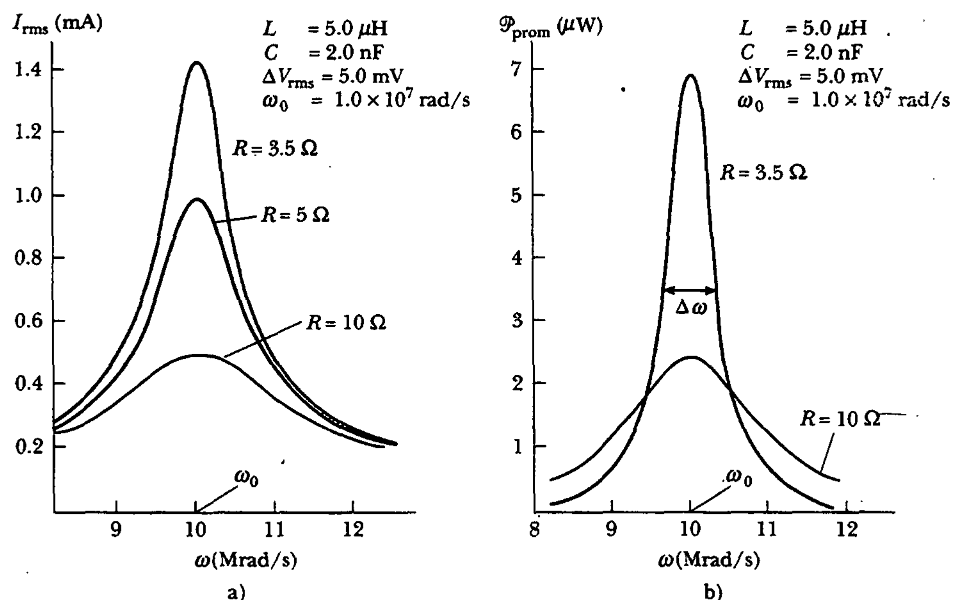


Figura 33.15 a) Corriente rms *versus* frecuencia para un circuito *RLC* en serie, para tres valores de *R*. La corriente alcanza su valor máximo en la frecuencia de resonancia ω_0. b) Potencia promedio contra frecuencia para el circuito *RLC* en serie, para dos valores de *R*.

También es interesante calcular la potencia promedio como una función de la frecuencia para un circuito *RLC* en serie. Empleando las ecuaciones 33.30, 33.31 y 33.23 se encuentra que

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I^2_{\text{rms}}R = \frac{(\Delta V_{\text{rms}})^2}{Z^2}R = \frac{(\Delta V_{\text{rms}})^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad \textbf{(33.34)}$$

Puesto que $X_L = \omega L$; $X_C = 1/\omega C$ y $\omega_0^2 = 1/LC$, el término $(X_L - X_C)^2$ puede expresarse como

$$(X_L - X_C)^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = \frac{L^2}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2$$

Empleando dicho resultado en la ecuación 33.34 se obtiene

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = \frac{(\Delta V_{\text{rms}})^2 R\omega^2}{R^2\omega^2 + L^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \qquad \textbf{(33.35)}$$

Potencia promedio como función de la frecuencia en un circuito *RLC*

Esta expresión muestra que en la resonancia, cuando $\omega = \omega_0$, **la potencia promedio es un máximo** y tiene el valor $(\Delta V_{\text{rms}})^2/R$. En la figura 33.15b se presenta una gráfica de la potencia promedio *versus* la frecuencia para dos valores de R en un circuito *RLC* en serie. A medida que la resistencia se hace más pequeña, la curva se vuelve más afilada en la vecindad de la frecuencia de resonancia. Lo pronunciado de la curva suele describirse mediante un parámetro adimensional conocido como **factor de calidad**, denotado por $\mathcal{Q}$:[4]

$$\mathcal{Q} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Factor de calidad

donde $\Delta\omega$ es el ancho de la curva medido entre los dos valores de ω para los cuales $\mathcal{P}_{\text{prom}}$ tiene la mitad de su valor máximo, llamados *puntos de media potencia* (véase la figura 33.15b). Se deja como un problema (problema 70) mostrar que el ancho de los puntos de media potencia tienen el valor $\Delta\omega = R/L$, por lo que

$$\mathcal{Q} = \frac{\omega_0 L}{R} \qquad \textbf{(33.36)}$$

Experimento sorpresa

Sintonice un radio en su estación favorita. ¿Puede usted determinar cuál debe ser el producto de *LC* para el circuito de sintonía del radio?

Las curvas graficadas en la figura 33.16 muestran que un circuito de alta $\mathcal{Q}$ responde sólo a un intervalo muy estrecho de frecuencias, en tanto que un circuito de baja $\mathcal{Q}$ detecta un intervalo de frecuencias mucho más amplio. Los valores característicos de $\mathcal{Q}$ en circuitos electrónicos varían de 10 a 100.

El circuito receptor de un radio es una aplicación importante de un circuito resonante. El radio se sintoniza en una estación particular (la cual transmite una señal u onda electromagnética específica) variando un capacitor, lo que cambia la frecuencia resonante del circuito receptor. Cuando la frecuencia de resonancia del circuito iguala a la de la onda electromagnética entrante, la corriente en el circuito receptor aumenta. Esta señal, provocada por la onda de ingreso, después se amplifica y alimenta a un altavoz. En vista de que muchas señales a menudo se presentan en un intervalo de frecuencias, es importante diseñar un circuito de alta $\mathcal{Q}$ para eliminar señales indeseables. Así, las estaciones cuyas frecuencias son cercanas pero no iguales a la frecuencia de resonancia proporcionan en el receptor señales despreciablemente pequeñas comparadas con la señal que iguala a la frecuencia de resonancia.

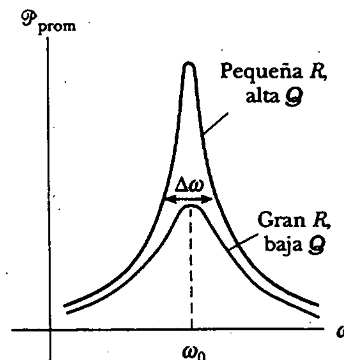


Figura 33.16 Potencia promedio *versus* frecuencia para un circuito *RLC* en serie. El ancho $\Delta\omega$ de cada curva se mide entre los dos puntos donde la potencia es la mitad de su valor máximo. La potencia es un máximo en la frecuencia de resonancia ω_0.

[4] El factor de calidad se define también como la razón $2\pi E/\Delta E$, donde E es la energía almacenada en el sistema oscilante y ΔE es la energía perdida por ciclo de oscilación. El factor de calidad para un sistema mecánico también se puede definir, como se hizo notar en la sección 13.7.

Pregunta sorpresa 33.5

El detector de metales de un aeropuerto (Fig. 33.17) es, en esencia, un circuito resonante. El portal por el que usted atraviesa es un inductor (una gran espira de alambre conductor) que es parte del circuito. La frecuencia del circuito se sintoniza a la frecuencia de resonancia del circuito cuando no hay metal en el inductor. Cualquier metal sobre su cuerpo aumenta la inductancia efectiva de la espira y cambia la corriente en ella. Si usted quisiera que el detector fuese capaz de detectar un pequeño objeto metálico, ¿el circuito debería tener un alto factor de calidad o uno bajo?



Figura 33.17 Cuando usted pasa por un detector de metales, usted se vuelve parte de un circuito resonante. Conforme usted atraviesa el detector, la inductancia del circuito cambia y, consecuentemente, la corriente también cambia. *(Terry Qing/FPG International)*

EJEMPLO — Un circuito *RLC* en serie resonante

Considere un circuito *RLC* en serie para el cual $R = 150\ \Omega$, $L = 20.0$ mH, $\Delta V_{rms} = 20.0$ V y $\omega = 5\,000\ s^{-1}$. Determine el valor de la capacitancia para la cual la corriente es un máximo.

Solución La corriente tiene su valor máximo en la frecuencia de resonancia ω_0, la cual debe establecerse para igualar a la frecuencia "excitadora" de $5\,000\ s^{-1}$:

$$\omega_0 = 5.00 \times 10^3 s^{-1} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(25.0 \times 10^6 s^{-2})(20.0 \times 10^{-3} H)}$$

$$= 2.00\ \mu F$$

Ejercicio Calcule el valor máximo de la corriente rms en el circuito a medida que varía la frecuencia.

Respuesta 0.133 A.

EL TRANSFORMADOR Y LA TRANSMISIÓN DE ENERGÍA

Cuando la energía eléctrica se transmite a grandes distancias, es económico emplear un alto voltaje y una baja corriente para minimizar las pérdidas I^2R en las líneas de transmisión. Por esta razón son comunes las líneas de 350 kV y en muchas áreas se

encuentran en construcción líneas de voltaje incluso más alto (765 kV). En el extremo de recepción de este tipo de líneas el consumidor requiere energía a bajo voltaje (por seguridad y eficiencia en el diseño). Por consiguiente, se requiere un dispositivo que pueda cambiar el voltaje alterno y la corriente sin producir cambios apreciables en la potencia entregada. El transformador de ca es el dispositivo que se emplea para este propósito.

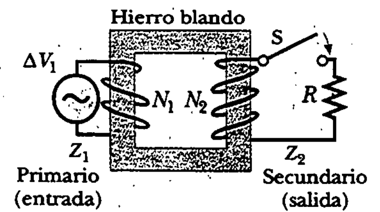


Figura 33.18 Un transformador ideal consta de dos bobinas devanadas sobre el mismo núcleo de hierro. Un voltaje alterno ΔV_1 se aplica a la bobina primaria, y el voltaje de salida ΔV_2 está a través del resistor de resistencia R.

En su forma más simple, el **transformador de ca** se compone de dos bobinas de alambre devanadas alrededor de un núcleo de hierro, como se ilustra en la figura 33.18. La bobina de la izquierda, la cual se conecta a la fuente de voltaje alterno de entrada, tiene N_1 vueltas y se denomina *devanado primario* (o el *primario*). La bobina de la derecha, compuesta por N_2 vueltas y conectada a un resistor de carga R, se denomina *devanado secundario* (o el *secundario*). El propósito del núcleo de hierro es aumentar el flujo magnético que pasa por la bobina y proporcionar un medio en el cual casi todo el flujo que pase por una bobina lo haga a través de la otra. Las pérdidas por corrientes parásitas se reducen empleando un núcleo laminado. El hierro se utiliza como el material del núcleo, puesto que es una sustancia ferromagnética blanda y, por tanto, reduce pérdidas por histéresis. La transformación de energía en energía interna en la resistencia finita de los alambres de la bobina suele ser bastante pequeña. Los transformadores comunes tienen eficiencias de potencias que varían de 90 a 99%. En el análisis siguiente se supone un *transformador ideal*, en el cual las pérdidas de energía en el devanado y el núcleo son cero.

Primero, considere lo que ocurre en el circuito primario cuando el interruptor en el circuito secundario se abre. Si se supone que la resistencia del primario es despreciable respecto de su reactancia inductiva, entonces el circuito primario es equivalente a un circuito simple compuesto por un inductor conectado a un generador de ca. Puesto que la corriente está 90° fuera de fase respecto del voltaje, el factor de potencia cos ϕ es cero, por consiguiente, la potencia promedio entregada del generador al circuito primario es cero. La ley de Faraday indica que el voltaje ΔV_1 a través del primario es

$$\Delta V_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(33.37)}$$

donde Φ_B es el flujo magnético que pasa por cada vuelta. Si se supone que todas las líneas de campo permanecen dentro del núcleo de hierro, entonces el flujo que atraviesa cada vuelta del primario es igual al flujo que pasa por cada vuelta del secundario. Por consiguiente, el voltaje a través del secundario es

$$\Delta V_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(33.38)}$$

Al resolver la ecuación 33.37 para $d\Phi_B/dt$, y sustituir el resultado en la ecuación 33.38, se encuentra que

$$\Delta V_2 = \frac{N_2}{N_1} \Delta V_1 \qquad \textbf{(33.39)}$$

Cuando $N_2 > N_1$, el voltaje de salida ΔV_2 excede al voltaje de entrada ΔV_1. Tal configuración se conoce como un *transformador elevador*. Cuando $N_2 < N_1$, el voltaje de salida es menor que el voltaje de entrada, y se tiene un *transformador reductor*.

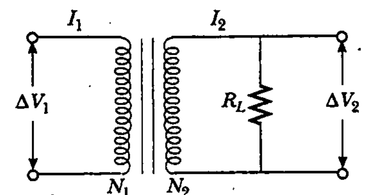


Figura 33.19 Diagrama de circuito para un transformador.

Cuando se cierra el interruptor en el circuito secundario, en éste se induce una corriente I_2. Si la carga en el circuito secundario es una resistencia pura, la corriente inducida está en fase con el voltaje inducido. La potencia suministrada al circuito secundario debe ser proporcionada por el generador de ca conectado al circuito primario, como se muestra en la figura 33.19. En un transformador ideal, donde no

existen pérdidas, la potencia $I_1 \Delta V_1$ suministrada por el generador es igual a la potencia $I_2 \Delta V_2$ en el circuito secundario. Esto es

$$I_1 \Delta V_1 = I_2 \Delta V_2 \tag{33.40}$$

El valor de la resistencia de carga R_L determina el valor de la corriente secundaria, puesto que $I_2 = \Delta V_2 / R_L$. Además, la corriente en el primario es $I_1 = \Delta V_1 / R_{eq}$, donde

$$R_{eq} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_L \tag{33.41}$$

es la resistencia equivalente de la resistencia de carga cuando se ve desde el lado primario. A partir de este análisis se ve que un transformador puede emplearse para igualar resistencias entre el circuito primario y la carga. De este modo, la transferencia de potencia máxima puede lograrse entre una fuente de potencia dada y la resistencia de carga. Por ejemplo, un transformador conectado entre la salida de 1 kΩ de un amplificador de audio y una bocina de 8 Ω asegura que sea transferida a la bocina tanta señal de audio como sea posible. En terminología de estéreo, a esto se le llama *acoplamiento de impedancia*.

Ahora también se puede entender por qué los transformadores son útiles en la transmisión de potencia eléctrica a largas distancias. Porque el voltaje del generador se eleva, la corriente en la línea de transmisión se reduce, disminuyendo por ello las pérdidas I^2R. En la práctica el voltaje se eleva hasta casi 230 000 V en la estación generadora, luego se reduce a cerca de 20 000 V en una estación de distribución, luego a 4 000 V para entregarla a las áreas residenciales y finalmente hasta 120-240 V en el sitio del consumidor. La potencia es suministrada por medio de un cable de tres alambres. En Estados Unidos dos de esos alambres están "vivos", con voltajes de 120 V respecto de un alambre de tierra común. Los aparatos domésticos que operan a 120 V se conectan en paralelo entre uno de los alambres vivos y la tierra. Los grandes aparatos, como los hornos eléctricos y las secadoras de ropa, requieren 240 V. Este valor se obtiene a través de los dos alambres vivos, los cuales están 180° fuera de fase, de manera que la diferencia de voltaje entre ellos es 240 V.

Hay un límite superior práctico para los voltajes que pueden usarse para las líneas de transmisión. Los voltajes excesivos podrían ionizar el aire alrededor de las líneas de transmisión, lo cual podría producir una trayectoria de conducción a tierra o hacia otros objetos en la vecindad. Esto, por supuesto, presentaría un serio peligro para cualquier criatura viva. Por tal razón, se emplea una larga cadena de aisladores para mantener los alambres de alto voltaje alejados de sus torres metálicas de soporte. Otros aisladores se emplean para mantener la separación entre los alambres.



Este transformador reductor cilíndrico baja el voltaje de 4 000 V a 220 V para entregarlo a un grupo de residencias. *(George Semple)*



[illegible] inventor en Estados Unidos. Fue figura clave en el desarrollo de la electricidad de corriente alterna, los transformadores de alto voltaje y el transporte de energía eléctrica vía líneas de transmisión de ca. El punto de vista de Tesla era contrario a las ideas de Thomas Edison, quien se comprometió con el uso de la corriente directa en la transmisión de potencia. El enfoque de Tesla ganó.

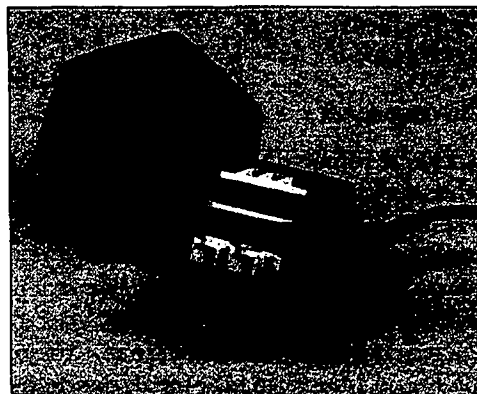


Figura 33.20 El devanado primario en este transformador está unido directamente a las puntas de la clavija. El devanado secundario está conectado al alambre en la derecha, el cual va hacia un dispositivo electrónico. Muchos de estos transformadores suministradores de potencia también convierten corriente alterna en corriente directa. *(George Semple)*

Muchos dispositivos electrónicos domésticos requieren bajos voltajes para operar de manera adecuada. Un pequeño transformador que se conecta directamente en la pared, como el ilustrado en la fotografía al principio de este capítulo, puede proporcionar el voltaje apropiado. La figura 33.20 muestra los dos devanados enrollados en torno de un núcleo de hierro común que se encuentran dentro de todas estas pequeñas "cajas negras". Dicho transformador particular convierte los 120 V de ca en el tomacorriente de la pared en 12.5 V de ca. (¿Puede usted determinar la proporción de los números de vueltas en las dos bobinas?) Algunas cajas negras también hacen uso de diodos para convertir la corriente alterna en corriente directa (véase la sección 33.9).

web
Para información de cómo operan los transformadores pequeños y cientos de otros dispositivos cotidianos visite http://www.howstuffworks.com

EJEMPLO 33 La economía de la potencia de ca

Una estación generadora de electricidad necesita entregar 20 MW de potencia a una ciudad a 1.0 km de distancia. a) Si la resistencia de los alambres es de 2.0 Ω y el costo de la electricidad es de aproximadamente 10 centavos de dólar/kWh, estime cuánto le cuesta a la compañía enviar la energía a la ciudad durante un día. Un voltaje común para los generadores de potencia comerciales es 22 kV, pero se usa un transformador elevador para elevar el voltaje a 230 kV antes de la transmisión.

Solución Las pérdidas de potencia en la línea de transmisión son el resultado de la resistencia de la línea. Se puede determinar la pérdida a partir de la ecuación 27.23, $\mathcal{P} = I^2R$. Puesto que esto es un estimado, se pueden usar las ecuaciones de cd y calcular I a partir de la ecuación 27.22:

$$I = \frac{\mathcal{P}}{\Delta V} = \frac{20 \times 10^6\,\text{W}}{230 \times 10^3\,\text{V}} = 87\,\text{A}$$

En consecuencia,

$$\mathcal{P} = I^2R = (87\,\text{A})^2\,(2.0\,\Omega) = 15\,\text{kW}$$

A lo largo de un día, la pérdida de energía debida a la resistencia de los alambres es (15 kW)(24 h) = 360 kWh, a un costo de 36 dólares.

b) Repita el cálculo para la situación en la cual la planta de poder entrega la electricidad a su voltaje original de 22 kV.

Solución

$$I = \frac{\mathcal{P}}{\Delta V} = \frac{20 \times 10^6\,\text{W}}{22 \times 10^3\,\text{V}} = 910\,\text{A}$$

$$\mathcal{P} = I^2R = (910\,\text{A})^2\,(2.0\,\Omega) = 1.7 \times 10^3\,\text{kW}$$

$$\text{Costo por día} = (1.7 \times 10^3\,\text{kW})(24\,\text{h})(0.10\,\text{dólares/kWh}) = 4\,100\,\text{dólares}$$

Los tremendos ahorros que son posibles mediante el uso de transformadores y líneas de transmisión de alto voltaje, junto con la eficiencia de usar corriente alterna para operar motores, conduce a la adopción universal de corriente alterna en lugar de corriente directa para redes eléctricas comerciales.

Sección opcional

RECTIFICADORES Y FILTROS

Los aparatos electrónicos portátiles, como los radios y los reproductores de discos compactos (CD) con frecuencia son activados por corriente directa suministrada por baterías. Muchos dispositivos vienen con convertidores ca-cd que proporcionan una fuente de corriente alterna fácilmente asequible si las baterías están bajas. Un convertidor de este tipo contiene un transformador que baja el voltaje de 120 V a los típicos 9 V y un circuito que convierte corriente alterna en corriente directa. Al proceso de convertir corriente alterna en corriente directa se le llama **rectificación**, y el dispositivo convertidor se denomina **rectificador**.

El elemento más importante en un circuito rectificador es un **diodo**, un elemento de circuito que conduce corriente en una dirección pero no en la otra. La mayoría de los diodos usados en la electrónica moderna son dispositivos semiconductores. El símbolo de circuito para un diodo es —▶|—, donde la flecha indica la dirección de la corriente a través del diodo. Un diodo tiene baja resistencia a la corriente en una dirección (la dirección de la flecha) y una alta resistencia a la corriente en la dirección opuesta. Se puede entender cómo un diodo rectifica una corriente si se con-

sidera la figura 33.21a, la cual muestra un diodo y un resistor conectados al secundario de un transformador. El transformador reduce el voltaje de 120 V de ca al voltaje más bajo que se necesita para que el dispositivo tenga una resistencia R (la resistencia de carga). Como la corriente puede pasar por el diodo sólo en una dirección, la corriente alterna en el resistor de carga se reduce a la forma mostrada por la curva sólida en la figura 33.21b. El diodo conduce corriente sólo cuando el lado del símbolo que contiene la cabeza de flecha tiene un potencial positivo en relación con el otro lado. En esta situación el diodo actúa como un *rectificador de media onda*, ya que la corriente está presente en el circuito sólo durante la mitad de cada ciclo.

Cuando se añade un capacitor al circuito, como se muestra mediante las líneas discontinuas y el símbolo de capacitor en la figura 33.21a, el circuito es un simple suministro de potencia de cd. La variación de la corriente con el tiempo en el resistor de carga (la curva discontinua en la Fig. 33.21b) está cerca de ser cero, como está determinado por la constante en el tiempo RC del circuito.

El circuito RC en la figura 33.21a es un ejemplo de un **circuito filtro**, el cual se usa para alisar o eliminar señales que varían en el tiempo. Por ejemplo, los radios suelen activarse por medio de un voltaje alterno de 60 Hz. Después de la rectificación el voltaje aún contiene una pequeña componente de ca a 60 Hz (algunas veces llamado *fluctuación*), el cual debe filtrarse. Por "filtrar" se quiere dar a entender que la fluctuación de 60 Hz debe reducirse a un valor mucho más pequeño que la señal de audio a amplificar, pues, si no se filtra, la señal de audio resultante incluye un molesto zumbido a 60 Hz.

Para comprender cómo funciona un filtro considere el circuito RC en serie simple que se muestra en la figura 33.22a. El voltaje de entrada es a través de los dos elementos y se representa por $\Delta V_{máx}$ sen ωt. Puesto que se está interesado únicamente en los valores máximos, se puede usar la ecuación 33.24 tomando $X_L = 0$ y sustituyendo $X_C = 1/\omega C$. Esto muestra que el voltaje de entrada máximo se relaciona con la corriente máxima por medio de

$$\Delta V_{in} = I_{máx} Z = I_{máx}\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

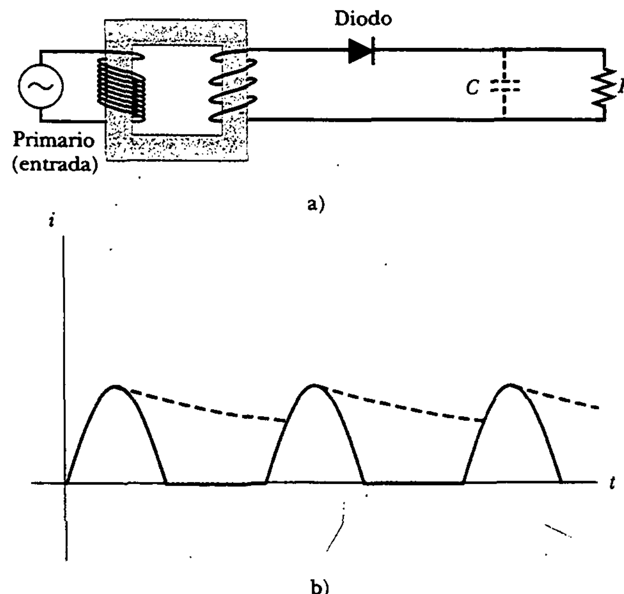


Figura 33.21 a) Rectificador de media onda con un filtro capacitor opcional. b) Corriente versus tiempo en el resistor. La curva sólida representa la corriente sin filtro capacitor, y la curva discontinua la corriente cuando el circuito incluye al capacitor.

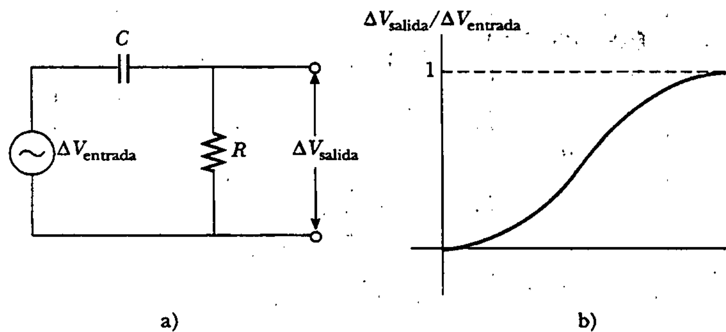


Figura 33.22 a) Filtro *RC* de paso alto simple. b) Razón de voltaje de salida a voltaje de entrada para un filtro *RC* de paso alto como función de la frecuencia angular del circuito.

Si el voltaje a través del resistor se considera como el voltaje de salida, entonces el máximo voltaje de salida es

$$\Delta V_{salida} = I_{máx}R$$

Por tanto, la relación entre el voltaje de salida y el de entrada es

$$\frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad \textbf{(33.42)}$$

Filtro de paso alto

Una gráfica de esta relación como función de la frecuencia angular (véase la Fig. 33.22b) muestra que, a bajas frecuencias, ΔV_{salida} es mucho más pequeño que $\Delta V_{entrada}$, en tanto que a altas frecuencias los dos voltajes son iguales. Puesto que el circuito deja pasar de manera preferencial señales de frecuencia más alta mientras las frecuencias bajas se filtran (o atenúan), el circuito recibe el nombre de filtro de paso alto *RC*. Físicamente, un filtro de paso alto funciona porque un capacitor "bloquea" las corrientes directa y alterna a bajas frecuencias.

Considere ahora el circuito que se muestra en la figura 33.23a, donde el voltaje de salida se toma a través del capacitor. En este caso el voltaje máximo es igual al voltaje a través del capacitor. Porque la impedancia a través del capacitor está dada por $X_C = 1/\omega C$, se tiene

$$\Delta V_{salida} = I_{máx}X_C = \frac{I_{máx}}{\omega C}$$

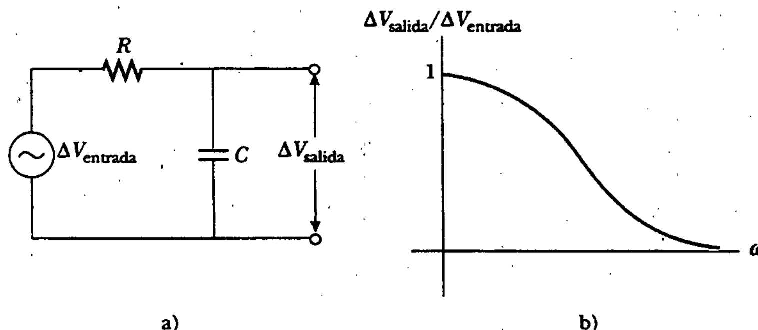


Figura 33.23 a) Filtro *RC* de paso bajo simple. b) Razón de voltaje de salida a voltaje de entrada para un filtro *RC* de paso bajo como función de la frecuencia angular del circuito.

Por consiguiente, la relación entre el voltaje de salida y el de entrada es

Filtro pasa bajos

$$\frac{\Delta V_{\text{salida}}}{\Delta V_{\text{entrada}}} = \frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \textbf{(33.43)}$$

Tal relación, graficada como una función de ω en la figura 33.23b, indica que en este caso el circuito pasa preferentemente señales de baja frecuencia. Por tanto, el circuito recibe el nombre de filtro de paso bajo *RC*.

Usted quizá esté familiarizado con las redes de discriminación, las cuales son una parte importante de los sistemas de bocinas en los sistemas de audio de alta fidelidad. Estas redes utilizan filtros de paso bajo para dirigir las frecuencias bajas hacia un tipo especial de bocina, el "*woofer*", la cual está diseñada para reproducir con precisión las notas bajas. Las frecuencias altas se envían a la bocina "*tweeter*".

Pregunta sorpresa 33.6

Suponga que usted está diseñando un sistema de alta fidelidad que contiene tanto grandes (*woofers*) como pequeñas (*tweeters*) bocinas. a) ¿Qué elemento de circuito colocaría en serie con un *woofer*, el cual pasa señales de baja frecuencia? b) ¿Qué elemento de circuito colocaría en serie con un *tweeter*, el cual pasa señales de alta frecuencia?

RESUMEN

Si un circuito de ca está compuesto por un generador y un resistor, la corriente está en fase con el voltaje. Esto es, la corriente y el voltaje alcanzan sus máximos valores al mismo tiempo.

La **corriente rms** y el **voltaje rms**, en un circuito de ca en el cual el voltaje y la corriente varían sinusoidalmente, están dados por las expresiones

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = 0.707 I_{\text{máx}} \quad \textbf{(33.4)}$$

$$\Delta V_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} = 0.707 \Delta V_{\text{máx}} \quad \textbf{(33.5)}$$

donde $I_{\text{máx}}$ y $\Delta V_{\text{máx}}$ son los valores máximos.

Si un circuito de ca consta de un generador y de un inductor, la corriente está retrasada 90° respecto del voltaje. Es decir, el voltaje alcanza su valor máximo un cuarto de periodo antes de que la corriente alcance su valor máximo.

Si un circuito de ca está compuesto con un generador y un capacitor, la corriente adelanta al voltaje en 90°. Esto es, la corriente alcanza su valor máximo un cuarto de periodo antes de que el voltaje alcance el suyo.

En circuitos de ca que contienen inductores y capacitores es útil definir la **reactancia inductiva** X_L y la **reactancia capacitiva** X_C como

$$X_L = \omega L \quad \textbf{(33.10)}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \textbf{(33.17)}$$

donde ω es la frecuencia angular del generador de ca. La unidad de reactancia del SI es el ohm.

La **impedancia** Z de un circuito de ca RLC en serie, el cual también tiene al ohm como su unidad, es

$$Z \equiv \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \textbf{(33.23)}$$

Dicha expresión ilustra que no se puede simplemente sumar la resistencia y las reactancias en un circuito. Se debe tomar en cuenta el hecho de que el voltaje aplicado y la corriente están fuera de fase, donde el **ángulo de fase** ϕ entre la corriente y el voltaje es

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \quad \textbf{(33.25)}$$

El signo de ϕ puede ser positivo o negativo, dependiendo de si X_L es mayor o menor que X_C. El ángulo de fase es cero cuando $X_L = X_C$.

La **potencia promedio** entregada por el generador en un circuito de ca RLC es

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I_{\text{rms}}\, \Delta V_{\text{rms}} \cos \phi \quad \textbf{(33.29)}$$

Una expresión equivalente para la potencia promedio es

$$\mathcal{P}_{\text{prom}} = I^2_{\text{rms}}\, R \quad \textbf{(33.30)}$$

La potencia promedio entregada por el generador resulta en un incremento en la energía interna en el resistor. No hay pérdida de potencia en un inductor o capacitor ideal.

La corriente rms en un circuito RLC en serie es

$$I_{\text{rms}} = \frac{\Delta V_{\text{rms}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad \textbf{(33.32)}$$

Un circuito RLC en serie está en resonancia cuando la reactancia inductiva es igual a la reactancia capacitiva. Cuando esta condición se alcanza, la corriente dada por la ecuación 33.32 llega a su valor máximo. Cuando en un circuito $X_L = X_C$, la **frecuencia de resonancia** ω_0 del circuito es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \textbf{(33.33)}$$

La corriente en un circuito RLC en serie llega a su valor máximo cuando la frecuencia del generador es igual a ω_0 —es decir, cuando la frecuencia de "excitación" iguala a la frecuencia de resonancia—.

Los transformadores permiten cambios fáciles en el voltaje alterno. Debido a que la energía (y, por tanto, la potencia) se conserva, se puede escribir

$$I_1 \Delta V_1 = I_2 \Delta V_2 \quad \textbf{(33.40)}$$

para relacionar las corrientes y voltajes en los devanados primario y secundario de un transformador.

PREGUNTAS

1. Las luces fluorescentes titilan 120 veces cada segundo. Explique qué causa esto. ¿Por qué usted no puede ver que esto está ocurriendo?
2. ¿Por qué un capacitor actúa como un cortocircuito a altas frecuencias? ¿Por qué actúa como un circuito abierto a bajas frecuencias?
3. Explique cómo el acrónimo en el mnemónico "ELI the ICE man" puede usarse para recordar si la corriente adelanta al voltaje o el voltaje adelanta a la corriente en circuitos RLC. (Advierta que "E" representa voltaje.)
4. ¿Por qué la suma de los voltajes máximos a través de los elementos en un circuito RLC en serie suele ser mayor que el máximo voltaje aplicado? ¿Esto no viola la segunda regla de Kirchhoff?
5. ¿El ángulo de fase depende de la frecuencia? ¿Cuál es el ángulo de fase cuando la reactancia inductiva es igual a la reactancia capacitiva?
6. Se entrega energía a un circuito RLC en serie por medio de un generador. Esta energía aparece como energía interna en el resistor. ¿Cuál es la fuente de esta energía?

7. Explique por qué la potencia promedio entregada a un circuito *RLC* por el generador depende de la fase entre la corriente y el voltaje aplicado.
8. Un experimento particular requiere un haz de luz de intensidad muy estable. ¿Por qué un voltaje de ca sería inadecuado para activar la fuente luminosa?
9. Considere un circuito *RLC* en serie en el cual *R* es una lámpara incandescente, *C* es cierto capacitor fijo y *L* es una inductancia variable. La fuente es 120 V de ca. Explique por qué la lámpara brilla intensamente para algunos valores de *L* y no brilla con los demás valores.
10. ¿Qué determina el voltaje máximo que puede emplearse en una línea de transmisión?
11. ¿Funcionará un transformador si se usa una batería para el voltaje de entrada a través del primario? Explique.
12. ¿Cómo puede ser cero el valor promedio de una corriente y a pesar de ello la raíz cuadrada de la corriente al cuadrado promedio no ser cero?
13. ¿Cuál es el promedio de tiempo del voltaje de "onda cuadrada" mostrado en la figura P33.13? ¿Cuál es su voltaje rms?

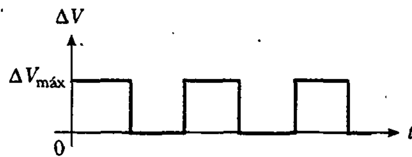


Figura P33.13

14. Explique cómo se relaciona el factor de calidad con las características de respuesta de un receptor de radio. ¿Cuál variable determina en mayor medida al factor de calidad?
15. ¿Por qué las bobinas primaria y secundaria de un transformador se enrollan en un núcleo de hierro que pasa a través de ambas?
16. En relación con la figura P33.16 explique por qué el capacitor evita que una señal de cd pase entre los circuitos A y B, aunque deja que una señal de ca pase del circuito A al B. (Se dice que los circuitos están acoplados capacitivamente.)

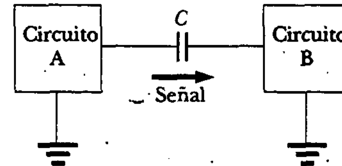


Figura P33.16

17. En relación con la figura P33.17, si *C* se hace suficientemente grande, una señal de ca pasa del circuito A a tierra en vez de hacerlo del circuito A al B. En consecuencia, el capacitor actúa como un filtro. Explique.

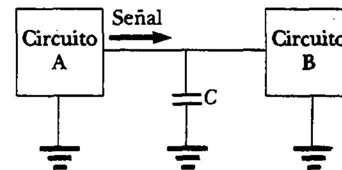


Figura P33.17

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/**  = use computadora para resolver el problema  = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Nota: Suponga que todos los voltajes ca y corrientes son sinusoidales, a menos que se establezca de otro modo.

Sección 33.1 Fuentes de ca y fasores
Sección 33.2 Resistores en un circuito de ca

1. El voltaje rms de salida de un generador de ca es 200 V, y la frecuencia de operación es 100 Hz. Escriba la ecuación dando el voltaje de salida como función del tiempo.
2. a) ¿Cuál es la resistencia de un foco que usa una potencia promedio de 75.0 W cuando se conecta a una fuente de potencia de 60.0 Hz que tiene un voltaje máximo de 170 V? b) ¿Cuál es la resistencia de una lámpara de 100 W?
3. Una fuente de potencia de ca produce un voltaje máximo $\Delta V_{máx}$ = 100 V. Esta alimentación de potencia se conecta a un resistor de 24.0 Ω, y la corriente y el voltaje en el resistor se miden con un amperímetro y un voltímetro de ca ideales, como en la figura P33.3. ¿Cuáles son los valores que registra cada medidor? Advierta que un amperímetro ideal tiene resistencia cero y que un voltímetro ideal tiene resistencia infinita.

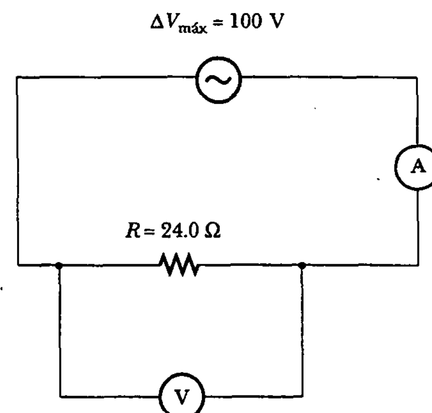


Figura P33.3

4. En el circuito sencillo de ca que se muestra en la figura 33.1, $R = 70.0\ \Omega$ y $\Delta v = \Delta V_{máx}$ sen ωt. a) Si $\Delta v_R = 0.250\ \Delta V_{máx}$ por primera vez en $t = 0.010\ 0$ s, ¿cuál es la frecuencia angular del generador? b) ¿Cuál es el siguiente valor de t para el cual $\Delta v_R = 0.250\ \Delta V_{máx}$?

5. La corriente en el circuito mostrado en la figura 33.1 es igual a 60.0% de la corriente de pico en $t = 7.00$ ms. ¿Cuál es la frecuencia más pequeña del generador que produce esta corriente?

6. La figura P33.6 muestra tres focos conectados a un suministro de voltaje doméstico de 120 V de ca (rms). Los focos 1 y 2 son de 150 W y el foco 3 es de 100 W. Encuentre la corriente rms y la resistencia de cada foco.

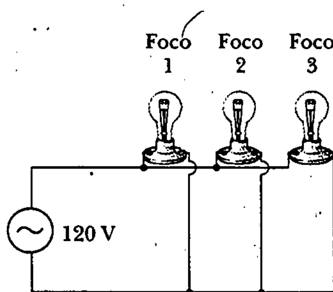


Figura P33.6

7. Un amplificador de audio, representado por la fuente de ca y un resistor en la figura P33.7, entrega a la bocina voltaje alterno a frecuencias de audio. Si la fuente de voltaje tiene una amplitud de 15.0 V, $R = 8.20\ \Omega$, y la bocina es equivalente a una resistencia de 10.4 Ω, ¿cuál es la potencia promedio en el tiempo que se le entrega?

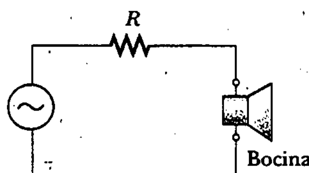


Figura P33.7

Sección 33.3 Inductores en un circuito de ca

8. Un inductor se conecta a un suministro de potencia de 20.0 Hz que produce un voltaje rms de 50.0 V. ¿Qué inductancia se necesita para mantener la corriente instantánea en el circuito por debajo de 80.0 mA?

9. En un circuito de ca puramente inductivo, como el que se muestra en la figura 33.4, $\Delta V_{máx} = 100$ V. a) Si la corriente máxima es 7.50 A a 50.0 Hz, ¿cuál es la inductancia L? b) ¿A qué frecuencia angular ω la corriente máxima es de 2.50 A?

10. Un inductor tiene una reactancia de 54.0 Ω a 60.0 Hz. ¿Cuál es la corriente máxima cuando este inductor se conecta a una fuente de 50.0 Hz que produce un voltaje rms de 100 V?

WEB 11. Para el circuito mostrado en la figura 33.4, $\Delta V_{máx} = 80.0$ V, $\omega = 65.0\pi$ rad/s y $L = 70.0$ mH. Calcule la corriente en el inductor en $t = 15.5$ ms.

12. Un inductor de 20.0 mH está conectado a una toma de corriente estándar ($\Delta V_{rms} = 120$ V, $f = 60.0$ Hz). Determine la energía almacenada en el inductor en $t = (1/180)$ s, suponiendo que esta energía es cero en $t = 0$.

13. **Problema de repaso.** Determine el flujo magnético máximo que pasa por un inductor conectado a una toma de corriente estándar ($\Delta V_{rms} = 120$ V, $f = 60.0$ Hz).

Sección 33.4 Capacitores en un circuito de ca

14. a) ¿Para qué frecuencias un capacitor de 22.0 μF tiene una reactancia por debajo de 175 Ω? b) Sobre este mismo intervalo de frecuencia, ¿cuál es la reactancia de un capacitor de 44.0 μF?

15. ¿Qué corriente máxima entrega un capacitor de 2.20 μF cuando se conecta a través de a) una toma de corriente en Estados Unidos que tiene una $\Delta V_{rms} = 120$ V y $f = 60.0$ Hz, y b) una toma de corriente europea con $\Delta V_{rms} = 240$ V y $f = 50.0$ Hz?

16. Un capacitor C está conectado a un suministro de potencia que opera a una frecuencia f y produce un voltaje rms ΔV. ¿Cuál es la carga máxima que aparece en cualesquiera de las placas del capacitor?

17. ¿Qué corriente máxima entrega un generador de ca con $\Delta V_{máx} = 48.0$ V y $f = 90.0$ Hz cuando se conecta a través de un capacitor de 3.70 μF?

18. Un capacitor de 1.00 mF se conecta a una toma de corriente estándar ($\Delta V_{rms} = 120$ V, $f = 60.0$ Hz). Determine la corriente en el capacitor en $t = (1/180)$ s, suponiendo que en $t = 0$, la energía almacenada en el capacitor es cero.

Sección 33.5 El circuito *RLC* en serie

19. Un inductor ($L = 400$ mH), un capacitor ($C = 4.43$ μF) y un resistor ($R = 500\ \Omega$) están conectados en serie. Un generador de ca de 50.0 Hz produce una corriente de pico de 250 mA en el circuito. a) Calcule el voltaje de pico requerido $\Delta V_{máx}$. b) Determine el ángulo de fase por el cual la corriente adelanta al o está retrasada del voltaje aplicado.

20. ¿A qué frecuencia la reactancia inductiva de un inductor de 57.0 μH es igual a la reactancia capacitiva de un capacitor de 57.0 μF?

21. Un circuito ca en serie contiene los siguientes componentes: $R = 150\ \Omega$, $L = 250$ mH, $C = 2.00$ μF y un generador con $\Delta V_{máx} = 210$ V operando a 50.0 Hz. Calcule a) la reactancia inductiva, b) la reactancia capacitiva, c) la impedancia, d) la corriente máxima y e) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje del generador.

22. Un voltaje sinusoidal $\Delta v(t) = (40.0\ \text{V})$ sen $(100t)$ se aplica a un circuito *RLC* en serie con $L = 160$ mH, $C = 99.0$ μF y $R = 68.0\ \Omega$. a) ¿Cuál es la impedancia del circuito? b) ¿Cuál es la corriente máxima? c) Determine los valores numéricos para $I_{máx}$, ω y ϕ en la ecuación $i(t) = I_{máx}$ sen$(\omega t - \phi)$.

WEB 23. Un circuito *RLC* se compone de un resistor de 150 Ω, un capacitor de 21.0 μF y un inductor de 460 mH, conectados en serie con un suministro de potencia de 120 V y

60.0 Hz. a) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje aplicado? b) ¿Cuál alcanza su máximo primero, la corriente o el voltaje?

24. Una persona está trabajando cerca del secundario de un transformador, como se muestra en la figura P33.24. El voltaje primario es 120 V a 60.0 Hz. La capacitancia C_s, que es la capacitancia dispersa entre la mano de la persona y el devanado secundario, es 20.0 pF. Suponiendo que la persona tiene una resistencia de cuerpo a tierra R_b = 50.0 kΩ, determine el voltaje rms a través del cuerpo. (*Sugerencia*: vuelva a dibujar el circuito con el secundario del transformador como una fuente de ca simple.)

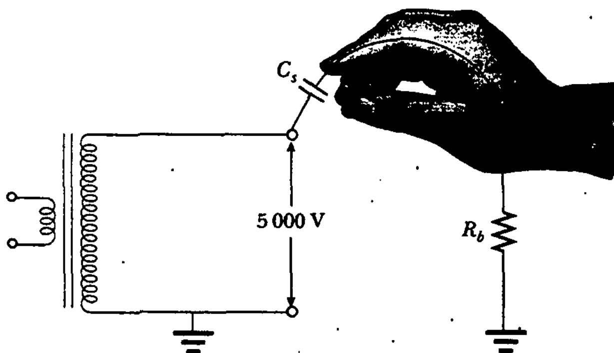


Figura P33.24

25. Una fuente ca con $\Delta V_{máx}$ = 150 V y f = 50.0 Hz está conectada entre los puntos *a* y *d* en la figura P33.25. Calcule los voltajes máximos entre los puntos a) *a* y *b*, b) *b* y *c*, c) *c* y *d* y d) *b* y *d*.

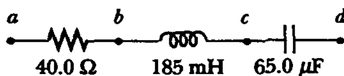


Figura P33.25 Problemas 25 y 64.

26. Dibuje a escala un diagrama de fasores que muestre Z, X_L, X_C y ϕ para un circuito de ca en serie para el cual R = 300 Ω, C = 11.0 μF, L = 0.200 H y f = (500/π) Hz.

27. Una bobina de 35.0 Ω de resistencia y 20.5 H de inductancia está en serie con un capacitor y una fuente de 200 V (rms) a 100 Hz. La corriente rms en el circuito es 4.00 A. a) Calcule la capacitancia en el circuito. b) ¿Cuál es ΔV_{rms} que atraviesa la bobina?

Sección 33.6 Potencia en un circuito de ca

28. La fuente de voltaje en la figura P33.28 tiene una salida ΔV_{rms} = 100 V a ω = 1 000 rad/s. Determine a) la corriente en el circuito y b) la potencia suministrada por la fuente. c) Muestre que la potencia entregada al resistor es igual a la potencia suministrada por la fuente.

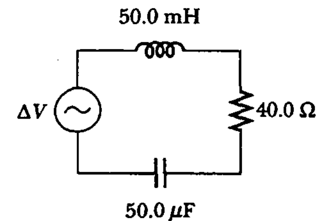


Figura P33.28

WEB 29. Un voltaje de ca de la forma Δv = (100 V) sen(1 000t) se aplica a un circuito *RLC* en serie. Si R = 400 Ω, C = 5.00 μF y L = 0.500 H, ¿cuál es la potencia promedio entregada al circuito?

30. Un circuito *RLC* en serie tiene una resistencia de 45.0 Ω y una impedancia de 75.0 Ω. ¿Qué potencia promedio se entrega a este circuito cuando ΔV_{rms} = 210 V?

31. En cierto circuito *RLC* en serie, I_{rms} = 9.00 A, ΔV_{rms} = 180 V y la corriente adelantada al voltaje por 37.0°. a) ¿Cuál es la resistencia total del circuito? b) ¿Cuál es la reactancia del circuito ($X_L - X_C$)?

32. Suponga que usted dirige una fábrica que emplea muchos motores eléctricos. Los motores crean una gran carga inductiva sobre las líneas de transmisión eléctrica, así como una carga resistiva. La compañía eléctrica construye una línea de distribución extrapesada para suministrarle una componente de corriente que está 90° fuera de fase con el voltaje, así como la corriente en fase con el voltaje. La compañía eléctrica le carga una tarifa adicional por "volt-amperes reactivo" añadida a la cantidad que usted paga por la energía que utiliza. El cargo extra se puede evitar mediante la instalación de un capacitor entre la línea de transmisión y su fábrica. El siguiente problema modela esta solución.

En un circuito *LR*, una fuente de 120 V (rms) y 60.0 Hz está en serie con un inductor de 25.0 mH y un resistor de 20.0 Ω. ¿Cuáles son a) la corriente rms y b) el factor de potencia? c) ¿Qué capacitor debe agregarse en serie para hacer que el factor de potencia sea 1? d) ¿A qué valor puede reducirse el suministro de voltaje si la potencia suministrada debe ser la misma que la proporcionada antes de la instalación del capacitor?

33. **Problema de repaso.** Si 100 MW de potencia a 50.0 kV se van a transmitir a 100 km de distancia con sólo 1.00% de pérdidas, ¿de qué diámetro debe usarse el alambre de cobre para cada uno de los dos conductores de la línea de transmisión? Suponga que la densidad de corriente en los conductores es uniforme.

34. **Problema de repaso.** Si se va a transmitir una potencia $\mathcal{P}$ a una distancia d a un voltaje ΔV con sólo 1.00% de pérdidas, ¿de qué diámetro debe usarse el alambre de cobre para cada uno de los dos conductores de la línea de transmisión? Suponga que la densidad de corriente en los conductores es uniforme.

35. Un diodo es un dispositivo que permite a la corriente pasar en una sola dirección (la dirección indicada por la cabeza de flecha en su símbolo de diagrama de circuito).

Encuentre, en términos de ΔV y R, la potencia promedio entregada al circuito del diodo mostrado en la figura P33.35.

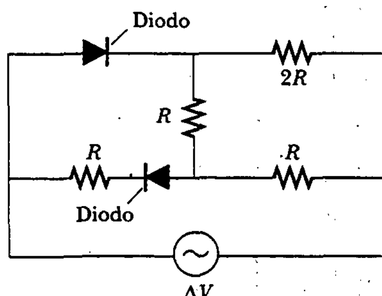


Figura P33.35

Sección 33.7 Resonancia en un circuito *RLC* en serie

36. El circuito de sintonización de un radio de AM contiene una combinación *LC*. La inductancia es 0.200 mH y la capacitancia es variable, de modo que el circuito puede resonar en cualquier frecuencia entre 550 kHz y 1 650 kHz. Encuentre el intervalo de valores requerido para *C*.
37. Un circuito *RLC* se usa en un radio para sintonizar una estación de FM que transmite a 99.7 MHz. La resistencia en el circuito es 12.0 Ω y la inductancia es 1.40 μH. ¿Qué capacitancia debe emplearse?
38. Un circuito *RLC* en serie tiene los siguientes valores: L = 20.0 mH, C = 100 nF, R = 20.0 Ω y $\Delta V_{\text{máx}}$ = 100 V, con $\Delta v = \Delta V_{\text{máx}}$ sen ωt. Encuentre a) la frecuencia resonante, b) la amplitud de la corriente a la frecuencia resonante, c) la Q del circuito y d) la amplitud del voltaje a través del inductor en resonancia.
39. Un resistor de 10.0 Ω, un inductor de 10.0 mH y un capacitor de 100 μF se conectan en serie a una fuente de 50.0 V (rms) que tiene frecuencia variable. ¿Cuál es la energía entregada al circuito durante un periodo si la frecuencia de operación es dos veces la frecuencia de resonancia?
40. Un resistor R, un inductor L y un capacitor C se conectan en serie a una fuente de ca de voltaje rms ΔV y frecuencia variable. ¿Cuál es la energía entregada al circuito durante un periodo si la frecuencia de operación es dos veces la frecuencia de resonancia?
41. Calcule el factor de calidad para los circuitos descritos en los problemas 22 y 23. ¿Cuál circuito tiene la resonancia más pronunciada?

Sección 33.8 El transformador y la transmisión de energía

42. Un transformador reductor se emplea para recargar las baterías de dispositivos portátiles como grabadoras de cinta. La relación de vueltas dentro del transformador es 13:1 y se usa con el servicio doméstico de 120 V (rms). Si un transformador ideal particular consume 0.350 A de la toma de corriente de la casa, ¿cuáles son a) el voltaje y b) la corriente suministrados al tocacintas por el transformador? c) ¿Cuánta potencia se entrega?
43. Un transformador tiene N_1 = 350 vueltas y N_2 = 2 000 vueltas. Si el voltaje de entrada es $\Delta v(t)$ = (170 V) cos ωt, ¿qué voltaje rms se desarrolla a través de la bobina secundaria?
44. Un transformador elevador se diseña para tener un voltaje de salida de 2 200 V (rms) cuando el primario se conecta a través de una fuente de 110 V (rms). a) Si hay 80 vueltas en el devanado primario, ¿cuántas vueltas se requieren en el secundario? b) Si un resistor de carga a través del secundario requiere una corriente de 1.50 A, ¿cuál es la corriente en el primario, suponiendo condiciones ideales? c) Si el transformador de hecho tiene una eficiencia de 95.0%, ¿cuál es la corriente en el primario cuando la corriente en el secundario es 1.20 A?
45. En el transformador mostrado en la figura P33.45, el resistor de carga es de 50.0 Ω. La relación de vueltas N_1:N_2 es 5:2 y el voltaje de la fuente es 80.0 V (rms). Si un voltímetro a través de la carga mide un voltaje de 25.0 V (rms), ¿cuál es la resistencia de la fuente R_s?

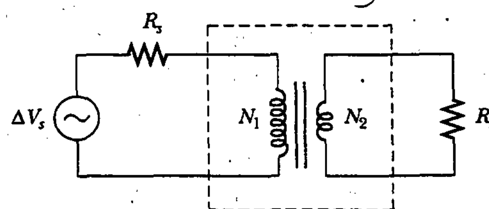


Figura P33.45

46. El voltaje secundario de un transformador de encendido que se utiliza en un horno es de 10.0 kV. Cuando el primario opera a un voltaje rms de 120 V, la impedancia primaria es de 24.0 Ω y el transformador es 90.0% eficiente. a) ¿Qué relación de vueltas se requiere? ¿Cuáles son b) la corriente y c) la impedancia en el secundario?
47. Con una línea de transmisión que tiene una resistencia por unidad de longitud de 4.50×10^{-4} Ω/m se transmitirán 5.00 MW a lo largo de 400 millas (6.44×10^5 m). El voltaje de salida del generador es 4.50 kV. a) ¿Cuál es la pérdida en la línea si un transformador se utiliza para elevar el voltaje hasta 500 kV? b) ¿Qué fracción de la potencia de entrada se pierde en la línea en estas circunstancias? c) ¿Qué dificultades se encontrarían al intentar transmitir los 5.00 MW a un voltaje del generador de 4.50 kV?

(Opcional)

Sección 33.9 Rectificadores y filtros

48. El filtro de paso bajo *RC* que se muestra en la figura 33.23 tiene una resistencia R = 90.0 Ω y una capacitancia C = 8.00 nF. Calcule la ganancia ($\Delta V_{\text{salida}}/\Delta V_{\text{entrada}}$) para frecuencias de entrada de a) 600 Hz y b) 600 kHz.
49. WEB El filtro de paso alto *RC* mostrado en la figura 33.22 tiene una resistencia R = 0.500 Ω. a) ¿Qué capacitancia produce una señal de salida que tiene la mitad de la amplitud de una señal de entrada de 300 Hz? b) ¿Cuál es la ganancia ($\Delta V_{\text{salida}}/\Delta V_{\text{entrada}}$) para una señal de 600 Hz?

50. El circuito de la figura P33.50 representa a un filtro de paso alto en el cual el inductor tiene resistencia interna. ¿Cuál es la frecuencia de la fuente si el voltaje de salida ΔV_2 es la mitad del voltaje de entrada?

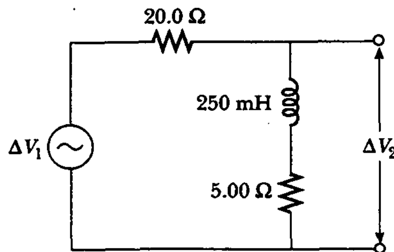


Figura P33.50

51. El resistor en la figura p33.51 representa la bocina de rango medio en un sistema de tres bocinas. Suponga que su resistencia es constante a 8.00 ω. La fuente representa un amplificador de audio que produce señales de amplitud uniforme $\delta v_{entrada}$ = 10.0 v a todas las frecuencias de audio. El inductor y el capacitor están para funcionar como filtros de banda con $\delta v_{salida}/\delta v_{entrada} = \frac{1}{2}$ a 200 hz y a 4 000 hz. a) determine los valores requeridos de *l* y *c.* b) encuentre el valor máximo de la relación de ganancia $\delta v_{salida}/\delta v_{entrada}$. c) Encuentre la frecuencia f_0 a la cual la relación de ganancia tiene su valor máximo. d) encuentre el corrimiento de fase entre $\Delta v_{entrada}$ y Δv_{salida} a 200 hz, a f_0 y a 4 000 hz. e) Encuentre la potencia promedio transferida a la bocina a 200 Hz, a f_0 y a 4 000 Hz. f) Tratando al filtro como un circuito resonante encuentre su factor de calidad.

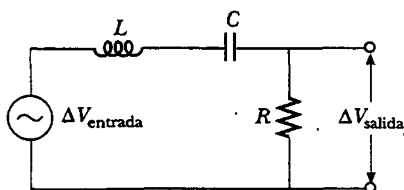


Figura P33.51

52. Muestre que dos filtros de paso alto sucesivos que tienen los mismos valores de *R* y *C* proporcionan una ganancia combinada

$$\frac{\Delta V_{salida}}{\Delta V_{entrada}} = \frac{1}{1 + (1/\omega RC)^2}$$

53. Considere un filtro de paso bajo seguido por un filtro de paso alto, como se ilustra en la figura P33.53. Si R = 1 000 Ω y C = 0.050 0 μF, determine $\Delta V_{salida}/\Delta V_{entrada}$ para una frecuencia de entrada de 2.00 kHz.

PROBLEMAS ADICIONALES

54. Muestre que el valor rms para el voltaje de diente de sierra mostrado en la figura P33.54 es $\Delta V_{máx}/\sqrt{3}$.

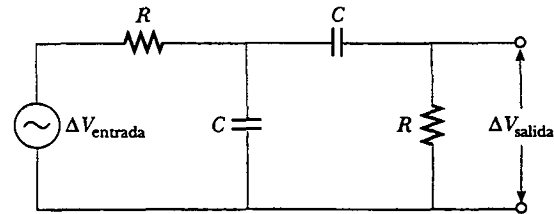


Figura P33.53

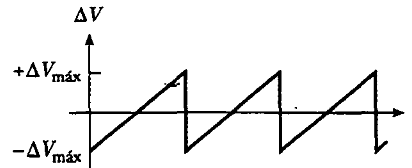


Figura P33.54

WEB 55. Un circuito *RLC* en serie se compone de un resistor de 8.00 Ω, un capacitor de 5.00 μF y un inductor de 50.0 mH. Una fuente de frecuencia variable aplica una fem de 400 V (rms) a través de la combinación. Determine la potencia entregada al circuito cuando la frecuencia es igual a la mitad de la frecuencia de resonancia.

56. Para determinar la inductancia de una bobina utilizada en un proyecto de investigación, un estudiante conecta primero la bobina a una batería de 12.0 V y mide una corriente de 0.630 A. Después, el estudiante conecta la bobina a un generador de 24.0 V (rms) y 60.0 Hz y mide una corriente rms de 0.570 A. ¿Cuál es la inductancia?

57. En la figura P33.57 encuentre la corriente entregada por el suministro de potencia de 45.0 V (rms) cuando a) la frecuencia es muy grande y b) la frecuencia es muy pequeña.

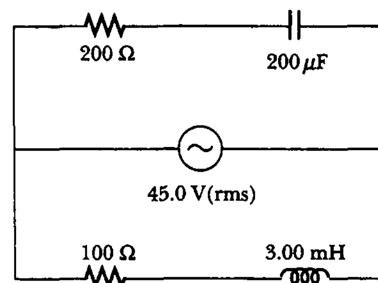


Figura P33.57

58. En el circuito mostrado en la figura P33.58 suponga que están dados todos los parámetros, excepto *C.* Encuentre: a) la corriente como una función del tiempo, b) la potencia entregada al circuito, c) la corriente como una función del tiempo *sólo* después de que el interruptor 1 se abre. d) Después de que el interruptor 2 *también* se abre, la corriente y el voltaje están en fase. Encuentre la capacitancia *C.* Encuentre: e) la impedancia del circuito cuando ambos interruptores están abiertos, f) la energía máxima almacenada en el capacitor durante las oscila-

ciones, g) la energía máxima almacenada en el inductor durante las oscilaciones. h) Ahora la frecuencia de la fuente de voltaje se duplica. Encuentre la diferencia de fase entre la corriente y el voltaje. i) Encuentre la frecuencia que hace que la reactancia inductiva sea la mitad de la reactancia capacitiva.

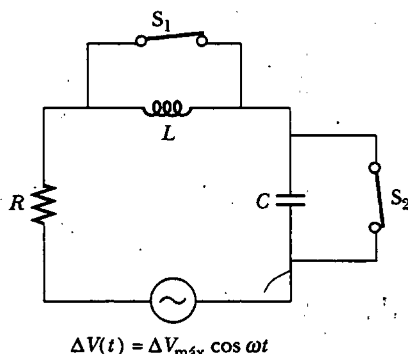


Figura P33.58

59. Como una alternativa a los filtros *RC* descritos en la sección 33.9, los filtros *LC* se usan como de paso alto y como de paso bajo. Sin embargo, todos los inductores reales tienen resistencia, como se indica en la figura P33.59, y esta resistencia debe ser considerada. a) Determine cuál circuito en la figura P33.59 es el filtro de paso alto y cuál es el de paso bajo. b) Derive las relaciones salida/entrada para cada circuito siguiendo el procedimiento empleado para los filtros *RC* en la sección 33.9.

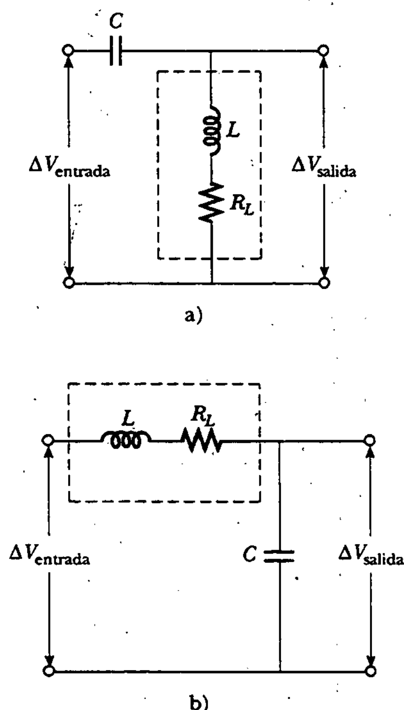


Figura P33.59

60. Un resistor de 80.0 Ω y un inductor de 200 mH se conectan en *paralelo* a través de una fuente de 100 V (rms) y 60.0 Hz. a) ¿Cuál es la corriente rms en el resistor? b) ¿En qué ángulo la corriente total adelanta o está retrasada del voltaje?

61. Haga una estimación del orden de magnitud de la corriente eléctrica que la compañía de electricidad entrega a una población a partir de una estación generadora remota. Establezca los datos que midió o estimó. Si lo desea, considere una comunidad dormitorio suburbana de 20 000 habitantes.

62. Un voltaje $\Delta v = (100\text{ V})$ sen ωt (en unidades del SI) se aplica a través de una combinación en serie de un inductor de 2.00 H, un capacitor de 10.0 μF y un resistor de 10.0 Ω. a) Determine la frecuencia angular ω_0 a la cual la potencia entregada al resistor es un máximo. b) Calcule la potencia a dicha frecuencia. c) Determine las dos frecuencias angulares ω_1 y ω_2 a las cuales la potencia entregada es la mitad del valor máximo. [La *Q* del circuito es aproximadamente $\omega_0/(\omega_2 - \omega_1)$.]

63. Considere un circuito *RLC* en serie que tiene los siguientes parámetros: $R = 200$ Ω, $L = 663$ mH y $C = 26.5$ μF. El voltaje aplicado tiene una amplitud de 50.0 V y una frecuencia de 60.0 Hz. Encuentre lo siguiente: a) la corriente $I_{máx}$, incluida su constante de fase ϕ relativa al voltaje aplicado Δv; b) el voltaje ΔV_R a través del resistor y su fase relativa a la corriente; c) el voltaje ΔV_C a través del capacitor y su fase relativa a la corriente, y d) el voltaje ΔV_L a través del inductor y su fase relativa a la corriente.

64. Un suministro de potencia con $\Delta V_{rms} = 120$ V se conecta entre los puntos *a* y *d* en la figura P33.25. ¿A qué frecuencia entregará una potencia de 250 W?

65. El ejemplo 28.2 mostró que la potencia máxima se transfiere cuando la resistencia interna de una fuente de cd es igual a la resistencia de la carga. Es posible emplear un transformador para proporcionar máxima transferencia de potencia entre dos circuitos de ca que tienen diferentes impedancias. a) Demuestre que la relación de vueltas N_1/N_2 necesaria para cumplir esta condición es

$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}$$

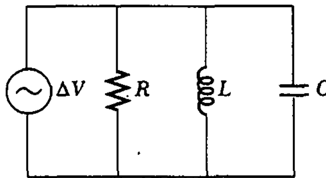
b) Suponga que usted desea emplear un transformador como un dispositivo de igualación de impedancia entre un amplificador de audio que tiene una impedancia de salida de 8.00 kΩ y un altavoz que tiene una impedancia de entrada de 8.00 Ω. ¿Cuál debe ser su relación N_1/N_2?

66. La figura P33.66a muestra un circuito *RLC* en paralelo, y el correspondiente diagrama de fasores se presenta en la figura P33.66b. El voltaje instantáneo y el voltaje rms a través de cada uno de los tres elementos del circuito son los mismos, y cada uno se encuentra en fase con la corriente que atraviesa el resistor. Las corrientes en *C* y *L* adelantan a o están retrasadas de la corriente en el resistor, como se muestra en la figura P33.66b. a) Muestre que la corriente rms entregada por la fuente es

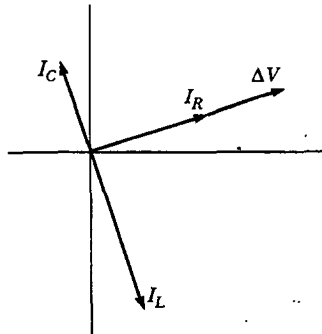
$$I_{rms} = \Delta V_{rms}\left[\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right]^{1/2}$$

b) Muestre que el ángulo de fase ϕ entre ΔV_{rms} e I_{rms} es

$$\tan\phi = R\left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$$



a)



b)

Figura P33.66

67. Un resistor de 80.0 Ω, un inductor de 200 mH y un capacitor de 0.150 μF se conectan *en paralelo* a través de una fuente de 120 V (rms) que opera a 374 rad/s. a) ¿Cuál es la frecuencia resonante del circuito? b) Calcule la corriente rms en el resistor, el inductor y el capacitor. c) ¿Cuál es la corriente rms entregada por la fuente? d) ¿La corriente se adelanta o está retrasada del voltaje? ¿En qué ángulo?

68. Considere el circuito de corrimiento de fase que se muestra en la figura P33.68. El voltaje de entrada se describe mediante la expresión $\Delta v = (10.0 \text{ V}) \operatorname{sen} 200t$ (en unidades del SI). Suponiendo que $L = 500$ mH, encuentre a) el valor de R de modo que el voltaje de salida esté retrasado en 30.0° del voltaje de entrada, y b) la amplitud del voltaje de salida.

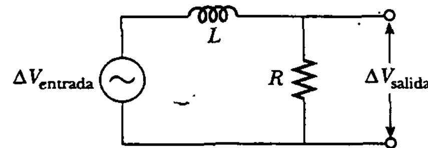


Figura P33.68

69. Un circuito *RLC* en serie opera a 2 000 Hz. A esta frecuencia, $X_L = X_C = 1\,884$ Ω. La resistencia del circuito es 40.0 Ω. a) Prepare una tabla que muestre los valores de X_L, X_C y Z para f = 300, 600, 800, 1 000, 1 500, 2 000, 3 000, 4 000, 6 000 y 10 000 Hz. b) Grafique sobre el mismo conjunto de ejes X_L, X_C y Z como funciones de ln f.

70. Un circuito *RLC* en serie, en el cual $R = 1.00$ Ω, $L = 1.00$ mH y $C = 1.00$ nF se conecta a un generador de ca que entrega 1.00 V (rms). Elabore una gráfica cuidadosa de la potencia entregada al circuito como una función de la frecuencia y verifique que el ancho total del pico de resonancia a la mitad del máximo sea $R/2\pi L$.

71. Suponga que el filtro de paso bajo que se muestra en la figura 33.22 tiene $R = 1\,000$ Ω y $C = 0.050$ 0 μF. a) ¿A qué frecuencia $\Delta V_{salida}/\Delta V_{entrada} = \frac{1}{2}$? b) Grafique $\log_{10}(\Delta V_{salida}/\Delta V_{entrada})$ *versus* $\log_{10}(f)$ sobre el intervalo de frecuencia de 1 Hz a 1 MHz. (Esta gráfica log-log de ganancia *versus* frecuencia se conoce como *gráfica Bode*.)

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

33.1 c) $\mathcal{P}_{prom} > 0$ e $i_{prom} = 0$. La potencia promedio es proporcional a la corriente rms —la cual, como muestra la figura 33.3, es diferente de cero aun cuando la corriente promedio es cero—. La condición a) es válida sólo para un circuito abierto, y las condiciones b) y d) nunca pueden ser ciertas porque $i_{prom} = 0$ para los circuitos de ca aun cuando $i_{rms} > 0$.

33.2 b) Suma de voltajes instantáneos a través de elementos. Las elecciones de a) y c) son incorrectas porque el desalineamiento de las curvas seno en la figura 33.9b significa que los voltajes están fuera de fase, de manera que no se puede simplemente sumar los voltajes máximos (o rms) a través de los elementos. (En otras palabras, $\Delta V \neq \Delta V_R + \Delta V_L + \Delta V_C$ aun cuando es cierto que $\Delta v = \Delta v_R + \Delta v_L + \Delta v_C$.)

33.3 a) $X_L < X_C$. b) $X_L = X_C$. c) $X_L > X_C$.

33.4 La ecuación 33.23 indica que en la resonancia (cuando $X_L = X_C$) la impedancia se debe estrictamente al resistor, $Z = R$. En la resonancia la corriente está dada por la expresión $I_{rms} = \Delta V_{rms}/R$.

33.5 Alto. Cuanto más alto sea el factor de calidad, mayor será la sensibilidad del detector. Como se puede ver a partir de la figura 33.15a, cuando $Q = \omega_0/\Delta\omega$ es alto, como lo es en el caso de $R = 3.5$ Ω, un ligero cambio en la frecuencia de resonancia (como puede ocurrir cuando una pequeña pieza de metal pasa por el portal) provoca un gran cambio en la corriente que puede ser detectado fácilmente.

33.6 a) Un inductor. La corriente en un circuito inductivo disminuye con la frecuencia creciente (véase la Ec. 33.9). Por tanto, un inductor conectado en serie con un *woofer* bloquea señales de alta frecuencia y pasa señales de baja frecuencia. b) Un capacitor. La corriente en un circuito capacitivo disminuye con la frecuencia decreciente (véase la Ec. 33.16). Cuando un capacitor se conecta en serie con un *tweeter*, el capacitor bloquea señales de baja frecuencia y pasa señales de alta frecuencia.



ACERTIJO

La persona de la foto está expuesta a rayos solares muy intensos en la playa. Si está usando el tipo equivocado de gafas para el sol, puede provocarse más daño permanente en su visión del que podría causarse si se las quitara y entrecerrara los ojos. ¿Qué determina si cierto tipo de gafas para el sol son buenas para sus ojos? *(Ron Chapple/FPG International)*

capítulo

34

Ondas electromagnéticas

Líneas generales del capítulo

Las ondas descritas en los capítulos 16, 17 y 18 son ondas mecánicas. Por definición, la propagación de las perturbaciones mecánicas —como las ondas sonoras, las ondas en el agua y las ondas en una cuerda— necesitan la presencia de un medio. En el presente capítulo se abordan las propiedades de las ondas electromagnéticas que, a diferencia de las ondas mecánicas, pueden propagarse a través del espacio vacío.

En la sección 31.7 se proporcionó una breve descripción de las ecuaciones de Maxwell, las cuales forman las bases teóricas de todos los fenómenos electromagnéticos. Las consecuencias de las ecuaciones de Maxwell son enormes y dramáticas. La ley de Ampère-Maxwell predice que un campo eléctrico variable en el tiempo produce un campo magnético, de acuerdo con la ley de Faraday, la cual indica que un campo magnético que varía en el tiempo produce un campo eléctrico. La introducción de Maxwell del concepto de corriente de desplazamiento como una nueva fuente de campo magnético proporcionó el importante vínculo final entre los campos eléctrico y magnético en la física clásica.

Sorprendentemente, las ecuaciones de Maxwell predicen también la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan por el espacio a la rapidez de la luz *c*. El capítulo comienza con una descripción de cómo Heinrich Hertz confirmó las predicciones de Maxwell al generar y detectar ondas electromagnéticas en 1887. El descubrimiento llevó a la creación de muchos sistemas de comunicación prácticos, que incluyen la radio, la televisión y el radar. En un nivel conceptual Maxwell unificó los temas de la luz y el electromagnetismo desarrollando la idea de que la luz es una forma de radiación electromagnética.



[illegible] de la [illegible] de Saturno. [illegible] del campo electromagnético produjo las ecuaciones de campo que llevan su nombre. Una formidable habilidad matemática, combinada con su gran intuición, le permitieron encabezar el camino en el estudio del electromagnetismo y la teoría cinética. Murió de cáncer antes de cumplir los 50 años de edad. *(North Wind Picture Archives)*

A continuación aprenderá cómo las ondas electromagnéticas se generan por cargas eléctricas oscilantes. Las ondas están compuestas por campos eléctricos y magnéticos oscilantes, los cuales forman ángulos rectos entre sí y con la dirección de la propagación de la onda. Por consiguiente, las ondas electromagnéticas son de naturaleza transversal. La predicción de Maxwell de la radiación electromagnética demostró que las amplitudes de los campos eléctrico y magnético en una onda electromagnética están relacionadas mediante la expresión $E = cB$. Las ondas radiadas a partir de las cargas oscilantes se pueden detectar a grandes distancias. Más aún, las ondas electromagnéticas conducen energía y *momentum*, por tanto, pueden ejercer presión sobre una superficie.

El capítulo concluye con un vistazo al amplio intervalo de frecuencias cubierto por las ondas electromagnéticas. Por ejemplo, las ondas de radio (frecuencias de aproximadamente 10^7 Hz) son ondas electromagnéticas producidas por corrientes oscilantes en la antena transmisora de una torre de radio. Las ondas de luz son una forma de radiación electromagnética de alta frecuencia (alrededor de 10^{14} Hz) producidas por electrones oscilantes en los átomos.

ECUACIONES DE MAXWELL Y DESCUBRIMIENTOS DE HERTZ

En su teoría unificada del electromagnetismo, Maxwell demostró que las ondas electromagnéticas son una consecuencia natural de las leyes fundamentales expresadas en las siguientes cuatro ecuaciones (véase la sección 31.7):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \textbf{(34.1)}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \qquad \textbf{(34.2)}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(34.3)}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{34.4}$$

Como se verá en la siguiente sección, las ecuaciones 34.3 y 34.4 pueden combinarse para obtener una ecuación de onda tanto para el campo eléctrico como para el magnético. En el espacio vacío ($Q = 0$, $I = 0$), la solución de esas dos ecuaciones muestra que la rapidez a la cual viajan las ondas electromagnéticas es igual a la rapidez medida de la luz. Tal resultado condujo a Maxwell a la predicción de que las ondas luminosas son una forma de radiación electromagnética.

El aparato experimental que Hertz usó para generar y detectar ondas electromagnéticas se presenta en forma esquemática en la figura 34.1. Una bobina de inducción se conecta a un transmisor hecho de dos electrodos esféricos separados por un estrecho espacio. La bobina proporciona breves oleadas de voltaje a los electrodos, haciendo a uno positivo y al otro negativo. Entre las esferas se genera una chispa cuando el campo eléctrico cerca de cualquier electrodo sobrepasa la intensidad dieléctrica del aire (3×10^6 V/m; véase la tabla 26.1). En un campo eléctrico intenso la aceleración de los electrones libres les proporciona suficiente energía para ionizar cualquier molécula que ellos golpean. Dicha ionización proporciona más electrones, lo cual puede acelerar y causar ionización posteriores. Conforme se ioniza el aire en la separación, éste se vuelve un mejor conductor y la descarga entre los electrodos exhibe un comportamiento oscilatorio a una frecuencia muy alta. Desde un punto de vista de circuitos eléctricos, lo cual es equivalente a un circuito LC, donde la inductancia es la de la bobina y la capacitancia se debe a los electrodos esféricos.

Puesto que L y C son bastante pequeñas en el aparato de Hertz, la frecuencia de oscilación es muy alta, $\approx$ 100 MHz. (Recuerde de la ecuación 32.22 que $\omega = 1/\sqrt{LC}$ para un circuito LC.) Las ondas electromagnéticas se radian a esta frecuencia como resultado de la oscilación (y, en consecuencia, de la aceleración) de las cargas libres en el circuito transmisor. Hertz pudo detectar estas ondas usando una sola espira de alambre con su propia separación de chispa (en el receptor). La espira receptora, colocada a varios metros del transmisor, tiene su propia inductancia efectiva, capacitancia y frecuencia natural de oscilación. En el experimento de Hertz se indujeron chispas a través de la separación de los electrodos de recepción cuando la frecuencia del receptor se ajustó para igualar a la del transmisor. De este modo, Hertz demostró que la corriente oscilante inducida en el receptor era producida por ondas electromagnéticas radiadas por el transmisor. Su experimento es análogo al fenómeno mecánico en el cual un diapasón responde a las vibraciones acústicas de otro diapasón idéntico que esté oscilando.



[illegible] las ondas de radio en 1887. Luego de encontrar que la rapidez de una onda de radio era la misma que la de la luz, demostró que las ondas de radio, al igual que las ondas luminosas, se podían reflejar, refractar y difractar. Hertz murió de envenenamiento sanguíneo a la edad de 36 años. Realizó muchas contribuciones a la ciencia durante su corta vida. El hertz, igual a una vibración completa o ciclo por segundo, lleva este nombre en su honor. *(The Bettmann Archive)*

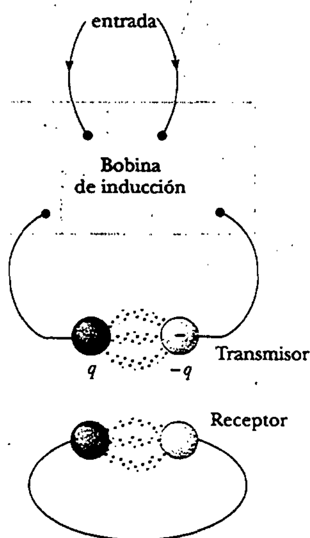
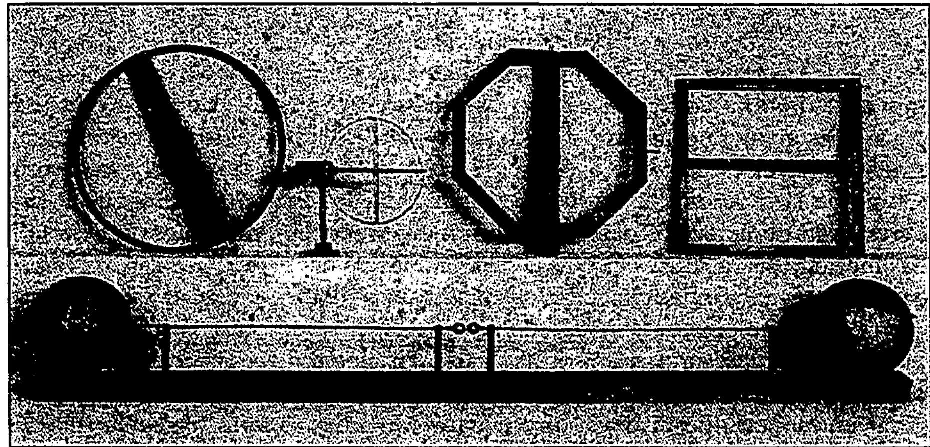


Figura 34.1 Diagrama esquemático del aparato de Hertz para generar y detectar ondas electromagnéticas. El transmisor se compone de dos electrodos esféricos conectados a una bobina de inducción, la cual proporciona breves oleadas de voltaje a las esferas, estableciendo oscilaciones en la descarga entre los electrodos (sugeridas por los puntos rojos). El receptor es casi una espira de alambre que contiene un segundo espacio con descarga eléctrica.



Un gran oscilador (abajo) y receptores circular, octagonal y cuadrado usados por Heinrich Hertz. *(Photo Deutsches Museum Munich)*

Experimento sorpresa

Algunos motores eléctricos usan conmutadores que hacen y rompen contacto eléctrico, creando chispas que recuerdan el método de Hertz para generar ondas electromagnéticas. Intente operar una rasuradora eléctrica o una mezcladora de cocina cerca de un radio AM. ¿Qué ocurre con la recepción?

De manera adicional, en una serie de experimentos Hertz demostró que la radiación generada por su dispositivo de separación de chispa mostraba las propiedades ondulatorias de interferencia, difracción, reflexión, refracción y polarización, mismas que en su totalidad son propiedades exhibidas por la luz. Por tanto, fue evidente que las ondas de frecuencias de radio que Hertz estaba generando tenían propiedades similares a las ondas de luz y diferían sólo en la frecuencia y la longitud de onda. Quizá su experimento más convincente fue la medición de la rapidez de esta radiación. Ondas de radiofrecuencia de frecuencia conocida se reflejaron en una lámina metálica y crearon un patrón de interferencia de onda estacionaria cuyos puntos nodales podían detectarse. La distancia medida entre los puntos nodales permitió la determinación de la longitud de onda λ. Utilizando la relación $v = \lambda f$ (Ec. 16.14), Hertz encontró que v era muy cercana a 3×10^8 m/s, la conocida rapidez c de la luz visible.

34.2 ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PLANAS

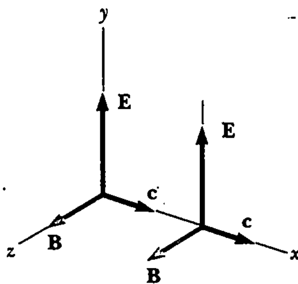


Figura 34.2 Una onda electromagnética viajando a velocidad **c** en la dirección x positiva. El campo eléctrico está a lo largo de la dirección y, y el campo magnético a lo largo de la dirección z. Estos campos dependen sólo de x y t.

Las propiedades de las ondas electromagnéticas pueden deducirse de las ecuaciones de Maxwell. Un método para deducir dichas propiedades es resolver la ecuación diferencial de segundo orden obtenida de la tercera y cuarta ecuaciones de Maxwell. Un riguroso tratamiento matemático de este tipo está más allá del alcance de este libro. Para evitar este problema suponga que los vectores para los campos eléctrico y magnético en una onda electromagnética tienen un comportamiento específico en el espacio-tiempo que es simple pero consistente con las ecuaciones de Maxwell.

Para comprender la predicción de las ondas electromagnéticas de manera más completa enfoque su atención en una onda electromagnética que viaja en la dirección x (la *dirección de propagación*). En esta onda el campo eléctrico **E** está en la dirección y, y el campo magnético **B** en la dirección z, como se muestra en la figura 34.2. Ondas como ésta, en las cuales los campos eléctrico y magnético están restringidos a ser paralelos a un par de ejes perpendiculares, se dice que son **ondas polarizadas linealmente.**[1] Asimismo, se supone que en cualquier punto P las magnitudes de E y B de los campos dependen sólo de x y t y no de las coordenadas y o z. Un

1 Las ondas con otros patrones particulares de vibraciones de los campos eléctrico y magnético incluyen ondas polarizadas en forma circular. El patrón de polarización más general es elíptico.

conjunto de tales ondas de fuentes individuales se denomina **onda plana**. La superficie que une puntos de igual fase sobre todas las ondas, a la cual se le denomina **frente de onda**, podría ser un plano geométrico. En contraste, una fuente de radiación puntual envía ondas hacia afuera en todas direcciones. Para tal situación la superficie que une puntos de igual fase es una esfera, a la cual se le llama **onda esférica**.

E y B se relacionan entre sí por medio de las ecuaciones 34.3 y 34.4. En el espacio vacío, donde $Q = 0$ e $I = 0$, la ecuación 34.3 permanece invariable y la ecuación 34.4 se convierte en

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{34.5}$$

Empleando las ecuaciones 34.3 y 34.5, y la suposición de onda plana, se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales que relacionan a E y B. (Estas ecuaciones se derivarán formalmente más adelante en esta sección.) Por simplicidad se eliminan los subíndices en las componentes E_y y B_z:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{34.6}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \tag{34.7}$$

Advierta que las derivadas aquí son parciales. Por ejemplo, cuando se evalúa $\partial E/\partial x$, se supone que t es constante. Del mismo modo, cuando se evalúa $\partial B/\partial t$, x se mantiene constante. Tomando la derivada de la ecuación 34.6 respecto a x, y combinando el resultado con la ecuación 34.7, se obtiene

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{34.8}$$

De la misma manera, tomando la derivada de la ecuación 34.7 respecto a x, y combinándola con la ecuación 34.6, se obtiene

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \tag{34.9}$$

Las ecuaciones 34.8 y 34.9 tienen ambas la forma de la ecuación general de onda,[2] con la rapidez de onda v sustituida por c, donde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \tag{34.10}$$

Rapidez de las ondas electromagnéticas

Tomando $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A, y $\epsilon_0 = 8.854\ 19 \times 10^{-12}$ C^2/N·m^2 en la ecuación 34.10, se encuentra que $c = 2.997\ 92 \times 10^8$ m/s. Puesto que esta rapidez es precisamente la rapidez de la luz en el espacio vacío, uno está orillado a creer (lo cual es correcto) que la luz es una onda electromagnética.

[2] La ecuación general de onda es de la forma $(\partial^2 y/\partial x^2) = (1/v^2)(\partial^2 y/\partial t^2)$, donde v es la rapidez de la onda y y es la función de onda. La ecuación general de onda fue presentada como la ecuación 16.26, y sería útil que el lector revisara la sección 16.9.

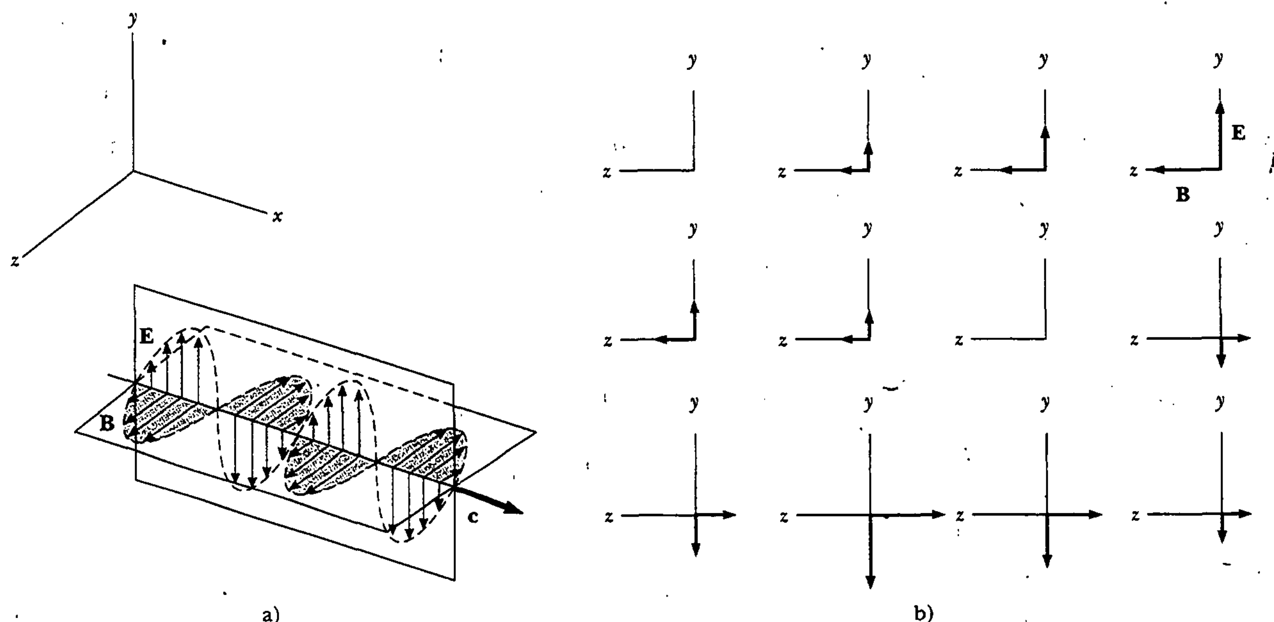


Figura 34.3 Representación de una onda electromagnética plana sinusoidal y polarizada linealmente, que se mueve en la dirección x positiva a velocidad $\mathbf{c}$. a) La onda en algún instante. Advierta las variaciones sinusoidales de E y B con x. b) Secuencia en el tiempo que ilustra los vectores de campo eléctrico y magnético presentes en el plano yz, como los ve un observador que mira en la dirección x negativa. Note las variaciones sinusoidales de E y B con t.

La solución más simple de las ecuaciones 34.8 y 34.9 es una onda sinusoidal, para la cual las amplitudes de campo E y B varían con x y t de acuerdo con las expresiones

Campos eléctrico y magnético sinusoidales

$$E = E_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \tag{34.11}$$

$$B = B_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \tag{34.12}$$

donde $E_{\text{máx}}$ y $B_{\text{máx}}$ son los valores máximos de los campos. El número angular de onda es la constante $k = 2\pi/\lambda$, donde λ es la longitud de onda. La frecuencia angular es $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia de onda. La relación ω/k es igual a la rapidez c:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f = c$$

Se ha usado la ecuación 16.14, $v = c = \lambda f$, la cual relaciona rapidez, frecuencia y longitud de onda de cualquier onda continua. La figura 34.3a es una representación gráfica, en algún instante, de una onda plana sinusoidal polarizada en forma lineal en la dirección x positiva. La figura 34.3b muestra cómo los vectores de campo eléctrico y magnético en una ubicación fija varían con el tiempo.

Nota al instructor • Necesita recordar a los estudiantes el significado de *ángulo de fase*. El hecho de que los vectores **E** y **B** sean perpendiculares puede confundirlos.

Pregunta sorpresa 34.1

¿Cuál es la diferencia de fase entre B y E en la figura 34.3?

Tomando las derivadas parciales de las ecuaciones 34.11 (respecto a x) y 34.12 (respecto a t), se encuentra que

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -kE_{\text{máx}}\operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \omega B_{\text{máx}}\operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación 34.6 se encuentra que, en cualquier instante,

$$kE_{\text{máx}} = \omega B_{\text{máx}}$$

$$\frac{E_{\text{máx}}}{B_{\text{máx}}} = \frac{\omega}{k} = c$$

Usando estos resultados junto con las ecuaciones 34.11 y 34.12 se observa que

$$\frac{E_{\text{máx}}}{B_{\text{máx}}} = \frac{E}{B} = c \qquad \textbf{(34.13)}$$

Es decir, **en cada instante la relación de la magnitud del campo eléctrico a la magnitud del campo magnético en una onda electromagnética es igual a la rapidez de la luz.**

Por último, debe notarse que las ondas electromagnéticas obedecen el principio de superposición (el cual se analizó en la sección 16.4 respecto a las ondas mecánicas), ya que las ecuaciones diferenciales que incluyen a E y B son ecuaciones lineales. Por ejemplo, se podrían sumar dos ondas con la misma frecuencia con sólo sumar en forma algebraica las magnitudes de los dos campos eléctricos.

He aquí un resumen de las propiedades de las ondas electromagnéticas descritas:

Propiedades de las ondas electromagnéticas

- Las soluciones de la tercera y cuarta ecuaciones de Maxwell son similares a las de ondas, donde tanto E como B satisfacen una ecuación de onda.
- Las ondas electromagnéticas viajan a través del espacio vacío a la rapidez de la luz $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$.
- Las componentes de los campos eléctrico y magnético de las ondas electromagnéticas planas son perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. La última propiedad se puede resumir afirmando que las ondas electromagnéticas son ondas transversales.
- Las magnitudes de **E** y **B** en el espacio vacío se relacionan por medio de la expresión $E/B = c$.
- Las ondas electromagnéticas obedecen el principio de superposición.

Ejemplo 34.1 Una onda electromagnética

Una onda electromagnética sinusoidal de 40.0 MHz de frecuencia viaja en el espacio libre en la dirección x, como se indica en la figura 34.4. a) Determine la longitud de onda y el periodo de la onda.

Solución Usando la ecuación 16.14 para las ondas de luz, $c = \lambda f$, y dado que $f = 40.0\ \text{MHz} = 4.00 \times 10^7\ \text{s}^{-1}$, se tiene

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}}{4.00 \times 10^7\ \text{s}^{-1}} = 7.50\ \text{m}$$

El periodo T de la onda es el inverso de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{4.00 \times 10^7\ \text{s}^{-1}} = 2.50 \times 10^{-8}\ \text{s}$$

b) En algún punto y en algún instante, el campo eléctrico tiene su valor máximo de 750 N/C y está a lo largo del eje y. Calcule la magnitud y la dirección del campo magnético en esta posición y tiempo.

Solución De la ecuación 34.13 se ve que

$$B_{\text{máx}} = \frac{E_{\text{máx}}}{c} = \frac{750\ \text{N/C}}{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}} = 2.50 \times 10^{-6}\ \text{T}$$

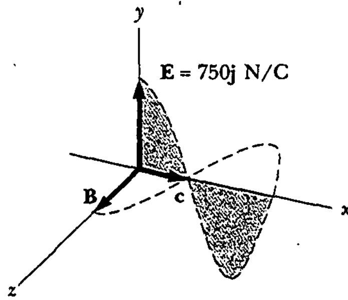


Figura 34.4 En algún instante una onda electromagnética plana que se mueve en la dirección x tiene un campo eléctrico máximo de 750 N/C en la dirección y positiva. El campo magnético correspondiente en dicho punto tiene una magnitud E/c y está en la dirección z.

Puesto que **E** y **B** deben ser perpendiculares entre sí, y perpendiculares a la dirección de propagación de la onda (x en este caso), se concluye que **B** está en la dirección z.

c) Escriba expresiones para la variación en el espacio-tiempo de las componentes de los campos eléctrico y magnético de dicha onda.

Solución Aplique las ecuaciones 34.11 y 34.12 directamente:

$$E = E_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) = (750 \text{ N/C}) \cos(kx - \omega t)$$

$$B = B_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) = (2.50 \times 10^{-6} \text{ T}) \cos(kx - \omega t)$$

donde

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(4.00 \times 10^7 \text{ s}^{-1}) = 2.51 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{7.50 \text{ m}} = 0.838 \text{ rad/m}$$

Sección opcional

Obtención de las ecuaciones 34.6 y 34.7

Para obtener la ecuación 34.6 comience con la ley de Faraday, ecuación 34.3:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Suponga de nuevo que la onda electromagnética viaja en la dirección x, con el campo eléctrico **E** en la dirección y positiva y el campo magnético **B** en la dirección z positiva.

Considere un rectángulo de ancho dx y altura ℓ que se encuentra en el plano xy, como se muestra en la figura 34.5. Para aplicar la ecuación 34.3 debe evaluar primero la integral de línea de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ alrededor del rectángulo. Las contribuciones de la parte superior y de la parte inferior del rectángulo son cero debido a que **E** es perpendicular a $d\mathbf{s}$ en estas trayectorias. Se puede expresar el campo eléctrico sobre el lado derecho del rectángulo como

$$E(x + dx, t) \approx E(x, t) + \left.\frac{dE}{dx}\right]_{t \text{ constante}} dx = E(x, t) + \frac{\partial E}{\partial x} dx$$

mientras el campo en el lado izquierdo es sólo $E(x, t)$.[3] Por tanto, la integral de línea sobre tal rectángulo viene a ser alrededor de

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E(x + dx, t) \cdot \ell - E(x, t) \cdot \ell \approx (\partial E/\partial x)\, dx \cdot \ell \qquad \textbf{(34.14)}$$

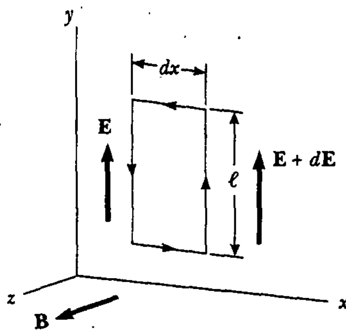


Figura 34.5 Conforme una onda plana pasa a través de una trayectoria rectangular de ancho dx que yace en el plano xy, el campo eléctrico en la dirección y varía de **E** a **E** + d**E**. Esta variación espacial en **E** da lugar a un campo magnético variable en el tiempo a lo largo de la dirección z, de acuerdo con la ecuación 34.6.

Como el campo magnético está en la dirección z, el flujo magnético que pasa por el rectángulo de área $\ell\, dx$ es aproximadamente $\Phi_B = B\ell\, dx$. (Lo cual supone que dx es muy pequeño comparado con la longitud de onda de la onda.) Tomando la derivada del flujo magnético respecto del tiempo se obtiene

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \ell dx \left.\frac{dB}{dt}\right]_{x \text{ constante}} = \ell dx \frac{\partial B}{\partial t} \qquad \textbf{(34.15)}$$

[3] Puesto que dE/dx en esta ecuación está expresada como el cambio en E con x en un instante t determinado, dE/dx es equivalente a la derivada parcial $\partial E/\partial x$. De igual modo, dB/dt significa el cambio de B con el tiempo en una posición particular x, por lo que en la ecuación 34.15 puede sustituir dB/dt con $\partial B/\partial t$.

Sustituyendo las ecuaciones 34.14 y 34.15 en la ecuación 34.3 se obtiene

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right) dx \cdot \ell = -\ell dx \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Esta expresión es la ecuación 34.6.

En una forma similar se puede verificar la ecuación 34.7 partiendo de la cuarta ecuación de Maxwell en el espacio vacío (Ec. 34.5). Aquí se evalúa la integral de línea de $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ alrededor de un rectángulo que yace sobre el plano xz y tiene un ancho dx y longitud ℓ, como se muestra en la figura 34.6. Si advierte que la magnitud del campo magnético cambia de $B(x, t)$ a $B(x + dx, t)$ sobre el ancho dx, encontrará que la integral de línea sobre este rectángulo será aproximadamente

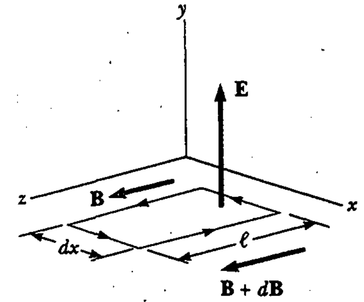


Figura 34.6 A medida que una onda plana pasa a través de una trayectoria rectangular de ancho dx que yace en el plano xz, el campo magnético en la dirección z varía desde $\mathbf{B}$ hasta $\mathbf{B} + d\mathbf{B}$. Esta variación espacial en $\mathbf{B}$ da lugar a un campo eléctrico variable en el tiempo a lo largo de la dirección y, de acuerdo con la ecuación 34.7.

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B(x,t) \cdot \ell - B(x + dx, t) \cdot \ell \approx -(\partial B/\partial x)\, dx \cdot \ell \qquad \textbf{(34.16)}$$

El flujo eléctrico que pasa por el rectángulo es $\Phi_E = E\ell\, dx$, lo cual, cuando se diferencia respecto al tiempo, produce

$$\frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \ell\, dx \frac{\partial E}{\partial t} \qquad \textbf{(34.17)}$$

La sustitución de las ecuaciones 34.16 y 34.17 en la ecuación 34.5 produce

$$-(\partial B/\partial x)\, dx \cdot \ell = \mu_0 \epsilon_0 \ell\, dx (\partial E/\partial t)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

que es la ecuación 34.7.

34.3 ENERGÍA TRANSPORTADA POR ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Las ondas electromagnéticas conducen energía, y cuando se propagan a través del espacio pueden transferir energía a objetos situados en su trayectoria. La rapidez de flujo de energía en una onda electromagnética se describe por un vector $\mathbf{S}$, denominado **vector de Poynting**, el cual se define por la expresión

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \qquad \textbf{(34.18)}$$

Vector de Poynting

La magnitud del vector de Poynting representa la rapidez a la cual la energía fluye a través de una unidad de área superficial perpendicular a la dirección de la propagación de la onda. En consecuencia, la magnitud del vector de Poynting representa la *potencia por unidad de área*. La dirección del vector es a lo largo de la dirección de propagación de la onda (Fig. 34.7). Las unidades en el SI del vector de Poynting son $\text{J/s}\cdot\text{m}^2 = \text{W/m}^2$.

Como ejemplo, evalúe la magnitud de $\mathbf{S}$ para una onda electromagnética plana donde $|\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = EB$. En este caso,

$$S = \frac{EB}{\mu_0} \qquad \textbf{(34.19)}$$

Magnitud del vector de Poynting para una onda plana

Puesto que $B = E/c$, esto también se puede expresar como

$$S = \frac{E^2}{\mu_0 c} = \frac{c}{\mu_0} B^2$$

Dichas ecuaciones para S se aplican en cualquier instante de tiempo y representan la rapidez *instantánea* a la cual pasa la energía a través de una unidad de área.

Lo que es de mayor interés para una onda electromagnética plana sinusoidal es el promedio en el tiempo de S sobre uno o más ciclos, lo que se denomina *intensidad de onda I.* (La intensidad de las ondas sonoras se analizó en el capítulo 17.) Cuando se toma este promedio, se obtiene una expresión que incluye el promedio en el tiempo de $\cos^2(kx - \omega t)$, lo cual es igual a $\frac{1}{2}$. Por tanto, el valor promedio de S (en otras palabras, la intensidad de la onda) es

Intensidad de onda

$$I = S_{\text{prom}} = \frac{E_{\text{máx}} B_{\text{máx}}}{2\mu_0} = \frac{E^2_{\text{máx}}}{2\mu_0 c} = \frac{c}{2\mu_0} B^2_{\text{máx}} \qquad \textbf{(34.20)}$$

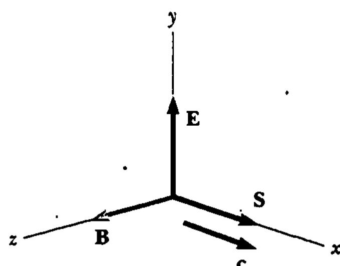


Figura 34.7 El vector de Poynting S para una onda electromagnética plana está a lo largo de la dirección de propagación de la onda.

Recuerde que la energía por unidad de volumen, que es la densidad de energía instantánea u_E asociada con un campo eléctrico, está dada por la ecuación 26.13:

$$u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

y que la densidad de energía instantánea u_B asociada con un campo magnético está dada por la ecuación 32.14:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Ya que E y B varían con el tiempo en una onda electromagnética, las densidades de energía también varían con el tiempo. Cuando se usan las relaciones $B = E/c$ y $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, la ecuación 32.14 se vuelve

$$u_B = \frac{(E/c)^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0\epsilon_0}{2\mu_0} E^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Al comparar este resultado con la expresión para u_E se ve que

$$u_B = u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Esto es, **para una onda electromagnética, la densidad de energía instantánea asociada con el campo magnético es igual a la densidad de energía instantánea asociada con el campo eléctrico**. Por tanto, en un volumen dado la energía también es compartida por los dos campos.

La **densidad de energía instantánea total** u es igual a la suma de las densidades de energía asociadas con los campos eléctrico y magnético:

Densidad de energía instantánea total

$$u = u_E + u_B = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Cuando esta densidad de energía instantánea total se promedia sobre uno o más ciclos de una onda electromagnética, de nuevo se obtiene un factor de $\frac{1}{2}$. Por consiguiente, para cualquier onda electromagnética la energía promedio total por unidad de volumen es

Densidad de energía promedio de una onda electromagnética

$$u_{\text{prom}} = \epsilon_0 (E^2)_{\text{prom}} = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2_{\text{máx}} = \frac{B^2_{\text{máx}}}{\mu_0} \qquad \textbf{(34.21)}$$

Comparando este resultado con la ecuación 34.20 para el valor promedio de S se ve que

$$I = S_{\text{prom}} = c u_{\text{prom}} \qquad \textbf{(34.22)}$$

En otras palabras, **la intensidad de una onda electromagnética es igual a la densidad de energía promedio multiplicada por la rapidez de la luz.**

EJEMPLO 34.2 Campos sobre la página

Estime las magnitudes máximas de los campos eléctrico y magnético de la luz que está incidiendo sobre esta página debido a la luz visible que viene desde la lámpara de su escritorio. Trate a la lámpara como una fuente puntual de radiación electromagnética que es más o menos 5% eficiente al convertir energía eléctrica en luz visible.

Solución Recuerde de la ecuación 17.8 que la intensidad de onda I a una distancia r de una fuente puntual es $I = \mathcal{P}_{prom}/4\pi r^2$ donde $\mathcal{P}_{prom}$ es la salida de potencia promedio de la fuente y $4\pi r^2$ es el área de una esfera de radio r centrada en la fuente. Puesto que la intensidad de una onda electromagnética está dada también por la ecuación 34.20, se tiene

$$I = \frac{\mathcal{P}_{prom}}{4\pi r^2} = \frac{E_{máx}^2}{2\mu_0 c}$$

Ahora debe hacer algunas suposiciones acerca de los números a ingresar en esta ecuación. Si se tiene un foco de 60 W, su salida a 5% de eficiencia es de aproximadamente 3.0 W en la forma de luz visible. (La energía restante se transfiere hacia afuera de la lámpara mediante conducción y radiación invisible.) Una distancia razonable del foco a la página debe ser de 0.30 m. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} E_{máx} &= \sqrt{\frac{\mu_0 c \mathcal{P}_{prom}}{2\pi r^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(4\pi \times 10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(3.00\times 10^8\,\text{m/s})(3.0\,\text{W})}{2\pi(0.30\,\text{m})^2}} \\ &= 45\,\text{V/m} \end{aligned}$$

A partir de la ecuación 34.13:

$$B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = \frac{45\,\text{V/m}}{3.00\times 10^8\,\text{m/s}} = 1.5\times 10^{-7}\,\text{T}$$

Tal valor es dos órdenes de magnitud más pequeño que el campo magnético de la Tierra, el cual, a diferencia del campo magnético en la onda luminosa emitida por la lámpara de su escritorio, no es oscilante.

Ejercicio Estime la densidad de energía de la onda luminosa justo antes de que golpee esta página.

Respuesta $9.0 \times 10^{-9}\,\text{J/m}^3$.

MOMENTUM Y PRESIÓN DE RADIACIÓN

Las ondas electromagnéticas transportan tanto *momentum* lineal como energía. De ello se deduce que, conforme este *momentum* es absorbido por alguna superficie, se ejerce presión sobre ésta. En el presente análisis se supondrá que la onda electromagnética golpea la superficie en una incidencia normal y transporta una energía total U a la superficie en un tiempo t. Maxwell demostró que, si la superficie absorbe toda la energía incidente U en este momento (como lo hace un cuerpo negro, introducido en el capítulo 20), el *momentum* total **p** transportado a la superficie tiene una magnitud

$$p = \frac{U}{c} \quad \text{(absorción completa)} \qquad \textbf{(34.23)}$$

***Momentum* transportado a una superficie perfectamente absorbente**

La presión ejercida sobre la superficie se define como la fuerza por unidad de área F/A. Combine esto con la segunda ley de Newton:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt}$$

Si ahora reemplaza p, el *momentum* transportado a la superficie por la luz, a partir de la ecuación 34.23, se tiene

$$P = \frac{1}{A}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{A}\frac{d}{dt}\left(\frac{U}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{(dU/dt)}{A}$$

La cantidad $(dU/dt)/A$ se reconoce como la rapidez a la cual la energía está llegando a la superficie por unidad de área, lo cual es la magnitud del vector de Poynting. En consecuencia, la presión de radiación P ejercida sobre la superficie perfectamente absorbente es

Presión de radiación ejercida sobre una superficie perfectamente absorbente

$$P = \frac{S}{c} \quad \textbf{(34.24)}$$

Advierta que la ecuación 34.24 es una expresión para la P mayúscula, la presión, mientras que la ecuación 34.23 es una expresión para la p minúscula, el *momentum* lineal.

Experimento sorpresa

Usando el ejemplo 34.2 como punto de partida, estime la fuerza total ejercida sobre esta página por la luz a partir de su lámpara de escritorio. ¿Hace alguna diferencia el hecho de que la página contenga una gran fotografía oscura en lugar de una mayor cantidad de espacio en blanco?

Si la superficie es un reflector perfecto (como un espejo) y la incidencia es normal, entonces el *momentum* transportado a la superficie en un tiempo t es el doble que el dado por la ecuación 34.23. Es decir, el *momentum* transferido a la superficie por la luz incidente es $p = U/c$, y el transferido por la luz reflejada también es $p = U/c$. Por tanto,

$$p = \frac{2U}{c} \quad \text{(reflexión completa)} \quad \textbf{(34.25)}$$

El *momentum* entregado a una superficie que tiene un poder de reflexión en algún punto entre estos dos extremos tiene un valor entre U/c y $2U/c$, dependiendo de las propiedades de la superficie. Por último, la presión de radiación ejercida sobre una superficie de reflexión perfecta para incidencia normal de la onda es[4]

Presión de radiación ejercida sobre una superficie de reflexión perfecta

$$P = \frac{2S}{c} \quad \textbf{(34.26)}$$

Aunque las presiones de radiación son muy pequeñas (alrededor de 5×10^{-6} N/m^2 para la luz solar directa), se midieron utilizando balanzas de torsión como la que se presenta en la figura 34.8. Un espejo (un reflector perfecto) y un disco negro (un absorbente perfecto) están conectados por una barra horizontal suspendida de una delgada fibra. La luz que incide de manera normal en el disco negro se absorbe por completo, por lo que todo su *momentum* se transfiere al disco. La luz que incide de manera normal sobre el espejo se refleja totalmente, por tanto, el *momentum* transferido al espejo es dos veces mayor que el transferido al disco. La presión de radiación se determina midiendo el ángulo a través del cual gira la barra de conexión horizontal. El aparato debe ponerse en un alto vacío para eliminar los efectos de las corrientes de aire.

La NASA está explorando la posibilidad de la *navegación solar* como un medio de bajo costo para enviar naves espaciales a los planetas. Se usarían enormes velas reflectoras como en los botes en la cercanía de la Tierra se emplean velas de lona.

web

Visite **http://pds.jpl.nasa.gov** para más información acerca de las misiones a los planetas. También puede leer, de Arthur C. Clarke, la historia de ciencia ficción de 1963, *The Wind from the Sun*, acerca de una carrera de yates solares.

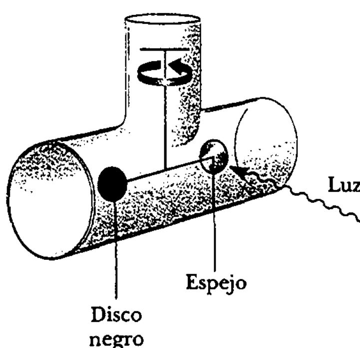


Figura 34.8 Un aparato para medir la presión ejercida por la luz. En la práctica el sistema está contenido en un alto vacío.

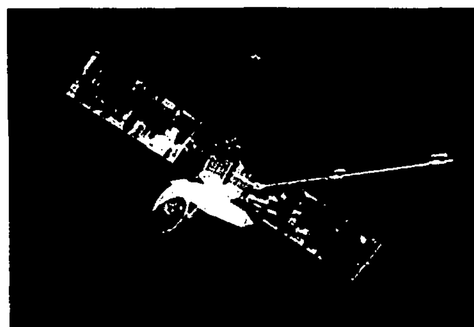


Figura 34.9 El Mariner 10 usó sus paneles solares para "navegar con la luz solar". *(Cortesía de la NASA)*

[4] Para la incidencia oblicua sobre una superficie perfectamente reflectora, el *momentum* transferido es $(2U\cos\theta)/c$ y la presión es $P = (2S\cos^2\theta)/c$, donde θ es el ángulo entre la normal a la superficie y la dirección de propagación de onda.

En 1973 los ingenieros de la NASA sacaron ventaja del *momentum* de la luz del Sol que golpea los paneles solares del Mariner 10 (Fig. 34.9) para hacer pequeñas correcciones de curso cuando el suministro de combustible de la nave espacial estaba por acabarse. (El procedimiento se realizó cuando la nave espacial estaba en la vecindad del planeta Mercurio. ¿También habría funcionado en las cercanías de Plutón?)

EJEMPLO CONCEPTUAL **Barriendo el Sistema Solar**

Existe una gran cantidad de polvo en el espacio interestelar. Aunque en teoría estas partículas de polvo pueden variar en tamaño desde un tamaño molecular hasta uno más grande, muy poco del polvo en el sistema solar es más pequeño que alrededor de 0.2 μm. ¿Por qué?

Solución Las partículas de polvo están sujetas a dos fuerzas significativas —la fuerza gravitacional que las lleva hacia el Sol, y la fuerza de presión de radiación que las empuja lejos del astro. La fuerza gravitacional es proporcional al cubo del radio de una partícula de polvo esférica, pues ésta es proporcional a la masa y, por tanto, al volumen $4\pi r^3/3$ de la partícula. La presión de radiación es proporcional al cuadrado del radio porque depende de la sección transversal del plano de la partícula. Para grandes partículas la fuerza gravitacional es mayor que la fuerza de la presión de radiación. Para partículas que tienen radios menores a aproximadamente 0.2 μm, la fuerza de presión de radiación es mayor que la fuerza gravitacional, y como resultado tales partículas son barridas hacia afuera del Sistema Solar.

EJEMPLO 34.4 **Presión de un apuntador láser**

Mucha gente que realiza presentaciones usa un apuntador láser para dirigir la atención del auditorio. Si un apuntador de 3.0 mW crea un punto que tiene un diámetro de 2.0 mm, determine la presión de radiación sobre una pantalla que refleja 70% de la luz que la golpea. La potencia de 3.0 mW es un valor promediado en el tiempo.

Solución Sin duda no se espera que la presión sea muy grande. Antes de poder calcularla debe determinar el vector de Poynting del haz dividiendo la potencia promediada en el tiempo, entregada vía la onda electromagnética, por el área de sección transversal del haz:

$$S = \frac{\mathcal{P}}{A} = \frac{\mathcal{P}}{\pi r^2} = \frac{3.0 \times 10^{-3}\,\text{W}}{\pi\left(\dfrac{2.0 \times 10^{-3}\,\text{m}}{2}\right)^2} = 955\,\text{W/m}^2$$

Que es casi la misma intensidad de la luz solar en la superficie de la Tierra. (Por tanto, no es seguro dirigir el haz de un apuntador láser al ojo de una persona; puede ser más peligroso que mirar directamente al Sol.)

Ahora puede determinar la presión de radiación del haz de láser. La ecuación 34.26 indica que un haz reflejado por completo aplicaría una presión de $P = 2S/c$. La reflexión real se puede modelar como sigue: Suponga que la superficie absorbe al haz, lo cual resulta en una presión $P = S/c$. Luego la superficie emite al haz, lo cual da como resultado una presión adicional $P = S/c$. Si la superficie emite sólo una fracción f del haz (por lo que f es la cantidad del haz incidente reflejado), entonces la presión debida al haz emitido es $P = fS/c$. Por consiguiente, la presión total sobre la superficie debida a la absorción y reemisión (reflexión) es

$$P = \frac{S}{c} + f\frac{S}{c} = (1 + f)\frac{S}{c}$$

Advierta que si $f = 1$, lo cual representa reflexión completa, esta ecuación se reduce a la ecuación 34.26. Para un haz que es 70% reflejado, la presión es

$$P = (1 + 0.70)\frac{955\,\text{W/m}^2}{3.0 \times 10^8\,\text{m/s}} = 5.4 \times 10^{-6}\,\text{N/m}^2$$

Se trata de un valor muy pequeño, como se esperaba. (Recuerde de la sección 15.2 que la presión atmosférica es más o menos 10^5 N/m^2.)

EJEMPLO 34.5 **Energía solar**

Como se apreció en el ejemplo anterior, el Sol entrega alrededor de 1 000 W/m^2 de energía a la superficie terrestre vía radiación electromagnética. a) Calcule la potencia total incidente sobre un techo de dimensiones 8.00 × 20.0 m.

Solución La magnitud del vector de Poynting para la radiación solar en la superficie de la Tierra es $S = 1\,000$ W/m^2; esto representa la potencia por unidad de área, o la intensidad luminosa. Suponiendo que la radiación incidente es normal al techo se obtiene

$$\mathcal{P} = SA = (1\,000\,\text{W/m}^2)(8.00 \times 20.0\,\text{m}^2)$$
$$= 1.60 \times 10^5\,\text{W}$$

Si toda esta potencia pudiera convertirse en energía eléctrica, proporcionaría más que la energía suficiente a una casa promedio. Sin embargo, la energía solar no se aprovecha tan fácilmente, y las perspectivas para conversión a gran escala no son tan prometedoras como parecería a partir de este cálculo. Por ejemplo, la eficiencia de conversión de la energía solar en eléctrica es, por lo común, de 10% para celdas fotovoltaicas. Los sistemas de techo para convertir energía solar en energía interna son alrededor de 50% eficientes; no obstante, hay otros problemas prácticos asociados con la energía solar, como los días nublados, la localización geográfica y los métodos de almacenamiento de energía.

b) Determine la presión de radiación y la fuerza de radiación ejercida sobre el techo, suponiendo que la cubierta del mismo es un absorbente perfecto.

Solución Empleando la ecuación 34.24, con $S = 1\,000 \text{ W/m}^2$ se encuentra que la presión de radiación es

$$P = \frac{S}{c} = \frac{1\,000 \text{ W/m}^2}{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3.33 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$$

Ya que la presión es igual a la fuerza por unidad de área, esto corresponde a una fuerza de radiación de

$$F = PA = (3.33 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2)(160 \text{ m}^2) = 5.33 \times 10^{-4} \text{ N}$$

Ejercicio ¿Cuánta energía solar incide sobre el techo en 1 h?

Respuesta 5.76×10^8 J.

Sección opcional



RADIACIÓN DE UNA LÁMINA DE CORRIENTE INFINITA

En esta sección se describirán los campos eléctrico y magnético radiados por un conductor plano que conduce una corriente variable en el tiempo. En la geometría de plano simétrico empleada aquí, las matemáticas son menos complejas de lo que se requiere en situaciones de menor simetría.

Considere una lámina conductora infinita que se encuentra en el plano yz y que conduce una corriente superficial en la dirección y, como se muestra en la figura 34.10. La corriente se distribuye a través de la dirección z de modo que la corriente por unidad de longitud es $\mathbf{J}_S$. Suponga que J_S varía sinusoidalmente con el tiempo como

$$J_S = J_{\text{máx}} \cos \omega t$$

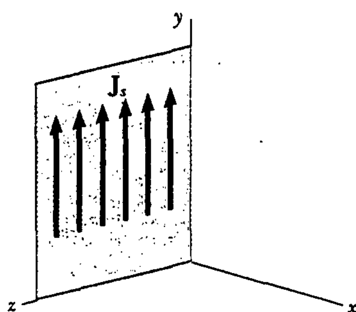


Figura 34.10 Parte de una lámina infinita de corriente que se encuentra en el plano yz. La densidad de corriente es sinusoidal y está dada por la expresión $J_S = J_{\text{máx}} \cos \omega t$. El campo magnético en todas partes es paralelo a la lámina y yace a lo largo del eje z.

donde $J_{\text{máx}}$ es la amplitud de la variación de corriente y ω es la frecuencia angular de la variación. Un problema similar para el caso de una corriente estable se trató en el ejemplo 30.6, donde se encontró que el campo magnético afuera de la lámina es en todas partes paralelo a la misma y se encuentra a lo largo del eje z. Se encontró que la magnitud del campo magnético era

$$B_z = \mu_0 \frac{J_s}{2}$$

En la presente situación, donde J_S varía con el tiempo, esta ecuación para B_z sólo es válida para distancias cercanas a la lámina. Sustituyendo esta expresión para J_S se tiene

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} J_{\text{máx}} \cos \omega t \text{ (para valores pequeños de } x)$$

Con el fin de obtener la expresión válida de B_z para valores arbitrarios de x se puede investigar la siguiente solución:[5]

Campo magnético radiado

$$B_z = \frac{\mu_0 J_{\text{máx}}}{2} \cos(kx - \omega t) \quad \textbf{(34.27)}$$

[5] Advierta que la solución puede escribirse también en la forma $\cos(\omega t - kx)$, lo cual es equivalente a $\cos(kx - \omega t)$. Es decir, $\cos \theta$ es una función par, lo cual significa que $\cos(-\theta) = \cos \theta$.

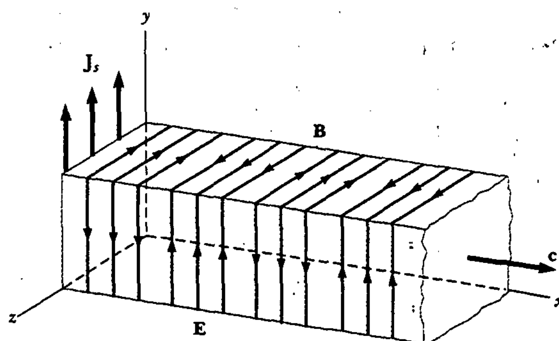


Figura 34.11 Representación de la onda electromagnética plana radiada por una lámina infinita de corriente que se encuentra en el plano *yz*. El vector **B** está en la dirección *z*, el vector **E** está en la dirección *y*, y la dirección del movimiento de la onda es a lo largo de *x*. Los vectores **B** y **E** se comportan de acuerdo con la expresión $\cos(kx - \omega t)$. Compare este dibujo con la figura 34.3a.

Hay dos cosas que se deben observar acerca de esta solución, la cual es única para la geometría que se está considerando. Primero, cuando x es muy pequeña, concuerda con la solución original. Segundo, satisface la ecuación de onda según se expresa en la ecuación 34.9. En consecuencia, se concluye que el campo magnético se encuentra a lo largo del eje z, varía con el tiempo y está caracterizado por una onda viajera transversal que tiene una frecuencia angular ω y un número de onda angular $k = 2\pi/\lambda$.

Se obtiene el campo eléctrico radiado por la lámina infinita de corriente empleando la ecuación 34.13:

$$E_y = cB_z = \frac{\mu_0 J_{\text{máx}} c}{2} \cos(kx - \omega t) \tag{34.28}$$

Campo eléctrico radiado

Por ende, el campo eléctrico está en la dirección y, perpendicular a **B**, y tiene las mismas dependencias con el espacio y el tiempo. Tales expresiones para B_z y E_y muestran que el campo radiado de una lámina infinita de corriente que conduce una corriente sinusoidal es una onda electromagnética plana que se propaga a una rapidez c a lo largo del eje x, como se muestra en la figura 34.11.

Se calcula el vector de Poynting para esta onda empleando las ecuaciones 34.19, 34.27 y 34.28:

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{\mu_0 J_{\text{máx}}^2 c}{4} \cos^2(kx - \omega t) \tag{34.29}$$

La intensidad de la onda, la cual es igual al valor promedio de S, es

$$I = S_{\text{prom}} = \frac{\mu_0 J_{\text{máx}}^2 c}{8} \tag{34.30}$$

Esta intensidad representa la potencia por unidad de área de la onda saliente a cada lado de la lámina. La rapidez total de energía emitida por unidad de área del conductor es $2S_{\text{prom}} = \mu_0 J_{\text{máx}}^2 c/4$.

EJEMPLO 34.[illegible] Una lámina infinita que conduce una corriente sinusoidal

Una lámina de corriente infinita que se encuentra en el plano *yz* conduce una corriente sinusoidal cuya densidad tiene un valor máximo de 5.00 A/m. a) Encuentre los valores máximos de los campos magnético y eléctrico radiados.

Solución A partir de las ecuaciones 34.27 y 34.28 se ve que los valores máximos de B_z y E_y son

$$B_{\text{máx}} = \frac{\mu_0 J_{\text{máx}}}{2} \quad \text{y} \quad E_{\text{máx}} = \frac{\mu_0 J_{\text{máx}} c}{2}$$

Utilizando los valores $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A, $J_{máx} = 5.00$ A/m y $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, se obtiene

$$B_{máx} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\text{T} \cdot \text{m/A})(5.00\,\text{A/m})}{2}$$

$$= 3.14 \times 10^{-6}\ \text{T}$$

$$E_{máx} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\text{T} \cdot \text{m/A})(5.00\,\text{A/m})(3.00 \times 10^8\text{m/s})}{2}$$

$$= 942\ \text{V/m}$$

b) ¿Cuál es la potencia promedio incidente sobre una superficie plana que es paralela a la lámina y tiene un área de 3.00 m²? (La longitud y el ancho de esta superficie son mucho más grandes que la longitud de onda de la radiación.)

Solución La intensidad, o potencia por unidad de área, radiada en cada dirección por la lámina de corriente está dada por la ecuación 34.30:

$$I = \frac{\mu_0 J_{máx}^2 c}{8}$$

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\text{T} \cdot \text{m/A})(5.00\,\text{A/m})^2(3.00 \times 10^8\text{m/s})}{8}$$

$$= 1.18 \times 10^3\text{W/m}^2$$

Al multiplicar ésta por el área de la superficie se obtiene la potencia incidente:

$$\mathcal{P} = IA = (1.18 \times 10^3\ \text{W/m}^2)(3.00\ \text{m}^2)$$

$$= 3.54 \times 10^3\ \text{W}$$

El resultado es independiente de la distancia desde la lámina de corriente porque se está tratando con una onda plana.

Sección opcional

PRODUCCIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS POR MEDIO DE UNA ANTENA

Las cargas aceleradas producen radiación electromagnética

Ni cargas estacionarias ni corrientes estables pueden producir ondas electromagnéticas. Sin embargo, cada vez que la corriente que circula por un alambre cambia con el tiempo, el alambre emite radiación electromagnética. **El mecanismo fundamental responsable de esta radiación es la aceleración de una partícula cargada. Siempre que una partícula cargada acelera, debe radiar energía.**

Un voltaje alterno aplicado a los alambres de una antena obliga a oscilar a una carga eléctrica en la antena. Se trata de una técnica común para acelerar cargas y es la fuente de las ondas de radio emitidas por la antena de transmisión de una estación de radio. La figura 34.12 ilustra cómo se hace. Dos barras metálicas se conectan a un generador que proporciona un voltaje que oscila sinusoidalmente, lo cual provoca que las cargas oscilen en las dos barras. En $t = 0$ la barra superior está proporcionando una carga positiva máxima y la barra inferior una carga negativa igual, como se aprecia en la figura 34.12a. El campo eléctrico cerca de la antena en este instante también se muestra en la figura 34.12a. Conforme las cargas positiva y negativa disminuyen desde sus valores máximos, las barras quedan menos cargadas, el campo cercano a las mismas disminuye en intensidad y el campo eléctrico máximo dirigido hacia abajo, producido en $t = 0$, se aleja de la barra. (Un campo magnético que oscila en una dirección perpendicular al plano del diagrama en la Fig. 34.12

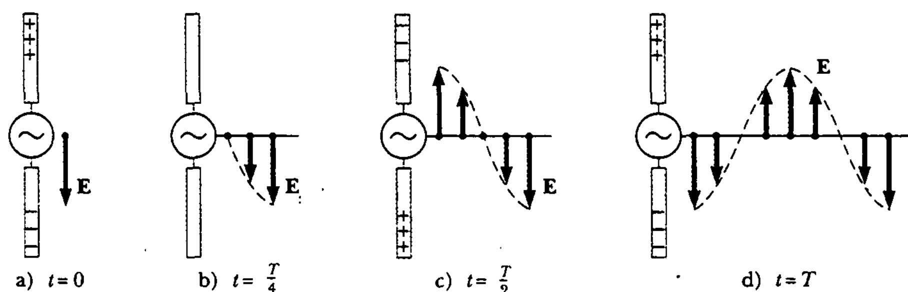


Figura 34.12 El campo eléctrico establecido por cargas oscilatorias en una antena. El campo se mueve alejándose de la antena con la rapidez de la luz.

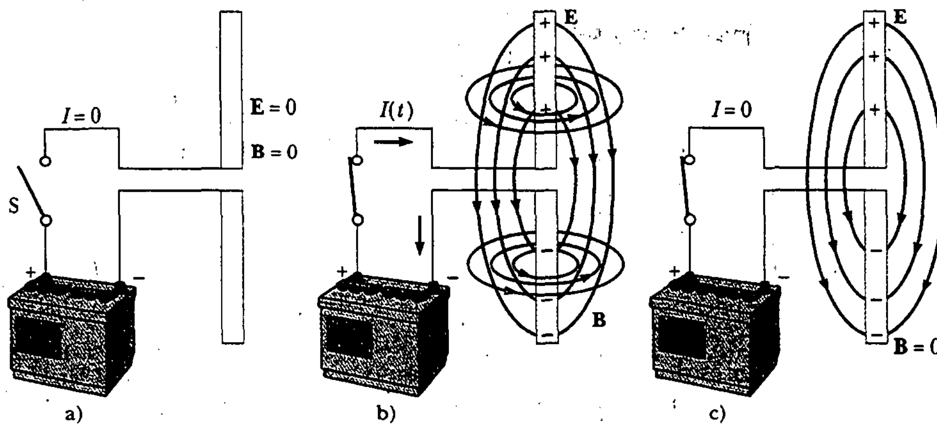


Figura 34.13 Un par de barras metálicas conectadas a una batería. a) Cuando el interruptor está abierto y no existe corriente, los campos eléctrico y magnético son cero. b) Inmediatamente después de que el interruptor se cierra, las barras se están cargando (por lo que existe una corriente). Debido a que la corriente está cambiando, las barras generan campos eléctricos y magnéticos variables. c) Cuando las barras están completamente cargadas, la corriente es cero, el campo eléctrico es un máximo y el campo magnético es cero.

acompaña al campo eléctrico oscilante, pero no se muestra por cuestiones de claridad.) Cuando las cargas sobre las barras momentáneamente son cero (Fig. 34.12b), el campo eléctrico en la barra ha caído a cero. Lo anterior ocurre en un tiempo igual a un cuarto del periodo de oscilación.

Conforme el generador carga las barras en el sentido opuesto del que se tenía al principio, la barra superior obtiene una carga negativa máxima y la barra inferior una carga positiva máxima (Fig. 34.12c); esto resulta en un campo eléctrico cerca de la barra que está dirigido hacia arriba después de un tiempo igual a medio periodo de oscilación. Las oscilaciones continúan como se indica en la figura 34.12d. El campo eléctrico cerca de la antena oscila en fase con la distribución de carga. Es decir, el campo apunta hacia abajo cuando la barra superior es positiva, y hacia arriba cuando la barra superior es negativa. Además, la magnitud del campo en cualquier instante depende de la cantidad de carga sobre las barras en ese instante.

Conforme las cargas continúan oscilando (y acelerándose) entre las barras, el campo eléctrico que establecen se mueve alejándose de la antena a la rapidez de la luz. Como se observa, de acuerdo con la figura 34.12, un ciclo de oscilación de carga produce una longitud de onda en el patrón de campo eléctrico.

A continuación considere lo que ocurre cuando dos barras conductoras se conectan a las terminales de una batería (Fig. 34.13). Antes de que se cierre el interruptor la corriente es cero, así que no hay campos presentes (Fig. 34.13a). Justo después de que se cierra el interruptor, se empieza a acumular carga positiva en una barra y carga negativa en la otra (Fig. 34.13b), lo cual corresponde a una corriente variable en el tiempo. La distribución de la carga cambiante origina que cambie el campo eléctrico, lo cual, a su vez, produce un campo magnético alrededor de las barras.[6] Por último, cuando las barras están cargadas por completo, la corriente es cero; por tanto, no hay campo magnético en ese instante (Fig. 34.13c).

Considere ahora la producción de ondas electromagnéticas por medio de una *antena de media onda*. En dicho arreglo dos barras conductoras se conectan a una fuente de voltaje alterno (como un oscilador LC), como se ve en la figura 34.14. La longitud de cada barra es igual a un cuarto de la longitud de onda de la radiación que se emitirá cuando el oscilador opera a frecuencia f. El oscilador hace que las

[6] Se han ignorado los campos producidos por los alambres que llegan a las barras. Es una buena aproximación si las dimensiones del circuito son mucho menores que la longitud de las barras.

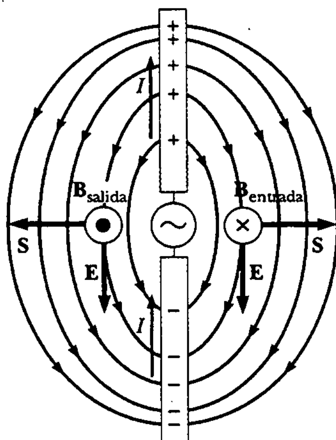


Figura 34.14 Una antena de media onda consta de dos barras metálicas conectadas a una fuente de voltaje alterno. Este diagrama muestra **E** y **B** en un instante en que la corriente está hacia arriba. Advierta que las líneas de campo eléctrico recuerdan a las de un dipolo (mostrado en la figura 23.21).

cargas se aceleren hacia adelante y hacia atrás entre las dos barras. La figura 34.14 muestra la configuración de los campos eléctrico y magnético en algún instante en que la corriente es hacia arriba. Las líneas de campo eléctrico se asemejan a las de un dipolo eléctrico. (En consecuencia, dicho tipo de antena algunas veces se llama *antena de dipolo.*) Puesto que estas cargas oscilan en forma continua entre las dos barras, la antena puede considerarse más o menos como un dipolo eléctrico oscilante. Las líneas de campo magnético forman círculos concéntricos alrededor de la antena y son perpendiculares a las líneas de campo eléctrico en todos los puntos. El campo magnético es cero en todos los puntos a lo largo del eje de la antena. Además, **E** y **B** están 90° fuera de fase en el tiempo porque la corriente es cero cuando las cargas en los extremos exteriores de las barras están a un máximo.

En los dos puntos donde se muestra el campo magnético en la figura 34.14, el vector de Poynting **S** está dirigido radialmente hacia afuera. Esto indica que la energía está fluyendo alejándose de la antena en dicho instante. En tiempos posteriores los campos y el vector de Poynting cambian de dirección conforme se alterna la corriente. Como **E** y **B** están 90° fuera de fase en puntos cerca del dipolo, el flujo de energía neto es cero. A partir de esto podría concluir (en forma incorrecta) que el dipolo no radia energía.

No obstante, se encuentra que, de hecho, se está radiando energía. Puesto que los campos de dipolo disminuyen cuando $1/r^3$ (como se mostró en el ejemplo 23.6 para el campo eléctrico de un dipolo estático), éstos no son importantes a grandes distancias de la antena. Sin embargo, a estas grandes distancias algo más provoca un tipo de radiación diferente a partir de aquella cercana a la antena. La fuente de esta radiación es la inducción continua de un campo eléctrico por un campo magnético variable en el tiempo, y la inducción de un campo magnético por medio de un campo eléctrico variable en el tiempo predicha por las ecuaciones 34.3 y 34.4. Los campos eléctrico y magnético producidos de esta manera están en fase entre sí y varían cuando $1/r$. El resultado es un flujo de energía hacia afuera en todo momento.

Las líneas de campo eléctrico producidas por una antena de dipolo en algún instante se presentan en la figura 34.15 mientras se propagan alejándose de la antena. Advierta que la intensidad y la potencia radiada son un máximo en un plano que es perpendicular a la antena y pasa por su punto medio. Asimismo, la potencia radiada es cero a lo largo del eje de la antena. Una solución matemática a las ecuaciones de Maxwell para la antena de dipolo muestra que la intensidad de la radiación

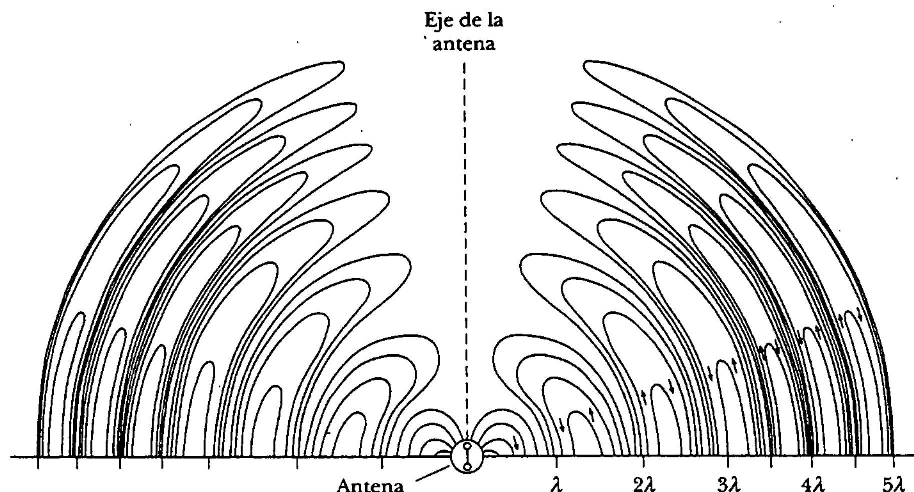


Figura 34.15 Líneas de campo eléctrico que rodean una antena de dipolo en un momento dado. Los campos de radiación se propagan hacia afuera desde la antena a una rapidez *c*.

varía cuando $(\text{sen}^2\theta)/r^2$, donde θ se mide desde el eje de la antena. La dependencia angular de la intensidad de la radiación se ilustra en la figura 34.16.

Las ondas electromagnéticas también pueden inducir corrientes en una antena receptora. La respuesta de una antena receptora de dipolo en una posición determinada es un máximo cuando el eje de la antena es paralelo al campo eléctrico en ese punto y cero cuando el eje es perpendicular al campo eléctrico.

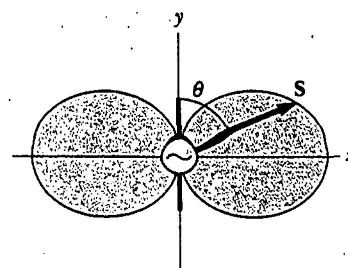


Figura 34.16 Dependencia angular de la intensidad de radiación producida por un dipolo eléctrico oscilante.

Pregunta sorpresa 34.2

Si la onda electromagnética plana en la figura 34.11 representa la señal de una estación de radio distante, ¿cuál sería la mejor orientación para la antena de su radio portátil a) a lo largo del eje *x*, b) a lo largo del eje *y* o c) a lo largo del eje *z*?

Experimento sorpresa

Gire un radio portátil (con antena telescópica) en torno a un eje horizontal mientras está sintonizada una estación débil. ¿Puede hacer uso de lo aprendido de este movimiento para verificar la respuesta a la pregunta sorpresa 34.2?

EL ESPECTRO DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Los diversos tipos de ondas electromagnéticas se registran en la figura 34.17, la cual muestra el **espectro electromagnético**. Advierta el amplio intervalo de frecuencias y longitudes de onda. No hay un punto de división claro entre un tipo de onda y el siguiente. Recuerde que **todas las formas de los varios tipos de radiación son producidas por el mismo fenómeno: cargas aceleradas**. Los nombres dados a los tipos de ondas son sólo por conveniencia para describir la región del espectro en la cual se encuentran.

Ondas de radio

Las **ondas de radio** son el resultado de cargas que se aceleran a través de alambres de conducción. Ubicadas en una escala que va de los 10^4 m a casi 0.1 m en su longitud de onda, son generadas por dispositivos electrónicos, como los osciladores *LC*, y se usan en sistemas de comunicación de radio y televisión.

Microondas

Las **microondas** tienen longitudes de onda que varían aproximadamente desde 0.3 m a 10^{-4} m, y también son generadas por dispositivos electrónicos. Debido a su corta longitud de onda, son muy adecuadas en los sistemas de radar y para el estudio de las propiedades atómicas y moleculares de la materia. Los hornos de microondas (en los cuales la longitud de onda de la radiación es $\lambda = 0.122$ m) representan una interesante aplicación doméstica de estas ondas. Se ha sugerido que la energía solar se podría aprovechar por medio de un haz de microondas dirigido hacia la Tierra desde un colector solar en el espacio.[7]

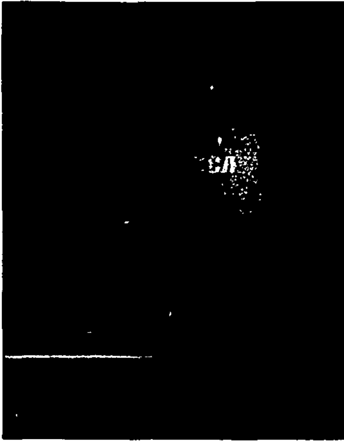
Ondas infrarrojas

Las **ondas infrarrojas** tienen longitudes de onda que varían desde 10^{-3} m hasta la longitud de onda más larga de la luz visible, 7×10^{-7} m. Tales ondas, producidas por moléculas y objetos a temperatura ambiente, son absorbidas con facilidad por la mayoría de los materiales. La energía infrarroja (IR) absorbida por una sustancia aparece como energía interna debido a que la energía agita los átomos del objeto, aumentando su movimiento vibratorio y traslacional, lo cual origina un aumento de temperatura. La radiación infrarroja tiene muchas aplicaciones prácticas y científicas en varias áreas, las cuales incluyen la terapia física, la fotografía infrarroja y la espectroscopia vibratoria.

Ondas de luz visible

La **luz visible**, la forma más familiar de ondas electromagnéticas, es la parte del espectro electromagnético que el ojo humano puede detectar. La luz es producida por el reacomodo de los electrones en átomos y moléculas. Las diversas longitudes de onda de la luz visible, las cuales corresponden a los diferentes colores, van del rojo ($\lambda \approx 7 \times 10^{-7}$ m) al violeta ($\lambda \approx 4 \times 10^{-7}$ m). La sensibilidad del ojo humano es una función de la longitud de onda, la cual es máxima a una longitud de onda de

[7] P. Glaser, "Solar Power from Satellites", *Phys. Today*, febrero de 1977, p. 30.



Las antenas de televisión con forma de plato satelital reciben señales de las estaciones televisoras enviadas por satélites en órbita alrededor de la Tierra. *(Cortesía de Thompson Consumer Electronics)*

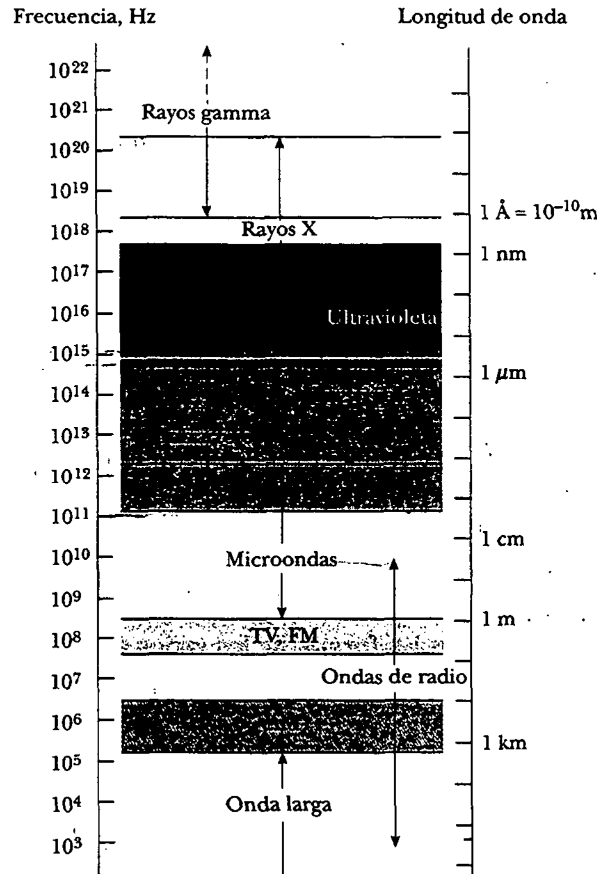


Figura 34.17 El espectro electromagnético. Advierta el traslape entre tipos de onda adyacentes.

aproximadamente 5.5×10^{-7} m. Con lo anterior en mente, ¿por qué supone usted que las pelotas de tenis casi siempre tienen un color amarillo verdoso?

Ondas ultravioleta

Las **ondas ultravioleta** abarcan longitudes de onda que varían de aproximadamente 4×10^{-7} m a 6×10^{-10} m. El Sol es una importante fuente de luz ultravioleta (UV), la cual es la principal causa del bronceado. Las lociones bloqueadoras son transparentes a la luz visible, pero absorben la mayor parte de la luz UV. Mientras más elevado sea el factor de protección solar (SPF) del bloqueador, mayor será el porcentaje de luz UV absorbida. Los rayos ultravioleta también han sido implicados en la formación de cataratas, una nube del cristalino dentro del ojo. Usar gafas para el sol que no bloqueen la luz UV es peor para sus ojos que no usarlas. Los lentes de cualesquiera gafas para el sol absorben alguna luz visible, lo cual provoca que la pupila del usuario se dilate. Si las gafas no bloquean también la luz UV, entonces se puede causar más daño a los cristalinos del ojo debido a la dilatación de la pupila. Si usted no usa en absoluto gafas para el sol, sus pupilas están contraídas, y al entrecerrar los ojos entra mucho menor cantidad de luz UV. Las gafas para el sol de alta calidad bloquean casi toda la luz UV dañina al ojo.

La mayor parte de la luz UV proveniente del Sol es absorbida por las moléculas del ozono (O_3) en la capa superior de la atmósfera terrestre, llamada estratosfera. El escudo de ozono convierte a la letal radiación UV de alta energía en radiación infrarroja, la cual, a su vez, calienta la estratosfera. En los años recientes ha habido una controversia respecto de la posible destrucción de la capa protectora de ozono, como consecuencia del uso de los químicos emitidos de las latas de aerosoles y los usados como refrigerantes.

Los **rayos X** tienen longitudes de onda en el intervalo de aproximadamente 10^{-8} m a 10^{-12} m. La fuente más común de rayos X es la desaceleración de electrones de alta energía que bombardean a un blanco metálico. Los rayos X se usan como una herramienta de diagnóstico en medicina y como tratamiento para ciertas formas de cáncer. Puesto que los rayos X dañan o destruyen tejidos y organismos vivos, debe tenerse cuidado para evitar una exposición o sobreexposición innecesarias. Este tipo de rayos se usan también en el estudio de la estructura cristalina, ya que sus longitudes de onda son comparables a las distancias de separación atómicas en sólidos (alrededor de 0.1 nm).

Rayos X

Los **rayos gamma** son ondas electromagnéticas emitidas por núcleos radiactivos (como ^{60}Co y ^{137}Cs) y durante ciertas reacciones nucleares. Los rayos gamma de alta energía son un componente de los rayos cósmicos que ingresan a la atmósfera de la Tierra desde el espacio. Tienen longitudes de onda que van desde más o menos 10^{-10} m a menos de 10^{-14} m. Son muy penetrantes y producen serios daños cuando son absorbidos por tejidos vivos. En consecuencia, quienes trabajan cerca de dicha radiación peligrosa deben protegerse con materiales muy absorbentes, como gruesas capas de plomo.

Rayos gamma

Pregunta sorpresa 34.3

La *AM* en los *radios AM* se usa para *amplitud modulada*, y la *FM* para *frecuencia modulada.* (La palabra *modular* significa "cambiar".) Si sus ojos pudiesen ver las ondas electromagnéticas de una antena de radio, ¿cómo podría distinguir una onda AM de una onda FM?

EJEMPLO 34.3 **Una antena de media onda**

Una antena de media onda trabaja bajo el principio de que la longitud óptima de la antena es la mitad de la longitud de onda de la radiación que se recibe. ¿Cuál es la longitud óptima de una antena de carro cuando recibe una señal de 94.0 MHz de frecuencia?

Solución La ecuación 16.14 indica que la longitud de onda de la señal es

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{9.40 \times 10^7 \text{ Hz}} = 3.19 \text{ m}$$

En consecuencia, para operar de manera más eficiente, la antena debería tener una longitud de (3.19 m)/2 = 1.60 m. Por razones prácticas las antenas de carro por lo común tienen un tamaño de un cuarto de longitud de onda.

RESUMEN

Las **ondas electromagnéticas**, predichas por las ecuaciones de Maxwell, tienen las siguientes propiedades:

- Los campos eléctrico y magnético satisfacen, cada uno, una ecuación de onda. Las dos ecuaciones de onda, que se obtienen de la tercera y cuarta ecuaciones de Maxwell, son

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{34.8}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \tag{34.9}$$

- Las ondas viajan a través del vacío a la rapidez de la luz c, donde

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s} \tag{34.10}$$

- Los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. (Por tanto, las ondas electromagnéticas son ondas transversales.)
- Las magnitudes instantáneas de **E** y **B** en una onda electromagnética se relacionan por medio de la expresión

$$\frac{E}{B} = c \tag{34.13}$$

- Las ondas transportan energía. La rapidez de flujo de energía que cruza un área unitaria se describe por medio del vector de Poynting **S**, donde

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{34.18}$$

- Transportan *momentum*, por tanto, pueden ejercer presión sobre superficies. Si una onda electromagnética cuyo vector de Poynting **S** es absorbido por completo por una superficie sobre la cual incide normalmente, la presión de radiación sobre esa superficie es

$$P = \frac{S}{c} \quad \text{(absorción completa)} \tag{34.24}$$

Si la superficie refleja de manera total una onda que incide de manera normal, la presión se duplica.

Los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética plana sinusoidal que se propaga en la dirección x positiva pueden escribirse como

$$E = E_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \tag{34.11}$$

$$B = B_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \tag{34.12}$$

donde ω es la frecuencia angular de la onda y k es el número de onda angular. Tales ecuaciones representan soluciones especiales a las ecuaciones de onda para E y B. Puesto que $\omega = 2\pi f$ y $k = 2\pi/\lambda$, donde f y λ son la frecuencia y la longitud de onda, respectivamente, se encuentra que

$$\frac{\omega}{k} = \lambda f = c$$

El valor promedio del vector de Poynting para una onda electromagnética plana tiene una magnitud

$$S_{\text{prom}} = \frac{E_{\text{máx}} B_{\text{máx}}}{2\mu_0} = \frac{E_{\text{máx}}^2}{2\mu_0 c} = \frac{c}{2\mu_0} B_{\text{máx}}^2 \tag{34.20}$$

La intensidad de una onda electromagnética plana sinusoidal es igual al valor promedio del vector de Poynting tomado sobre uno o más ciclos.

El espectro electromagnético incluye ondas que cubren un amplio intervalo de longitudes de onda, desde las largas ondas de radio a más de 10^4 m hasta los rayos gamma a menos de 10^{-14} m.

PREGUNTAS

1. Para una energía incidente determinada de una onda electromagnética, ¿por qué la presión de radiación sobre una superficie perfectamente reflectora es dos veces mayor que sobre una superficie que absorbe a la perfección?
2. Describa el significado físico del vector de Poynting.
3. ¿Los conductores que portan corriente emiten ondas electromagnéticas? Explique.
4. ¿Cuál es la causa fundamental de la radiación electromagnética?
5. Los ingenieros eléctricos a menudo hablan de la resistencia a la radiación de una antena. ¿Qué supone usted que quieren decir con esta frase?
6. Si una corriente de alta frecuencia pasa por un solenoide que contiene un núcleo metálico, éste se calienta por in-

ducción. Este proceso también cocina comida en un horno de microondas. Explique por qué los materiales se calientan en estas situaciones.

7. Antes del advenimiento de la televisión por cable y las antenas parabólicas, los propietarios montaban una antena de televisión sobre el techo o usaban "antenas de conejo" sobre sus equipos (Fig. P34.7). Ciertas orientaciones de la antena de recepción sobre un equipo de televisión proporcionaban una mejor recepción que otras. Además, la mejor orientación variaba de estación a estación. Explique por qué.

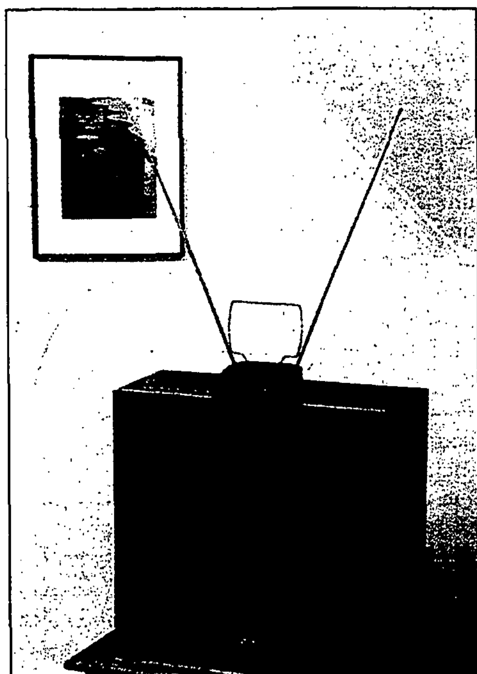


Figura P34.7 Preguntas 7, 12, 13 y 14. La antena con forma de V es la antena de VHF. *(George Semple)*

8. ¿Un alambre conectado a las terminales de una batería emite una onda electromagnética? Explique.

9. Si usted carga un peine frotándolo en su cabello, y después lo acerca a un imán de barra, ¿los campos eléctrico y magnético producidos constituyen una onda electromagnética?

10. Un plato vacío, de cristal o plástico, se siente frío al tacto inmediatamente después de sacarlo de un horno de microondas. ¿Cómo puede ser esto posible? (Suponga que ya pagó su recibo de luz.)

11. A menudo, cuando usted toca la antena interior de un radio o receptor de televisión, la recepción mejora al instante. ¿Por qué?

12. Explique cómo funciona la antena VHF (dipolo) de un aparato de televisión. (Véase la Fig. P34.7.)

13. Explique cómo funciona la antena UHF (espira) de un aparato de televisión. (Véase la Fig. P34.7.)

14. Explique por qué el voltaje inducido en una antena UHF (espira) depende de la frecuencia de la señal, en tanto que no sucede lo mismo con el voltaje en una antena VHF (dipolo). (Véase la Fig. P34.7.)

15. Liste todas las similitudes y diferencias que pueda entre las ondas sonoras y las ondas luminosas.

16. ¿Qué hace una onda de radio a las cargas en la antena de recepción para brindar una señal al radio de su automóvil?

17. ¿Qué determina la altura de la antena transmisora de una estación de radio AM?

18. Algunos transmisores de radio utilizan un "arreglo en fase" de antenas. ¿Cuál es su propósito?

19. ¿Qué pasa con la recepción de radio en un avión que vuela sobre la antena de dipolo (vertical) de la torre de control?

20. Cuando la luz (u otra radiación electromagnética) viaja a través de una región determinada, ¿qué es lo que oscila?

21. ¿Por qué la fotografía infrarroja de una persona se observa diferente a una fotografía de dicha persona tomada con luz visible?

22. Suponga que una criatura de otro planeta tiene ojos sensibles a la radiación infrarroja. Describa lo que la criatura vería si observara alrededor del cuarto donde usted está ahora. Esto es, ¿qué sería brillante y qué estaría oscurecido?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** □ = use computadora para resolver el problema □ = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 34.1 Ecuaciones de Maxwell y descubrimientos de Hertz

Sección 34.2 Ondas electromagnéticas planas

Nota: Suponga que el medio es el vacío a menos que se especifique alguna otra cosa.

1. Si la Estrella del Norte, o Polaris, se apagara hoy, ¿en qué año desaparecería de nuestra visión? La distancia desde la Tierra a Polaris es alrededor de 6.44×10^{18} m.

2. La rapidez de una onda electromagnética que viaja en una sustancia transparente no magnética es $v = 1/\sqrt{\kappa\mu_0\epsilon_0}$, donde κ es la constante dieléctrica de la sustancia. Determine la rapidez de la luz en el agua, la cual tiene una constante dieléctrica a frecuencias ópticas de 1.78.

3. Una onda electromagnética en el vacío tiene una amplitud de campo eléctrico de 220 V/m. Calcule la amplitud del campo magnético correspondiente.

4. Calcule el valor máximo del campo magnético de una onda electromagnética en un medio donde la rapidez de la luz es dos tercios de la rapidez de la luz en el vacío, y donde la amplitud del campo eléctrico es de 7.60 mV/m.

WEB 5. La figura 34.3a muestra una onda sinusoidal electromagnética plana que se propaga en lo que se eligió como la dirección x. Suponga que la longitud de onda es 50.0 m y que el campo eléctrico vibra en el plano xy con una amplitud de 22.0 V/m. Calcule a) la frecuencia de la onda y b) la magnitud y dirección de **B** cuando el campo eléctrico tiene su valor máximo en la dirección y negativa. c) Escriba una expresión para B en la forma

$$B = B_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$$

con valores numéricos para $B_{\text{máx}}$, k y ω.

6. Escriba expresiones para los campos eléctrico y magnético de una onda electromagnética plana sinusoidal que tiene una frecuencia de 3.00 GHz y viaja en la dirección x positiva. La amplitud del campo eléctrico es 300 V/m.

7. En unidades SI el campo eléctrico en una onda electromagnética se describe por medio de

$$E_y = 100 \operatorname{sen}(1.00 \times 10^7 x - \omega t)$$

Encuentre a) la amplitud del campo magnético correspondiente, b) la longitud de onda λ, y c) la frecuencia f.

8. Verifique por sustitución que las siguientes ecuaciones son soluciones para las ecuaciones 34.8 y 34.9, respectivamente:

$$E = E_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$$

$$B = B_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$$

9. **Problema de repaso.** Ondas de radio establecen un patrón de interferencia de onda estacionaria entre dos placas metálicas separadas 2.00 m. Ésta es la distancia mínima entre las placas que producirá un patrón de onda estacionaria. ¿Cuál es la frecuencia fundamental?

10. Un horno de microondas es activado por un tubo de electrones llamado magnetrón, el cual genera ondas electromagnéticas de 2.45 GHz de frecuencia. Las microondas entran al horno y se reflejan en las paredes. El patrón de onda estacionaria producido en el horno puede cocinar comida de manera irregular, con puntos calientes en la comida en los antinodos y puntos fríos en los nodos, de modo que con frecuencia se usa una mesa giratoria para rotar la comida y distribuir la energía. Si en vez de usar un horno de microondas con una mesa giratoria, como se supone que debe hacerse, se usa con un platón en una posición fija, los antinodos pueden aparecer como marcas de quemadura sobre alimentos como tiras de zanahoria o queso. La distancia de separación entre las quemaduras se mide en 6 cm ±5%. A partir de estos datos calcule la rapidez de las microondas.

Sección 34.3 Energía transportada por ondas electromagnéticas

11. ¿Cuánta energía electromagnética por metro cúbico está contenida en la luz solar si la intensidad de la misma en la superficie terrestre bajo cielo despejado es de 1 000 W/m^2?

12. Una estación de radio de AM transmite isotrópicamente (de igual manera en todas direcciones) con una potencia promedio de 4.00 kW. Una antena receptora de dipolo de 65.0 cm de largo se localiza a 4.00 millas del transmisor. Calcule la fem inducida por esta señal entre los extremos de la antena receptora.

13. ¿Cuál es la magnitud promedio del vector de Poynting a 5.00 millas de un transmisor de radio que emite su señal isotrópicamente con una potencia promedio de 250 kW?

14. Una fuente de luz monocromática emite 100 W de potencia electromagnética uniformemente en todas las direcciones. a) Calcule la densidad de energía del campo eléctrico promedio a 1.00 m de la fuente. b) Calcule la densidad de energía del campo magnético promedio a la misma distancia de la fuente. c) Encuentre la intensidad de onda en este punto.

WEB 15. Una comunidad planea construir una instalación para convertir la radiación solar en potencia eléctrica. Requieren 1.00 MW de potencia, y el sistema que se va a instalar tiene una eficiencia de 30.0% (esto es, 30.0% de la energía solar incidente sobre la superficie se convierte en energía eléctrica). ¿Cuál debe ser el área efectiva de una superficie que absorbe a la perfección utilizada en una instalación de este tipo, suponiendo una intensidad constante de 1 000 W/m^2?

16. Suponiendo que la antena de una estación de radio de 10.0 kW radia ondas electromagnéticas esféricas, calcule el valor máximo del campo magnético a 5.00 km de la antena, y compare este valor con el campo magnético superficial de la Tierra.

WEB 17. El filamento de una lámpara incandescente tiene una resistencia de 150 Ω y conduce una corriente directa de 1.00 A. El filamento mide 8.00 cm de largo y 0.900 mm de radio. a) Calcule el vector de Poynting en la superficie del filamento. b) Encuentre la magnitud de los campos eléctrico y magnético en la superficie del filamento.

18. En una región del espacio libre el campo eléctrico en algún instante de tiempo es $\mathbf{E} = (80.0\mathbf{i} + 32.0\mathbf{j} - 64.0\mathbf{k})$ N/C y el campo magnético es $\mathbf{B} = (0.200\mathbf{i} + 0.080\ 0\mathbf{j} + 0.290\mathbf{k})\ \mu\text{T}$. a) Muestre que los dos campos son perpendiculares entre sí. b) Determine el vector de Poynting para estos campos.

19. El filamento de un foco eléctrico tiene una resistencia de 110 Ω. El foco se conecta en una toma estándar de 120 V (rms) y emite 1.00% del potencial eléctrico que se le suministra como radiación electromagnética de frecuencia f. Suponiendo que el foco se cubre con un filtro que absorbe todas las demás frecuencias, encuentre la amplitud del campo magnético a 1.00 m del foco.

20. Cierto horno de microondas contiene un magnetrón con una salida de 700 W de potencia de microonda para una potencia eléctrica de entrada de 1.40 kW. Las microondas son transferidas por completo desde el magnetrón hacia adentro de la cámara del horno a través de una onda guía, la cual es un tubo metálico de sección transversal rectangular con un ancho de 6.83 cm y una altura de 3.81 cm. a) ¿Cuál es la eficiencia del magnetrón? b) Suponiendo que la comida está absorbiendo todas las microondas producidas por el magnetrón, y que no se refleja energía de regreso a la onda guía, encuentre la dirección y magnitud del vector de Poynting, promediado sobre el tiempo, en la onda guía cerca de la entrada a la cámara del horno. c) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico máximo en este punto?

21. En algunas fábricas se emplean rayos láser de alta potencia para cortar ropa y metal (Fig. P34.21). Uno de dichos rayos tiene un haz de 1.00 mm de diámetro y genera un campo eléctrico con amplitud de 0.700 MV/m en el blanco. Encuentre a) la amplitud del campo magnético producido, b) la intensidad del láser y c) la potencia entregada por el láser.



Figura P34.21 Un dispositivo para cortar con láser montado sobre un brazo robot se está usando para cortar una placa metálica. *(Philippe Plailly/SPL/Photo Researchers)*

22. ¿A qué distancia de una fuente puntual de una onda electromagnética de 100 W es $E_{máx} = 15.0$ V/m?
23. Un rayo láser de 10.0 mW tiene un diámetro de haz de 1.60 mm. a) ¿Cuál es la intensidad de la luz, suponiendo que ésta es uniforme en todo el haz circular? b) ¿Cuál es la densidad de energía promedio del haz?
24. En cierto lugar de la Tierra, el valor rms del campo magnético provocado por la radiación solar es 1.80 μT. A partir de este valor calcule a) el campo eléctrico promedio debido a la radiación solar, b) la densidad de energía promedio de la componente solar de la radiación electromagnética en esta localidad, y c) la magnitud del vector de Poynting para la radiación del Sol. d) Compare el valor encontrado en la parte c) con el valor de la intensidad solar dado en el ejemplo 34.5.

Sección 34.4 *Momentum* y presión de radiación

25. Una onda de radio transmite 25.0 W/m² de potencia por unidad de área. Una superficie plana de área A es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Calcule la presión de radiación sobre ella si la superficie es un absorbente perfecto.
26. Una onda electromagnética plana que tiene una intensidad de 6.00 W/m² golpea un pequeño espejo de bolsillo, cuya área es de 40.0 cm², mantenido perpendicular a la onda que se aproxima. a) ¿Qué *momentum* transfiere la onda al espejo cada segundo? b) Encuentre la fuerza que la onda ejerce sobre el espejo.
27. Un posible medio para volar en el espacio es poner una lámina aluminizada perfectamente reflectora en la órbita de la Tierra y usar la luz del Sol para empujar esta "vela solar". Suponga que una vela de 6.00×10^5 m² de área y 6 000 kg de masa se pone en órbita frente al Sol. a) ¿Qué fuerza se ejerce sobre la vela? b) ¿Cuál es la aceleración de la misma? c) ¿Cuánto tarda la vela en llegar a la Luna, a 3.84×10^8 m de distancia? Ignore todos los efectos gravitacionales, suponga que la aceleración calculada en el inciso b) permanece constante y considere una intensidad solar de 1 340 W/m².
28. Un rayo láser de 100 mW se refleja de regreso sobre sí mismo por medio de un espejo. Calcule la fuerza sobre el espejo.

WEB 29. Un láser de helio-neón de 15.0 mW ($\lambda = 632.8$ nm) emite un haz de sección transversal circular cuyo diámetro es de 2.00 mm. a) Encuentre el campo eléctrico máximo en el haz. b) ¿Qué energía total está contenida en una longitud de 1.00 m del haz? c) Determine el *momentum* transportado por una longitud de 1.00 m del haz.

30. Dado que la intensidad de la radiación solar incidente sobre la atmósfera superior de la Tierra es de 1 340 W/m², determine a) la radiación solar incidente sobre Marte, b) la potencia total incidente sobre Marte, y c) la fuerza total que actúa sobre este mismo planeta. d) Compare esta fuerza con la atracción gravitacional entre Marte y el Sol (véase la tabla 14.2).
31. Una onda electromagnética plana tiene una intensidad de 750 W/m². Una superficie rectangular plana de 50.0 cm × 100 cm de dimensiones se coloca perpendicularmente a la dirección de la onda. Si la superficie absorbe la mitad de la energía y refleja la mitad, calcule a) la energía total absorbida por la superficie en 1.00 min y b) el *momentum* absorbido en este tiempo.

(Opcional)
Sección 34.5 Radiación de una lámina de corriente infinita

32. Una gran lámina que conduce corriente emite radiación en cada dirección (normal al plano de la lámina) con una intensidad de 570 W/m². ¿Qué valor máximo de densidad de corriente sinusoidal se requiere?
33. Una superficie rectangular de 120 cm × 40.0 cm de dimensiones está paralela a 4.40 m de una lámina conductora mucho más grande en la cual hay una corriente superficial que varía sinusoidalmente y que tiene un valor máximo de 10.0 A/m. a) Calcule la potencia incidente promedio sobre la lámina más chica. b) ¿Qué potencia por unidad de área radia la lámina más grande?

(Opcional)
Sección 34.6 Producción de ondas electromagnéticas por medio de una antena

34. Dos radios transceptores portátiles con antenas de dipolo están separados una gran distancia fija. Suponiendo que la antena transmisora es vertical, ¿qué fracción de la potencia de recepción máxima ocurrirá en la antena re-

ceptora cuando ésta esté inclinada de la vertical por a) 15.0°, b) 45.0°, c) 90.0°?

35. Dos antenas de transmisión de radio están separadas por la mitad de la longitud de onda de transmisión y se excitan en fase una respecto de la otra. ¿En qué direcciones se radian a) la señal más intensa y b) la señal más débil?

36. La figura 34.14 muestra una antena de Hertz (conocida también como una antena de media onda, puesto que su longitud es $\lambda/2$). La antena está tan lejos de la tierra como para que las reflexiones no afecten en forma significativa su patrón de radiación. La mayor parte de las estaciones de radio AM, sin embargo, emplean una antena de Marconi, la cual se compone de la mitad superior de una antena de Hertz. El extremo inferior de esta antena (de cuarto de onda) se conecta a la superficie de la Tierra, y ésta misma sirve como la mitad inferior faltante. ¿Cuáles son las alturas de las antenas de Marconi para transmisiones de estaciones de radio a a) 560 kHz y b) 1 600 kHz?

37. **Problema de repaso.** Cargas aceleradas pueden radiar ondas electromagnéticas. Calcule la longitud de onda de la radiación producida por un protón en un ciclotrón de 0.500 m de radio y un campo magnético con una magnitud de 0.350 T.

38. **Problema de repaso.** Cargas aceleradas pueden radiar ondas electromagnéticas. Calcule la longitud de onda de la radiación producida por un protón en un ciclotrón de radio R y campo magnético B.

Sección 34.7 El espectro de ondas electromagnéticas

39. a) Clasifique ondas con frecuencias de 2 Hz, 2 kHz, 2 MHz, 2 GHz, 2 THz, 2 PHz, 2 Ehz, 2 ZHz y 2 YHz sobre el espectro electromagnético. b) Clasifique las ondas con longitudes de onda de 2 km, 2 m, 2 mm, 2 μm, 2 nm, 2 pm, 2 fm y 2 am.

40. Calcule una estimación del orden de magnitud de la frecuencia de una onda electromagnética con una longitud de onda igual a a) su altura; b) el grosor de esta hoja de papel. ¿Cómo se clasifica cada onda sobre el espectro electromagnético?

41. El ojo humano es más sensible a la luz que tiene una longitud de onda de 5.50×10^{-7} m, lo cual está en la región verde-amarillo del espectro electromagnético visible. ¿Cuál es la frecuencia de esta luz?

42. Suponga que usted está ubicado a 180 m de un transmisor de radio. a) ¿A cuántas longitudes de onda se encuentra usted del transmisor si la estación se autodenomina 1 150 AM? (Las frecuencias de la banda de AM están en kilohertz.) b) ¿Cuál es si esta estación fuese la 98.1 FM? (Las frecuencias de la banda de FM están en megahertz.)

43. ¿Cuáles son las longitudes de onda de las ondas electromagnéticas en el espacio libre que tienen frecuencias de a) 5.00×10^{19} Hz y b) 4.00×10^{9} Hz?

44. Un pulso de radar regresa al receptor después de un tiempo de viaje total de 4.00×10^{-4} s. ¿Cuán alejado está el objeto que reflejó la onda?

45. *¡Esto justamente!* Un importante anuncio noticioso se transmite por ondas de radio a personas que se encuentran sentadas junto a sus radios, a 100 km de la estación, y por medio de ondas sonoras a gente que se encuentra sentada en la sala de noticias, a 3.00 m del comentarista. ¿Quién recibe la noticia primero? Explique. Considere la rapidez del sonido en el aire como 343 m/s.

46. La armada de Estados Unidos hace mucho propuso la construcción de un sistema de comunicación de frecuencia extremadamente baja (ELF, por sus siglas en inglés). Tales ondas podrían penetrar los océanos para alcanzar submarinos distantes. Calcule la longitud de una antena de longitud de cuarto de onda para un transmisor que genere ondas ELF con una frecuencia de 75.0 Hz. ¿Qué tan práctico es esto?

47. ¿Cuáles son los intervalos de longitud de onda en a) la banda de radio de AM (540 – 1 600 kHz), y b) la banda de radio FM (88.0 – 108 MHz)?

48. Hay doce canales de televisión VHF (canales 2-13) que se encuentran en el intervalo de frecuencias entre 54.0 MHz y 216 MHz. Cada canal tiene asignado un ancho de 6.0 MHz, con los dos rangos 72.0 – 76.0 MHz y 88.0 – 174 MHz reservados para propósitos no de televisión. (El canal 2, por ejemplo, se encuentra entre 54.0 y 60.0 MHz.) Calcule el intervalo de longitud de onda para a) el canal 4, b) el canal 6 y c) el canal 8.

PROBLEMAS ADICIONALES

49. Suponga que la intensidad de la radiación solar incidente sobre las nubes superiores de la Tierra es de 1 340 W/m^2. a) Calcule la potencia total radiada por el Sol tomando la separación promedio Tierra-Sol igual a 1.496×10^{11} m. b) Determine los valores máximos de los campos eléctrico y magnético en la ubicación de la Tierra debidos a la radiación solar.

50. La intensidad de la radiación solar en la parte alta de la atmósfera de la Tierra es de 1 340 W/m^3. Suponiendo que el 60% de la energía solar entrante alcanza la superficie de la Tierra, y que usted absorbe 50% de la energía incidente, realice una estimación del orden de magnitud de la cantidad de energía solar que absorbe en un baño de sol de 60 minutos.

WEB 51. **Problema de repaso.** En la ausencia de una entrada de cable o una antena parabólica, un equipo de televisión puede usar una antena receptora de dipolo para canales VHF y una antena de espira para canales UHF (véase la Fig. P34.7). La antena UHF produce una fem desde el flujo magnético variable que pasa por la espira. La estación de TV transmite una señal con una frecuencia f, y la señal tiene una amplitud de campo eléctrico $E_{máx}$ y una amplitud de campo magnético $B_{máx}$ en la ubicación de la antena receptora. a) Usando la ley de Faraday derive una expresión para la amplitud de la fem que aparece en una antena de espira circular de una sola vuelta con un radio r, la cual es pequeña en comparación con la longitud de onda de la onda. b) Si el campo eléctrico en la señal apunta verticalmente, ¿cuál sería la orientación de la espira para mejor recepción?

52. Considere una pequeña partícula esférica de radio r localizada en el espacio a una distancia R del Sol. a) Mues-

tre que la relación F_{rad}/F_{grav} es proporcional a $1/r$, donde F_{rad} es la fuerza ejercida por la radiación solar y F_{grav} es la fuerza de atracción gravitacional. b) El resultado del inciso a) significa que, para un valor de r suficientemente pequeño, la fuerza ejercida sobre la partícula por la radiación solar supera a la fuerza de atracción gravitacional. Calcule el valor de r para el cual la partícula está en equilibrio bajo las dos fuerzas. (Suponga que la partícula tiene una superficie que absorbe de manera perfecta y una densidad de masa de 1.50 g/cm³. Considere que la partícula está localizada a 3.75×10^{11} m del Sol y tome 214 W/m² como el valor de la intensidad solar en ese punto.)

53. Una antena parabólica con un diámetro de 20.0 m recibe (en incidencia normal) una señal de radio de una fuente distante, como se ilustra en la figura P34.53. La señal de radio es una onda sinusoidal continua con amplitud $E_{máx} = 0.200\ \mu V/m$. Suponga que la antena absorbe toda la radiación que incide sobre el plato. a) ¿Cuál es la amplitud del campo magnético en esta onda? b) ¿Cuál es la intensidad de la radiación recibida por esta antena? c) ¿Qué potencia es recibida por la antena? d) ¿Qué fuerza es ejercida sobre la antena por las ondas de radio?

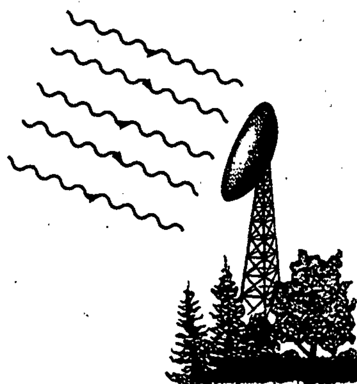


Figura P34.53

54. Un capacitor de placas paralelas tiene placas circulares de radio r separadas una distancia ℓ. Se han cargado a un voltaje ΔV y se están descargando conforme la corriente i se retira de él. Suponga que la separación de placas ℓ es muy pequeña comparada con r, de modo que el campo eléctrico en esencia es constante en el volumen entre las placas y es cero afuera de este volumen. Advierta que la corriente de desplazamiento entre las placas del capacitor crea un campo magnético. a) Determine la magnitud y dirección del vector de Poynting en la superficie cilíndrica alrededor del campo eléctrico en el volumen. b) Use el valor del vector de Poynting y el área de la superficie lateral del cilindro para encontrar la potencia total transferida por el capacitor. c) ¿Cuáles son los cambios a estos resultados si la dirección de la corriente es invertida, de modo que el capacitor se está cargando?

55. Una sección de un solenoide de núcleo de aire muy largo, alejado de cualquier extremo, forma un inductor con radio r, longitud ℓ y n vueltas de alambre por unidad de longitud. En un instante particular la corriente del solenoide es I y está creciendo a la rapidez di/dt. Ignore la resistencia del alambre. a) Encuentre la magnitud y dirección del vector de Poynting sobre la superficie interior de esta sección de solenoide. b) Encuentre la rapidez a la cual la energía almacenada en el campo magnético del inductor está creciendo. c) Exprese la potencia en términos del voltaje ΔV a través del inductor.

56. Una meta del programa espacial ruso es iluminar las oscuras ciudades norteñas con luz del Sol reflejada a la Tierra desde un espejo de 200 m de diámetro que esté en órbita. Varios pequeños prototipos ya se construyeron y se pusieron en órbita. a) Suponga que luz del Sol con una intensidad de 1 340 W/m² cae en el espejo casi perpendicularmente, y que la atmósfera de la Tierra permite que el 74.6% de la energía de la luz solar la atraviese en un clima claro. ¿Qué potencia recibe una ciudad cuando el espejo espacial está reflejando luz hacia ella? b) El plan es que la luz solar reflejada cubra un círculo con un diámetro de 8.00 km. ¿Cuál es la intensidad de la luz (la magnitud promedio del vector de Poynting) que la ciudad recibe? c) Esta intensidad, ¿qué porcentaje de la componente vertical de la luz solar es en San Petersburgo en enero, cuando el Sol alcanza un ángulo de 7.00° sobre el horizonte al mediodía?

57. En 1965 Arno Penzias y Robert Wilson descubrieron la radiación cósmica de microondas dejada por la expansión del Universo, producto del Big Bang. Suponga que la densidad de energía de esta radiación de fondo es igual a 4.00×10^{-14} J/m³. Determine la amplitud del campo eléctrico correspondiente.

58. Un teléfono celular de mano opera en la banda de 860 a 900 MHz y tiene una potencia de salida de 0.600 W desde una antena de 10.0 cm de largo (Fig. P34.58). a) Encuentre la magnitud promedio del vector de Poynting a 4.00 cm de la antena, en la ubicación típica en la cabeza de una persona. Suponga que la antena emite energía con frentes de onda cilíndrica. (La radiación real de las antenas sigue un patrón más complicado, como sugiere la Fig. 34.15.) b) La norma de exposición máxima ANSI/IEEE C95.1-1991 es de 0.57 mW/m² para personas que viven cerca de las estaciones base de teléfonos celulares, quienes estarían expuestas de manera



Figura P34.58 (©1998 *Adam Smith/FPG International*)

continua a la radiación. Compare la respuesta a la parte a) con esta norma.

59. Una microonda polarizada en forma lineal, con una longitud de onda de 1.50 cm, se dirige a lo largo del eje x positivo. El vector de campo eléctrico tiene un valor máximo de 175 V/m y vibra en el plano xy. a) Suponga que la componente de campo magnético de la onda puede escribirse en la forma $B = B_{máx}\,\text{sen}(kx - \omega t)$ y dé los valores para $B_{máx}$, k y ω. Además, determine en qué plano vibra el vector de campo magnético. b) Calcule la magnitud del vector de Poynting para esta onda. c) ¿Qué presión de radiación máxima ejercería esta onda si se dirigiera con una incidencia normal sobre una lámina que refleja a la perfección? d) ¿Qué aceleración máxima se impartiría a una lámina de 500 g (perfectamente reflectora y en incidencia normal) cuyas dimensiones son 1.00 m × 0.750 m?

60. *Revisión de la sección 20.7 sobre la radiación térmica.* a) Una pareja de ancianos instaló un calentador solar de agua en el techo de su casa (Fig. P34.60). El colector de energía solar se compone de una caja plana cerrada con un muy buen aislante térmico. Su interior está pintado de negro, y su cara frontal está hecha de vidrio aislante. Suponga que su emisividad para luz visible es de 0.900 y su emisividad para luz infrarroja es de 0.700. Suponga que el sol del mediodía brilla en perpendicular al vidrio, con una intensidad de 1 000 W/m², y que entonces no entra ni sale agua de la caja. Encuentre la temperatura de estado estable del interior de la caja. b) La pareja construyó una caja idéntica sin tubos de agua y la colocó plana sobre el piso enfrente de la casa para usarla como un marco frío y plantar semillas al comenzar la primavera. Si el mismo sol de mediodía está a un ángulo de elevación de 50.0°, encuentre la temperatura de estado estable del interior de esta caja, suponiendo que las rendijas de ventilación están firmemente cerradas.



Figura P34.60 *(© Bill Banaszewski/Visuals Unlimited)*

61. Un astronauta extraviado en el espacio a 10.0 m de su nave espacial, y en reposo en relación con ella, tiene una masa (incluido el equipo) de 110 kg. Como cuenta con una fuente luminosa de 100 W que forma un haz dirigido, decide usar el haz como un cohete de fotones para impulsarse en forma continua hacia la nave. a) Calcule cuánto tiempo tarda en llegar a la nave mediante este método. b) Suponga, en lugar de lo anterior, que el astronauta decide lanzar la fuente luminosa en una dirección opuesta a la nave. Si la masa de la fuente luminosa es de 3.00 kg, y, después de lanzarla, se mueve a 12.0 m/s *respecto del retroceso del astronauta*, ¿cuánto tarda el astronauta en llegar a la nave?

62. La Tierra refleja alrededor de 38.0% de la luz solar incidente por reflexión de sus nubes y superficie. a) Dado que la intensidad de la radiación solar es de 1 340 W/m², ¿cuál es la presión de radiación sobre la Tierra, en pascales, cuando el Sol está sobre su cabeza? b) Compare esto con la presión atmosférica normal en la superficie de la Tierra, la cual es de 101 kPa.

63. Se han usado rayos láser para suspender cuentas de vidrio esféricas en el campo gravitacional de la Tierra. a) Si una cuenta tiene una masa de 1.00 μg y una densidad de 0.200 g/cm³, determine la intensidad de radiación necesaria para sostener la cuenta. b) Si el haz tiene un radio de 0.200 cm, ¿cuál es la potencia requerida para este láser?

64. Se han usado rayos láser para suspender cuentas de vidrio esféricas en el campo gravitacional de la Tierra. a) Si una cuenta tiene una masa m y una densidad ρ, determine la intensidad de radiación necesaria para sostener la cuenta. b) Si el haz tiene un radio r, ¿cuál es la potencia requerida para este láser?

65. **Problema de repaso.** Un espejo de 1.00 m de diámetro enfoca los rayos solares sobre una placa absorbente de 2.00 cm de radio, la cual sostiene una lata que contiene 1.00 L de agua a 20.0°C. a) Si la intensidad solar es de 1.00 kW/m², ¿cuál es la intensidad sobre la placa absorbente? b) ¿Cuáles son las magnitudes máximas de los campos **E** y **B**? c) Si 40.0% de la energía se absorbe, ¿cuánto tardaría llevar al agua a su punto de ebullición?

66. Una fuente de microondas produce pulsos de radiación de 20.0 GHz, cada uno de los cuales dura 1.00 ns. Se emplea un reflector parabólico (R = 6.00 cm) para enfocar estos pulsos en un haz de radiación paralelo, como se muestra en la figura P34.66. La potencia promedio durante cada pulso es de 25.0 kW. a) ¿Cuál es la longitud de onda de estas microondas? b) ¿Cuál es la energía total contenida en cada pulso? c) Calcule la densidad de energía promedio dentro de cada pulso. d) Determine la amplitud de los campos eléctrico y magnético en estas microondas. e) Si este haz de pulso incide sobre una superficie absorbente, calcule la fuerza ejercida sobre la superficie durante el 1.00 ns de duración de cada pulso.

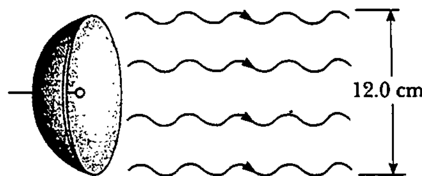


Figura P34.66

67. La potencia electromagnética radiada por una carga puntual q en movimiento no relativista que tiene una aceleración a es

$$\mathcal{P} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

donde ϵ_0 es la permitividad del vacío (espacio libre) y c es la rapidez de la luz en el vacío. a) Muestre que el lado derecho de esta ecuación está en watts. b) Si un electrón se sitúa en un campo eléctrico constante de 100 N/C, determine su aceleración y la potencia electromagnética que radia. c) Si un protón se coloca en un ciclotrón de 0.500 m de radio y un campo magnético de 0.350 T de magnitud, ¿cuál es la potencia electromagnética radiada por este protón?

68. Un delgado filamento de tungsteno de 1.00 m de largo radia 60.0 W de potencia en forma de ondas electromagnéticas. Una superficie que absorbe a la perfección, en forma de un cilindro hueco de 5.00 cm de radio y 1.00 m de largo, se coloca concéntricamente con el filamento. Calcule la presión de radiación que actúa sobre el cilindro. (Suponga que la radiación se emite en la dirección radial e ignore los efectos de los extremos.)

69. La balanza de torsión mostrada en la figura 34.8 se emplea en un experimento para medir presión de radiación. La fibra de suspensión ejerce un momento de torsión restaurador elástico. La constante de momento de torsión es 1.00×10^{-11} N·m/grado, y la longitud de la barra horizontal es 6.00 cm. El haz de un láser de helio-neón de 3.00 mW incide sobre el disco negro, y todo el disco del espejo está blindado. Calcule el ángulo entre las posiciones de equilibrio de la barra horizontal cuando el haz pasa del estado "desactivado" al "activado".

70. **Problema de repaso.** El estudio de la creación sugiere un Creador con un marcado gusto por los escarabajos y las pequeñas estrellas rojas. Una estrella roja, típica de la clase más común, radia ondas electromagnéticas con una potencia de 6.00×10^{23} W, lo cual sólo es el 0.159% de la luminosidad del Sol. Considere un planeta esférico en una órbita circular alrededor de esa estrella. Suponga que la emisividad del planeta, como se define en la sección 20.7, es igual para la luz visible y la infrarroja. Suponga que el planeta tiene una temperatura superficial uniforme. Identifique el área proyectada sobre la cual el planeta absorbe luz estelar, y el área radiante del planeta. Si los escarabajos se desarrollan a una temperatura de 310 K, ¿cuál sería el radio de la órbita del planeta?

71. El "cañón láser" de una nave espacial tiene un haz de área de sección transversal A. El campo eléctrico máximo en el haz es E. ¿A qué proporción a un asteroide acelerará alejándose de la nave espacial si el haz láser golpea al asteroide perpendicularmente a su superficie, y ésta es no reflectora? La masa del asteroide es m. Ignore la aceleración de la nave espacial.

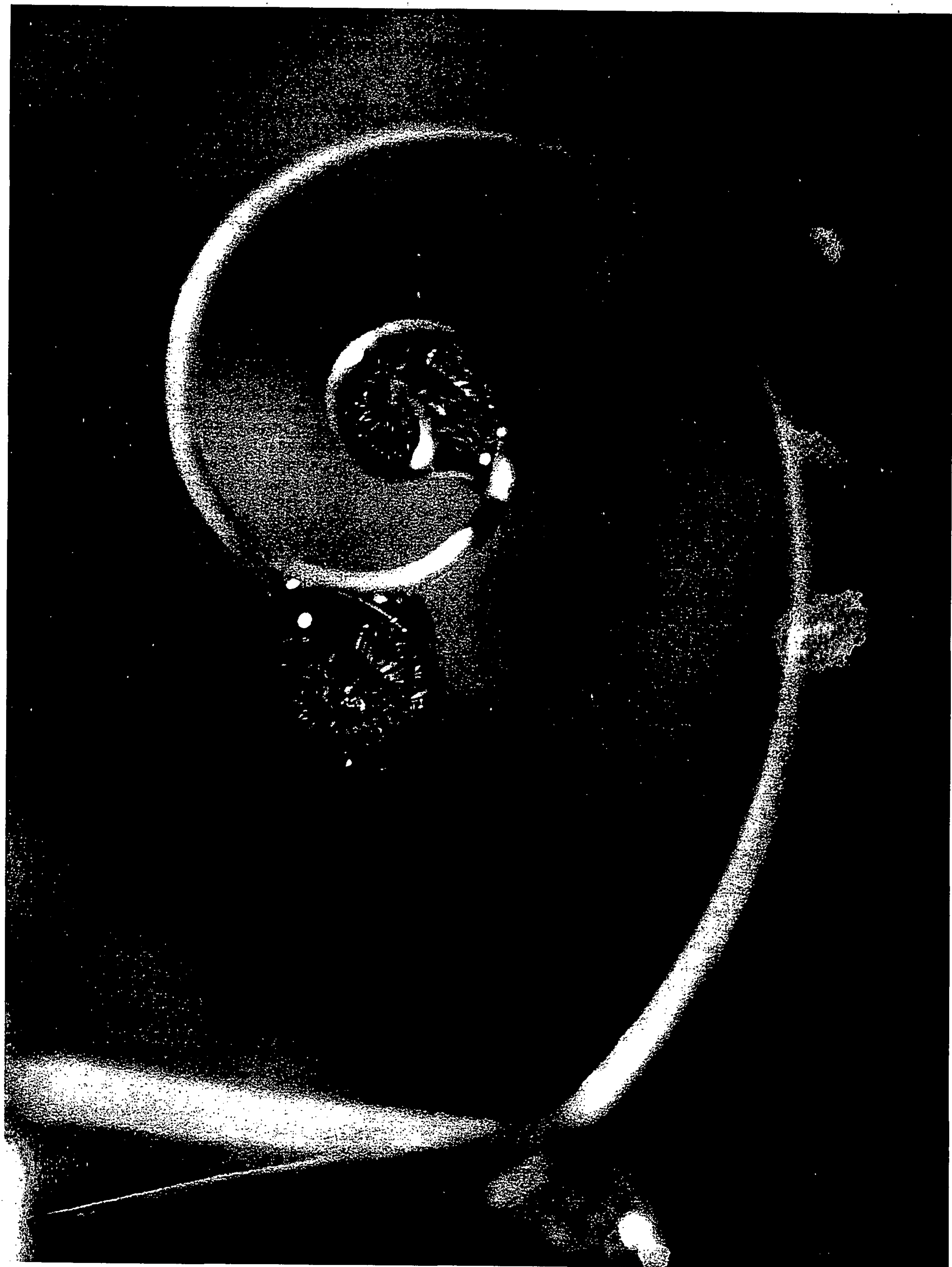
72. Una onda electromagnética plana varía sinusoidalmente a 90.0 MHz a medida que viaja a lo largo de la dirección $+x$. El valor pico del campo eléctrico es 2.00 mV/m y está dirigido a lo largo de la dirección $\pm y$. a) Encuentre la longitud de onda, el periodo y el valor máximo del campo magnético. b) Escriba expresiones en unidades SI para las variaciones en el espacio y el tiempo del campo eléctrico y del campo magnético. Incluya valores numéricos y subíndices para indicar las direcciones de las coordenadas. c) Encuentre la potencia promedio por unidad de área que esta onda propaga por el espacio. d) Encuentre la densidad de energía promedio en la radiación (en joules por metro cúbico). e) ¿Qué presión de radiación ejercería esta onda sobre una superficie perfectamente reflectora en incidencia normal?

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

34.1 Cero. la figura 34.3b muestra que los vectores **B** y **E** alcanzan sus valores máximo y mínimo al mismo tiempo.

34.2 b) A lo largo del eje y, pues ésa es la orientación del campo eléctrico. El campo eléctrico mueve electrones en la antena, por tanto, induce una corriente que es detectada y amplificada.

34.3 La onda AM, debido a que su amplitud está cambiando, parecería variar en brillantez. La onda FM tendría colores cambiantes, pues el color percibido estaría relacionado con la frecuencia de la luz.



parte 5

Luz y óptica

La luz es uno de los "ingredientes" básicos de casi toda la vida en la Tierra. Las plantas convierten la energía de la luz del Sol en energía química mediante la fotosíntesis. Además, la luz es el medio principal por el cual se puede transmitir y recibir información hacia y desde los objetos que nos rodean a través del universo.

La naturaleza y las propiedades de la luz han sido tema de gran interés y meditación desde tiempos antiguos. Los griegos creyeron que la luz estaba compuesta por partículas diminutas (*corpúsculos*) que eran emitidas por fuentes luminosas, y que estas partículas estimulaban la percepción de la visión cuando incidían sobre el ojo del observador. Newton usó esta teoría corpuscular para explicar la reflexión y refracción (doblamiento) de la luz. En 1678 uno de los contemporáneos de Newton, el científico holandés Christian Huygens, pudo explicar muchas otras propiedades de la luz al proponer que la luz es una onda. En 1801 Thomas Young mostró que los haces de luz pueden interferir unos con otros, lo cual dio un fuerte soporte a la teoría ondulatoria. En 1865 Maxwell desarrolló una brillante teoría en la que las ondas electromagnéticas viajan a la rapidez de la luz (véase el capítulo 34). En ese entonces, la teoría ondulatoria de la luz parecía estar firmemente establecida.

Sin embargo, a principios del siglo XX, Max Planck retomó la teoría corpuscular de la luz para explicar la radiación emitida por objetos calientes. Einstein después usó la teoría corpuscular para explicar cómo un metal emite electrones cuando se expone a la luz. Hoy día los científicos ven que la luz tiene una naturaleza dual —es decir, la luz exhibe características de onda en algunas situaciones y de partícula en otras—.

Se analiza la naturaleza de la luz como partícula en la última parte de este libro, en la que abordaremos a la física moderna. En los capítulos del 35 al 38 se concentrará en estos aspectos de la luz que se entienden mejor con el modelo ondulatorio. Primero se analizará la reflexión de la luz en la frontera entre dos medios y la refracción que ocurre conforme la luz viaja de un medio a otro. Después se emplearán estas ideas para estudiar la refracción y la reflexión conforme la luz pasa a través de lentes y forma imágenes en espejos. Después se describirá cómo los lentes y los espejos se usan en instrumentos como los telescopios y microscopios, los cuales ayudan a ver objetos que no son visibles a simple vista. Por último, se estudiarán los fenómenos de difracción, polarización e interferencia, y cómo se aplican a la luz.

◀ Derechos reservados Steve Terrill/The Stock Market.

ACERTIJO

Los hermosos colores que se ven dentro de un buen corte de diamante son parte de la fascinación de esta piedra preciosa. Ahora es posible crear joyas artificiales que se venden a un precio mucho menor, pero que brillan casi como un diamante. ¿Cómo puede distinguir usted una imitación barata de un artículo genuino usando algo que encuentra en la alacena de su cocina? (*Charles D. Winters*)



capítulo

35 La naturaleza de la luz y las leyes de la óptica geométrica

… generales del capítulo

LA NATURALEZA DE LA LUZ

Antes de iniciar el siglo XIX la luz se consideraba como una corriente de partículas emitidas por el objeto que era visto o que se emitían de los ojos del observador. El principal exponente de la teoría corpuscular de la luz fue Isaac Newton, quien explicó que las partículas eran emitidas por una fuente luminosa y que éstas estimulaban el sentido de la visión al entrar al ojo. Con base en ello, él pudo explicar la reflexión y la refracción.

La mayoría de los científicos aceptó la teoría corpuscular de la luz de Newton. Sin embargo, durante el curso de su vida fue propuesta otra teoría, una que argüía que la luz podría ser cierto tipo de movimiento ondulatorio. En 1678 un físico y astrónomo holandés, Christian Huygens, demostró que la teoría ondulatoria de la luz podría explicar también la reflexión y la refracción. La teoría ondulatoria no fue aceptada de inmediato. Asimismo, se argüía que si la luz era alguna forma de onda, debería rodear los obstáculos; por tanto, podríamos ver los objetos alrededor de las esquinas. Ahora se sabe efectivamente que la luz rodea los bordes de los objetos. El fenómeno, conocido como *difracción*, no es fácil de observar porque las ondas luminosas tienen longitudes de onda cortas. De este modo, aunque Francesco Grimaldi (1618-1663) proporcionó pruebas experimentales para la difracción aproximadamente en 1660, la mayoría de los científicos rechazó la teoría ondulatoria y aceptó la teoría corpuscular de Newton durante más de un siglo.

La primera demostración clara de la naturaleza ondulatoria de la luz fue proporcionada en 1801 por Thomas Young (1773-1829), quien demostró que, en condiciones apropiadas, los rayos luminosos interfieren entre sí. En ese entonces dicho comportamiento no podía explicarse mediante la teoría corpuscular debido a que no hay manera concebible por medio de la cual dos o más partículas puedan juntarse y cancelarse una a la otra. Varios años después un físico francés, Augustin Fresnel (1788-1829), efectuó varios experimentos relacionados con la interferencia y la difracción. En 1850 Jean Foucault (1791-1868) proporcionó más pruebas de lo inadecuado de la teoría corpuscular al demostrar que la rapidez de la luz en líquidos es menor que en el aire. De acuerdo con el modelo corpuscular, la rapidez de la luz sería más alta en líquidos que en el aire. Otros experimentos realizados durante el siglo XIX llevaron a la aceptación general de la teoría ondulatoria de la luz, y el trabajo más importante fue el de Maxwell, quien en 1873 afirmó que la luz era una forma de onda electromagnética de alta frecuencia. Como estudiamos en el capítulo 34, Hertz proporcionó la confirmación experimental de la teoría de Maxwell en 1887 al producir y detectar ondas electromagnéticas. Además, Hertz y otros investigadores demostraron que tales ondas experimentaban reflexión y refracción y exhibían todas las otras propiedades características de las ondas.

Aunque el modelo ondulatorio y la teoría clásica de la electricidad y el magnetismo pudo explicar la mayor parte de las propiedades conocidas de la luz no ocurrió lo mismo con algunos experimentos subsecuentes. El más impresionante de éstos es el efecto fotoeléctrico, descubierto también por Hertz: cuando la luz incide sobre una superficie metálica, algunas veces los electrones son arrancados de la superficie. Como un ejemplo de las dificultades que surgen, los experimentos mostraban que la energía cinética de un electrón arrancado es independiente de la intensidad luminosa. El hallazgo contradecía la teoría ondulatoria, la cual sostenía que un haz más intenso de luz debe agregar más energía al electrón. Una explicación del efecto fotoeléctrico fue propuesta por Einstein en 1905 en una teoría que empleó el concepto de cuantización desarrollado por Max Planck (1858-1947) en 1900. El modelo de cuantización supone que la energía de una onda luminosa está presente en paquetes llamados *fotones*; por tanto, se dice que la energía está cuantizada. De acuerdo con la teoría de Einstein la energía de un fotón es proporcional a la frecuencia de la onda electromagnética:

$$E = hf \qquad (35.1)$$

Energía de un fotón

donde la constante de proporcionalidad $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J·s es la constante de Planck (véase la sección 11.7). Es importante observar que esta teoría retiene algunas características tanto de la teoría ondulatoria como de la teoría corpuscular. El efecto fotoeléctrico es una consecuencia de la transferencia de energía de un solo fotón a un electrón en el metal y aun este fotón tiene características similares a las de las ondas ya que su energía está determinada por la frecuencia (una cantidad ondulatoria).

En vista de los hechos antes referidos, debe considerarse que la luz tiene una naturaleza dual: **En algunos casos la luz actúa como una onda y en otros como una partícula.** La luz es la luz, sin duda. Sin embargo, la pregunta, ¿"la luz es una onda o una partícula"? es inadecuada. En algunos casos la luz actúa como una onda y en otros como partícula. En el siguiente capítulo se investigará la naturaleza ondulatoria de la luz.

MEDICIONES DE LA RAPIDEZ DE LA LUZ

La luz viaja a una rapidez tan alta ($c \approx 3 \times 10^8$ m/s) que los primeros intentos para medir su rapidez no tuvieron éxito. Galileo intentó medir la rapidez de la luz colocando dos observadores en torres separadas por aproximadamente 10 km. Cada observador llevaba una linterna tapada. Uno de los observadores destaparía su linterna primero y el otro haría lo mismo en el momento en que viera la luz de la primera linterna. Galileo pensó que, conociendo el tiempo de tránsito de los haces luminosos entre las linternas obtendría la rapidez. Sus resultados no fueron convincentes. En la actualidad sabemos (como el propio Galileo concluyó) que es imposible medir la rapidez de la luz de esta manera debido a que el tiempo de tránsito es muy pequeño comparado con el tiempo de reacción de los observadores.

A continuación describiremos dos métodos para determinar la rapidez de la luz.

Método de Roemer

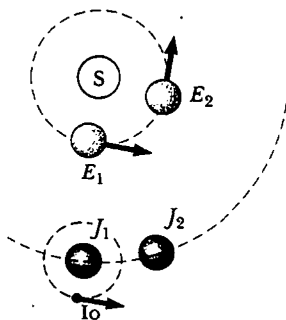


Figura 35.1 Método de Roemer para medir la rapidez de la luz. En el tiempo que tarda la Tierra en viajar 90° alrededor del Sol (3 meses), Júpiter recorre sólo 7.5° (el dibujo no está a escala).

El primer cálculo exitoso de la rapidez de la luz fue hecho en 1675 por el astrónomo danés Ole Roemer (1644-1710). Su técnica incluía observaciones astronómicas de una de las lunas de Júpiter, Io, la cual tiene un periodo de revolución aproximado de 42.5 h. El periodo de revolución de Júpiter alrededor del Sol es aproximadamente de 12 años; de modo que cuando la Tierra se mueve 90° alrededor del Sol, Júpiter gira sólo (1/12)90°= 7.5° (Fig. 35.1).

Un observador empleando el movimiento orbital de Io como un reloj esperaría que su órbita tuviera un periodo constante. Sin embargo, Roemer observó variaciones sistemáticas en el periodo de Io durante un año. Descubrió que los periodos se volvían más grandes que el promedio cuando la Tierra se alejaba de Júpiter, y más pequeños que el promedio cuando nuestro planeta se aproximaba a él. Por ejemplo, si Io tenía un periodo constante, Roemer debía haber visto un eclipse que ocurría en un instante particular y habría podido predecir cuándo se produciría el siguiente eclipse. Sin embargo, cuando verificó el segundo eclipse conforme la Tierra se alejaba de Júpiter encontró que el eclipse se retrasaba. De hecho, si el intervalo entre las observaciones era de tres meses, el tiempo de retraso era de aproximadamente 600 s. Roemer atribuyó esta variación en el periodo al hecho de que la distancia entre la Tierra y Júpiter cambiaba de una observación a la siguiente. En tres meses (un cuarto del periodo de revolución de la Tierra alrededor del Sol), la luz de Júpiter viaja una distancia igual al radio de la órbita terrestre.

Empleando los datos de Roemer, Huygens estimó el límite inferior para la rapidez de la luz aproximadamente igual a 2.3×10^8 m/s. Dicho experimento es importante desde el punto de vista histórico porque demostró que la luz tiene una rapidez finita y proporcionó una estimación de esta rapidez.

Técnica de Fizeau

El primer método útil para medir la rapidez de la luz mediante técnicas puramente terrestres fue desarrollado en 1849 por Armand H. L. Fizeau (1819-1896). La figura 35.2 representa un diagrama simplificado de su aparato. El procedimiento básico consiste en medir el tiempo total que tarda la luz en viajar de un punto a un espejo distante y regresar. Si d es la distancia entre la fuente de luz (considerando que está en la posición de la rueda) y el espejo, y si el tiempo de tránsito para un recorrido completo es t, entonces la rapidez de la luz es $c = 2d/t$.

Para medir el tiempo de tránsito Fizeau utilizó una rueda dentada rotatoria, la cual convierte un haz continuo de luz en una serie de pulsos luminosos. La rotación de la rueda controla lo que un observador ve en la fuente luminosa. Por ejemplo, si el pulso viaja hacia el espejo y pasa por la abertura en el punto A, en la figura 35.2, debe regresar a la rueda en el instante que el diente B ha girado a una posición para cubrir la trayectoria de regreso, entonces el pulso no alcanzará al observador. A una rapidez mayor de rotación, la abertura en el punto C podía moverse a una posición que permitiera al pulso reflejado llegar al observador. Conociendo la distancia d, el número de dientes en la rueda y la rapidez angular de la misma, Fizeau llegó al valor de $c = 3.1 \times 10^8$ m/s. Mediciones similares hechas por investigadores subsecuentes produjeron valores más precisos de c, aproximadamente de $2.997\,9 \times 10^8$ m/s.

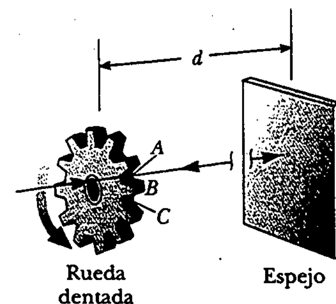


Figura 35.2 Método de Fizeau para medir la rapidez de la luz utilizando una rueda dentada giratoria. Se considera que la fuente de luz está en la posición de la rueda; así se conoce la distancia d.

EJEMPLO 35. **Medición de la rapidez de la luz con la rueda dentada de Fizeau**

Suponga que la rueda de Fizeau tiene 360 dientes y está girando a 27.5 rev/s cuando un pulso de luz que pasa por la abertura A en la figura 35.2 es bloqueado por el diente B al regresar. Si la distancia al espejo es de 7 500 m, ¿cuál es la rapidez de la luz?

Solución Puesto que la rueda tiene 360 dientes, debe tener 360 aberturas. Por tanto, como la luz pasa a través de la abertura A, pero está bloqueada por el diente adyacente inmediato a A, la rueda debe girar un ángulo de 1/720 rev en el tiempo que transcurre mientras la luz efectúa su recorrido completo. A partir de la definición de la rapidez angular vemos que el tiempo es

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{(1/720)\text{ rev}}{27.5\text{ rev/s}} = 5.05 \times 10^{-5}\text{ s}$$

Por tanto, la rapidez de la luz es

$$c = \frac{2d}{t} = \frac{2(7\,500\text{ m})}{5.05 \times 10^{-5}} = 2.97 \times 10^8\text{ m/s}$$

LA APROXIMACIÓN DE RAYOS EN LA ÓPTICA GEOMÉTRICA

14.2 El campo de la **óptica geométrica** implica el estudio de la propagación de la luz, con la suposición de que la luz viaja en una dirección fija en línea recta conforme ésta atraviesa un medio uniforme y cambia su dirección cuando encuentra la superficie de un medio diferente o si las propiedades ópticas del medio son no uniformes, ya sea en el espacio o en el tiempo. Al estudiar la óptica geométrica aquí y en el capítulo 36 se emplea lo que se conoce como **aproximación de rayos**. Para entender esta aproximación advierta primero que los rayos de una onda determinada son líneas rectas perpendiculares a los frentes de onda, como se analizó en la sección 17.4 y se ilustra en la figura 35.3 para una onda plana. En la aproximación de rayos suponemos que una onda que se mueve por un medio viaja en línea recta en la dirección de sus rayos.

Si la onda llega a una barrera en la cual hay una abertura circular cuyo diámetro es mucho más grande en relación con la longitud de onda, como se muestra en la figura 35.4a, la onda que emerge de la abertura continúa moviéndose en línea recta (aparte de algunos pequeños efectos de borde); en consecuencia, la aproxima-

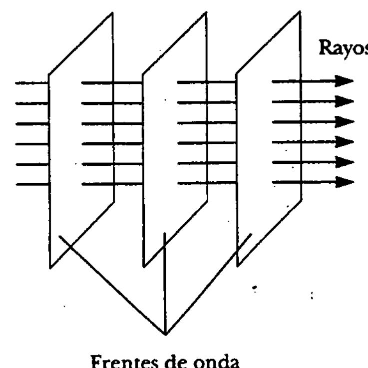


Figura 35.3 Una onda plana que se propaga hacia la derecha.

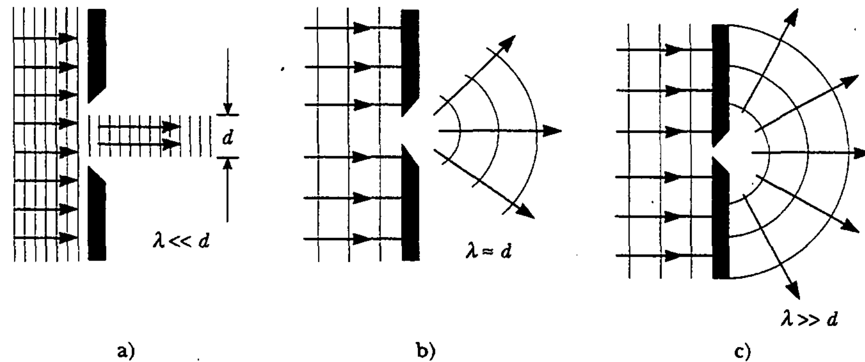


Figura 35.4 Una onda plana de longitud de onda λ incide sobre una barrera en la cual hay una abertura de diámetro *d*. a) Cuando λ ≪ *d*, los rayos continúan en línea recta y la aproximación de rayos sigue siendo válida. b) Cuando λ ≈ *d*, los rayos se dispersan hacia afuera después de pasar por la abertura. c) Cuando λ ≫ *d*, la abertura se comporta como una fuente puntual que emite ondas esféricas.

ción de rayos continúa siendo válida. Sin embargo, si el diámetro de la abertura es del orden de la longitud de onda, como se muestra en la figura 35.4b, las ondas se dispersan desde la abertura en todas las direcciones. Por último, si la abertura es mucho más pequeña que la longitud de onda, la abertura puede ser aproximada como una fuente puntual de ondas (véase la figura 35.4c). Se observan efectos similares cuando las ondas encuentran un objeto opaco de dimensión *d*. En cuyo caso, si $\lambda \ll d$, el objeto proyecta una sombra aguda.

Tanto la aproximación de rayos como la suposición de que $\lambda \ll d$ empleadas aquí y en el capítulo 36, tienen que ver con la óptica geométrica. Tal aproximación es muy buena en el estudio de espejos, lentes, prismas e instrumentos ópticos asociados, como telescopios, cámaras y anteojos.

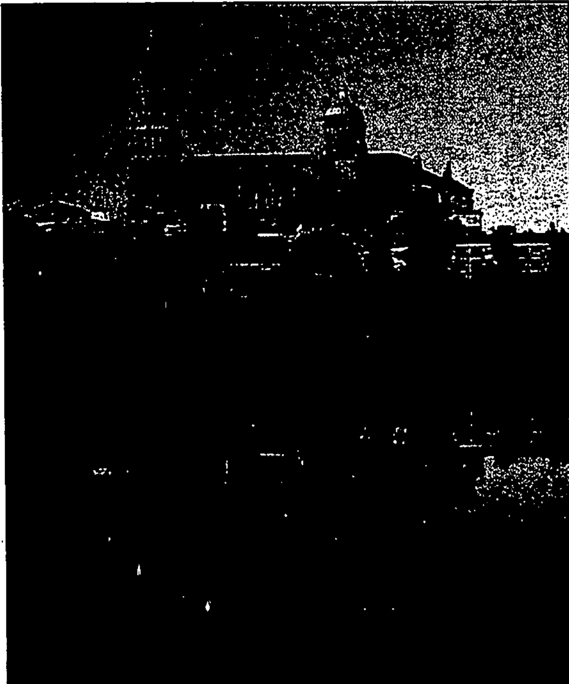


REFLEXIÓN

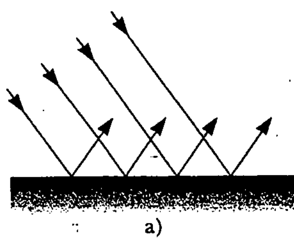

14.3 Cuando un rayo de luz que viaja en un medio encuentra una frontera que conduce a un segundo medio, parte de la luz incidente se refleja. La figura 35.5a presenta varios rayos de un haz de luz incidente sobre una superficie reflectora lisa, similar a un espejo. Los rayos reflejados son paralelos entre sí, como se indica en la figura. La dirección de un rayo reflejado está en el plano perpendicular a la superficie reflectora que contiene el rayo incidente. La reflexión de la luz a partir de dicha superficie lisa recibe el nombre de **reflexión especular**. Si la superficie reflejante es rugosa, como se muestra en la figura 35.5b, la superficie refleja los rayos no como un conjunto paralelo sino en varias direcciones. La reflexión en cualquier superficie rugosa se conoce como **reflexión difusa**. Una superficie se comporta como una superficie lisa siempre que las variaciones en la misma sean más pequeñas que la longitud de onda de la luz incidente.

La diferencia entre las dos clases de reflexión explica por qué es más difícil observar mientras se conduce en una noche lluviosa. Si la carretera está mojada, como se muestra en la figura 35.5c, la superficie lisa del agua refleja de manera especular la mayoría de la luz que emiten sus faros a mayor distancia de su auto (y quizá en los ojos de los conductores que se acercan). Cuando la carretera está seca (véase la figura 35.5d) dicha superficie rugosa refleja en forma difusa parte de la luz que emiten sus faros hacia atrás de usted, permitiéndole ver claramente la carretera. En esta obra nos interesa sólo la reflexión especular, y utilizamos el término *reflexión* para referirnos a la reflexión especular.

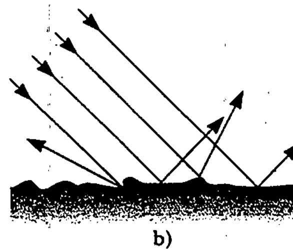
Considere un rayo de luz que viaja en el aire y que incide a cierto ángulo sobre una superficie plana y lisa, como se muestra en la figura 35.6. Los rayos incidente y



La fotografía, tomada en Salamanca, España, muestra la reflexión de la nueva catedral en el río Tormes. ¿Puede usted distinguir la catedral de su imagen?



a)



b)



c)



d)

Figura 35.5 Representación esquemática de a) una reflexión especular, donde los rayos reflejados son todos paralelos entre sí, y b) una reflexión difusa, donde los rayos reflejados viajan en direcciones aleatorias. c) y d) Reflexión especular y difusa en la carretera. (*Charles D. Winters*)

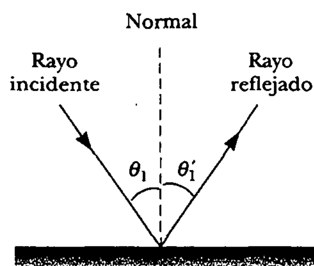


Figura 35.6 De acuerdo con la ley de la reflexión, $\theta_1 = \theta_1'$. El rayo incidente, el rayo reflejado y la normal están en el mismo plano.

reflejado forman ángulos q_1 y θ_1', respectivamente, donde los ángulos estén medidos desde la normal a los rayos. (La normal es una línea dibujada perpendicular a la superficie en el punto donde los rayos incidentes golpean.) Los experimentos y la teoría muestran que **el ángulo de reflexión es igual al ángulo incidente**:

Ley de reflexión

$$\theta_1' = \theta_1 \tag{35.2}$$

Tal relación se llama **ley de la reflexión**.

EJEMPLO 35. **Rayo de luz doblemente reflejado**

Dos espejos forman un ángulo de 120° entre sí, como se ve en la figura 35.7. Un rayo incide sobre el espejo M_1 a un ángulo de 65° con la normal. Encuentre la dirección del rayo después de que éste se refleja desde el espejo M_2.

Solución De acuerdo con la ley de reflexión, sabemos que el primer rayo reflejado forma un ángulo de 65° con la normal. Así, este rayo forma un ángulo de 90°− 65°= 25°, con la horizontal.

A partir del triángulo formado por el primer rayo reflejado y los dos espejos, observamos que el primer rayo reflejado forma un ángulo de 35° con M_2 (puesto que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es de 180°). Lo anterior significa que este rayo forma un ángulo de 55° con la normal a M_2. Por tanto, según la ley de reflexión, el segundo rayo reflejado forma un ángulo de 55° con la normal a M_2. Al comparar la dirección del rayo conforme éste incide en M_1 con su dirección después de reflejarse en M_2, vemos que el rayo se refleja por 2(55°) = 120° lo cual corresponde al ángulo entre los espejos.

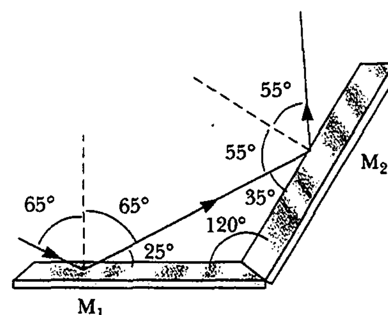


Figura 35.7 Los espejos M_1 y M_2 forman un ángulo entre sí de 120°.

web
Para más información sobre productos retrorreflejantes visite
http://www.3m.com/product

Si el ángulo entre los dos espejos en el ejemplo anterior fuera de 90°, el haz reflejado regresaría a la fuente paralelo a su trayectoria original. Dicho fenómeno llamado *retrorreflexión* tiene muchas aplicaciones prácticas. Si un tercer espejo se coloca perpendicular a los dos primeros, de tal manera que el tercero forme la esquina de un cubo, la retrorreflexión trabaja en tres dimensiones. En 1969 un panel de varios pequeños reflectores fue puesto en la Luna por los astronautas del *Apolo 11* (véase la figura 35.8a). Un haz de láser desde la Tierra puede ser reflejado directamente hacia atrás de él mismo y se mide el tiempo de tránsito. Tal información sirve para determinar la distancia a la Luna con una incertidumbre de 15 cm. (¡Imagine qué tan difícil sería alinear un espejo plano regular, de tal forma que el haz de láser reflejado incida en alguna posición particular de la Tierra!) Una aplicación más práctica se encuentra en los faros posteriores de un auto. Parte del plástico de que está hecho el faro está formado en varias esquinas cúbicas diminutas (véase la figura 35.8b), de modo que los haces de los faros de los carros que se acercan por la

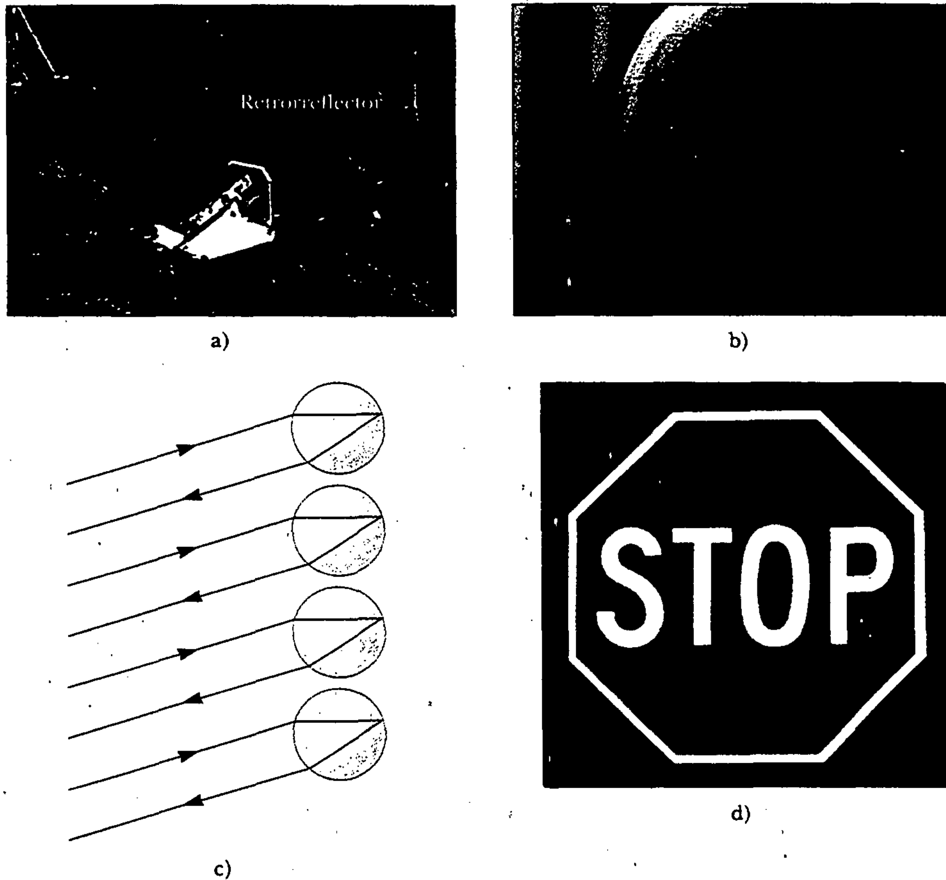


Figura 35.8 Aplicaciones de retrorreflexión. a) El panel en la Luna refleja un haz de láser directamente atrás de su fuente en la Tierra. b) Un faro trasero de automóvil tiene pequeños retrorreflectores que aseguran que los haces del faro delantero son reflejados hacia atrás del auto que los envía. c) Un haz de luz incidiendo en una esfera transparente se retrorrefleja. d) Dicho símbolo de alto parece resplandecer con los haces de luz de los faros porque su superficie está cubierta con una capa de muchas esferas retrorreflectoras diminutas. ¿Qué se podría ver si el símbolo tuviera una superficie parecida a un espejo? (*a, Cortesía de la NASA; b y d, George Semple*)

parte de atrás se reflejan detrás de los conductores. En lugar de las esquinas cúbicas tipo pirámide, se usan algunas veces pequeñas protuberancias esféricas (véase la figura 35.8c). Se encuentran esferas retrorreflectoras diminutas en el material que cubre muchos de los símbolos de la carretera. El símbolo de alto en la figura 35.8d parece mucho más brillante que si fuera simplemente sin relieve, la superficie brillante refleja la mayor parte de la luz que incide sobre ella en una autopista.

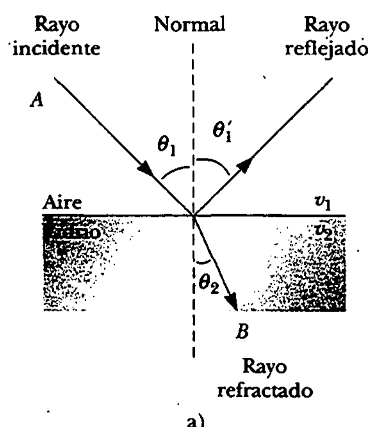
Experimento sorpresa

Póngase un par de zapatos de correr con marcas de seguridad retrorreflectoras en una habitación oscura al lado de un espejo pequeño. Mantenga una linterna al lado de su cabeza y mande un rayo hacia el espejo y los zapatos desde varios ángulos. ¿Cuáles son más brillantes, las marcas de seguridad o el espejo?



REFRACCIÓN

14.4 Cuando un rayo de luz que viaja a través de un medio transparente encuentra una frontera que lleva a otro medio transparente, como se muestra en la figura 35.9, parte del rayo se refleja y parte entra al segundo medio. La parte que entra al segundo medio se dobla en la frontera y se dice que se **refracta**. El rayo incidente, el rayo reflejado y el rayo refractado se encuentran en el mismo plano. El **ángulo de refrac-**



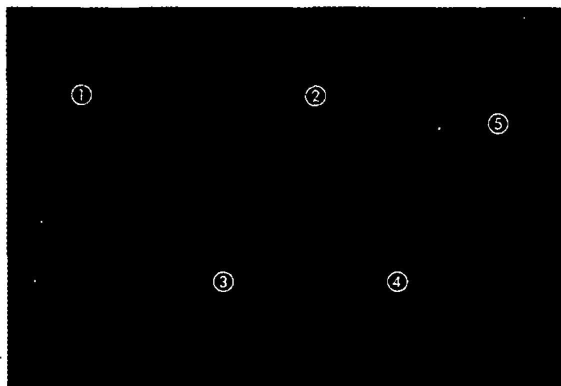


Figura 35.9 a) Un rayo que incide en forma oblicua sobre una interfàce de aire-vidrio. El rayo que se refracta se desvía hacia la normal debido a que $v_2 < v_1$. Todos los rayos y la normal se encuentran en el mismo plano. b) La luz incidente sobre el bloque de lucita se desvía cuando entra al bloque y cuando sale de él. *(b, Henry Leap y Jim Lehman)*

ción, θ_2, que se observa en la figura 35.9, depende de las propiedades de los dos medios y del ángulo de incidencia a través de la relación

$$\frac{\text{sen}\,\theta_2}{\text{sen}\,\theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \text{constante} \tag{35.3}$$

donde v_1 es la rapidez de la luz en el medio 1 y v_2 es la rapidez de la luz en el medio 2.

La trayectoria de un rayo luminoso a través de una superficie refractante es reversible. Por ejemplo, el rayo que se muestra en la figura 35.9a viaja del punto A al punto B. Si el rayo se hubiera originado en B, éste viajaría a la izquierda a lo largo de la línea BA para llegar al punto A, y la parte reflejada apuntaría hacia abajo y a la izquierda en el vidrio.

Pregunta sorpresa 35.1

Si el haz ① es el haz entrante en la figura 35.9b, ¿cuáles de las otras cuatro líneas rojas son haces reflejados y cuáles son haces refractados?

De la ecuación 35.3 se deduce que cuando la luz se mueve de un material en el que su rapidez es mayor a un material en el que su rapidez es menor, como se indica en la figura 35.10a, el ángulo de refracción θ_2 es menor que el ángulo de incidencia θ_1, y el haz se dobla hacia la normal. Si el rayo se mueve de un material en el cual éste se mueve lentamente a un material en el que se mueve con más rapidez, como se ilustra en la figura 35.10b, θ_2 es más grande que θ_1, y el haz se dobla hacia la normal.

El comportamiento de la luz cuando ésta pasa del aire a otra sustancia y luego resurge en el aire es a menudo una fuente de confusión para los estudiantes. Cuando la luz viaja en el aire su rapidez es igual a 3×10^8 m/s; pero dicha rapidez se reduce a aproximadamente 2×10^8 m/s cuando entra en un bloque de vidrio. Cuando la luz vuelve a emerger en el aire su rapidez aumenta en forma instantánea hasta su valor original de 3×10^8 m/s, lo cual es muy diferente de lo que ocurre, por ejemplo, cuando una bala se dispara contra un bloque de madera. Aquí la rapidez de la bala se reduce cuando ésta se mueve a través de la madera debido a que un poco de su energía original se utiliza para separar las fibras de la madera. Cuando la ba-

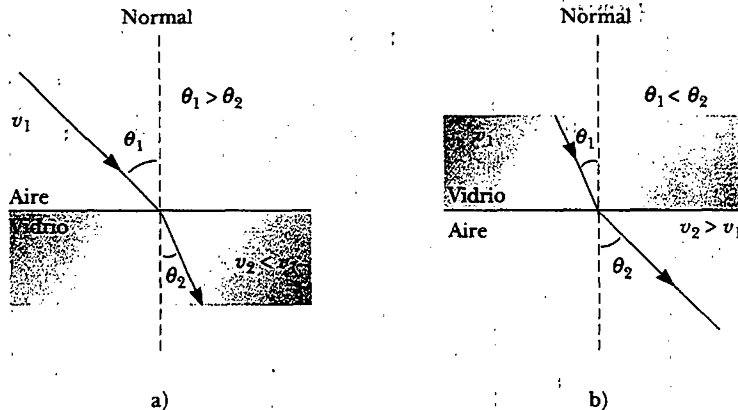


Figura 35.10 a) Cuando el haz luminoso se desplaza del aire al vidrio, la luz va más despacio al entrar en el vidrio y su trayectoria se desvía hacia la normal. b) Cuando el haz se desplaza del vidrio al aire, la luz se mueve más rápido al entrar al aire y su trayectoria se desvía alejándose de la normal.

la entra al aire otra vez, emerge a la rapidez que tenía justo antes de abandonar el bloque de madera.

Para ver por qué la luz se comporta así observe la figura 35.11, la cual representa un haz de luz que entra a un pedazo de vidrio desde la izquierda. Una vez dentro del vidrio, la luz puede encontrar un electrón ligado a un átomo, indicado como punto A en la figura. Supongamos que la luz es absorbida por el átomo, lo cual origina que el electrón oscile (un detalle representado por las flechas verticales de doble punta en el dibujo). El electrón oscilante actúa luego como una antena[1] y radia el haz de luz hacia un átomo en B, donde la luz es absorbida otra vez por el átomo. Los detalles de estas absorciones y radiaciones se explican mejor en términos de la mecánica cuántica, un tema que estudiamos en la versión extensa de este libro. Por ahora, es suficiente considerar el proceso como uno en el cual la luz pasa de un átomo a otro a través del vidrio. A pesar de que la luz viaja de un átomo de vidrio a otro a 3×10^8 m/s, la absorción y radiación que ocurren ocasionan que la rapidez promedio de la luz a través del material disminuya a 2×10^8 m/s. Una vez que la luz emerge en el aire, la absorción y radiación cesan y su rapidez regresa al valor original.

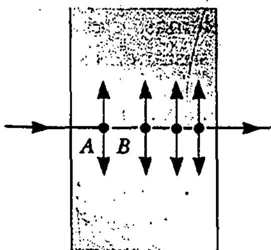


Figura 35.11 Luz que pasa de un átomo a otro en un medio. Los puntos son electrones, y las flechas verticales representan sus oscilaciones.

[1] Cuando la frecuencia de la luz es tal que ocasiona que los electrones oscilen cerca de una frecuencia resonante, la amplitud es tan grande que los átomos del medio chocan unos con otros y mucha de la energía de la luz se transforma en energía interna, y, en consecuencia, es absorbida por el medio. Los electrones de diferentes materiales tienen diferentes frecuencias de resonancia. Ello explica por qué usted puede ver luz visible a través del vidrio y por qué las frecuencias ultravioleta, que llegan a causar quemaduras por sol, no pueden atravesar el vidrio. Por otra parte, la luz ultravioleta es capaz de penetrar nubes, mientras que la luz visible no. Así, aunque no es probable que se queme por el sol por una ventana, sí puede quemarse por el sol si está afuera en un día nublado.

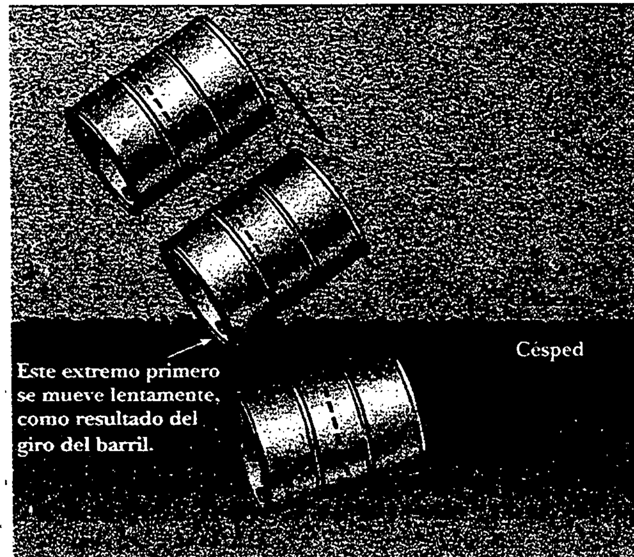


Figura 35.12 Vista desde arriba de un barril que rueda del cemento al césped.

En la figura 35.12 se observa una analogía mecánica de refracción. Cuando el extremo izquierdo del barril que gira alcanza el césped, se mueve lentamente, mientras que el extremo derecho permanece en el cemento y se mueve a su rapidez original. Tal diferencia en rapidez ocasiona que el barril pivotee, y esto cambia la dirección del viaje.

Índice de refracción

En general, la rapidez de la luz en cualquier material es menor que su rapidez en el vacío. En efecto, *la luz viaja a su máxima rapidez en el vacío.* Es conveniente definir al **índice de refracción** n de un medio como la relación

Índice de refracción

$$n \equiv \frac{\text{Rapidez de la luz en el vacío}}{\text{Rapidez de la luz en el medio}} = \frac{c}{v} \tag{35.4}$$

Experimento sorpresa

Llene un vaso con agua y coloque un lápiz en el interior, como se muestra en la figura de abajo. Observe el lápiz de lado a un ángulo de aproximadamente 45° con respecto de la superficie. ¿Por qué el lápiz parece doblado en la superficie



A partir de esta definición vemos que el índice de refracción es un número adimensional mayor que la unidad ya que v siempre es menor que c. Además, n es igual a la unidad para el vacío. Los índices de refracción para diferentes sustancias se listan en la tabla 35.1.

A medida que la luz viaja de un medio a otro, su frecuencia no cambia pero su longitud de onda sí. Para ver por qué ocurre esto, considere la figura 35.13. Frentes de onda pasan a un observador en el punto A en el medio 1 con una cierta frecuencia e inciden sobre la frontera entre el medio 1 y el medio 2. La frecuencia con la cual los frentes de onda pasan a un observador en el punto B en el medio 2 debe igualar la frecuencia a la cual pasan al punto A. Si éste no fuera el caso, los frentes de onda se apilarían en la frontera o se destruirían o crearían en la frontera. Porque no hay mecanismo para que esto ocurra, la frecuencia debe ser una constante cuando un rayo luminoso pase de un medio a otro.

Por tanto, debido a que la relación $v = f\lambda$ (ecuación 16.14) debe ser válida en ambos medios, y en virtud de que $f_1 = f_2 = f$, vemos que

$$v_1 = f\lambda_1 \quad \text{y} \quad v_2 = f\lambda_2 \tag{35.5}$$

Ya que $v_1 \neq v_2$, se concluye que $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

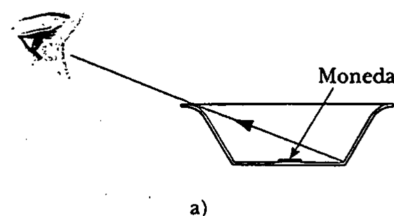
TABLA 35.1 Índices de refracción[a]

Sustancia	Índice de refracción	Sustancia	Índice de refracción
Sólidos a 20°C		**Líquidos a 20°C**	
Circona cúbica	2.20	Benceno	1.501
Diamante (C)	2.419	Disulfuro de carbono	1.628
Fluorita (CaF_2)	1.434	Tetracloruro de carbono	1.461
Vidrio de cuarzo (SiO_2)	1.458	Alcohol etílico	1.361
Fosfuro de galio	3.50	Glicerina	1.473
Vidrio, óptico	1.52	Agua	1.333
Cristal	1.66		
Hielo (H_2O)	1.309	**Gases a 0°C, 1 atm**	
Poliestireno	1.49	Aire	1.000 293
Cloruro de sodio (NaCl)	1.544	Dióxido de carbono	1.000 45

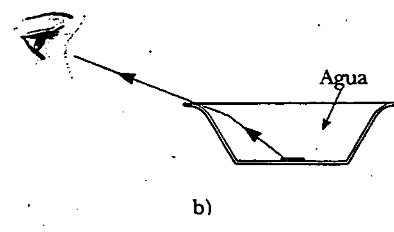
[a] Todos los valores son para luz con una longitud de onda de 589 nm en el vacío.

Experimento sorpresa

Pegue una moneda en el fondo de una gran pecera opaca, como se muestra en la figura a. Párese donde mire la moneda sobre el tazón y después aléjese de él hasta que ya no pueda ver la moneda desde el borde. Permanezca en esa posición y pídale a un amigo que llene el tazón con agua, como se muestra en la figura b. Ahora puede ver nuevamente la moneda, ya que la luz se refracta en la interface aire-agua.



a)



b)

Se obtiene una relación entre el índice de refracción y la longitud de onda al dividir la primera ecuación 35.5 entre la segunda, y después usando la ecuación 35.4:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{35.6}$$

La cual produce

$$\lambda_1 n_1 = \lambda_2 n_2$$

Si el medio 1 es el vacío, o aire para todos los fines prácticos, entonces $n_1 = 1$. En consecuencia, se concluye de la ecuación 35.6 que el índice de refracción de cualquier medio puede expresarse como la relación

$$n = \frac{\lambda}{\lambda_n} \tag{35.7}$$

donde λ es la longitud de onda de la luz en el vacío y λ_n es la longitud de onda en el medio cuyo índice de refracción es n. En la ecuación 35.7 se ve que como $n > 1$, $\lambda_n < \lambda$.

Ahora se está en posición de expresar la ecuación 35.3 en una forma alternativa. Si reemplazamos al término v_2/v_1 con n_1/n_2 en la de la ecuación 35.6, obtenemos

Ley de la refracción de Snell

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2 \tag{35.8}$$

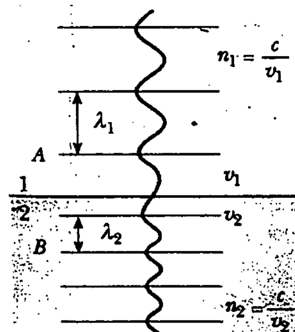


Figura 35.13 Conforme un frente de onda se mueve del medio 1 al medio 2, su longitud de onda cambia pero su frecuencia permanece constante.

El descubrimiento experimental de esta relación suele acreditarse a Willebrord Snell (1591-1627) y, por tanto, se le conoce como la **ley de refracción de Snell**. Examinaremos dicha fórmula posteriormente en las secciones 35.6 y 35.9.

EJEMPLO 35.2 Una medición del índice de refracción

Un haz de luz de 500 nm de longitud de onda que viaja en el aire incide sobre una placa de material transparente. El haz incidente forma un ángulo de 40.0° con la normal, y el haz refractado forma un ángulo de 26.0° con la normal. Determine el índice de refracción del material.

Solución Usando la ley de refracción de Snell (ecuación 35.8) con estos datos, y tomando $n_1 = 1.00$ para el aire, se obtiene

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

$$n_2 = \frac{n_1 \text{ sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = (1.00)\frac{\text{sen } 40.0°}{\text{sen } 26.0°} = \frac{0.643}{0.438} = 1.47$$

En la tabla 35.1 se ve que el material puede ser vidrio de cuarzo.

Ejercicio ¿Cuál es la longitud de onda de la luz en el material?

Respuesta 374 nm.

EJEMPLO 35.3 Ángulo de refracción para el vidrio

Un rayo luminoso de 589 nm de longitud de onda que viaja a través del aire incide sobre una placa plana y lisa de vidrio óptico a un ángulo de 30.0° con la normal, como se muestra en la figura 35.14. Determine el ángulo de refracción.

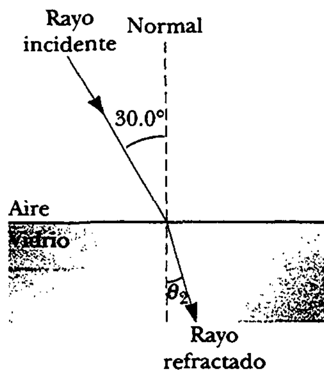


Figura 35.14 Refracción de la luz en vidrio.

Solución La ley de la refracción de Snell puede reescribirse como

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \text{ sen } \theta_1$$

En la tabla 35.1 encontramos que $n_1 = 1.00$ para el aire, y que $n_2 = 1.52$ para el vidrio óptico. Por consiguiente,

$$\text{sen } \theta_2 = \left(\frac{1.00}{1.52}\right)(\text{sen } 30.0°) = 0.329$$

$$\theta_2 = \text{sen}^{-1}(0.329) = 19.2°$$

Como éste es menor que el ángulo incidente de 30°, el rayo se dobla hacia la normal, como se esperaba. Tal cambio en la dirección se llama *ángulo de desviación* y está dado por $\delta = |\theta_1 - \theta_2| = 30.0° - 19.2° = 10.8°$.

Ejercicio Si el rayo luminoso se mueve del interior del vidrio hacia la interface vidrio-aire, a un ángulo de 30.0° con la normal, determine el ángulo de refracción.

Respuesta 49.5° lejos de la normal.

EJEMPLO 35.4 Luz láser en un disco compacto

Un láser en un reproductor de discos compactos genera una luz que tiene una longitud de onda de 780 nm en aire. a) Encuentre la rapidez de esta luz una vez que entra en el plástico de un disco compacto ($n = 1.55$).

Solución Se espera encontrar un valor menor que 3×10^8 m/s, ya que $n > 1$. Se obtiene la rapidez de la luz en el plástico usando la ecuación 35.4:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{1.55} = 1.94 \times 10^8 \text{ m/s}$$

b) ¿Cuál es la longitud de onda de esta luz en el plástico?

Solución Si se usa la ecuación 35.7 para calcular la longitud de onda en el plástico, observe que se está dando la longitud de onda en el aire de $\lambda = 780$ nm:

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} = \frac{780 \text{ nm}}{1.55} = 503 \text{ nm}$$

Ejercicio Encuentre la frecuencia de la luz en el aire y en el plástico.

Respuesta 3.85×10^{14} Hz en ambos casos.

EJEMPLO 35. **Luz que pasa a través de una placa**

Un haz luminoso pasa del medio 1 al medio 2; este último es una gruesa capa de material cuyo índice de refracción es n_2 (Fig. 35.15). Muestre que el haz que emerge es paralelo al haz incidente.

Solución Primero aplicamos la ley de refracción de Snell a la superficie superior:

$$1)\quad \text{sen}\ \theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\ \text{sen}\ \theta_1$$

La aplicación de esta ley a la superficie inferior produce

$$2)\quad \text{sen}\ \theta_3 = \frac{n_2}{n_1}\ \text{sen}\ \theta_2$$

La sustitución de 1) en 2) produce

$$\text{sen}\ \theta_3 = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{n_1}{n_2}\ \text{sen}\ \theta_1\right) = \text{sen}\ \theta_1$$

Por consiguiente, $\theta_3 = \theta_1$, y la placa no altera la dirección del haz. Sin embargo, esto hace que el haz se desplace paralelo a sí mismo.

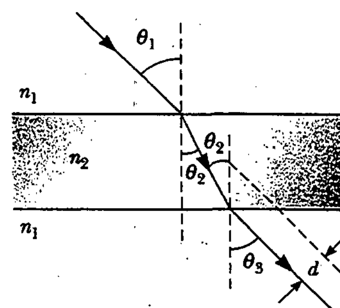


Figura 35.15 Cuando la luz pasa por una placa plana de material, el haz emergente es paralelo al haz incidente, por lo que $\theta_1 = \theta_3$. La línea punteada dibujada paralela a la línea roja que sale del fondo de la placa representa la trayectoria que la luz seguiría si la placa no estuviera ahí.

35.6 EL PRINCIPIO DE HUYGENS

En esta sección desarrollamos las leyes de la reflexión y la refracción empleando un método geométrico propuesto por Huygens en 1678. Como señalamos en la sección 35.1, Huygens supuso que la luz era cierta forma de movimiento ondulatorio más que una corriente de partículas. Él no tenía conocimiento de la naturaleza de la luz o de su carácter electromagnético. A pesar de eso, su modelo ondulatorio simplificado es adecuado para comprender muchos aspectos prácticos de la propagación de la luz.

El principio de Huygens es una construcción geométrica para usar el conocimiento de un frente de onda anterior con el fin de determinar la posición de un nuevo frente de onda en algún instante. En la construcción de Huygens,

Principio de Huygens

> todos los puntos de un frente de onda determinado se toman como fuentes puntuales de la producción de *ondas secundarias* esféricas, llamadas *ondulaciones*, las cuales se propagan hacia afuera del medio con rapidez característica de las ondas en ese medio. Después de que ha transcurrido cierto tiempo, la nueva posición del frente de onda es la superficie tangente a las ondulaciones.

Primero consideremos una onda plana que se mueve a través del espacio libre, como se indica en la figura 35.16a. En $t = 0$, el frente de onda se indica por el plano llamado AA'. En la construcción de Huygens, cada punto de este frente de onda se considera una fuente puntual. Por claridad sólo se muestran tres puntos sobre AA'. Con los puntos como fuentes para las ondas secundarias esféricas, se dibujan círculos, cada uno de radio $c\,\Delta t$, donde c es la rapidez de la luz en el espacio libre y Δt es el tiempo de propagación de un frente de onda al siguiente. La superficie dibujada tangente a estas ondas esféricas secundarias es el plano BB', el cual es paralelo a AA'. De una manera similar, la figura 35.16b muestra la construcción de Huygens para una onda esférica.

La figura 35.17 muestra una demostración convincente del principio de Huygens. Las ondas planas que vienen de lejos de la costa surgen de las aberturas en la barrera como las ondas circulares bidimensionales se propagan al exterior.

[illegible] contribuciones en los campos de la dinámica y la óptica. Para Huygens, la luz era un tipo de movimiento vibratorio extendiéndose y produciendo la sensación de la vista cuando toca el ojo. Con base en esta teoría, él dedujo las leyes de la reflexión y la refracción y explicó el fenómeno de la doble refracción. *(Cortesía de Rijksmuseum voor de Geschiedenis der Natuurwetenschappen. Cortesía de Niels Bohr Library.)*

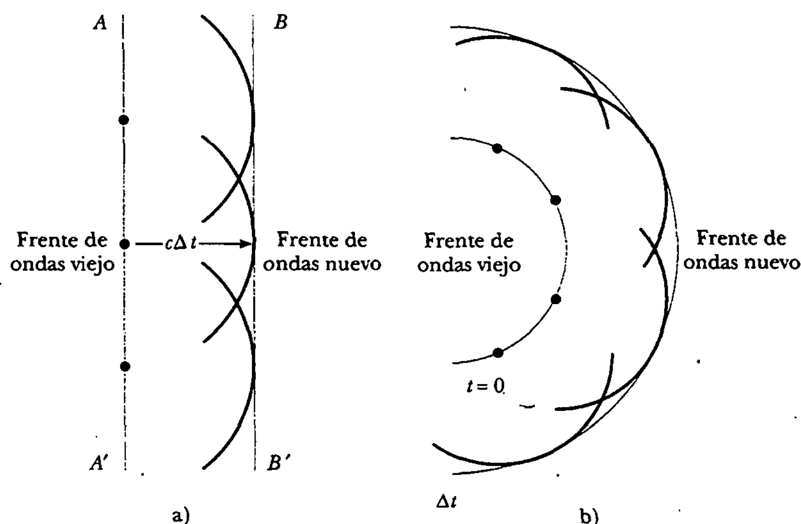


Figura 35.16 Construcción de Huygens para a) una onda plana propagándose a la derecha y b) una onda esférica propagándose a la derecha.

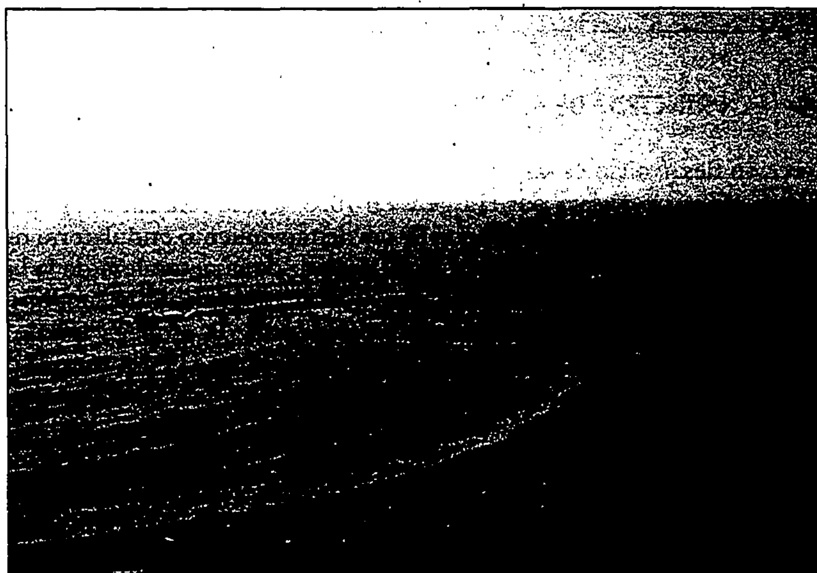


Figura 35.17 La fotografía de la playa de Tel Aviv, Israel, muestra las ondas esféricas secundarias de Huygens radiando desde cada abertura a través de un rompeolas. Observe cómo se ha formado la playa por la acción de las olas. *(Cortesía de Sabina Zigman/Benjamin Cardozo High School, y con permiso de PHYSICS TEACHER, vol. 37, enero de 1999, p. 55.)*

El principio de Huygens aplicado a la reflexión y a la refracción

Las leyes de la reflexión y la refracción se enunciaron antes en el presente capítulo, pero no se demostraron. Ahora se deducen estas leyes utilizando el principio de Huygens.

Para la ley de la reflexión, refiérase a la figura 35.18a. La línea AA' representa un frente de onda de la luz incidente. Conforme el rayo 3 viaja de A' a C, el rayo 1 se refleja desde A y produce una onda secundaria esférica de radio AD. (Recuerde que el radio de una onda secundaria esférica de Huygens es $c\,\Delta t$.) Ya que las dos ondas secundarias esféricas tienen radios $A'C$ y AD están en el mismo medio, tienen la misma rapidez c, por tanto, $A'C = AD$. Mientras tanto, la onda secundaria esférica

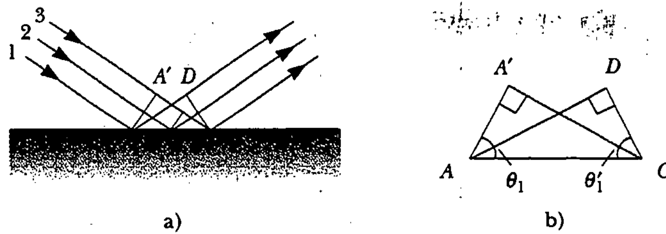


Figura 35.18 a) Construcción de Huygens para probar la ley de reflexión. b) Los triángulos ADC y AA′C son congruentes.

centrada en B se ha extendido sólo la mitad de la que está centrada en A ya que el rayo 2 pega en la superficie después de que pega el rayo 1.

Del principio de Huygens se encuentra que el frente de onda reflejado es CD, una línea tangente a todas las ondas secundarias esféricas salientes. El resto de nuestro análisis depende de la geometría, como se resume en la figura 35.18b. Observe que los triángulos rectángulos ADC y $AA'C$ son congruentes, ya que tienen la misma hipotenusa AC y porque $AD = A'C$. De la figura 35.18b se tiene

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{A'C}{AC} \quad \text{y} \quad \text{sen } \theta_1' = \frac{AD}{AC}$$

Así,

$$\text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta_1'$$

$$\theta_1 = \theta_1'$$

la cual es la ley de la reflexión.

Ahora usaremos el principio de Huygens y la figura 35.19a para deducir la ley de refracción de Snell. Advierta que en el intervalo de tiempo Δt, el rayo 1 se mueve de A a B y el rayo 2 se mueve de A' a C. El radio de la onda secundaria esférica saliente que está centrada en A es igual a $v_2\,\Delta t$. La distancia $A'C$ es igual a $v_1\,\Delta t$. Las consideraciones geométricas muestran que el ángulo $A'AC$ es igual a θ_1 y el ángulo ACB es igual a θ_2. De acuerdo con los triángulos $AA'C$ y ACB, encontramos que

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{v_1\,\Delta t}{AC} \quad \text{y} \quad \text{sen } \theta_2 = \frac{v_2\,\Delta t}{AC}$$

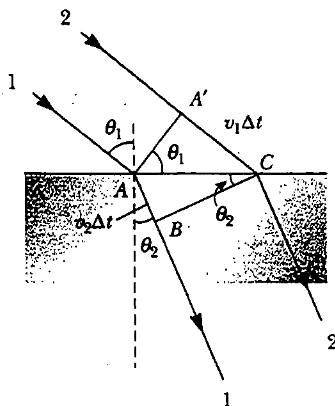


Figura 35.19 Construcción de Huygens para demostrar la ley de la refracción de Snell.

Al dividir la primera ecuación entre la segunda obtenemos

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Pero de la ecuación 35.4 sabemos que $v_1 = c/n_1$ y $v_2 = c/n_2$. En consecuencia,

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

que es la ley de refracción de Snell.

DISPERSIÓN Y PRISMAS

14.4 Una importante propiedad del índice de refracción es que, para un material determinado, el índice varía con la longitud de onda de luz que pasa a través del material, como se indica en la figura 35.20. Dicho comportamiento se llama **dispersión**. Puesto que n es una función de la longitud de onda, la ley de la refracción de Snell indica que luz de diferentes longitudes de onda se desvía a diferentes ángulos cuando incide sobre un material refractante.

Como se ve en la figura 35.20, el índice de refracción por lo general disminuye con las longitudes de onda crecientes, lo cual significa que la luz azul se desvía más que la luz roja cuando pasa por un material refractante. Para entender los efectos que la dispersión puede tener en la luz, consideremos qué ocurre cuando la luz incide en un prisma, como en la figura 35.21. Un rayo de luz incidente de una sola longitud de onda sobre el prisma de la izquierda emerge refractado de su dirección original de recorrido en un ángulo δ, denominado **ángulo de desviación**.

Supongamos ahora que un haz de *luz blanca* (una combinación de todas las longitudes de onda visibles) incide sobre un prisma como se ilustra en la figura 35.22. Los rayos que emergen se dispersan en una serie de colores conocida como el **espectro visible**. Estos colores, en orden de longitud de onda decreciente son rojo, naranja, amarillo, verde, azul, índigo y violeta. Claramente, el ángulo de desviación δ depende de su longitud de onda. La luz violeta se desvía más y la roja menos, y los colores restantes en el espectro visible están entre estos extremos. Newton demostró que cada color tiene un ángulo particular de desviación, y que los colores pueden recombinarse para formar la luz blanca original.

Con frecuencia, se emplea un prisma, instrumento conocido como **espectrómetro de prisma**, cuyos elementos esenciales se muestran en la figura 35.23. En general, el instrumento se utiliza para estudiar las longitudes de onda emitidas por una fuente luminosa. La luz de la fuente se envía por una estrecha ranura ajustable para producir un haz paralelo o *colimado*. La luz pasa después a través del prisma y se dispersa en un espectro. La luz dispersada se observa con un telescopio. El experi-

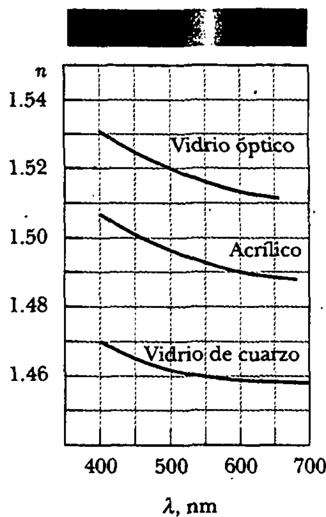


Figura 35.20 Variación del índice de refracción con longitudes de onda en el vacío para tres materiales.

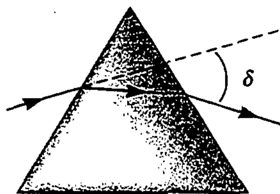


Figura 35.21 Un prisma refracta un rayo de luz de una sola longitud de onda a través de un ángulo δ.



Figura 35.22 Los colores diferentes se refractan a diferentes ángulos debido a que el índice de refracción del vidrio depende de la longitud de onda. La luz violeta se desvía más; la luz roja se desvía menos. (*Cortesía de Bausch & Lomb*)

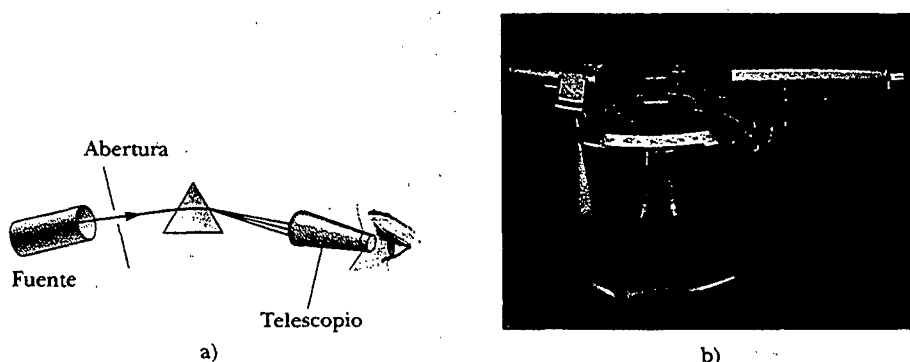


Figura 35.23 a) Diagrama de un espectrómetro de prisma. Los diferentes colores en el espectro visible son vistos a través de un telescopio. b) Fotografía de un espectrómetro de prisma. (*Cortesía de Central Scientific Company*)

mentador ve una imagen de la ranura a través del ocular del telescopio. El telescopio se puede mover, o el prisma se puede girar, de modo que se puedan ver las diferentes imágenes formadas por las diferentes longitudes de onda a diferentes ángulos de desviación.

Todos los gases calientes a baja presión emiten su propio espectro característico. Por ende, uno de los usos del espectrómetro de prisma es la identificación de gases. Por ejemplo, el sodio emite dos longitudes de onda a 589.0 nm y 589.6 nm, en el espectro visible, las cuales aparecen como dos líneas amarillas muy próximas entre sí. Así, es posible determinar que un gas que emite estos colores tiene sodio como uno de sus constituyentes. De igual modo, el vapor de mercurio tiene su propio espectro característico, compuesto por líneas en las que predominan cuatro colores —naranja, verde, azul y violeta— junto con algunas otras líneas de intensidad menor. Las longitudes de onda particulares emitidas por un gas sirven como "huellas digitales" del gas.

La dispersión de la luz en el espectro se demuestra de manera más real en la naturaleza en la formación de un arco iris, que a menudo es visto por un observador colocado entre el Sol y la lluvia. Para entender cómo se forma el arco iris considere la figura 35.24. Un rayo de luz del Sol (que es luz blanca) en el cielo pega en una gota de agua en la atmósfera y se refracta y refleja como se indica a continuación: Este primero se refracta en la superficie frontal de la gota, la luz violeta se desvía más y la luz roja se desvía menos. En la superficie posterior de la gota, la luz se refleja y se regresa a la superficie frontal, donde nuevamente experimenta una refracción conforme se mueve del agua al aire. El rayo abandona la gota de tal manera que el ángulo entre la luz blanca incidente y el rayo violeta más intenso que retorna es 40° y el ángulo entre la luz blanca y el rayo rojo más intenso que retorna

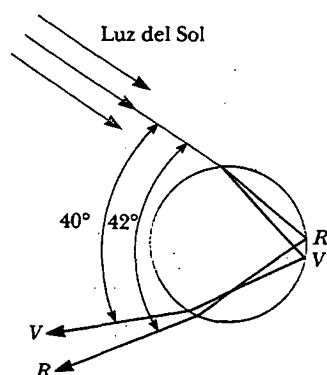


Figura 35.24 Refracción de la luz del Sol por una gota de lluvia esférica.

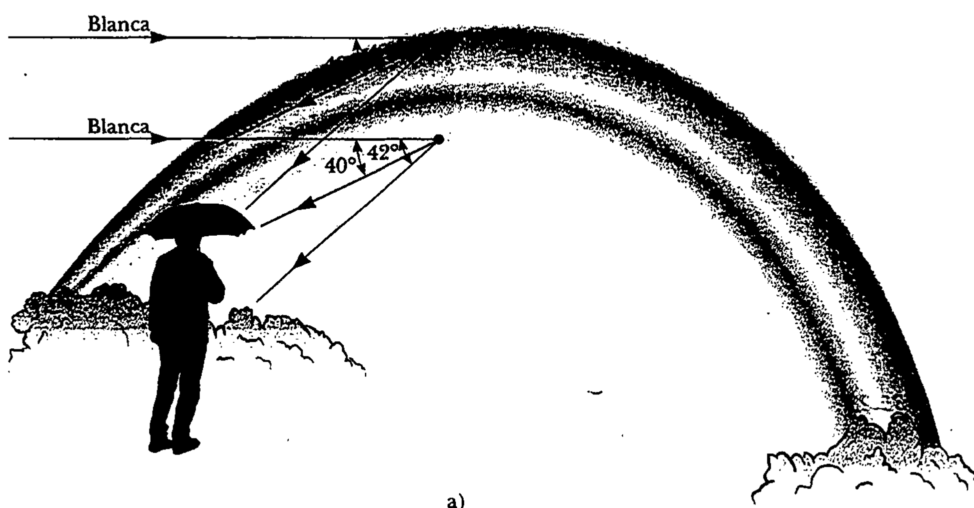




Figura 35.25 a) La formación de un arco iris. b) Un arco iris sobre las cataratas del Niágara en Ontario, Canadá. *(John Edwards/Tony Stone Images)*

es de 42°. Esta pequeña diferencia angular entre los rayos que retornan ocasiona que se vea un arco de colores.

Ahora consideremos un observador que está viendo un arco iris, como se muestra en la figura 35.25a. Si se está observando una gota de lluvia alta en el cielo, la luz roja que regresa de la gota puede llegar al observador porque es la que se desvía más, pero la luz violeta pasa sobre el observador porque es la que se desvía menos. Así, el observador ve a esta gota como roja. De manera similar, una gota a menor altura en el cielo podría ser directamente violeta e ir al observador y parecer violeta. (La luz roja de esta gota podría pegar en el piso y no verse.) Los otros colores del espectro que llegarían al observador desde las gotas de agua estarían entre estas dos posiciones extremas.

Es interesante observar las interpretaciones artísticas de los arco iris porque muchas veces los dibujos no son correctos, con la parte exterior violeta y la parte interior roja.

Pregunta sorpresa 35.2

Los lentes en una cámara usan refracción para formar una imagen en una película, y usted quiere que, tanto como sea posible, todos los colores en la luz desde el objeto que está fotografiando se refracten por la misma cantidad. De los materiales que se muestran en la figura 35.20, ¿cuál elegiría para lentes de cámara?

EJEMPLO 35.5 Medición de *n* empleando un prisma

Aunque no lo probamos aquí, el ángulo de desviación mínimo, $\delta_{\text{mín}}$, para un prisma ocurre cuando el ángulo de incidencia θ_1 es tal que el rayo refractado dentro del prisma forma el mismo ángulo α con la normal a las dos caras del prisma,[2] como se indica en la figura 35.26. A partir de esta información obtengamos una expresión para el índice de refracción del material del prisma.

Utilizando la geometría mostrada en la figura 35.26 encontramos que $\theta_2 = \Phi/2$, donde Φ es el ángulo ápice y

$$\theta_1 = \theta_2 + \alpha = \frac{\Phi}{2} + \frac{\delta_{\text{mín}}}{2} = \frac{\Phi + \delta_{\text{mín}}}{2}$$

De la ley de refracción de Snell, con $n_1 = 1$, ya que el medio 1 es el aire, tenemos

$$\text{sen}\,\theta_1 = n\,\text{sen}\,\theta_2$$

$$\text{sen}\left(\frac{\Phi + \delta_{\text{mín}}}{2}\right) = n\,\text{sen}\,(\Phi/2)$$

$$n = \frac{\text{sen}\left(\frac{\Phi + \delta_{\text{mín}}}{2}\right)}{\text{sen}\,(\Phi/2)} \qquad \textbf{(35.9)}$$

Por consiguiente, conociendo el ángulo ápice Φ del prisma, y midiendo $\delta_{\text{mín}}$, se calcula el índice de refracción del material del prisma. Además, un prisma hueco sirve para determinar los valores de n para varios líquidos que llenen el prisma.

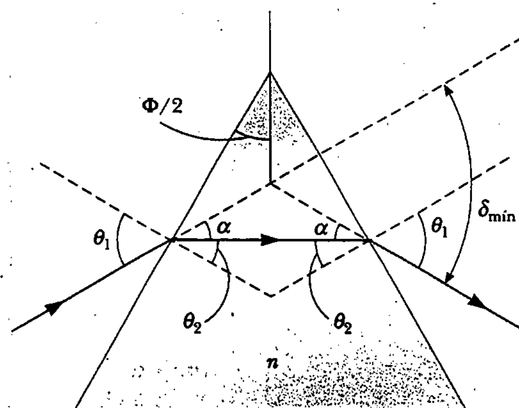


Figura 35.26 Rayo de luz que atraviesa un prisma con el ángulo de desviación mínima, $\delta_{\text{mín}}$.

REFLEXIÓN TOTAL INTERNA

14.5 Un interesante efecto llamado **reflexión total interna** llega a ocurrir cuando la luz se intenta mover de un medio que tiene un determinado índice de refracción y uno que tiene un índice de refracción menor. Considere un haz de luz que viaja en el medio 1 y se encuentra en la frontera entre el medio 1 y el medio 2, donde n_1 es más grande que n_2 (véase la figura 35.27a). Se indican varias posibles direcciones del haz por los rayos del 1 al 5. Los rayos refractados se doblan desde la normal porque n_1 es más grande que n_2. Para algún ángulo de incidencia particular θ_c, llamado **ángulo crítico**, el rayo de luz refractado se mueve paralelo a la frontera, así que $\theta_2 = 90°$ (rayo 4 en la figura 35.27a).

Para ángulos de incidencia mayores que θ_c, el haz es completamente reflejado en la frontera, como lo muestra el rayo 5 en la figura 35.27a. Tal rayo se refleja en la frontera conforme pega en la superficie perfectamente reflejante. Dicho rayo, y

[2] Para más detalles véase F. A. Jenkins y H. E. White, *Fundamentals of Optics*, Nueva York, McGraw-Hill, 1976.

todos los parecidos a él, obedecen la ley de la reflexión; es decir, para estos rayos el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

Se utiliza la ley de la refracción de Snell para encontrar el ángulo crítico. Cuando $\theta_1 = \theta_c$, $\theta_2 = 90°$ y la ecuación 35.8 da

$$n_1 \text{ sen } \theta_c = n_2 \text{ sen } 90° = n_2$$

Ángulo crítico para reflexión total interna

$$\text{sen } \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \qquad (\text{para } n_1 > n_2) \qquad \textbf{(35.10)}$$

Esta ecuación se usa sólo cuando n_1 es más grande que n_2. Es decir,

la reflexión total interna ocurre sólo cuando la luz se mueve de un medio de un índice de refracción determinado a un medio de un índice de refracción menor.

Si n_1 fuera menor que n_2, la ecuación 35.10 daría sen $\theta_c > 1$; y este resultado no tendría sentido, ya que el seno de un ángulo nunca puede ser mayor que uno.

El ángulo crítico para la reflexión total interna es pequeño cuando n_1 es considerablemente mayor que n_2. Por ejemplo, el ángulo crítico para un diamante ($n =$ 2.4) en el aire es 24°. Cualquier rayo que incide sobre el diamante que se aproxima a la superficie con un ángulo más grande que esto es completamente reflejado hacia atrás de la piedra. Dicha propiedad, combinada con la cara apropiada, causa que el diamante brille. Los ángulos de las caras se cortan de modo que la luz esté "atrapada" dentro de la piedra a lo largo de múltiples reflexiones internas. Estas reflexiones múltiples dan a la luz una larga trayectoria a través del medio, y ocurre una dispersión sustancial de colores. Por el tiempo en que la luz sale por la parte superior de la piedra, los rayos asociados con los diferentes colores se separaron bastante unos de los otros.

La circona cúbica tiene también un alto índice de refracción y se puede hacer que brille de manera muy parecida a un diamante genuino. Si una joya sospechosa se sumerge en jarabe de maíz, la diferencia en n para la circona cúbica y para el jarabe es pequeña, por tanto, el ángulo crítico es mayor. Esto significa que más rayos escapan más pronto, y da como resultado que el brillo desaparezca por completo. Un diamante real no pierde todo su brillo cuando se sumerge en jarabe de maíz.

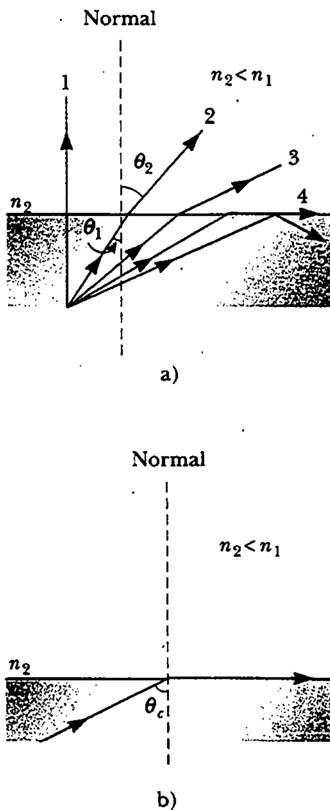


Figura 35.27 a) El rayo viaja de un medio de índice de refracción n_1 a un medio de índice de refracción n_2, donde $n_2 < n_1$. Conforme el ángulo de incidencia θ_1 aumenta, el ángulo de refracción θ_2 aumenta hasta que θ_2 es 90° (rayo 4). Para ángulos de incidencia aún más grandes, ocurre la reflexión total interna (rayo 5). b) El ángulo de incidencia produce un ángulo de refracción igual a 90° que es el ángulo crítico, θ_c.

Pregunta sorpresa 35.3

Si mira de cerca la figura 35.28, verá que hay cinco rayos saliendo del fondo del prisma. ¿Por qué los dos rayos de la derecha son mucho más brillantes que los otros tres?

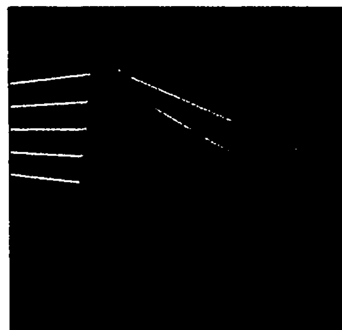


Figura 35.28 Cinco rayos de luz no paralelos entran a un prisma de vidrio desde la izquierda. Los dos rayos del fondo de estos cinco rayos experimentan una reflexión total interna en la cara derecha del prisma. Los tres rayos superiores son refractados en la cara conforme abandonan el prisma. (*Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman*)

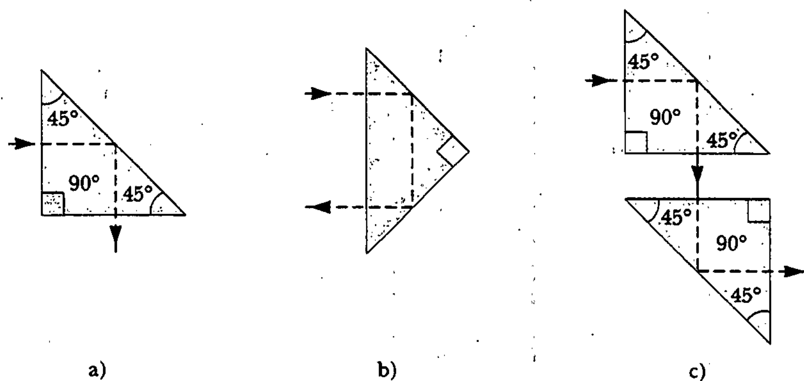


Figura 35.29 Reflexiones internas en un prisma. a) La dirección de viaje se cambia 90°. b) La dirección de viaje se invierte. c) Dos prismas usados como un periscopio.

Un prisma y la reflexión total interna alteran la dirección del viaje de un haz de luz. Se ilustran dos posibilidades en las figuras 35.29a y b.

Una aplicación común de la reflexión total interna es en el periscopio de un submarino. En tal dispositivo se colocan dos prismas como en la figura 35.29c, de tal forma que el haz incidente de luz sigue la trayectoria mostrada. Como resultado, se puede "ver alrededor de las esquinas" cuando se mira a través de un periscopio.

EJEMPLO 35. **Una vista desde el ojo de un pez**

a) Encuentre el ángulo crítico para una frontera agua-aire (el índice de refracción del agua es 1.33).

Solución Se puede usar la figura 35.27 para resolver este problema, con el aire arriba del estanque con un índice de refracción n_2, y el agua con un índice de refracción n_1. Al aplicar la ecuación 35.10 se encuentra que

$$\text{sen } \theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{1.33} = 0.752$$

$$\theta_c = 48.8°$$

b) Emplee los resultados del inciso a) para predecir lo que el pez ve en una pecera cuando mira hacia arriba en dirección a la superficie del agua a ángulos de 40°, 48.8° y 60° (Fig. 35.30).

Solución Puesto que la trayectoria del rayo luminoso es reversible, la luz que viaja del medio 2 al medio 1 sigue las trayectorias indicadas en la figura 35.27a, pero en la dirección *opuesta*. Un pez mirando arriba hacia la superficie del agua, como se muestra en la figura 35.30, puede ver fuera del agua si ve hacia la superficie a un ángulo menor que el ángulo crítico. Así, cuando la línea de visión del pez forma un ángulo de 40° con la normal a la superficie, la luz de una nube, por ejemplo, alcanza el ojo del pez. A un ángulo de 48.8°, el ángulo crítico para el agua, la luz roza en la superficie de agua antes de que sea refractada en el ojo del pez; a dicho ángulo, el pez puede en principio ver la costa completa del estanque. A ángulos mayores que el crítico, la luz que llega al pez viene de la reflexión interna en la superficie. Así, a 60°, el pez ve una reflexión de algún objeto sobre el fondo del estanque.

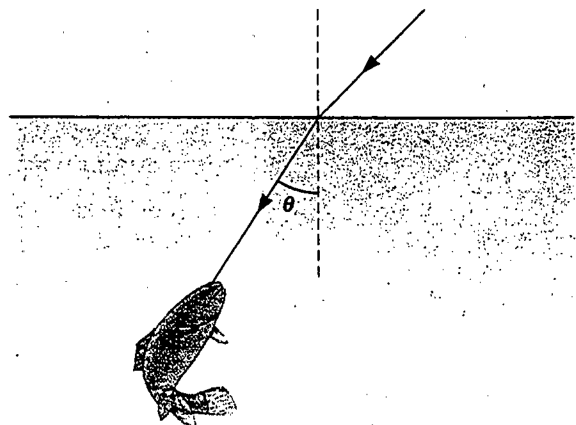


Figura 35.30

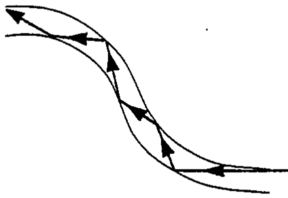


Figura 35.31 La luz viaja en una barra transparente curva por múltiples reflexiones internas.

Fibras ópticas

Otra aplicación interesante de la reflexión interna total es el empleo de barras de vidrio o plástico transparente para "entubar" la luz de un lugar a otro. Como se indica en la figura 35.31, la luz viaja confinada dentro de las barras, incluso alrededor de curvas, como resultado de sucesivas reflexiones internas. El "tubo luminoso" es flexible si se utilizan fibras delgadas en lugar de barras gruesas. Si se emplea un manojo de fibras paralelas para construir una línea de transmisión óptica, las imágenes pueden transferirse de un punto a otro. Se trata de una técnica que se emplea en una industria muy importante, conocida como fibras ópticas.

Muy poca intensidad luminosa se pierde en estas fibras como consecuencia de reflexiones en los dos extremos. Cualquier pérdida en la intensidad se debe principalmente a reflexiones de los dos extremos y a la absorción por el material de la fibra. Los dispositivos de fibra óptica son particularmente útiles cuando quiere observarse la imagen de un objeto que se encuentra en un punto inaccesible. Por ejemplo, los médicos a menudo utilizan esta técnica para examinar órganos internos del cuerpo o para realizar cirugías sin hacer incisiones grandes. Los cables de fibras ópticas sustituyen alambres de cobre y cables coaxiales en telecomunicaciones, ya que las fibras pueden conducir un volumen mucho mayor de llamadas telefónicas u otras formas de comunicación que los alambres eléctricos.

Sección opcional

PRINCIPIO DE FERMAT

Un principio general que puede utilizarse para determinar trayectorias de luz fue desarrollado por Pierre de Fermat (1601-1665). El **principio de Fermat** establece que

Principio de Fermat

> cuando un rayo de luz viaja entre dos puntos cualesquiera su trayectoria es aquella que necesita el menor tiempo.

Una consecuencia natural de este principio es que las trayectorias de los rayos de luz que viajan en un medio homogéneo son líneas rectas debido a que la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta.

Ilustremos cómo se puede usar el principio de Fermat para deducir la ley de refracción de Snell. Suponga que un rayo luminoso va a viajar de un punto P en el medio 1 a un punto Q en el medio 2 (véase la figura 35.32), donde P y Q están a distancias perpendiculares a a y b, respectivamente, de la interface. La rapidez de la luz es c/n_1 en el medio 1, y c/n_2 en el medio 2. Empleando la geometría de la figura 35.32 se ve que el tiempo que tarda el rayo en viajar de P a Q es

$$t = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c/n_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{c/n_2} \qquad \textbf{(35.11)}$$

Con el fin de obtener el valor de x, para el cual t toma su valor mínimo, se toma la derivada de t respecto de x y el conjunto de derivadas se iguala a cero:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} &= \frac{n_1}{c}\frac{d}{dx}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{n_2}{c}\frac{d}{dx}\sqrt{b^2 + (d - x)^2} \\ &= \frac{n_1}{c}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{(a^2 + x^2)^{1/2}} + \frac{n_2}{c}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2(d - x)(-1)}{[b^2 + (d - x)^2]^{1/2}} \\ &= \frac{n_1 x}{c(a^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{n_2(d - x)}{c[b^2 + (d - x)^2]^{1/2}} = 0\end{aligned}$$



Filamentos de fibra óptica de vidrio para transportar voz, video y señales de datos en redes de telecomunicaciones. Las fibras típicas tienen diámetros de 60 μm. *(Dennis O'Clair/Tony Stone Images)*

o

$$\frac{n_1 x}{(a^2 + x^2)^{1/2}} = \frac{n_2(d - x)}{[b^2 + (d - x)^2]^{1/2}} \qquad \textbf{(35.12)}$$

De acuerdo con la figura 35.32,

$$\operatorname{sen} \theta_1 = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}} \qquad \operatorname{sen} \theta_2 = \frac{d - x}{[b^2 + (d - x)^2]^{1/2}}$$

Sustituyéndolo en la ecuación 35.12 se encuentra que

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

que es la ley de refracción de Snell.

Es sencillo emplear un procedimiento similar para obtener la ley de la reflexión (véase el problema 65).

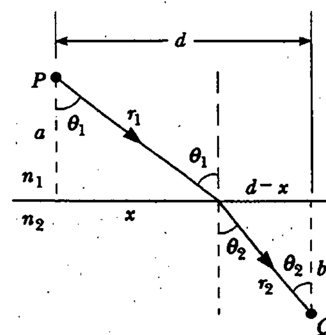


Figura 35.32 Geometría para deducir la ley de la refracción de Snell usando el principio de Fermat.

EJEMPLO CONCEPTUAL

Use software de hoja de cálculo o alguna otra herramienta para crear una gráfica de t *versus* x basada en la ecuación 35.11.

Solución De acuerdo con el hecho de que estamos encontrando el tiempo mínimo requerido para que la luz vaya de un punto P a un punto Q, la figura 35.33 indica que un valor específico de x da como resultado un tiempo mínimo. Cambiando los valores de a, b, d, n_1 y n_2 cambian los detalles de la gráfica pero no la forma general de la función. (Cuando usted asigna números a estos parámetros, de modo que el software de la hoja de cálculo pueda crear una gráfica, asegúrese de tomar $d > x$. También deberá elegir $n_2 > n_1$, así que la situación corresponde a la trayectoria mostrada en la figura 35.32. Si $n_1 < n_2$, la trayectoria se dobla de otra manera).

Dicha situación es equivalente al problema de decidir dónde un salvavidas puede correr más rápidamente que nadar al entrar al agua para ayudar a un nadador en problemas. Si entra al agua directamente (en otras palabras, a un valor de θ_1 muy pequeño en la figura 35.32), la distancia x es más pequeña que el valor de x que da el valor mínimo del tiempo necesario para que el salvavidas llegue del punto inicial de la arena al nadador. Como resultado, él gasta muy poco tiempo corriendo y aún menos tiempo nadando. La localización óptima del salvavidas para que entre al agua, de modo que alcance al nadador en el tiempo más corto, es en la que el punto de interface que da el valor de x satisface la ecuación 35.12.

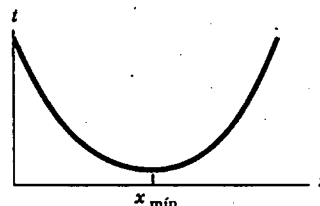


Figura 35.33

RESUMEN

En la óptica geométrica empleamos la **aproximación de rayos**, la cual supone que una onda viaja por un medio uniforme en líneas rectas en la dirección de los rayos.

La **ley de reflexión** establece que para un rayo de luz que viaja en el aire e incide sobre una superficie lisa, el ángulo de reflexión, θ_1', es igual al ángulo de incidencia, θ_1:

$$\theta_1' = \theta_1 \qquad \textbf{(35.2)}$$

La luz que cruza una frontera cuando ésta viaja del medio 1 al medio 2 se **refracta**, o dobla. El ángulo de refracción θ_2 se define por la relación

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_2}{\operatorname{sen} \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \text{constante} \qquad \textbf{(35.3)}$$

El **índice de refracción** de un medio, n, se define por medio de la relación

$$n \equiv \frac{c}{v} \quad \textbf{(35.4)}$$

donde c es la rapidez de la luz en el vacío y v es la rapidez de la luz en el medio. En general, n varía con la longitud de onda y está dado por

$$n = \frac{\lambda}{\lambda_n} \quad \textbf{(35.7)}$$

donde λ es la longitud de onda en el vacío y λ_n es la longitud de onda en el medio. Conforme la luz viaja de un medio a otro, su frecuencia se conserva constante.

La **ley de refracción de Snell** establece que

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2 \quad \textbf{(35.8)}$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción en los dos medios. El rayo incidente, el rayo reflejado, el rayo refractado y la normal a la superficie se encuentran en el mismo plano.

La **reflexión interna total** ocurre cuando la luz viaja de un medio de alto índice de refracción a uno de menor índice de refracción. El **ángulo crítico** θ_c para el cual ocurre la reflexión total en una interfase está dado por

$$\text{sen } \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{para } n_1 > n_2) \quad \textbf{(35.10)}$$

PREGUNTAS

1. Una luz de longitud de onda λ incide sobre una rendija de ancho d. ¿En qué condiciones es válida la aproximación de rayos? ¿En qué circunstancias la rendija produce suficiente difracción para hacer inválida la aproximación de rayos?
2. Las ondas sonoras tienen mucho en común con las ondas luminosas, incluidas las propiedades de reflexión y refracción. Proporcione ejemplos de estos fenómenos para ondas sonoras.
3. ¿Un rayo luminoso que viaja de un medio a otro siempre se desvía hacia la normal, como se muestra en la figura 35.9? Explique.
4. A medida que la luz viaja de un medio a otro, ¿cambia su longitud de onda? ¿Cambia la frecuencia? ¿La rapidez? Explique.
5. Un haz láser que pasa por una solución de azúcar no homogénea sigue una trayectoria curva. Explique.
6. Un haz láser de longitud de onda en el vacío de 632.8 nm incide desde el aire sobre un pedazo de lucita, como se muestra en la figura 35.9b. Suponiendo que la línea de visión de la fotografía es perpendicular al plano en el que se mueve la luz, encuentre la rapidez, frecuencia y longitud de onda de la luz en la lucita.
7. Suponga que en el experimento mostrado en la figura 35.9b, se utilizó luz azul en lugar de luz roja. ¿El haz refractado se desviaría a un ángulo mayor o menor?
8. El nivel del agua en un vaso de vidrio transparente y sin color se observa fácilmente a simple vista. El nivel de helio líquido en un recipiente de vidrio transparente es muy difícil de observar a simple vista. Explique.
9. En el ejemplo 35.6 vimos que la luz que entra en una placa con lados paralelos sale desviada pero aún es paralela al haz entrante. Nuestra suposición fue que el índice de refracción del material no variaba con la longitud de onda. Si la placa estuviera hecha de vidrio óptico (véase la figura 35.20), ¿a qué se parecería el rayo saliente?
10. El bombardero F-117A (figura P35.10) está específicamente diseñado para ser un *no*-retrorreflector de radar. ¿Qué aspectos del diseño ayudan a alcanzar esto? Observe que la estructura del avión se compone de muchos entrepaños planos inclinados y de un fondo plano.
11. Explique por qué un diamante brilla más que un cristal de vidrio de la misma forma y tamaño.
12. Explique por qué un remo en el agua parece estar doblado.
13. Rediseñe el periscopio de la figura 35.29c de manera que pueda mostrarle dónde ha estado en vez de adónde va.
14. En ciertas circunstancias el sonido puede escucharse a distancias extremadamente largas. Esto sucede con frecuencia sobre un cuerpo de agua, donde el aire cerca de la superficie está más frío que el que se encuentra más arriba. Explique cómo la refracción de ondas sonoras en dicha situación podría aumentar la distancia a la cual puede escucharse el sonido.
15. ¿Por qué los astrónomos que investigan galaxias distantes hablan de mirar hacia atrás en el tiempo?
16. Un eclipse solar ocurre cuando la Luna pasa entre la Tierra y el Sol. Emplee un diagrama para mostrar por qué en algunas áreas de la Tierra ven un eclipse total, en tanto

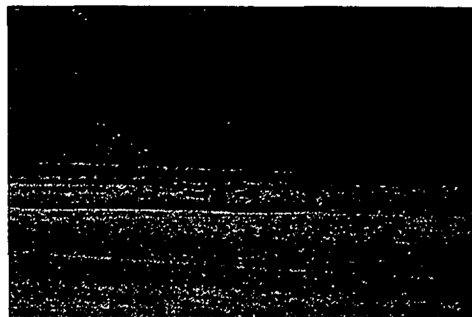



Figura P35.10 *(Cortesía de la Fuerza Aérea de Estados Unidos, Base Langley de la Fuerza Aérea)*

que en otras ven un eclipse parcial, y en la mayor parte de las áreas no ven el eclipse.

17. Ciertas tiendas departamentales tienen sus ventanas ligeramente inclinadas hacia adentro en la parte inferior. Esto es para reducir el resplandor de las luces de la calle o del sol, el cual dificultaría a los compradores ver lo que se exhibe en los aparadores. Dibuje un rayo luminoso que se refleje en una ventana de este tipo para mostrar cómo trabaja esta técnica.
18. Cuando dos colores de luz X y Y se envían a través de un prisma de vidrio, X se desvía más que Y. ¿Cuál de los colores viaja más lentamente en el prisma?
19. ¿Por qué el arco de un arco iris aparece con rojo en la parte superior y violeta en la inferior?
20. ¿En qué condiciones se forma un espejismo? En un día caluroso, ¿qué es lo que vemos cuando observamos "agua sobre la carretera"?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** = use computadora para resolver el problema = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 35.1 La naturaleza de la luz

Sección 35.2 Mediciones de la rapidez de la luz

1. Los astronautas del *Apolo 11* colocaron un panel reflector muy alto sobre la superficie lunar. La rapidez de la luz se puede encontrar al medir el tiempo que tarda un haz láser en viajar desde la Tierra, reflejarse desde el retrorreflector y regresar a nuestro planeta. Si este periodo duró 2.51 s, ¿cuál es la rapidez medida de la luz? Tome la distancia de centro a centro entre la Tierra y la Luna igual a 3.84×10^8 m, y no ignore los tamaños de la Tierra y de la Luna.
2. Como un resultado de sus observaciones, Roemer concluyó que los eclipses de Io y Júpiter se retrasaron en 22 min durante un periodo de 6 meses cuando la Tierra se movía de un punto en su órbita donde estaba más cerca de Júpiter a un punto diametralmente opuesto donde estaba más lejos de dicho planeta. Empleando 1.50×10^8 km como el radio promedio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol calcule la rapidez de la luz a partir de estos datos.
3. En un experimento para medir la rapidez de la luz usando el aparato de Fizeau (véase la figura 35.2), la distancia entre la fuente de luz y el espejo era de 11.45 km y la rueda tenía 720 muescas. El valor de c experimentalmente determinado fue de 2.998×10^8 m/s. Calcule la rapidez angular mínima de la rueda para este experimento.
4. La figura P35.4 muestra un aparato que se emplea para medir la distribución de rapidez de moléculas de gas. Consta de dos discos rotatorios con ranuras separadas por una distancia d, con las ranuras desplazadas una de otra por el ángulo θ. Suponga que la rapidez de la luz se mide enviando un haz luminoso del lado izquierdo a través del aparato. a) Muestre que el haz luminoso se verá en el detector (es decir, pasará a través de las dos hendiduras) sólo si su rapidez está dada por $c = \omega d/\theta$, donde ω es la rapidez angular de los discos y θ se mide en radianes. b) ¿Cuál es la rapidez de la luz medida si la distancia entre los dos discos rotatorios con las ranuras es de 2.50 m, la ranura en el segundo disco está desplazada 1/60 de 1° de la hendidura en el primer disco, y los discos giran a 5 555 rev/s?

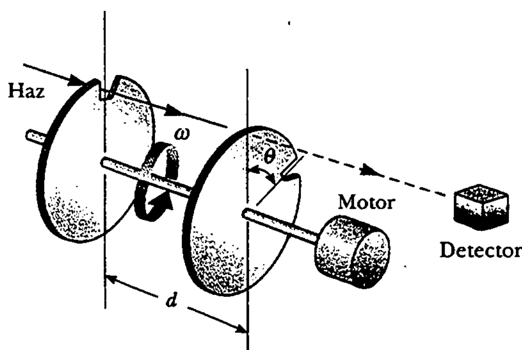


Figura P35.4

Sección 35.3 **La aproximación de rayos en la óptica geométrica**

Sección 35.4 **Reflexión**

Sección 35.5 **Refracción**

Sección 35.6 **El principio de Huygens**

Nota: En esta sección, si un valor del índice de refracción no está dado refiérase a la tabla 35.1.

5. Un haz delgado de luz de sodio amarilla, con longitud de onda de 589 nm en el vacío, está incidiendo desde el aire a una superficie lisa de agua a un ángulo $\theta_1 = 35.0°$. Determine el ángulo de refracción θ_2 y la longitud de onda de la luz en el agua.
6. La longitud de onda de la luz roja de un láser de helio-neón en el aire es de 632.8 nm. a) ¿Cuál es su frecuencia? b) ¿Cuál es su longitud de onda en vidrio que tiene un índice de refracción de 1.50? c) ¿Cuál es su rapidez en el vidrio?
7. Un buzo ve al Sol bajo el agua en un ángulo aparente de 45° desde la vertical. ¿Cuál es la dirección real del Sol?
8. Un haz láser está incidiendo a un ángulo de 30.0° desde la vertical en una solución de jarabe de maíz en el agua. Si el haz se refracta a 19.24° desde la vertical, a) ¿cuál es el índice de refracción de la solución de jarabe? Suponga que la luz es roja, con una longitud de onda en el vacío de 632.8 nm. Encuentre su b) longitud de onda, c) frecuencia y d) rapidez en la solución.
9. Determine la rapidez de la luz en a) cristal, b) agua y c) circona cúbica.
10. Un rayo luminoso inicialmente en el agua entra a una sustancia transparente con un ángulo de incidencia de 37.0°, y el rayo transmitido se refracta a un ángulo de 25.0°. Calcule la rapidez de la luz en la sustancia transparente.

WEB 11. Un rayo de luz incide sobre un bloque de vidrio plano ($n = 1.50$) de 2.00 cm de espesor en un ángulo de 30.0° con la normal. Dibuje el haz luminoso a través del vidrio y encuentre los ángulos de incidencia y refracción en cada superficie.

12. Una luz de 436 nm de longitud de onda en el aire entra a una pecera llena con agua, luego sale a través de la pared de vidrio óptico del recipiente. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz a) en el agua y b) en el vidrio?
13. Un tanque opaco cilíndrico con el extremo superior abierto tiene un diámetro de 3.00 m y está completamente lleno con agua. Cuando la puesta del Sol alcanza un ángulo de 28.0° arriba del horizonte, la luz del Sol deja de iluminar cualquier parte del fondo del tanque. ¿Cuál es la profundidad del tanque?
14. El ángulo entre los dos espejos ilustrados en la figura P35.14 es recto. El haz de luz en el plano vertical P incide sobre el espejo 1 como se indica. a) Determine la distancia que viaja el haz luminoso reflejado antes de llegar al espejo 2. b) ¿En qué dirección viaja el haz de luz después de reflejarse en el espejo 2?

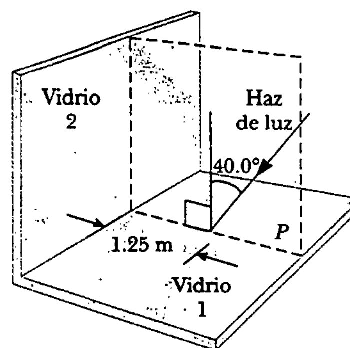


Figura P35.14

15. ¿Cuántas veces el haz incidente mostrado en la figura P35.15 será reflejado por cada uno de los espejos paralelos?

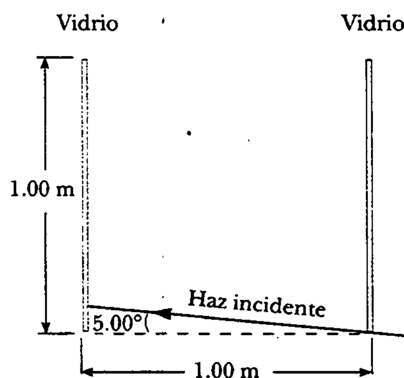


Figura P35.15

16. Cuando la luz ilustrada en la figura P35.16 pasa a través de un bloque de vidrio, ésta es corrida lateralmente por una distancia d. Si $n = 1.50$, ¿cuál es el valor de d?
17. Encuentre el tiempo necesario para que la luz atraviese el bloque de vidrio descrito en el problema 16.
18. El haz de luz mostrado en la figura P35.18 forma un ángulo de 20.0° con la línea normal NN′ en aceite de linaza. Determine los ángulos θ y θ'. (El índice de refracción del aceite de linaza es de 1.48.)

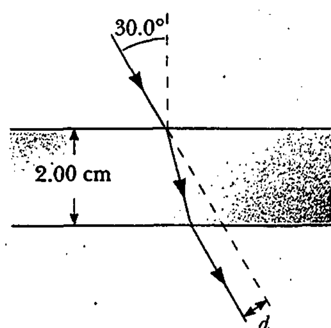


Figura P35.16 Problemas 16 y 17.

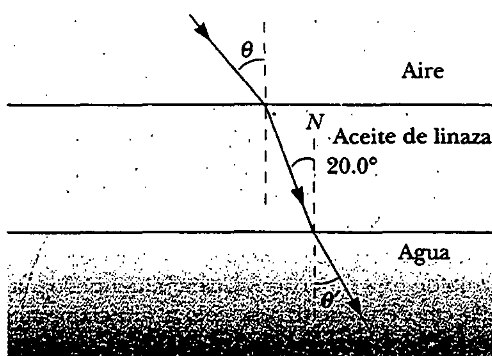


Figura P35.18

19. Dos pulsos de luz se emiten simultáneamente desde una fuente. Ambos pulsos viajan a un detector, pero uno pasa primero a través de 6.20 m de hielo. Determine la diferencia en el tiempo de la llegada de los pulsos al detector.
20. Cuando usted está mirando por una ventana, ¿cuánto tiempo se retarda la luz que usted ve al tener que atravesar vidrio en lugar de aire? Haga una estimación del orden de magnitud en las bases de los datos que usted especifique. ¿Por cuántas longitudes de onda se retrasa?
21. La luz pasa del aire a un cristal. a) ¿Qué ángulo de incidencia debe tener la luz si la componente de su velocidad perpendicular a la interfase permanece constante? b) ¿Puede la componente de la velocidad paralela a la interfase permanecer constante durante la refracción?
22. Las superficies reflejantes de dos espejos planos se intersecan en un ángulo de θ ($0° < \theta < 90°$), como se muestra en la figura P35.22. Si un rayo luminoso incide en el espejo horizontal, muestre que el rayo emergiendo cruzará al rayo incidente a un ángulo de $\beta = 180° - 2\theta$.

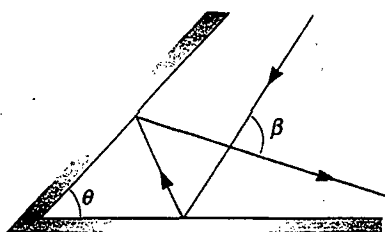


Figura P35.22

23. Un rayo de luz entra en la atmósfera de un planeta y desciende verticalmente 20.0 km a la superficie. El índice de refracción donde la luz entra a la atmósfera es de 1.000, y aumenta linealmente a la superficie donde tiene un valor de 1.005. a) ¿Cuánto tiempo le toma al rayo recorrer esta trayectoria? b) Compare éste con el tiempo que le toma en ausencia de atmósfera.
24. Un rayo de luz entra a la atmósfera de un planeta y desciende verticalmente a la superficie a una distancia h. El índice de refracción donde la luz entra a la atmósfera es 1.000, y aumenta linealmente a la superficie donde tiene un valor de n. a) ¿Cuánto tiempo le toma al rayo recorrer esta trayectoria? b) Compare éste con el tiempo que le toma en ausencia de atmósfera.

Sección 35.7 Dispersión y prismas

25. Un haz delgado de luz blanca está incidiendo sobre un bloque de vidrio de cuarzo a un ángulo de 30.0°. Encuentre el ancho angular del haz de luz que incide en el cuarzo.
26. Un rayo de luz incide en el punto medio de una cara de un prisma de vidrio de ángulos iguales ($n = 1.50$) a un ángulo de incidencia de 30.0°. Trace la trayectoria del rayo luminoso a través del vidrio y encuentre los ángulos de incidencia y refracción en cada superficie.
27. Un prisma que tiene un ángulo de ápice de 50.0° está hecho de circona cúbica, con $n = 2.20$. ¿Cuál es el ángulo de desviación mínima?
28. Una luz con una longitud de onda de 700 nm de longitud de onda incide sobre la cara de un prisma de vidrio de cuarzo a un ángulo de 75.0° (respecto de la normal a la superficie). El ángulo del ápice del prisma es de 60.0°. Con el valor de n de la figura 35.20 calcule el ángulo a) de refracción en esta primera superficie, b) de incidencia en la segunda superficie, c) de refracción en la segunda superficie, y d) entre los rayos incidente y saliente.

WEB 29. El índice de refracción para la luz violeta en cristal de sílice es de 1.66, y para la luz roja es de 1.62. ¿Cuál es la dispersión angular de la luz visible que pasa por un prisma de ángulo de ápice igual a 60.0° si el ángulo de incidencia es de 50.0°? (Véase la figura P35.29.)
30. Muestre que si el ángulo de ápice Φ de un prisma es pequeño, un valor aproximado para el ángulo de desviación mínima es $\delta_{\min} = (n - 1)\Phi$.
31. Un prisma de vidrio triangular con un ángulo de ápice de $\Phi = 60.0°$ tiene un índice de refracción de $n = 1.50$ (véase la figura P35.31). ¿Cuál es el ángulo de incidencia más pequeño θ_1 para el cual un rayo luminoso puede emerger del otro lado?
32. Un prisma triangular de vidrio con un ángulo de ápice de Φ tiene un índice de refracción n (véase la figura P35.31). ¿Cuál es el ángulo de incidencia más pequeño θ_1 para el cual un rayo luminoso puede emerger del otro lado?

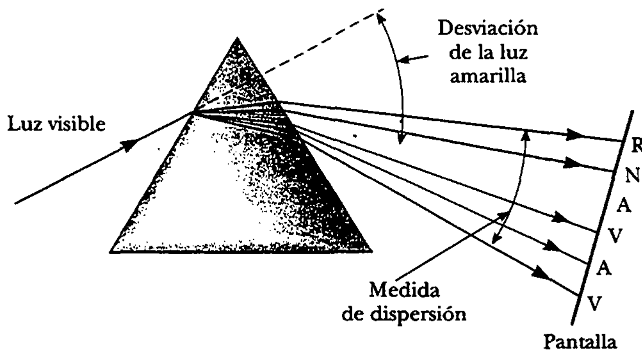


Figura P35.29

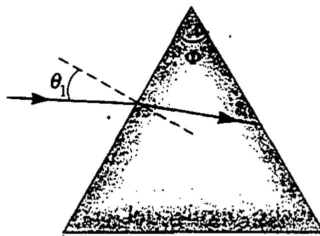


Figura P35.31

33. Un dispositivo experimental incluye un prisma hecho de clo.uro de sodio. El ángulo de desviación mínima para luz de longitud de onda de 589 nm es de 10.0°. ¿Cuál es el ángulo de ápice necesario del prisma?

34. Un prisma triangular de vidrio con un ángulo de ápice de 60.0° tiene un índice de refracción de 1.50. a) Muestre que si este ángulo de incidencia en la primera superficie es $\theta_1 = 48.6°$, la luz pasará simétricamente a través del prisma, como se muestra en la figura 35.26. b) Encuentre el ángulo de desviación $\delta_{mín}$ para $\theta_1 = 48.6°$. c) Encuentre el ángulo de desviación si el ángulo de incidencia sobre la primera superficie es de 45.6°. d) Encuentre el ángulo de desviación si $\theta_1 = 51.6°$.

Sección 35.8 Reflexión total interna

35. Para luz de 589 nm calcule el ángulo crítico para los siguientes materiales rodeados de aire: a) diamante, b) cristal y c) hielo.

36. Repita el problema 35 para el caso en que los materiales están rodeados por agua.

37. Considere un espejismo común formado por aire muy caliente sobre una carretera. Una conductora de camión cuyos ojos están a 2.00 m arriba de la carretera, donde $n = 1.000\ 3$, mira hacia adelante. Ella percibe un charco de agua adelante sobre la carretera, donde su línea de visión forma un ángulo de 1.20° bajo la horizontal. Encuentre el índice de refracción del aire sobre la superficie de la carretera. (*Sugerencia:* Trate éste como un problema de reflexión total interna).

38. Determine el ángulo máximo θ para el que los rayos de luz incidentes sobre el extremo del tubo mostrado en la figura P35.38 están sujetos a reflexión total interna a lo largo de las paredes del tubo. Suponga que el tubo tiene un índice de refracción de 1.36 y que el medio exterior es aire.

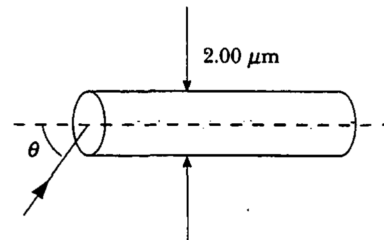


Figura P35.38

39. Una fibra de vidrio ($n = 1.50$) está sumergida en agua ($n = 1.33$). ¿Cuál es el ángulo crítico para que la luz permanezca dentro de la fibra óptica?

40. Un cubo de vidrio se coloca sobre un periódico, el cual descansa sobre una mesa. Una persona lee todas las palabras que el cubo cubre, a través de un lado vertical. Determine el índice de refracción máximo posible del vidrio.

41. Un gran cubo de lucita ($n = 1.59$) tiene una pequeña burbuja de aire (un defecto en el proceso de fundido) debajo de una superficie. Cuando una pequeña moneda (1.90 cm de diámetro) se coloca directamente sobre la burbuja en el exterior del cubo, la burbuja no puede verse mirando hacia abajo dentro del cubo a ningún ángulo. Sin embargo, cuando una moneda un poco menor (de 1.75 cm de diámetro) se pone directamente sobre la burbuja, ésta puede verse mirando hacia abajo dentro del cubo. ¿Cuál es el intervalo de posibles profundidades de la burbuja de aire debajo de la superficie?

42. Un cuarto contiene aire en el que la rapidez del sonido está a 343 m/s. Las paredes del cuarto están hechas de concreto, en el que la rapidez del sonido es de 1 850 m/s. a) Encuentre el ángulo crítico para la reflexión total interna del sonido en la frontera concreto-aire. b) ¿En qué medio debe viajar el sonido para experimentar reflexión total interna? c) "Una pared de concreto es un espejo muy eficiente para el sonido". Dé evidencias a favor o en contra de este enunciado.

43. Aproximadamente en 1965, los ingenieros de la compañía Toro inventaron un calibrador de gasolina para motores pequeños, esquematizado en la figura P35.43. El calibrador tiene partes no movibles. Consiste de una placa plana de plástico transparente ajustado verticalmente dentro de la ranura en la tapa del tanque de gas. Ninguna de las placas de plástico tiene un revestimiento reflejante. El plástico se proyecta desde la parte superior horizontal hacia abajo casi hasta el fondo del tanque opaco. Su orilla inferior está cortada con sus caras formando ángulos de 45° con la horizontal. Un operador de una podadora mira hacia abajo desde arriba y ve una frontera entre las partes brillantes y oscuras en el calibrador. La posición de la frontera, a lo largo del ancho del plástico, indica la cantidad de gasolina en el tanque. Explique cómo trabaja el calibrador. Explique los requerimientos de diseño, si hay alguno, para el índice de refracción del plástico.

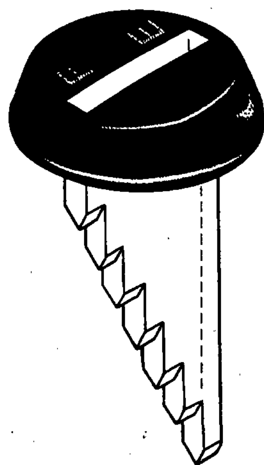


Figura P35.43

(Opcional)
Sección 35.9 Principio de Fermat

44. La línea de costa de un lago corre de este a oeste. Un nadador está en problemas a 20.0 m de la costa y a 26.0 m del salvavidas, cuya estación está a 16.0 m hacia adentro de la línea de costa. El salvavidas toma una cantidad despreciable de tiempo en acelerar. Puede correr a 7.00 m/s y nadar a 1.40 m/s. Para alcanzar al nadador tan rápido como sea posible, ¿en qué dirección debe comenzar a correr? Necesitará resolver una ecuación trascendental en forma numérica.

PROBLEMAS ADICIONALES

45. Un delgado haz de luz está incidiendo desde el aire sobre una superficie de vidrio con un índice de refracción de 1.56. Encuentre el ángulo de incidencia para el cual el ángulo correspondiente de refracción sea la mitad del ángulo de incidencia. (*Sugerencia:* Tal vez quiera usar la identidad trigonométrica sen $2\theta = 2$ sen θ cos θ.)

46. a) Considere una interface horizontal entre el aire de arriba y el vidrio de abajo con un índice de 1.55. Dibuje un rayo de luz incidente desde el aire con un ángulo de incidencia de 30.0°. Determine los ángulos de los rayos reflejado y refractado y muéstrelos en un diagrama. b) Suponga ahora que el rayo de luz está incidiendo desde el vidrio con un ángulo de incidencia de 30.0°. Determine los ángulos de los rayos reflejado y refractado y muestre los tres rayos en un nuevo diagrama. c) Para los rayos incidentes desde el aire en una superficie aire-vidrio, determine y tabule los ángulos de reflexión y refracción para todos los ángulos de incidencia a intervalos de 10.0° desde 0 a 90.0°. d) Haga lo mismo para los rayos de luz que viajan hacia la interface a lo largo del vidrio.

WEB 47. Una luz submarina pequeña de piscina está 1.00 m debajo de la superficie. La luz que emerge del agua forma un círculo en la superficie del agua. ¿Cuál es el diámetro de este círculo?

48. Una técnica para medir el ángulo de un prisma se muestra en la figura P35.48. Un haz paralelo de luz está dirigido en un ángulo de tal manera que el haz se refleja desde lados opuestos. Muestre que la separación angular de los dos haces está dada por $B = 2A$.

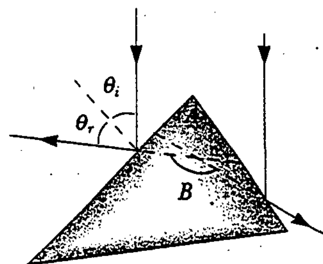


Figura P35.48

49. Las paredes de una celda en una prisión son perpendiculares a las cuatro direcciones cardinales. En el primer día de primavera, la luz del Sol creciente entra en una ventana rectangular en la pared del este. La luz atraviesa 2.37 m horizontalmente a la brillantez perpendicular sobre la pared opuesta a la ventana. Un joven prisionero observa un parche de luz que se mueve por esta pared del oeste y en un primer tiempo forma su propia idea de la rotación de la Tierra. a) ¿A qué rapidez se mueve el rectángulo iluminado? b) El prisionero sostiene un pequeño espejo cuadrado plano contra la pared en una esquina del rectángulo de luz. El espejo refleja la luz hacia atrás a un lugar en el extremo de la pared del este al lado de la ventana. ¿Qué tan rápido se mueve el cuadrado de luz más pequeño a lo largo de la pared? c) Visto desde una latitud a 40.0° al norte, el Sol creciente se mueve por el cielo en una línea que hace un ángulo de 50.0° con el horizonte del sureste. ¿En qué dirección está el rectángulo de luz en la pared oeste de la celda del prisionero? ¿d) En qué dirección se mueve el cuadrado más pequeño de luz en la pared del este?

50. Las leyes de la refracción y reflexión son las mismas para el sonido que para la luz. La rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s, y la del sonido en el agua es de 1 510 m/s. Si una onda sonora se aproxima a una superficie plana de agua con un ángulo de incidencia de 12.0°, ¿cuál es el ángulo de refracción?

51. Átomos de sodio frío (cerca del cero absoluto) están en un estado llamado *condensación de Bose-Einstein* y pueden reducir la rapidez de la luz de su valor normalmente alto a la rapidez que alcanza un automóvil en una ciudad. La rapidez de la luz en este medio se registró como 61.15 km/h. a) Encuentre el índice de refracción de este medio. b) ¿Cuál es el ángulo crítico para la reflexión total interna si la condensación está rodeada por el vacío?

52. Un haz delgado de luz blanca está incidiendo a 25.0° sobre una placa de cristal de 5.00 cm de espesor. Los ín di ces de refracción del vidrio para longitudes de onda

de 400nm y 700 nm son de 1.689 y 1.642, respectivamente. Encuentre el ancho del haz visible que emerge de la placa.

53. Un excursionista parado sobre un pico de una montaña cerca del momento en que se pone el Sol observa un arco iris causado por gotas de agua en el aire a 8.00 km de distancia. El valle está a 2.00 km debajo del pico de la montaña y es completamente plano. ¿Qué fracción del arco circular completo del arco iris es visible para el excursionista? (Véase la figura 35.25.)

54. Un pez está a una profundidad d bajo el agua. Tome el índice de refracción del agua igual a 4/3. Muestre que cuando el pez es visto a un ángulo de refracción θ_1, la profundidad z aparente del pez es

$$z = \frac{3d\cos\theta_1}{\sqrt{7 + 9\cos^2\theta_1}}$$

WEB 55. Un haz láser incide en un extremo de una placa de material, como se muestra en la figura P35.55. El índice de refracción de la placa es de 1.48. Determine el número de reflexiones internas del haz antes de que salga del extremo opuesto de la placa.

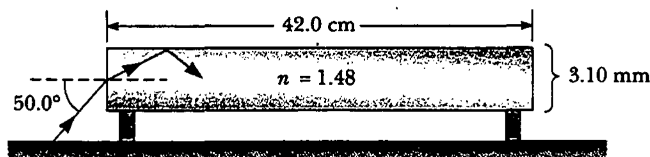


Figura P35.55

56. Cuando la luz está incidiendo normalmente sobre la interface entre dos medios ópticos transparentes, la intensidad de la luz reflejada está dada por la expresión

$$S_1' = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 S_1$$

En esta ecuación S_1 representa la magnitud promedio del vector de Poynting en la luz incidente (la intensidad incidente), S'_1 es la intensidad reflejada, y n_1 y n_2 son los índices de refracción de los dos medios. a) ¿Qué fracción de la luz incidente es reflejada para luz de 589 nm incidiendo normalmente sobre la interface entre aire y vidrio óptico? b) En el inciso a), ¿es importante si la luz está en el aire o en el vidrio cuando incide en la interface? c) La condensación de Bose-Einstein (véase el problema 51) tiene un índice de refracción de 1.76×10^7. Encuentre el porcentaje de luz reflejada para luz que cae perpendicularmente sobre esta superficie. ¿A qué se parecería la condensación?

57. Refiérase al problema 56 para una descripción de la intensidad reflejada de luz normalmente incidente sobre una interface entre dos medios transparentes. a) Cuando la luz está incidiendo normalmente sobre una interface entre el vacío y un medio transparente de índice n, muestre que la intensidad S_2 de la luz transmitida está dada por la expresión $S_2/S_1 = 4n/(n + 1)^2$. b) La luz viaja perpendicularmente a través de una placa de diamante, rodeada por aire, con superficies paralelas de entrada y salida. Aplique la fracción de transmisión del inciso a para encontrar la transmisión aproximada total a través de la placa de diamante como un porcentaje. Ignore la luz reflejada hacia atrás y hacia adelante dentro de la placa.

58. Este problema se construye con los resultados de los problemas 56 y 57. La luz viaja perpendicularmente a través de una placa de diamante, rodeada por aire, con superficies paralelas de entrada y salida. ¿Qué fracción de la intensidad incidente es la intensidad de la luz transmitida? Incluya los efectos de la luz reflejada hacia atrás y hacia adelante dentro de la placa.

59. El haz delgado mostrado en la figura P35.59 incide la superficie 2 en un ángulo crítico. Determine el ángulo de incidencia, θ_1.

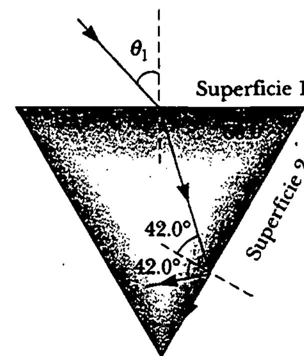


Figura P35.59

60. Un poste de 4.00 m de largo está puesto verticalmente en un lago que tiene una profundidad de 2.00 m. Determine la longitud de la sombra del poste sobre el fondo del lago cuando el Sol está a 40.0° por encima de la horizontal. Considere que el índice de refracción del agua es de 1.33.

WEB 61. Un rayo de luz de longitud de onda de 589 nm está incidiendo con un ángulo θ sobre la superficie superior de una placa de poliestireno, como se muestra en la figura P35.61. a) Encuentre el máximo valor de θ para el que el rayo refractado experimenta reflexión total interna en la

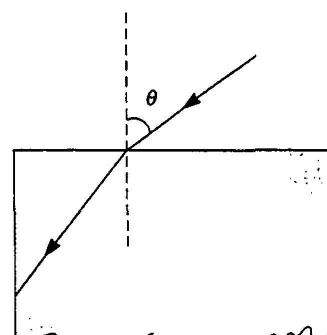


Figura P35.61

cara vertical izquierda del bloque. Repita el cálculo para el caso en el que el bloque de poliestireno está inmerso en b) agua y c) bisulfuro de carbón.

62. Un rayo de luz pasa del aire al agua. Para este ángulo de desviación $\delta = |\theta_1 - \theta_2|$ es de 10.0°, ¿cuál debe ser el ángulo de incidencia?

63. Un vaso para beber tiene 4.00 cm de ancho en el fondo, como se muestra en la figura P35.63. Cuando el ojo de un observador está en la posición que se muestra, éste ve el borde del fondo del vaso vacío. Cuando el vaso se llena con agua, el observador ve el centro de su fondo. Encuentre la altura del vaso.

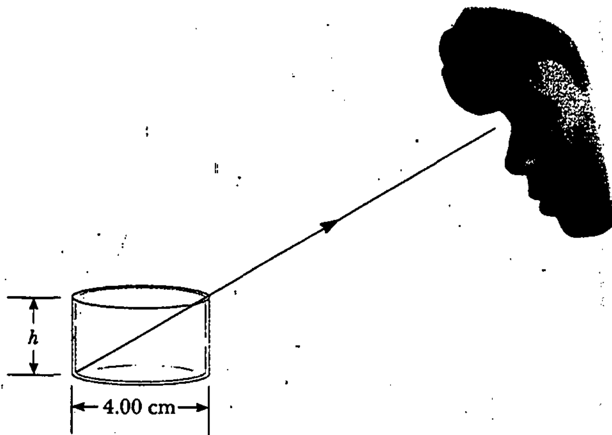


Figura P35.63

64. Un material que tiene un índice de refracción n está rodeado por el vacío y tiene la forma de un cuarto de círculo de radio R (véase la figura P35.64). Un rayo luminoso paralelo a la base del material incide desde la izquierda a una distancia L sobre la base y emerge del material a un ángulo θ. Determine una expresión para θ.

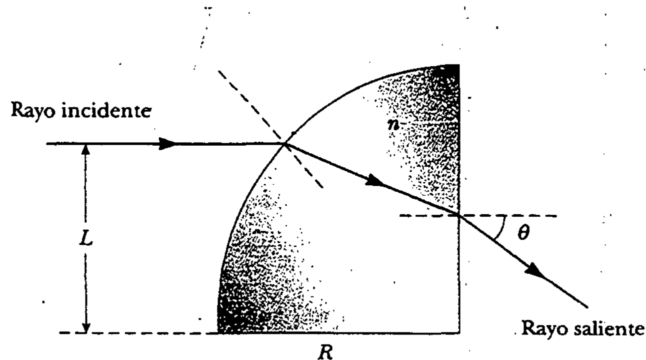


Figura P35.64

65. Obtenga la ley de reflexión (ecuación 35.2) a partir del principio de tiempo mínimo de Fermat. (Véase el procedimiento descrito en la sección 35.9 para obtener la ley de refracción a partir del principio de Fermat.)

66. Un cilindro transparente de radio $R = 2.00$ m tiene una superficie plateada sobre su mitad derecha, como se muestra en la figura P35.66. Un rayo luminoso que viaja en el aire incide en el lado izquierdo del cilindro. El rayo luminoso incidente y el rayo luminoso de salida son paralelos, y $d = 2.00$ m. Determine el índice de refracción del material.

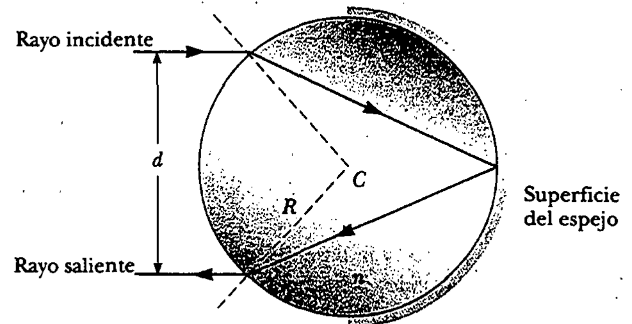


Figura P35.66

67. El método de A. H. Pfund para medir el índice de refracción del vidrio se ilustra en la figura P35.67. Una cara de una placa de espesor t está pintada de blanco, y un pequeño hoyo raspado en una superficie aclarada en el punto P sirve como una fuente de rayos divergentes cuando la placa se ilumina desde abajo. El rayo PBB' incide en la superficie clara en un ángulo crítico y es reflejado totalmente, tal como los rayos PCC'. Tales rayos como PAA' emergen de la superficie aclarada. Sobre la superficie pintada aparece un círculo oscuro de diámetro d, rodeado por una región iluminada, o halo. a) Deduzca una fórmula para n en función de las cantidades medidas d y t. b) ¿Cuál es el diámetro del círculo oscuro si $n = 1.52$ para una losa de 0.600 cm de espesor? c) Si se usara luz blanca, el ángulo crítico depende del color causado por la dispersión. ¿Está el extremo interior del halo blanco matizado con luz roja o con luz violeta? Explique.

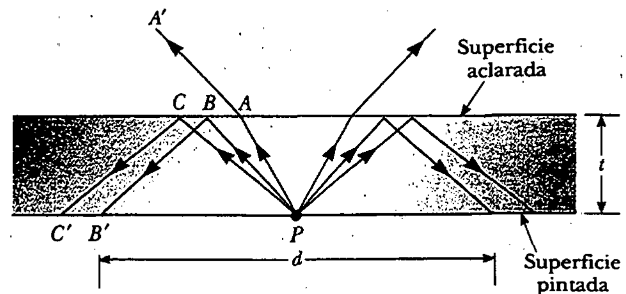


Figura P35.67

68. Un rayo de luz que está viajando en aire incide sobre una cara de un prisma rectangular con un índice de refracción de $n = 1.50$, como se muestra en la figura P35.68, y después el rayo sigue la trayectoria mostrada en la fi-

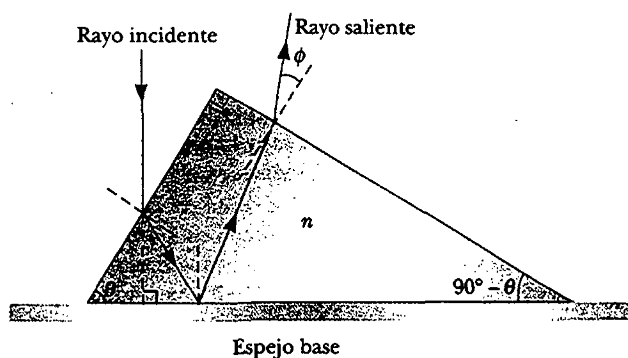


Figura P35.68

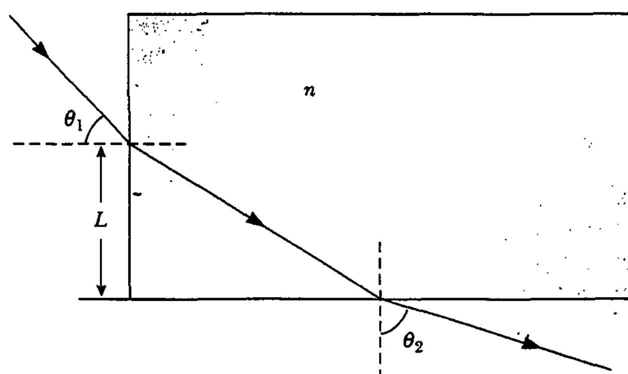


Figura P35.69

gura. Si $\theta = 60.0°$ y la base del prisma es acabado espejo, ¿cuál es el ángulo ϕ hecho por el rayo saliente con la normal a la cara recta del prisma?

69. Un rayo de luz entra en un bloque rectangular de plástico en un ángulo $\theta_1 = 45.0°$ y emerge con un ángulo $\theta_2 = 76.0°$, como se muestra en la figura P35.69. a) Determine el índice de refracción del plástico. b) Si el rayo de luz entra en el plástico en un punto $L = 50.0$ cm desde el borde inferior, ¿cuánto le toma al rayo de luz viajar a través del plástico?

70. Estudiantes permiten que un haz delgado de luz de láser incida sobre una superficie de agua. Ellos tienen un arreglo para medir el ángulo de refracción de ángulos de incidencia seleccionados y registran los datos mostrados en la tabla siguiente. Use los datos para verificar la ley de Snell de la refracción al graficar el seno del ángulo de incidencia *versus* el seno del ángulo de refracción. Use la gráfica resultante para deducir el índice de refracción del agua.

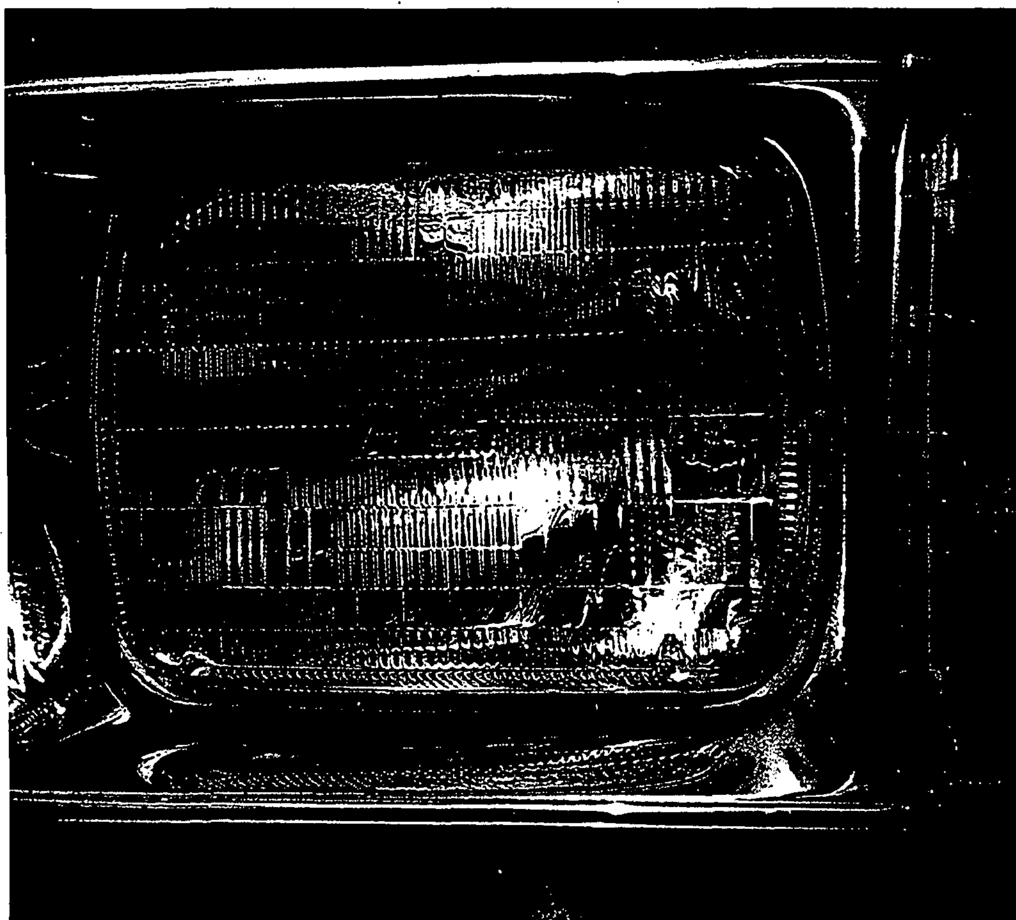
Ángulo de incidencia (grados)	Ángulo de refracción (grados)
10.0	7.5
20.0	15.1
30.0	22.3
40.0	28.7
50.0	35.2
60.0	40.3
70.0	45.3
80.0	47.7

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

35.1 Los haces ② y ④ se reflejan; los haces ③ y ⑤ se refractan.

35.2 Vidrio de cuarzo. Unos lentes ideales podrían tener un índice de refracción que no variara con su longitud de onda, así que todos los colores se doblarían al atravesar el mismo ángulo con los lentes. De las tres opciones, el vidrio de cuarzo tiene la menor variación de n a través del espectro visible. Así, ésta es la mejor elección para lentes de un solo elemento.

35.3 Los dos rayos de la derecha son resultado de la reflexión total interna en todas las caras rectas del prisma. Porque toda la luz de estos rayos se refleja (en vez de refractarse parcialmente), estos dos rayos son los más brillantes. La luz de los otros tres rayos se divide en partes reflejada y refractada.



A C E R T I J O

La mayoría de los faros de automóvil tienen sus caras cruzadas por líneas, como las que aquí se muestran. Sin tales líneas los faros no funcionarían apropiadamente o sería muy probable que se rompieran cuando el automóvil chocara o recorriera un camino con baches. ¿Qué función cumplen estas líneas en los faros? *(George Semple)*

c a p í t u l o

36

Óptica geométrica

Ideas generales del capítulo

El presente capítulo se relaciona con las imágenes que se forman cuando ondas esféricas inciden sobre superficies planas y esféricas. Descubrimos que las imágenes se forman por reflexión o por refracción, y que los espejos y lentes trabajan gracias a estos fenómenos. Asimismo, se emplea la aproximación de rayos y suponemos que la luz viaja en líneas rectas. Ambas categorías conducen a predicciones fundamentadas en el campo denominado *óptica geométrica*. En los siguientes capítulos dedicaremos nuestra atención a los efectos de interferencia y difracción —los que son tema de estudio en el campo de la *óptica ondulatoria*—.

IMÁGENES FORMADAS POR ESPEJOS PLANOS

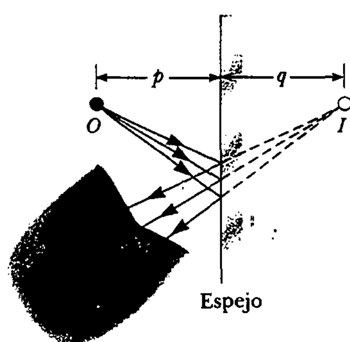


Figura 36.1 Una imagen formada por reflexión de un espejo plano. El punto imagen I se localiza detrás del espejo a una distancia perpendicular q del espejo (la distancia a la imagen). Un estudio de la figura 36.2 indica que esta distancia a la imagen es igual a la distancia al objeto p.

14.6 Comenzaremos considerando el espejo más sencillo posible: el espejo plano. Considere una fuente puntual de luz ubicada en O en la figura 36.1, a una distancia p frente a un espejo plano. La distancia p se denomina **distancia al objeto**. Los rayos luminosos salen de la fuente y se reflejan en el espejo. Después de la reflexión los rayos divergen (se dispersan), pero para el observador parece que provienen de un punto I localizado detrás del espejo. El punto I se denomina **imagen** del objeto en O. Independientemente del sistema que se estudie, las imágenes siempre se localizan al extender los rayos divergentes detrás del punto del que parecen divergir. **Las imágenes se forman en el punto en que los rayos de luz divergen *en realidad* o en el punto desde el cual *parece* que divergen.** Puesto que los rayos de la figura 36.1 parecen originarse en I, la cual es una distancia q detrás del espejo, ésta es la localización de la imagen. La distancia q recibe el nombre de **distancia de la imagen.**

Las imágenes se clasifican como reales o virtuales. **Una imagen real se forma cuando los rayos de luz pasan por y divergen desde el punto de la imagen; una imagen virtual se forma cuando los rayos de luz no pasan por el punto de la imagen sino que divergen de él.** La imagen formada por el espejo de la figura 36.1 es virtual. Las imágenes de un objeto vistas en los espejos planos siempre son virtuales. Las imágenes reales pueden exhibirse sobre una pantalla (como una película), pero las imágenes virtuales no pueden exhibirse sobre una pantalla.

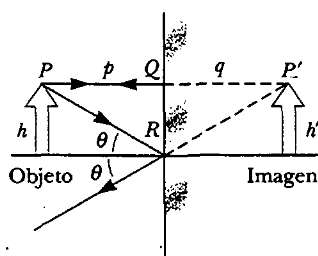


Figura 36.2 Construcción geométrica empleada para localizar la imagen de un objeto situado enfrente de un espejo plano. Puesto que los triángulos PQR y $P'QR$ son congruentes, $|p| = |q|$, y $h = h'$.

Es factible usar las técnicas geométricas simples mostradas en la figura 36.2 para examinar las propiedades de las imágenes formadas por espejos planos. Aunque un número infinito de rayos de luz dejen cada punto de un objeto, se necesita seguir sólo a dos de ellos para determinar en dónde se forma una imagen. Uno de dichos rayos empieza en P, sigue una trayectoria horizontal hacia el espejo y se refleja de regreso sobre sí mismo. El segundo rayo sigue la trayectoria oblicua PR y se refleja como se muestra, de acuerdo con la ley de la reflexión. Un observador al frente del espejo trazará los dos rayos reflejados de regreso al punto desde el cual aparentemente se originaron, es decir, el punto P' detrás del espejo. Una continuación de tal proceso para puntos sobre el objeto distintos de P daría como resultado una imagen virtual (representada por una flecha amarilla) detrás del espejo. Puesto que los triángulos PQR y $P'QR$ son congruentes, $PQ = P'Q$. Por consiguiente, se concluye que la **imagen formada por un objeto situado frente a un espejo plano está a la misma distancia detrás del espejo a la que está el objeto frente al espejo.**

La geometría muestra también que la altura del objeto, h, es igual a la altura de la imagen h'. Al **aumento lateral** M se le define como sigue:

Aumento lateral

$$M \equiv \frac{\text{Altura de la imagen}}{\text{Altura del objeto}} = \frac{h'}{h} \qquad (36.1)$$



La montaña Hood reflejada en el Lago Trillium. ¿Por qué la imagen invertida tiene el mismo tamaño de la montaña? *(Raymond G. Barnes/ Tony Stone Images)*

Experimento sorpresa

Véase usted mismo en un espejo de cuerpo entero. Colóquese cerca del espejo, ponga un pedazo de cinta en la parte superior de la imagen de su cabeza y otra pieza de cinta en la parte inferior de la imagen de sus pies. Ahora retroceda algunos metros y observe su imagen. ¿Qué tan grande es respecto de su tamaño original? ¿Qué distancia hay entre las piezas de cinta comparada con su altura actual? Usted quizá quiera referirse al problema 3.

Se trata de una definición general del aumento lateral de cualquier tipo de espejo. Para un espejo plano $M = 1$, ya que en este caso $h' = h$.

Por último, observe que un espejo plano produce una imagen que tiene una *aparente* inversión de izquierda-derecha. Usted puede ver esta inversión al pararse frente a un espejo y levantar su mano derecha, como se indica en la figura 36.3. La imagen que usted ve levantada es su mano izquierda. Lo mismo sucede con su cabello, que parece ser parte del lado opuesto a su lado real, y un lunar en su mejilla derecha parece estar en su mejilla izquierda.

Esta inversión no es *realmente* una inversión izquierda-derecha. Suponga, por ejemplo, que usted yace tendido sobre su lado izquierdo sobre el piso, con su cuerpo paralelo a la superficie del espejo. Ahora su cabeza está a la izquierda y sus pies están a la derecha. ¡Si usted sacude sus pies, la imagen no sacude su cabeza! Sin embargo, si usted eleva su mano derecha, la imagen eleva su mano izquierda. Así, el espejo parece producir una inversión izquierda-derecha; pero en la dirección arriba-abajo.

La inversión es realmente una *inversión del frente hacia atrás*, causada por los rayos de luz que van hacia el espejo y después se reflejan hacia atrás de éste. Un interesante ejercicio es pararse frente a un espejo mientras sostiene una transparencia arriba al frente de usted, de tal forma que pueda leer lo escrito en ella. Usted también podrá leer lo escrito en la imagen de la transparencia. Quizá tenga una experiencia similar si fija una calcomanía transparente con palabras en la ventana trasera de su automóvil. Si la calcomanía se puede leer desde el exterior del auto, también se puede leer mirándola desde el espejo retrovisor desde el interior del auto.

Por consiguiente, se concluye que la imagen formada por un espejo plano tiene las siguientes propiedades:

- La imagen está atrás del espejo a la misma distancia a la cual el objeto está enfrente de éste.
- La imagen que no está amplificada, es virtual y está de pie. (Por de pie entendemos que, si la flecha del objeto apunta hacia arriba como en la figura 36.2, lo mismo pasa con la flecha de la imagen.)
- La imagen se ha invertido de atrás hacia adelante.



Figura 36.3 La imagen en el espejo de la mano derecha de una persona está invertida del frente hacia atrás. Lo cual hace que la mano derecha parezca ser la mano izquierda. Observe que el pulgar está en el lado izquierdo de ambas manos reales y está en el lado izquierdo de la imagen. Que el pulgar no esté en el lado derecho de la imagen indica que no es una inversión izquierda a derecha. *(George Semple)*

Pregunta sorpresa 36.1

En la vista superficial de la figura 36.4 la imagen de la piedra vista por el observador 1 está en *C*. ¿Dónde está el observador 2 viendo la imagen: en *A*, en *B*, en *C*, en *D*, en *E*, o en ninguna de éstas?

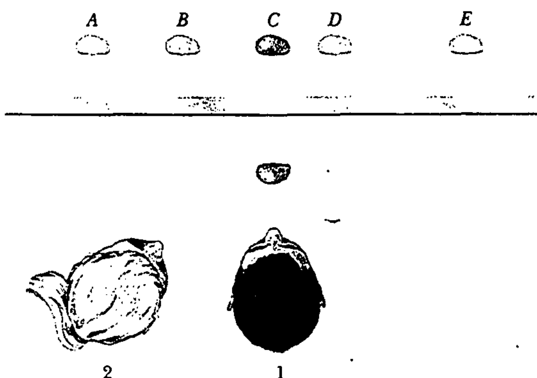


Figura 36.4

Ejemplo conceptual — Imágenes múltiples formadas por dos espejos

En la figura 36.5 se observa cómo dos espejos planos forman entre sí un ángulo recto, y un objeto se coloca en el punto *O*. En este caso se forman imágenes múltiples. Localice las posiciones de estas imágenes.

Solución La imagen del objeto está en I_1 en el espejo 1, y en I_2 en el espejo 2. Además, se forma una tercera imagen en I_3. Esta tercera imagen es la imagen de I_1 en el espejo 2 o, de forma similar, la imagen de I_2 en el espejo 1. Lo anterior significa que la imagen en I_1 (o I_2) sirve como objeto para I_3. Observe qué pasa para formar dicha imagen en I_3, los rayos se reflejan dos veces después de dejar al objeto en *O*.

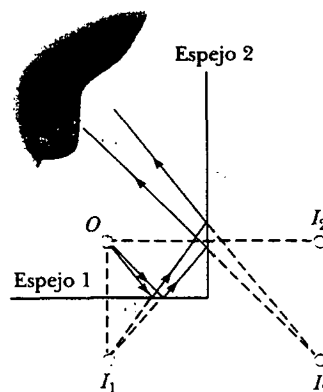


Figura 36.5 Cuando un objeto se coloca enfrente de dos espejos mutuamente perpendiculares, como se muestra, se forman tres imágenes.

Ejemplo conceptual — El profesor que levita

El profesor en la caja que aparece en la figura 36.6 parece que se balancea sobre unos cuantos dedos, con los dos pies sin tocar el piso. El profesor puede mantener esta posición durante un tiempo prolongado, y parecería que desafía a la gravedad. ¿Cómo supone usted que se crea esta ilusión?

Solución Se trata de una de las muchas ilusiones ópticas que los magos efectúan con un espejo. La caja sobre la que el profesor está parado es una armazón cúbica que contiene un espejo vertical plano sobre su plano diagonal. El profesor se monta sobre un espejo de modo que un pie, el que usted ve, está enfrente del espejo y el otro pie, el que usted no puede ver, está detrás del espejo. Cuando levanta el pie que usted ve enfrente del espejo, también se levanta la imagen reflejada de ese pie, de modo que parece que flota en el aire.



Figura 36.6 Una ilusión óptica. *(Cortesía de Henry Leap y Jim Lehman)*

EJEMPLO CONCEPTUAL 36.2 **El espejo retrovisor inclinado**

La mayor parte de los espejos retrovisores en los autos tienen un ajuste para el día y otro para la noche. El ajuste nocturno disminuye en gran medida la intensidad de la imagen para que las luces de los vehículos traseros no deslumbren al conductor. ¿Cómo trabaja dicho espejo?

Solución La figura 36.7 muestra una vista de la sección transversal de un espejo para los dos ajustes. La unidad consiste de un recubrimiento que refleja en la parte posterior de una cuña de vidrio. Cuando el espejo está en el ajuste de día (véase la figura 36.7a), la luz de un objeto detrás del auto incide en el espejo en el punto 1. La mayor parte de la luz entra en la cuña, refractándose conforme cruza la superficie frontal y se refleja desde la superficie posterior del espejo para regresar a la superficie frontal, donde se vuelve a refractar y entra otra vez al aire en forma del rayo B (por brillar). Además, una pequeña porción de la luz se refleja en la superficie frontal del vidrio, como indica el rayo D (por oscurecer, *dim*, en inglés).

Esta luz reflejada atenuada es la que produce la imagen que se observa cuando el espejo está en el ajuste nocturno (véase la figura 36.7b). En tal caso la cuña se gira de modo que la trayectoria seguida por la luz brillante (rayo B) no llegue al ojo. En vez de eso, la luz débil que se refleja en la superficie frontal de la cuña viaja hacia el ojo, y la brillantez de los faros de atrás no se vuelve un peligro.

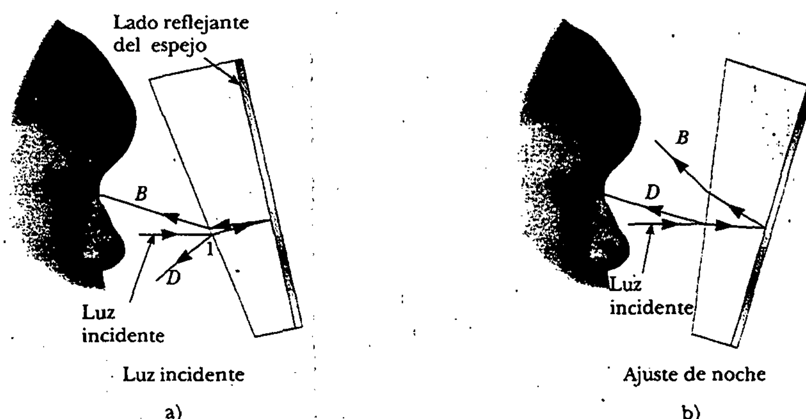


Figura 36.7 Una vista de la sección transversal de un espejo retrovisor. a) En el ajuste de día la superficie plateada trasera del espejo refleja un rayo brillante B en los ojos del conductor. b) En el ajuste de noche el vidrio de la superficie frontal no plateada del espejo refleja un rayo oscuro D en los ojos del conductor.

36.2 IMÁGENES FORMADAS POR ESPEJOS ESFÉRICOS

Espejos cóncavos

14.7 Un **espejo esférico**, como su nombre lo indica, tiene la forma de un segmento de una esfera. Este tipo de espejo enfoca los rayos paralelos entrantes en un punto, como se muestra en los rayos de colores de la figura 36.8. La figura 36.9a indica la sección transversal de un espejo esférico cuya superficie está representada por la línea negra curva y continua. (La banda azul representa el soporte estructural de la superficie de acabado espejo, como una pieza curva de vidrio en la que se ha depositado una superficie plateada.) Un espejo como éste, en el cual la luz se refleja en la superficie cóncava interior, recibe el nombre de **espejo cóncavo**. El espejo tiene un radio de curvatura R, y su centro de curvatura se localiza en el punto C. El punto V está en el centro del segmento esférico, y una línea dibujada de C a V se denomina el **eje principal** del espejo.

Considere ahora una fuente puntual de luz colocada en el punto O en la figura 36.9b, donde O es cualquier punto sobre el eje principal a la izquierda del punto C. Se muestran tres rayos divergentes que se originan en O. Después de reflejarse en el espejo, tales rayos convergen (se juntan) en el punto de la imagen I. Los rayos continúan después de divergir a partir de I como si ahí hubiera un objeto. En consecuencia, se tiene en el punto I una imagen real de la fuente puntual en O.

Aquí se considerarán sólo rayos que divergen desde el objeto que formen un pequeño ángulo con el eje principal. Dichos rayos se denominan **rayos paraxiales**. To-



Figura 36.8 Rayos luminosos rojo, azul y verde se reflejan en un espejo curvo. Observe que el punto focal donde los tres colores se encuentran es luz blanca. *(Ken Kay/Fundamental Photographs)*

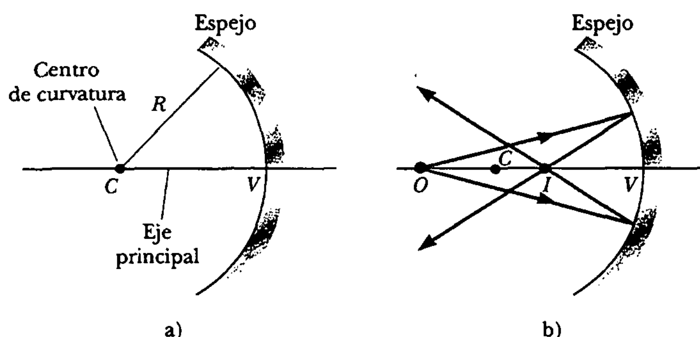


Figura 36.9 a) Un espejo cóncavo de radio *R*. El centro de curvatura *C* está localizado en el eje principal. b) Un objeto puntual situado en *O* frente a un espejo esférico cóncavo de radio *R*, donde *O* es cualquier punto sobre el eje principal que está más alejado que *R* de la superficie del espejo, forma una imagen real en *I*. Si los rayos divergen desde *O* a ángulos pequeños, todos se reflejan a través del mismo punto imagen.

dos los rayos de este tipo se reflejan a través del punto imagen, como se muestra en la figura 36.9b. Los rayos que están más lejos del eje principal, como en la figura 36.10, convergen hacia otros puntos sobre el eje principal, y producen una imagen difusa. Este efecto, denominado **aberración esférica**, se presenta hasta cierto grado en cualquier espejo esférico y se estudia en la sección 36.5.

Con la figura 36.11 es posible calcular la distancia a la imagen q a partir de un conocimiento de la distancia al objeto p y del radio de curvatura R del espejo. Por convención, tales distancias se miden desde el punto V. La figura 36.11 presenta dos rayos de luz que salen de la punta del objeto. Uno de dichos rayos pasa por el centro de curvatura C del espejo, encontrándose con la perpendicular del espejo en su viaje a la superficie del espejo y se refleja de regreso sobre sí mismo. El segundo rayo llega al espejo en su centro (punto V) y se refleja como se muestra, obedeciendo la ley de reflexión. La imagen de la punta de la flecha se localiza en el punto donde estos rayos se cruzan. De acuerdo con el triángulo rectángulo dorado de la figura 36.11, se observa que $\tan\theta = h/p$, en tanto que en el triángulo rectángulo de color azul se ve que $\tan\theta = -h'/q$. El signo negativo se incluye porque la imagen está invertida, de modo que h' se considera negativa. En consecuencia, de la ecuación 36.1 y de tales resultados, se encuentra que la ampliación del espejo es

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \qquad \textbf{(36.2)}$$

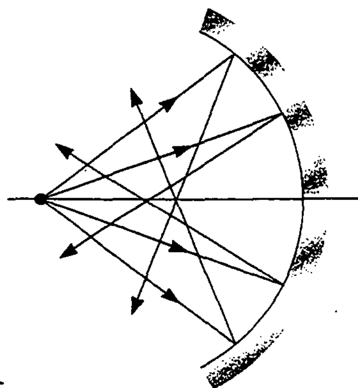


Figura 36.10 Rayos divergentes desde el objeto en grandes ángulos respecto del eje principal, se reflejan desde un espejo cóncavo esférico hasta cruzar el eje principal en diferentes puntos, originando una imagen borrosa. Dicha condición recibe el nombre de *aberración esférica*.

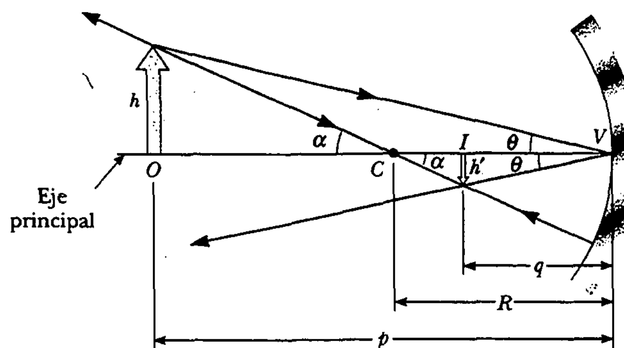


Figura 36.11 Imagen formada por un espejo cóncavo esférico cuando el objeto *O* está fuera del centro de curvatura *C*.

Se observa también en los dos triángulos en la figura 36.11 los cuales tienen α como un ángulo que

$$\tan \alpha = \frac{h}{p - R} \quad \text{y} \quad \tan \alpha = -\frac{h'}{R - q}$$

a partir de lo cual se encuentra que

$$\frac{h'}{h} = -\frac{R - q}{p - R} \qquad \textbf{(36.3)}$$

Si se comparan las ecuaciones 36.2 y 36.3 se ve que

$$\frac{R - q}{p - R} = \frac{q}{p}$$

Por álgebra simple lo anterior se reduce a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} \qquad \textbf{(36.4)}$$

Ecuación del espejo en función de R

Tal expresión recibe el nombre de **ecuación del espejo**, y se aplica sólo a rayos paraxiales.

Si el objeto está muy lejos del espejo —es decir, si la distancia p al objeto es más grande que R, de modo que pueda decirse que p se acerca al infinito— entonces $1/p \approx 0$, y en la ecuación 36.4 se ve que $q \approx R/2$. Lo cual significa que cuando el objeto se encuentra muy lejos del espejo, el punto imagen está a la mitad entre el centro de curvatura y el punto centro del espejo, como se observa en la figura 36.12a. Los rayos entrantes del objeto son esencialmente paralelos en esta figura porque se supuso que la fuente está muy lejos del espejo. En este caso particular al punto imagen se le llama **punto focal** F, y a la distancia a la imagen **longitud focal** f, donde

$$f = \frac{R}{2} \qquad \textbf{(36.5)}$$

Longitud focal

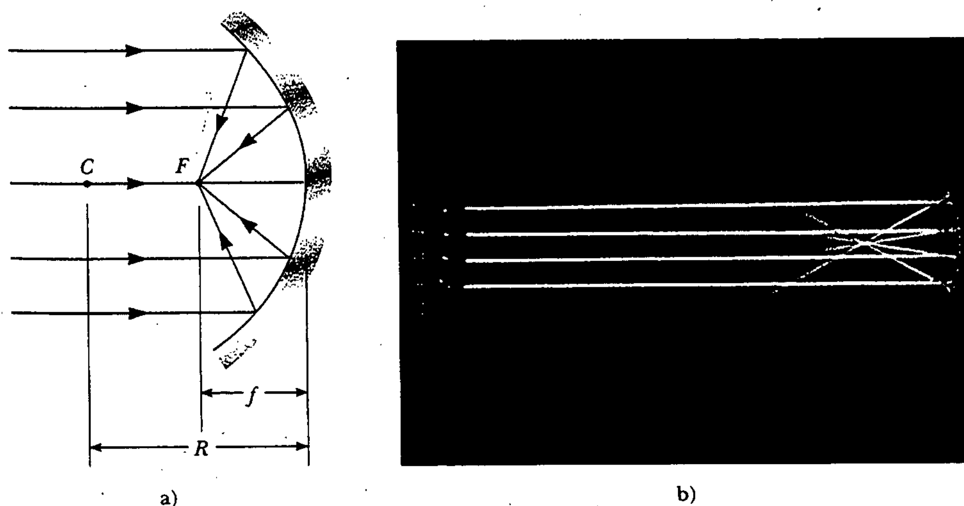


Figura 36.12 a) Los rayos luminosos provenientes de un objeto distante ($p \approx \infty$) se reflejan en un espejo cóncavo y pasan por el punto focal F. Aquí la distancia en la imagen es $q \approx R/2 = f$, donde f es la distancia focal del espejo. b) Reflexión de rayos paralelos en un espejo cóncavo. (*Henry Leap y Jim Lehman*)

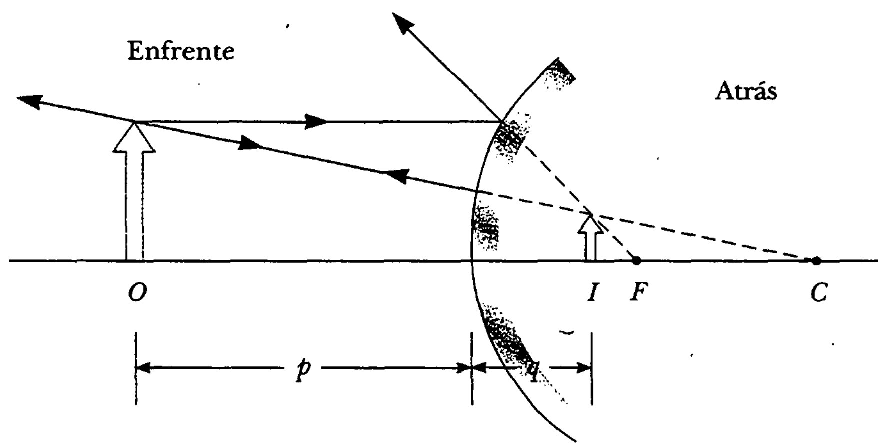


Figura 36.13 Formación de una imagen por medio de un espejo convexo esférico. La imagen formada por el objeto real es virtual y vertical.

La longitud focal es un parámetro particular de un espejo dado y, por tanto, se utiliza para comparar un espejo con otro. La ecuación del espejo puede expresarse en función de la longitud focal:

Ecuación del espejo en función de f

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \qquad (36.6)$$

Observe que la longitud focal de un espejo depende sólo de la curvatura del espejo y no del material del que está hecho. Lo anterior se debe a que la formación de la imagen es resultado de los rayos reflejados desde la superficie del material. Se encontrará en la sección 36.4 que la situación es diferente para lentes; en ese caso la luz realmente pasa a través del material.

Espejos convexos

La figura 36.13 presenta la formación de una imagen por medio de un **espejo convexo** —es decir, uno plateado, de manera tal que la luz se refleja en la superficie convexa exterior—. Lo cual en ocasiones se conoce como **espejo divergente** porque los rayos desde cualquier punto sobre un objeto divergen después de la reflexión, como si partieran de algún punto detrás del espejo. La imagen en la figura 36.13 es virtual debido a que los rayos reflejados sólo parecen originarse en el punto imagen, como se indica con las líneas punteadas. Además, la imagen siempre está vertical y es más pequeña que el objeto. Este tipo de espejos se usa en almacenes para evitar robos. Es posible usar un solo espejo para supervisar una gran área de visión, ya que éste forma una pequeña imagen del interior de un almacén.

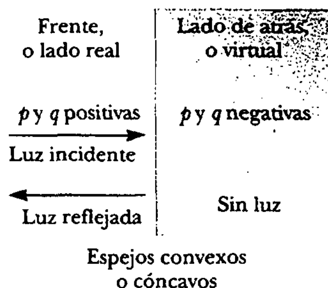


Figura 36.14 Signos de p y q para espejos convexos y cóncavos.

No se deduce ninguna ecuación para los espejos esféricos convexos porque se emplean las ecuaciones 36.2, 36.4 y 36.6 para los espejos cóncavos o convexos, si seguimos el siguiente procedimiento. Nos referimos a la región en la cual los rayos se mueven hacia el espejo como el *lado frontal* del espejo, y al otro lado como el *lado posterior*. Por ejemplo, en las figuras 36.10 y 36.12, el lado a la izquierda de los espejos es el lado frontal, y el lado a la derecha de los espejos es el lado posterior. La figura 36.14 establece las convenciones de signos para las distancias al objeto y a la imagen, y la tabla 36.1 resume las convenciones de signo para todas las cantidades.

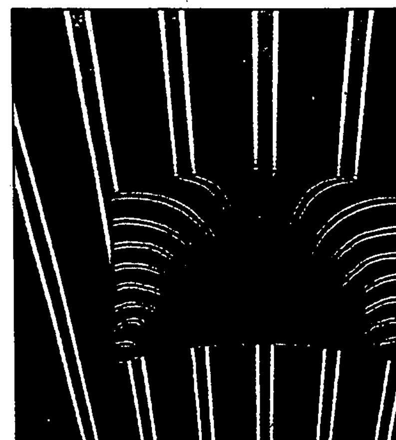
TABLA 36.1 Convención de signos para espejos

p es **positiva** si el objeto está **enfrente** del espejo (objeto real).
p es **negativa** si el objeto está **detrás** del espejo (objeto virtual).

q es **positiva** si la imagen está **enfrente** del espejo (imagen real).
q es **negativa** si la imagen está **detrás** del espejo (imagen virtual).

Tanto f como R son **positivas** si el centro de curvatura está **enfrente** del espejo (espejo cóncavo).
Tanto f como R son **negativas** si el centro de curvatura está **detrás** del espejo (espejo convexo).

Si M es **positivo**, la imagen está **vertical.**
Si M es **negativo**, la imagen está **invertida.**



Reflexión de líneas paralelas desde un espejo convexo cilíndrico. La imagen es virtual, vertical y ha disminuido su tamaño. (*©1990 Richard Megna/Fundamental Photographs*)

Diagramas de rayos para espejos

Las posiciones y tamaños de las imágenes formadas por espejos pueden determinarse de manera conveniente empleando *diagramas de rayos.* Dichas construcciones gráficas revelan la naturaleza total de la imagen y pueden utilizarse para verificar resultados calculados a partir de las ecuaciones de espejo y de ampliación. En tales diagramas necesitamos conocer la posición del objeto y la ubicación del punto focal del espejo y el centro de curvatura. Con el objetivo de localizar la imagen se dibujan tres rayos, como se muestra con diversos ejemplos en la figura 36.15. Todos estos rayos parten del mismo punto del objeto y se dibujan del modo siguiente. Se puede elegir cualquier punto sobre el objeto; aquí, por simplicidad escogemos la parte superior del objeto.

- El rayo 1 se dibuja desde la parte superior del objeto paralelo al eje principal y se refleja a través del punto focal F.
- El rayo 2 se dibuja desde la parte superior del objeto a través del punto focal y se refleja paralelo al eje principal.
- El rayo 3 se dibuja desde la parte superior del objeto a través del centro de curvatura C y se refleja de regreso sobre sí mismo.

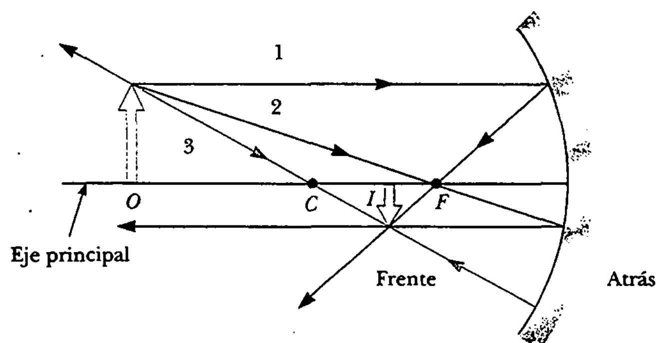
En la intersección de cualesquiera dos de estos rayos se localiza la imagen. El tercer rayo serviría para verificar la construcción. El punto imagen obtenido así siempre debe concordar con el valor de q, calculado a partir de la ecuación del espejo.

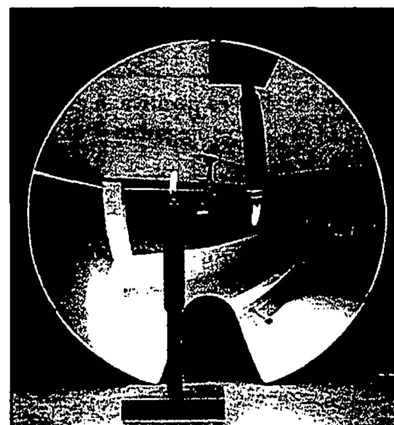
Observe lo que sucede con espejos cóncavos cuando el objeto se acerca al espejo. La imagen invertida real en la figura 36.15a se mueve hacia la izquierda a medida que el objeto se aproxima al punto focal. Cuando el objeto se encuentra en el punto focal, la imagen está infinitamente lejos del lado izquierdo. Sin embargo, cuando el objeto está entre el punto focal y la superficie del espejo, como se indica en la figura 36.15b, la imagen es virtual, vertical y aumentada. Esta última situación se aplica en el uso de un espejo para afeitarse o para maquillarse. Su cara está más cercana al espejo que el punto focal, y usted ve una imagen vertical amplificada de su cara.

En el espejo convexo (véase la figura 36.15c) la imagen de un objeto siempre es virtual, vertical y de tamaño reducido. En tal caso, conforme la distancia del objeto aumenta, la imagen virtual reduce su tamaño y se acerca al punto focal a medida que p tiende al infinito. Usted debe construir otros diagramas para verificar cómo varía la posición de la imagen con la posición del objeto.

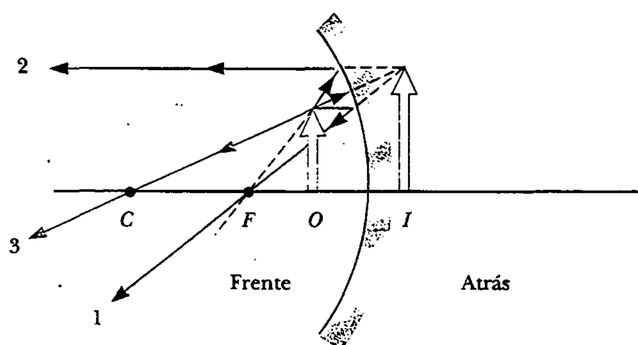
Experimento sorpresa

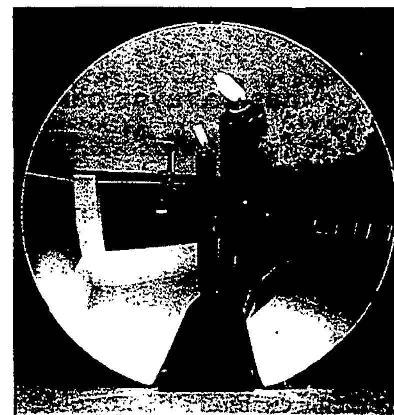
Compare las imágenes que se forman de su cara primero en el lado frontal y después en el lado posterior de una cuchara brillante de sopa. ¿Por qué las dos imágenes son tan diferentes entre sí?



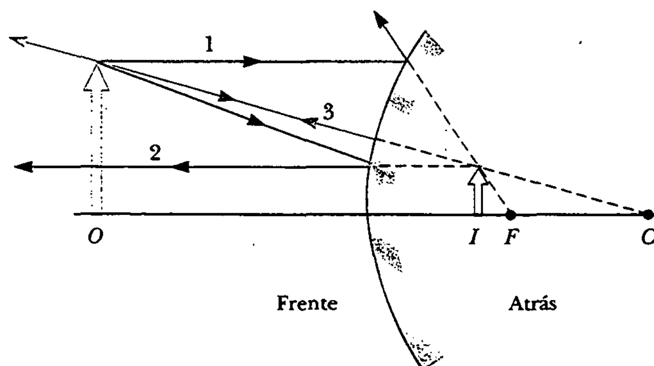


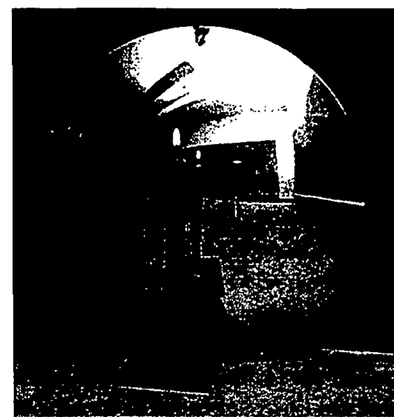
a)





b)





c)

Figura 36.15 Diagrama de rayos para espejos esféricos y las fotografías correspondientes de las imágenes de velas. a) Cuando el objeto se localiza de manera que el centro de curvatura está entre el objeto y la superficie del espejo cóncavo, la imagen es real, invertida y de tamaño reducido. b) Cuando el objeto se localiza entre el punto focal y una superficie del espejo cóncavo, la imagen es virtual, vertical y alargada. c) Cuando el objeto está frente a un espejo convexo, la imagen es virtual, vertical y de tamaño reducido.

EJEMPLO 36.4 **La imagen desde un espejo**

Suponga que cierto espejo esférico tiene una longitud focal de +10.0 cm. Localice y describa la imagen para distancias al objeto de a) 25.0 cm, b) 10.0 cm y c) 5.00 cm.

Solución Ya que la distancia focal es positiva, sabemos que éste es un espejo cóncavo (véase la tabla 36.1). a) Dicha situación es análoga a la de la figura 36.15a; por tanto, se espera que la imagen sea real y esté más cercana al espejo que el objeto. De acuerdo con la figura, ésta también debe estar invertida y de tamaño reducido. Se encuentra la distancia a la imagen empleando la ecuación 36.6 a partir de la ecuación del espejo:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{25.0\text{ cm}}+\frac{1}{q}=\frac{1}{10.0\text{ cm}}$$

$$q=16.7\text{ cm}$$

El aumento está dado por la ecuación 36.2:

$$M=-\frac{q}{p}=-\frac{16.7\text{ cm}}{25.0\text{ cm}}=-0.668$$

El hecho de que el valor absoluto de M sea menor que la unidad significa que la imagen es más pequeña que el objeto, y el signo negativo de M indica que la imagen está invertida. Como q es positivo, la imagen se localiza en el lado frontal del espejo y es real. En consecuencia, vemos que nuestras predicciones fueron correctas.

b) Cuando la distancia al objeto es de 10.0 cm, el objeto se localiza en el punto focal. Se encuentra que

$$\frac{1}{10.0\text{ cm}}+\frac{1}{q}=\frac{1}{10.0\text{ cm}}$$

$$q=\infty$$

lo que significa que los rayos originados desde un objeto colocado en el punto focal de un espejo se reflejan de manera tal que la imagen se forma a una distancia infinita del espejo; es decir, los rayos viajan paralelos entre sí después de la reflexión. Ésta es la situación en una linterna, donde el filamento del bulbo se coloca en el punto focal de un reflector, produciendo un haz paralelo de luz.

c) Cuando el objeto está en la posición $p = 5.00$ cm, se ubica entre el punto focal y la superficie del espejo, como se observa en la figura 36.15b. Así, se espera una imagen ampliada, virtual, vertical. En tal caso la ecuación del espejo produce

$$\frac{1}{5.00\text{ cm}}+\frac{1}{q}=\frac{1}{10.0\text{ cm}}$$

$$q=-10.0\text{ cm}$$

La imagen es virtual porque está localizada detrás del espejo, como se esperaba. El aumento es

$$M=-\frac{q}{p}=-\left(\frac{-10.0\text{ cm}}{5.00\text{ cm}}\right)=2.00$$

La imagen es dos veces más grande que el objeto y el signo positivo para M indica que la imagen está vertical (véase la figura 36.15b).

Ejercicio ¿A qué distancia del objeto el aumento es de −1.00?

Respuesta 20.0 cm.

EJEMPLO 36.5 **La imagen de un espejo convexo**

Una mujer cuya altura es de 1.5 m está localizada a 3.0 m de un espejo antirrobos, como se muestra en la figura 36.16. La longitud focal del espejo es de −0.25 m. Encuentre a) la posición de su imagen y b) el aumento.

Solución a) La situación se representa en la figura 36.15c. Se espera encontrar una imagen virtual, vertical, reducida. Para encontrar la posición de la imagen se usa la ecuación 36.6:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}=\frac{1}{-0.25\text{ m}}$$

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{-0.25\text{ m}}-\frac{1}{3.0\text{ m}}$$

$$q=-0.23\text{ m}$$

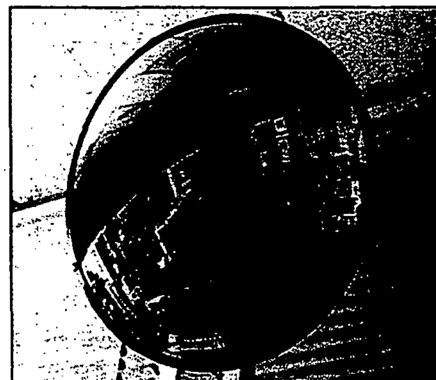


Figura 36.16 Espejos convexos, usados frecuentemente para la seguridad en tiendas departamentales, proporcionan un amplio ángulo de visión. (*©1990 Paul Silverman/Fundamental Photographs*)

El valor negativo de q indica que la imagen es virtual, o que está atrás del espejo, como se muestra en la figura 36.15c.

b) El aumento es

$$M = -\frac{q}{p} = -\left(\frac{-0.23\text{ m}}{3.0\text{ m}}\right) = 0.077$$

La imagen es mucho más pequeña que la mujer, y está vertical porque M es positiva.

Ejercicio Encuentre la altura de la imagen.

Respuesta 0.12 m.



IMÁGENES FORMADAS POR REFRACCIÓN

En esta sección se describirá cómo se forman imágenes cuando los rayos de luz son refractados en la frontera entre dos materiales transparentes. Considere dos medios transparentes que tienen índices de refracción n_1 y n_2, donde la frontera entre los dos medios es una superficie esférica de radio R (véase la figura 36.17). Se supone que el objeto en O está en un medio cuyo índice de refracción es n_1, donde $n_1 < n_2$. Sólo se considerarán los rayos paraxiales que salen de O. Como se verá, todos los rayos se refractan en la superficie esférica y se enfocan en un solo punto I, el punto imagen.

La figura 36.18 ilustra un solo rayo que sale del punto O y que se enfoca en el punto I. La ley de Snell aplicada a este rayo refractado produce

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

Ya que los ángulos θ_1 y θ_2 se suponen pequeños, podemos emplear la aproximación de ángulo pequeño sen $\theta \approx \theta$ (ángulos en radianes) y decir que

$$n_1\theta_1 = n_2\theta_2$$

Ahora, se emplea el hecho de que un ángulo exterior de cualquier triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos. Aplicando esta regla a los triángulos OPC y PIC de la figura 36.18 se obtiene

$$\theta_1 = \alpha + \beta$$

$$\beta = \theta_2 + \gamma$$

Si combinamos las tres ecuaciones y eliminamos θ_1 y θ_2, encontramos que

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta \quad \textbf{(36.7)}$$

Al observar la figura 36.18 se ve que los tres triángulos rectángulos tienen un lado vertical común de longitud d. Para rayos paraxiales (diferentes al ángulo relativamente grande del rayo mostrado en la figura 36.18), los lados horizontales de dichos

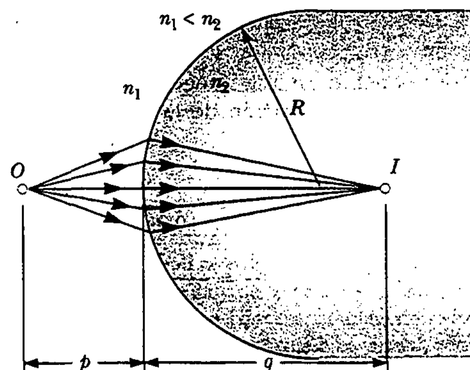


Figura 36.17 Una imagen formada por refracción en una superficie esférica. Los rayos que forman ángulos pequeños con el eje principal divergen desde un objeto puntual en O y se refractan a través del punto imagen I.

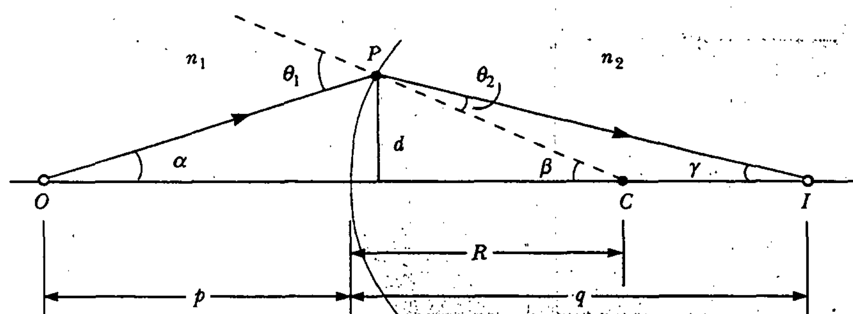


Figura 36.18 Geometría empleada para obtener la ecuación 36.8.

triángulos son aproximadamente p para el triángulo que contiene a α, R para el triángulo que contiene el ángulo β, y q para el triángulo que contiene el ángulo γ. En la aproximación de ángulos pequeños, $\tan\theta \approx \theta$, por lo que podemos escribir las relaciones aproximadas para estos triángulos como sigue:

$$\tan\alpha \approx \alpha \approx \frac{d}{p} \qquad \tan\beta \approx \beta \approx \frac{d}{R} \qquad \tan\gamma \approx \gamma \approx \frac{d}{q}$$

Sustituimos tales expresiones en la ecuación 36.7 y dividimos entre d para obtener

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \qquad \textbf{(36.8)}$$

Para una distancia p al objeto fijo, la distancia a la imagen q es independiente del ángulo que el rayo forma con el eje. Este resultado nos indica que todos los rayos paraxiales se enfocan en el mismo punto I.

Como con los espejos, se debe emplear una convención de signos si vamos a aplicar esta ecuación en diversas circunstancias. Se define el lado de la superficie en el que los rayos de luz se originan como el lado frontal. El otro lado se llama lado posterior. Las imágenes reales se forman por refracción en el lado posterior de la superficie, en contraste con los espejos, donde las imágenes reales se forman al frente de la superficie reflejante. Debido a la diferencia en la posición de las imágenes reales, las convenciones de los signos en la refracción para q y R son opuestas a las convenciones de los signos para la reflexión. Por ejemplo, q y R son positivos en la figura 36.18. Las convenciones de signos para superficies esféricas refractoras se resumen en la tabla 36.2.

Se dedujo la ecuación 36.8 suponiendo que $n_1 < n_2$. Sin embargo, dicha suposición no es necesaria. La ecuación 36.8 es válida sin considerar cuál índice de refracción es más grande.

TABLA 36.2 Convención de signos para superficies refractantes

p es **positiva** si el objeto está **enfrente** de la superficie (objeto real).
p es **negativa** si el objeto está **detrás** de la superficie (objeto virtual).
q es **positiva** si la imagen está **detrás** de la superficie (imagen real).
q es **negativa** si la imagen está **enfrente** de la superficie (imagen virtual).
R es **positiva** si el centro de curvatura está **detrás** de la superficie convexa.
R es **negativa** si el centro de curvatura está **enfrente** de la superficie cóncava.

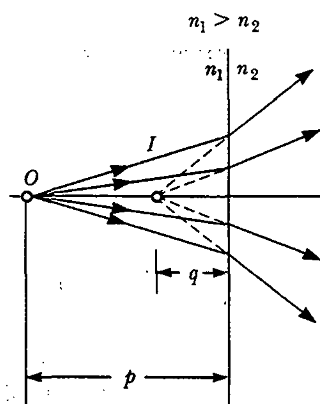


Figura 36.19 La imagen formada por una superficie refractante plana es virtual, y está en el mismo lado de la superficie que el objeto. Todos los rayos se suponen paraxiales.

Superficies de refracción planas

Si la superficie refractante es plana, entonces R tiende al infinito y la ecuación 36.8 se reduce a

$$\frac{n_1}{p} = -\frac{n_2}{q}$$

$$q = -\frac{n_2}{n_1}p \qquad \textbf{(36.9)}$$

A partir de esta expresión se ve que el signo de q es opuesto al de p. De este modo, de acuerdo con la tabla 36.2, **la imagen formada por una superficie de refracción plana está en el mismo lado de la superficie que el objeto.** Lo anterior se ilustra en la figura 36.19 para la situación en la que el objeto está en el medio de índice n_1, y n_1 es mayor que n_2. En este caso se forma una imagen virtual entre el objeto y la superficie. Si n_1 es menor que n_2, los rayos en el lado de atrás divergen entre sí en ángulos menores que los de la figura 36.19. Esto da como resultado que la imagen virtual se forme a la izquierda del objeto.

EJEMPLO CONCEPTUAL ¡Vamos a bucear!

Como se sabe, los objetos que se ven bajo el agua a simple vista parecen difusos y fuera de foco. Sin embargo, un buzo que emplea un visor tiene una visión clara de los objetos bajo el agua. a) Proporcione una explicación de esto a partir del hecho de que los índices de refracción de la córnea, el agua y el aire son 1.376, 1.333 y 1.000 29, respectivamente.

Solución Como la córnea y el agua tienen índices de refracción casi idénticos, hay muy poca refracción cuando se miran objetos bajo el agua a simple vista. En tal caso la luz proveniente del objeto se enfoca detrás de la retina y produce una imagen difusa. Cuando se emplea un visor, el espacio de aire entre el ojo y la superficie del visor proporciona la cantidad normal de refracción en la interface ojo-aire, y la luz proveniente del objeto se enfoca en la retina.

b) Si en una prescripción de lentes se pule el vidrio de un visor, ¿deberá la superficie curva estar dentro, fuera o en ambas superficies del visor?

Solución Si en una prescripción de lentes se pule el vidrio del visor, de modo que la persona pueda ver sin lentes, sólo la superficie de adentro es curva. Así la prescripción es precisa, ya sea que se use el visor bajo el agua o en el aire. Si se pusiera la curvatura en la parte exterior de la superficie, la refracción en la superficie exterior del vidrio debería cambiar dependiendo de si hay aire o agua presente en la parte exterior del visor.

EJEMPLO 36.7 Mire dentro de la bola de cristal

Una bola de semillas de diente de león de 4.0 cm de diámetro está incrustada en el centro de un pisapapeles esférico de plástico de 6.0 cm de diámetro (véase la figura 36.20a). El índice de refracción del plástico es $n_1 = 1.50$. Encuentre la posición de la imagen del extremo cercano a la bola de semillas.

Solución Como $n_1 > n_2$, donde $n_2 = 1.00$ es el índice de refracción para el aire, los rayos que se originan en el objeto se refractan alejándose de la normal en la superficie y divergen hacia afuera, como se muestra en la figura 36.20b. En consecuencia, la imagen se forma dentro del pisapapeles y es virtual. A partir de las dimensiones dadas se sabe que el borde cercano de la bola de las semillas está a 1.0 cm abajo de la superficie del pisapapeles. Aplicando la ecuación 36.8, y notando en la tabla 36.2 que R es negativa, se obtiene

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\frac{1.50}{1.0\text{ cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1.00 - 1.50}{-3.0\text{ cm}}$$

$$q = -0.75\text{ cm}$$

El signo negativo de q indica que la imagen está enfrente de la superficie —en otras palabras, en el mismo medio que el objeto, como se observa en la figura 36.20b—. Al estar en el mismo medio que el objeto, la imagen debe ser virtual (véase la tabla 36.2). La superficie de la bola de semillas parecerá más cercana a la superficie del pisapapeles de lo que realmente está.

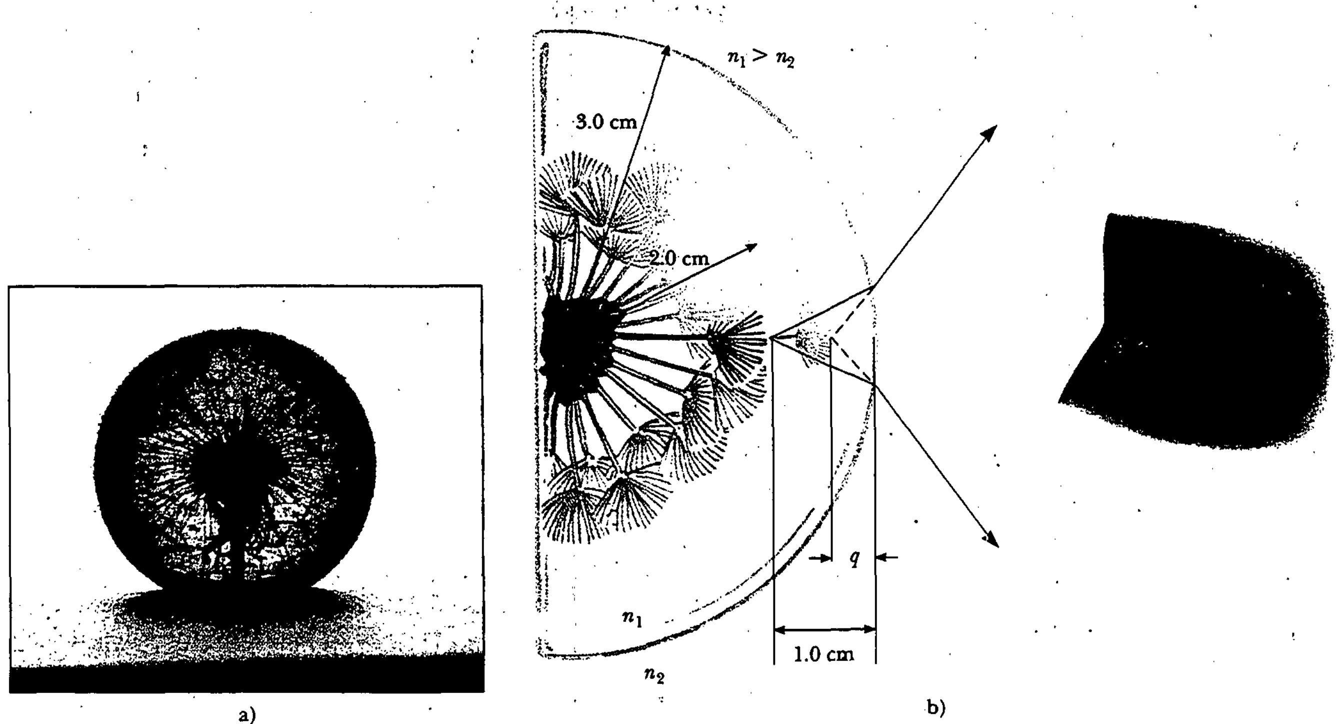


Figura 36.20 a) Un objeto incrustado en una esfera de plástico forma una imagen virtual entre la superficie del objeto y la superficie de la esfera. Todos los rayos se suponen paraxiales. Puesto que el objeto está dentro de la esfera, el frente de la superficie de refracción es el *interior* de la esfera. b) Los rayos que se forman en la superficie del objeto forman una imagen que aún está dentro de la esfera de plástico, pero está cerca de la superficie de plástico. (*George Semple*)

EJEMPLO 36.8 El que se escapa

Un pequeño pez nada a una profundidad d debajo de la superficie de un estanque (véase la figura 36.21). ¿Cuál es la profundidad aparente del pez si se observa directamente desde arriba?

Solución Ya que la superficie refractante es plana, R es infinita. Por consiguiente, se utiliza la ecuación 36.9 para determinar la ubicación de la imagen con $p = d$. Usando los índices de refracción dados en la figura 36.21 se obtiene

$$q = -\frac{n_2}{n_1}p = -\frac{1.00}{1.33}d = -0.752d$$

Como q es negativa, la imagen es virtual, como se indica con las líneas discontinuas en la figura 36.21. La profundidad aparente es tres cuartos de la profundidad real.

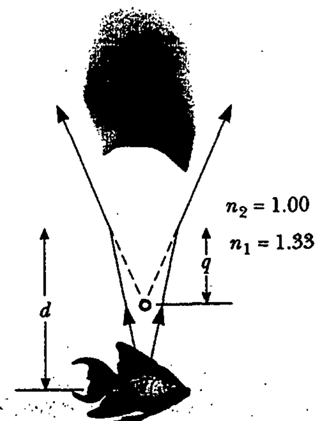


Figura 36.21 La profundidad aparente, q, del pez es menor que la profundidad real, d. Todos los rayos se suponen paraxiales.



LENTES DELGADOS

14.8 En general los lentes se emplean para formar imágenes por medio de la refracción en instrumentos ópticos, como cámaras, telescopios y microscopios. Se puede usar lo que se ha aprendido acerca de las imágenes formadas por superficies de refracción para ayudar a localizar la imagen formada por unos lentes. Se debe reconocer que la luz que pasa a través de unos lentes experimenta refracción en dos superficies. El desarrollo que sigue está basado en el concepto de que **la imagen formada por una superficie de refracción sirve como objeto para la segunda superficie.** Se analizará primero un grueso de lente y se irá aproximando ese grosor a cero.

Considere un lente que tiene un índice de refracción n y dos superficies esféricas con radios de curvatura R_1 y R_2, como se muestra en la figura 36.22. (Observe que R_1 es el radio de curvatura de la superficie del lente que la luz alcanza primero al dejar el objeto, y que R_2 es el radio de curvatura de la otra superficie del lente.) Un objeto se coloca en el punto O a una distancia p_1 frente a la superficie 1. Si el objeto estuviera lejos de la superficie 1, los rayos de luz desde el objeto que pegan en la superficie estarían casi paralelos entre sí. La refracción de la superficie enfocaría estos rayos, formando una imagen real a la derecha de la superficie 1, como se muestra en la figura 36.22 (como en la figura 36.17). Si el objeto se coloca cerca de la superficie 1 como se muestra en la figura 36.22 los rayos que salen del objeto e inciden en la superficie cubren un amplio rango de ángulos y no son paralelos entre sí. En dicho caso la refracción en la superficie no es suficiente y ocasionará que los rayos converjan en el lado derecho de la superficie. Éstos sólo divergen, aunque están muy cerca de ser paralelos incluso antes de que peguen en la superficie. Lo anterior da como resultado una imagen virtual del objeto en I_1 a la izquierda de la superficie, como se muestra en la figura 36.22. La imagen después se utiliza como objeto para la superficie 2, lo que da como resultado una imagen real I_2 a la derecha del lente.

Se comenzará con la imagen virtual formada por la superficie 1. Usando la ecuación 36.8, y suponiendo que $n_1 = 1$, puesto que el lente está rodeado por aire, se encuentra que la imagen I_1 formada por la superficie 1 satisface la ecuación

$$1) \qquad \frac{1}{p_1} + \frac{n}{q_1} = \frac{n-1}{R_1}$$

donde q_1 es un número negativo porque representa una imagen virtual formada en el lado frontal de la superficie 1.

Enseguida aplicamos la ecuación 36.8 a la superficie 2, tomando $n_1 = n$ y $n_2 = 1$. (Se hace tal cambio en el índice, ya que los rayos de luz de I_1 que van a la superficie 2 están *en el material del lente*, y este material tiene índice n. Se podría también eliminar el objeto en O, llenando todo el espacio a la izquierda de la superficie 1

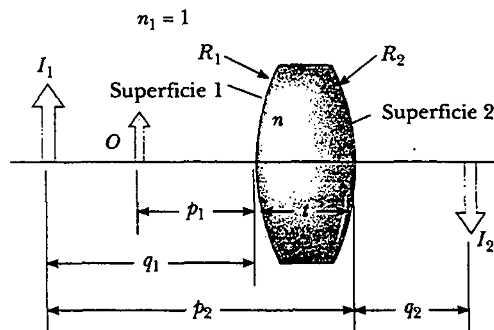


Figura 36.22 Para localizar la imagen formada por un lente, se usa la imagen virtual en I_1, formada por la superficie 1, como un objeto para la imagen formada por la superficie 2. La imagen final es real y está en I_2.

con el material del lente, y colocando el objeto en I_1; los rayos de luz que van a la superficie 2 serían como en la situación real en la figura 36.22.) Tomando a p_2 como la distancia al objeto para la superficie 2 y q_2 como la distancia a la imagen se obtiene

$$2) \qquad \frac{n}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1-n}{R_2}$$

Ahora se introduce matemáticamente el hecho de que la imagen formada por la primera superficie actúa como objeto para la segunda superficie. Se hace esto observando en la figura 36.22 que p_2 es la suma de q_1 y t, y haciendo que $p_2 = -q_1 + t$, donde t es el grosor de los lentes. (Recuerde que q_1 es un número negativo y que p_2 debe ser positivo por nuestra convención de signos —por tanto, se debe introducir un signo negativo para q_1—.) Para un lente *delgado* (para el que el grosor es pequeño comparado con el radio de curvatura), se puede despreciar a t. En tal aproximación se ve que $p_2 = -q_1$. En consecuencia, la ecuación (2) se convierte en

$$3) \qquad -\frac{n}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1-n}{R_2}$$

Al sumar las ecuaciones (1) y (3) se encuentra que

$$4) \qquad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Para un lente delgado se pueden omitir los subíndices en p_1 y q_2 en la ecuación (4), y denominar con p a la distancia al objeto y con q a la distancia a la imagen, como en la figura 36.23. Por tanto, la ecuación (4) se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad \textbf{(36.10)}$$

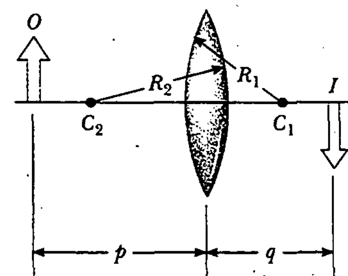


Figura 36.23 Geometría simplificada para un lente delgado.

Dicha expresión relaciona la distancia a la imagen q de la imagen formada por un lente delgado con la distancia al objeto p y las propiedades del lente delgado (índice de refracción y radio de curvatura). Sólo es válida para rayos paraxiales y únicamente cuando el grosor del lente es pequeño respecto de R_1 y R_2.

La **longitud focal** f de un lente delgado es la distancia a la imagen que corresponde a una distancia al objeto infinita, igual que se hizo con los espejos. Haciendo que p, ∞ y q se aproximen a f en la ecuación 36.10, se ve que el inverso de la longitud focal para un lente delgado es

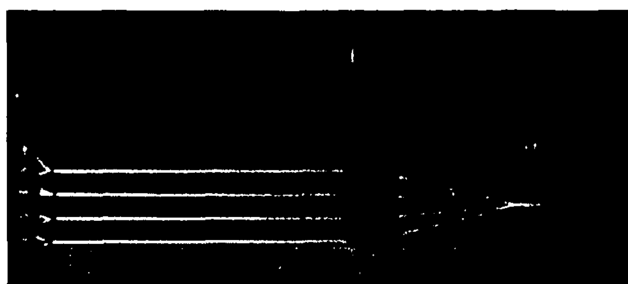
$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad \textbf{(36.11)}$$

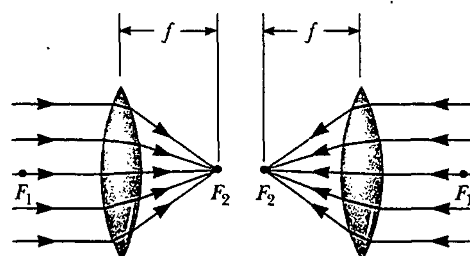
Ecuación del fabricante de lentes

Esta relación se llama **ecuación del fabricante de lentes**, ya que se emplea para determinar los valores de R_1 y R_2 que son necesarios para un determinado índice de refracción y una longitud focal f deseada. Inversamente, si el índice de refracción y el radio de curvatura de un lente están determinados, la ecuación permite un cálculo de la longitud focal. Si el lente está inmerso en algo diferente que el aire, se utiliza esta misma ecuación con n interpretada como la *razón* del índice de refracción del material del lente y del fluido que lo rodea.

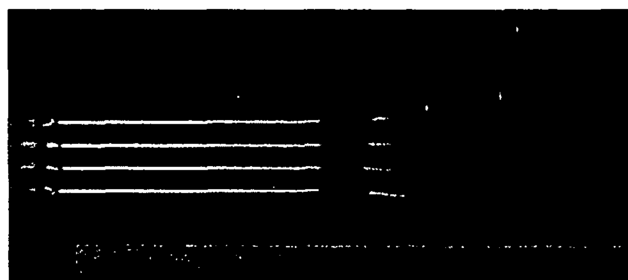
Pregunta sorpresa 36.2

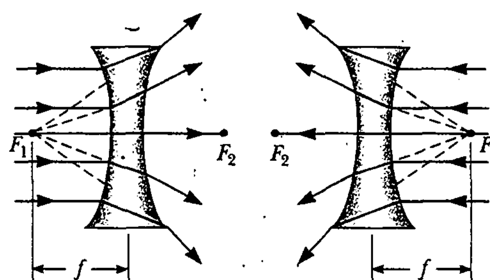
¿Cuál es la longitud focal de un cristal de ventana de vidrio?





a)





b)

Figura 36.24 (*Izquierda*) Efectos del lente convergente (superior) y divergente (inferior) en rayos paralelos. (*Henry Leap y Jim Lehman*). (*Derecha*) Los puntos focales del objeto y la imagen de a) un lente convergente, y b) un lente divergente.

Con la ecuación 36.11 se escribe la ecuación 36.10 en una forma idéntica a la ecuación 36.6 para espejos:

Ecuación para el lente delgado

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \tag{36.12}$$

La presente ecuación, llamada **ecuación para el lente delgado,** sirve para relacionar la distancia a la imagen y la distancia al objeto para un lente delgado.

Ya que la luz puede viajar en cualquier dirección a través de un lente, cada lente tiene dos puntos focales, uno para los rayos de luz que pasan en una dirección y el otro para los rayos que pasan en la otra dirección. Lo anterior se ilustra en la figura 36.24 para un lente biconvexo (dos superficies convexas dan como resultado un lente convergente) y un lente bicóncavo (dos superficies cóncavas dan como resultado un lente divergente). El punto focal F_1 algunas veces se conoce como *punto focal del objeto,* y F_2 se denomina *punto focal de la imagen.*

La figura 36.25 es útil para obtener los signos de p y q, y la tabla 36.3 proporciona las convenciones de signos para el lente delgado. Observe que las convenciones de signo para el lente delgado son las mismas que para superficies de refracción (véase la tabla 36.2). Al aplicar estas reglas a un lente biconvexo se observa que cuando $p > f$, las cantidades p, q y R_1 son positivas, y R_2 es negativa. En consecuencia, cuando un lente convergente forma una imagen real a partir de un objeto, p, q y f son positivas. Para un lente bicóncavo p y R_2 son positivas y q y R_1 son negativas, por tanto, resulta que f es negativa.

En la figura 36.26 se presentan dibujos de varias formas de lentes. En general, advierta que un lente convergente es más grueso en el centro que en el borde, en tanto que un lente divergente es más delgado en el centro que en el borde.

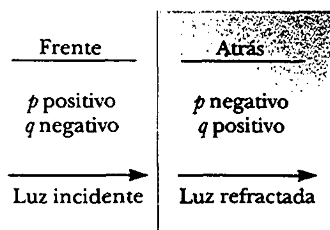


Figura 36.25 Un diagrama para obtener los signos de p y q para un lente delgado. (Este diagrama también se puede aplicar a una superficie de refracción.)

TABLA 36.3 Convención de signos para lentes delgados

p es **positiva** si el objeto está **enfrente** del lente (objeto real).
p es **negativa** si el objeto está **detrás** del lente (objeto virtual).

q es **positiva** si la imagen está **detrás** del lente (imagen real).
q es **negativa** si la imagen está **enfrente** del lente (imagen virtual).

R_1 y R_2 son **positivas** si el centro de curvatura está **detrás** del lente.
R_1 y R_2 son **negativas** si el centro de curvatura está **enfrente** del lente.

f es **positiva** si el lente es **convergente**.
f es **negativa** si el lente es **divergente**.

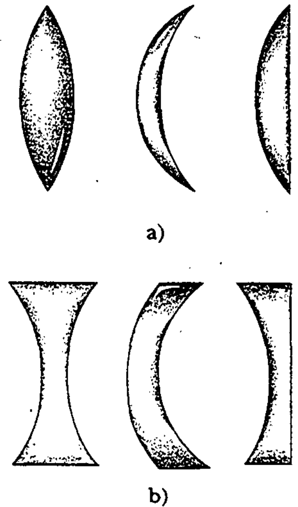


Figura 36.26 Varias formas de lentes: a) Lentes biconvexo, convexo, cóncavo y plano-convexo. Todos éstos son lentes convergentes, tienen una longitud focal positiva y son más gruesos en la parte media. b) Lentes bicóncavo, convexo-cóncavo y plano cóncavo. Todos éstos son lentes divergentes, tienen una longitud focal negativa y son más gruesos en los bordes.

Ampliación de imágenes

Considere un lente delgado a través del cual pasan los rayos de luz desde un objeto. Como en el caso de los espejos (ecuación 36.2), la ampliación lateral de un lente se define como la razón entre la altura de la imagen h' y la altura del objeto h:

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p}$$

A partir de esta expresión se concluye que cuando M es positiva, la imagen está vertical y del mismo lado del lente que el objeto. Cuando M es negativa, la imagen está invertida y en el lado del lente opuesto al objeto.

Diagramas de rayos para lentes delgados

Los diagramas de rayos son muy convenientes para localizar las imágenes formadas por lentes delgados o por un sistema de lentes. Tales construcciones también ayudan a clarificar las convenciones de signo que se han estudiado. La figura 36.27 ilus-

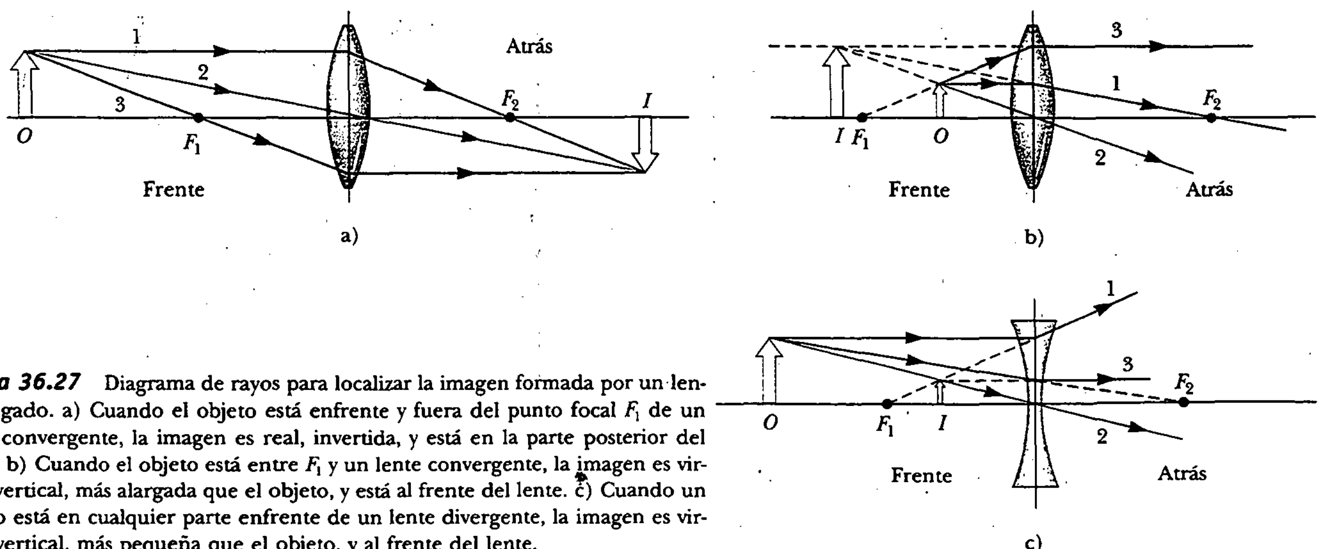


Figura 36.27 Diagrama de rayos para localizar la imagen formada por un lente delgado. a) Cuando el objeto está enfrente y fuera del punto focal F_1 de un lente convergente, la imagen es real, invertida, y está en la parte posterior del lente. b) Cuando el objeto está entre F_1 y un lente convergente, la imagen es virtual, vertical, más alargada que el objeto, y está al frente del lente. c) Cuando un objeto está en cualquier parte enfrente de un lente divergente, la imagen es virtual, vertical, más pequeña que el objeto, y al frente del lente.

tra este método para tres situaciones de un solo lente. Para localizar la imagen de un lente convergente (Figs. 36.27a y b), los siguientes tres rayos se dibujan desde la parte superior del objeto.

- El rayo 1 se dibuja paralelo al eje principal. Después de ser refractado por el lente, este rayo pasa por el punto focal de atrás del lente.
- El rayo 2 se dibuja por el centro del lente; continúa en una línea recta.
- El rayo 3 se dibuja por el punto focal en el lado frontal del lente (o como si viniera del punto focal si $p < f$) y emerge del lente paralelo al eje principal.

Para localizar la imagen de un lente divergente (véase la figura 36.27c), los siguientes tres rayos se dibujan desde la parte superior del objeto.

- El rayo 1 se dibuja paralelo al eje principal. Después de ser refractado por el lente, dicho rayo emerge de tal manera que parece haber pasado a través del punto focal al frente del lente. (Tal dirección aparente se indica por la línea discontinua en la figura 36.27c.)
- El rayo 2 se dibuja atravesando el centro del lente y continúa en una línea recta.
- El rayo 3 se dibuja hacia el punto focal en el lado posterior del lente y emerge del lente paralelo al eje óptico.

Pregunta sorpresa 36.3

En la figura 36.27a, la flecha azul del objeto se reemplaza por una que es mucho más alta que el lente. ¿Cuántos rayos desde el objeto incidirán en el lente?

Para el lente convergente de la figura 36.27a, donde el objeto está a la izquierda del punto focal del objeto ($p > f_1$), la imagen es real e invertida. Cuando el objeto está entre el punto focal del objeto y el lente ($p < f_1$), como se ve en la figura 36.27b, la imagen es virtual y vertical. Por último, para un lente divergente (véase la figura 36.27c), la imagen siempre es virtual y vertical, sin considerar dónde se coloca el objeto. Tales construcciones geométricas son razonablemente precisas sólo si la distancia entre los rayos y el eje principal es mucho menor que los radios de las superficies del lente.

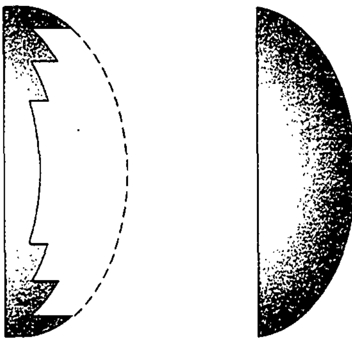


Figura 36.28 El lente de Fresnel a la izquierda tiene la misma distancia focal que el lente grueso de la derecha, pero está hecho con mucho menos vidrio.

Es importante darse cuenta de que la refracción ocurre sólo en la superficie del lente. Un cierto diseño de lente saca ventaja de este hecho al producir el *lente de Fresnel*, un lente poderoso no muy grueso. Puesto que sólo la curvatura de la superficie es importante en las cualidades de refracción del lente, el material de enmedio de un lente de Fresnel se elimina, como se muestra en la figura 36.28. Como los bordes de los segmentos curvos causan cierta distorsión, los lentes de Fresnel generalmente se usan sólo en situaciones en las que la calidad de la imagen es menos importante que la reducción del peso.

Las líneas visibles que cruzan las caras de la mayoría de los faros de automóviles son los bordes de estos segmentos curvos. Un faro requiere lentes de longitud focal corta para colimar la luz del filamento cercano en un haz paralelo. Si éste no fuera el diseño de Fresnel, el vidrio podría ser muy grueso en el centro y bastante pesado. El peso del vidrio probablemente causaría que el borde delgado en donde se apoya el lente se rompiera cuando se sometiera a los golpes y vibraciones normales cuando se viaja en un camino irregular.

Pregunta sorpresa 36.4

Si usted cubriera la mitad superior de un lente, ¿qué de lo siguiente ocurriría en la apariencia de la imagen de un objeto? a) La mitad inferior desaparecería; b) la mitad superior desaparecería; c) la imagen completa sería visible, pero con la mitad de intensidad; d) no ocurrirían cambios; e) la imagen completa desaparecería.

EJEMPLO 36.9 Una imagen formada por un lente divergente

Un lente divergente tiene una longitud focal de −20.0 cm. Un objeto de 2.00 cm de altura se pone a 30.0 cm enfrente del lente. Localice la imagen.

Solución Empleando la ecuación del lente delgado (ecuación 36.12), con $p = 30.0$ cm y $f = -20.0$ cm, obtenemos

$$\frac{1}{30.0\,\text{cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{-20.0\,\text{cm}}$$

$$q = -12.0\,\text{cm}$$

El signo negativo indica que la imagen está enfrente del lente y es virtual, como se observa en la figura 36.27c.

Ejercicio Encuentre el aumento y la altura de la imagen.

Respuesta $M = 0.400$, $h' = 0.800$ cm.

EJEMPLO 36.10 Una imagen formada por un lente convergente

Un lente convergente de 10.0 cm de longitud focal forma una imagen de cada uno de tres objetos situados a: a) 30.0 cm, b) 10.0 cm y c) 5.00 cm enfrente del lente. Encuentre la distancia a la imagen y describa la imagen en cada caso.

Solución a) La ecuación del lente delgado se utiliza nuevamente:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{30.0\,\text{cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{10.0\,\text{cm}}$$

$$q = 15.0\,\text{cm}$$

El signo positivo indica que la imagen está en la parte de atrás del lente y que es real. El aumento es

$$M = -\frac{q}{p} = \frac{15.0\,\text{cm}}{30.0\,\text{cm}} = -0.500$$

De este modo, la imagen ha reducido su tamaño a la mitad, y el signo negativo para M significa que la imagen está invertida. La situación es como la descrita en la figura 36.27a.

b) No es necesario realizar ningún cálculo para este caso, pues se sabe que cuando el objeto se pone en el punto focal, la imagen se forma en el infinito. Esto se verifica fácilmente sustituyendo $p = 10.0$ cm en la ecuación del lente delgado.

c) A continuación nos movemos dentro del punto focal a una distancia del objeto de 5.00 cm:

$$\frac{1}{5.00\,\text{cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{10.0\,\text{cm}}$$

$$q = -10.0\,\text{cm}$$

$$M = -\frac{q}{p} = -\left(\frac{-10.0\,\text{cm}}{5.00\,\text{cm}}\right) = 2.00$$

La distancia a la imagen negativa indica que ésta está enfrente del lente y es virtual. La imagen se ha alargado, y el signo positivo para M señala que la imagen está vertical, como se muestra en la figura 36.27b.

EJEMPLO 36.11 Un lente bajo el agua

Un lente de vidrio convergente ($n = 1.52$) tiene una longitud focal de 40.0 cm en el aire. Encuentre su longitud focal cuando está inmerso en agua, la cual tiene un índice de refracción de 1.33.

Solución Se puede emplear la fórmula del fabricante de lentes (ecuación 36.11) en ambos casos, pero observe que R_1 y R_2 permanecen iguales en el aire y en el agua:

$$\frac{1}{f_{\text{aire}}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{f_{\text{agua}}} = (n'-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

donde n' es la relación del índice de refracción del vidrio con el agua: $n' = 1.52/1.33 = 1.14$. Al dividir la primera ecuación entre la segunda se obtiene

$$\frac{f_{\text{agua}}}{f_{\text{aire}}} = \frac{n-1}{n'-1} = \frac{1.52-1}{1.14-1} = 3.71$$

Puesto que $f_{\text{aire}} = 40.0$ cm, se encuentra que

$$f_{\text{agua}} = 3.71 f_{\text{aire}} = 3.71(40.0 \text{ cm}) = 148 \text{ cm}$$

La longitud focal de cualquier lente de vidrio se incrementa en un factor $(n-1)/(n'-1)$ cuando los lentes se sumergen en agua.

Combinación de lentes delgados



Luz de un objeto distante enfocada a través de dos lentes convergentes. *(Henry Leap y Jim Lehman)*

Si dos lentes delgados se emplean para formar una imagen, el sistema se trata de la siguiente manera. Primero, la imagen formada por el primer lente se localiza como si el segundo lente no estuviera presente. Después se dibuja un diagrama de rayos para el segundo lente, con la imagen formada por el primer lente que ahora sirve como objeto para el segundo lente. La segunda imagen formada es la imagen final del sistema. Una configuración es particularmente directa; es decir, si la imagen formada por el primer lente está en el lado posterior del segundo lente, entonces la imagen se trata como un **objeto virtual** para el segundo lente (es decir, p es negativa). El mismo procedimiento se extiende a un sistema de tres o más lentes. La ampliación total de un sistema de lentes delgados es igual al producto de las ampliaciones de los lentes separados.

Se considera el caso especial de un sistema de dos lentes en contacto. Se supone que dos lentes delgados de longitudes focales f_1 y f_2 se ponen en contacto entre sí. Si p es la distancia al objeto para la combinación, entonces la aplicación de la ecuación del lente delgado (ec. 36.12) al primer lente produce

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}$$

donde q_1 es la distancia a la imagen para el primer lente. Considerando esta imagen como el objeto para el segundo lente, se ve que la distancia al objeto para el segundo lente debe ser $-q_1$ (negativa porque el objeto es virtual). En consecuencia, para el segundo lente,

$$\frac{1}{-q_1} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2}$$

donde q es la distancia a la imagen final desde el segundo lente. La suma de estas ecuaciones elimina a q_1 y da como resultado

Longitud focal de dos lentes delgados en contacto

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \qquad \textbf{(36.13)}$$

Ya que los dos lentes delgados están en contacto entre sí, q es también la distancia de la imagen final desde el primer lente. Por tanto, **dos lentes delgados en contacto entre sí son equivalentes a un solo lente delgado cuya longitud focal está dada por la ecuación 36.13.**

EJEMPLO 36.__ ¿Dónde está la imagen final?

Aun cuando no se aplican las condiciones apenas descritas, la ecuación de los lentes proporciona la posición de la imagen y el aumento. Por ejemplo, dos lentes convergentes delgados de longitud focal $f_1 = 10.0$ cm y $f_2 = 20.0$ cm están separados 20.0 cm, como se ilustra en la figura 36.29. Un objeto está situado a 15.0 cm a la izquierda del primer lente. Determine la posición de la imagen final y el aumento del sistema.

Solución En primer lugar se encuentra la imagen por el primer lente mientras se ignora al segundo lente:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{15.0\text{ cm}} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{10.0\text{ cm}}$$

$$q_1 = 30.0\text{ cm}$$

donde q_1 se mide desde el primer lente. Un valor positivo para q_1 significa que la primera imagen está en la parte posterior del lente 1.

Puesto que q_1 es mayor que la separación entre los dos lentes, la imagen formada por el primer lente está a 10.0 cm a la derecha del lente 2. Tomamos esto como la distancia al objeto del segundo lente, de modo que $p_2 = -10.0$ cm, donde las distancias se miden ahora desde el lente 2:

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{1}{-10.0\text{ cm}} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{20.0\text{ cm}}$$

$$q_2 = 6.67\text{ cm}$$

La imagen final se encuentra a 6.67 cm a la derecha del lente 2.

Los aumentos de cada lente están dados por:

$$M_1 = -\frac{q_1}{p_1} = -\frac{30.0\text{ cm}}{15.0\text{ cm}} = -2.00$$

$$M_2 = -\frac{q_2}{p_2} = -\frac{6.67\text{ cm}}{-10.0\text{ cm}} = 0.667$$

El aumento total M de los dos lentes es igual al producto $M_1M_2 = (-2.00)(0.667) = -1.33$. La imagen final es real porque q_2 es positiva, además también está invertida y alargada.

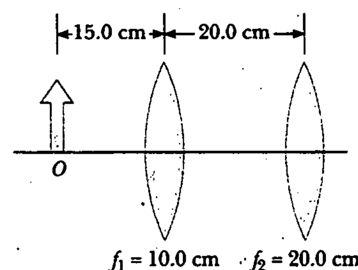


Figura 36.29 Una combinación de dos lentes convergentes.

EJEMPLO CONCEPTUAL 36.__ ¡Mire sus *p* y sus *q*!

Use una hoja de cálculo o una herramienta similar para crear dos gráficas de la distancia a la imagen como una función de la distancia al objeto —una para un lente cuya longitud focal es de 10 cm y la otra para un lente cuya longitud focal es de −10 cm—.

Solución Las gráficas se presentan en la figura 36.30. En cada gráfica hay una separación en la que $p = f$, la cual posteriormente se analizará. Observe la similitud en las formas —un resultado del hecho de que la distancia a la imagen y al objeto para ambos lentes están relacionadas de acuerdo con la misma ecuación— la ecuación del lente delgado.

La curva en la parte superior derecha de la gráfica para $f = +10$ cm corresponde a un objeto en el lado frontal de un lente, lo que se ha dibujado como el lado izquierdo del lente en los diagramas anteriores. Cuando el objeto está en el infinito positivo, se forma una imagen real en el punto focal en el lado posterior (el lado positivo) del lente, $q = f$. (Los rayos entrantes son paralelos en este caso.) Conforme el objeto se acerca al lente, la imagen se aleja de éste, correspondiendo a la trayectoria hacia arriba de la curva. Lo anterior continúa hasta que el objeto está localizado en el punto focal del lado cercano al lente. En este punto los rayos que dejan los lentes son paralelos, haciendo la imagen infinitamente lejana, lo cual está descrito en la gráfica por la tendencia asintótica de la curva a la línea $p = f = 10$ cm.

Conforme el objeto se mueve dentro del punto focal, la imagen se vuelve virtual y se localiza cerca de $q = -\infty$. Ahora se está siguiendo la curva en la parte inferior izquierda de la figura 36.30a. Conforme el objeto se acerca al lente, la imagen virtual también se acerca al lente. Conforme $p \to 0$, la distancia a la imagen q también tiende a cero. Ahora imagine que se está colocando al objeto en el lado posterior del lente, donde $p < 0$. El objeto ahora es un objeto virtual, así que éste debe estar formado por algún otro lente. Para todas las posiciones del objeto virtual, la distancia a la imagen es positiva y menor que la longitud focal. La imagen final es real, y su posición tiende al punto focal conforme p se hace más y más negativa.

La gráfica para $f = -10$ cm muestra que una distancia al objeto real forma una imagen en el punto focal en la parte de enfrente del lente. A medida que el objeto se acerca al lente, la imagen permanece virtual y se acerca mucho al lente. Pero conforme continúa hacia el extremo izquierdo del eje p, el objeto se vuelve virtual. A medida que la posición de este ob-

jeto virtual se acerca al punto focal, la imagen retrocede hacia el infinito. Conforme se pasa el punto focal, la imagen se corre de una posición en infinito positivo a una en infinito negativo. Finalmente, conforme el objeto virtual continúa alejándose del lente, la imagen es virtual, inicia moviéndose desde el infinito negativo, y se acerca al punto focal.

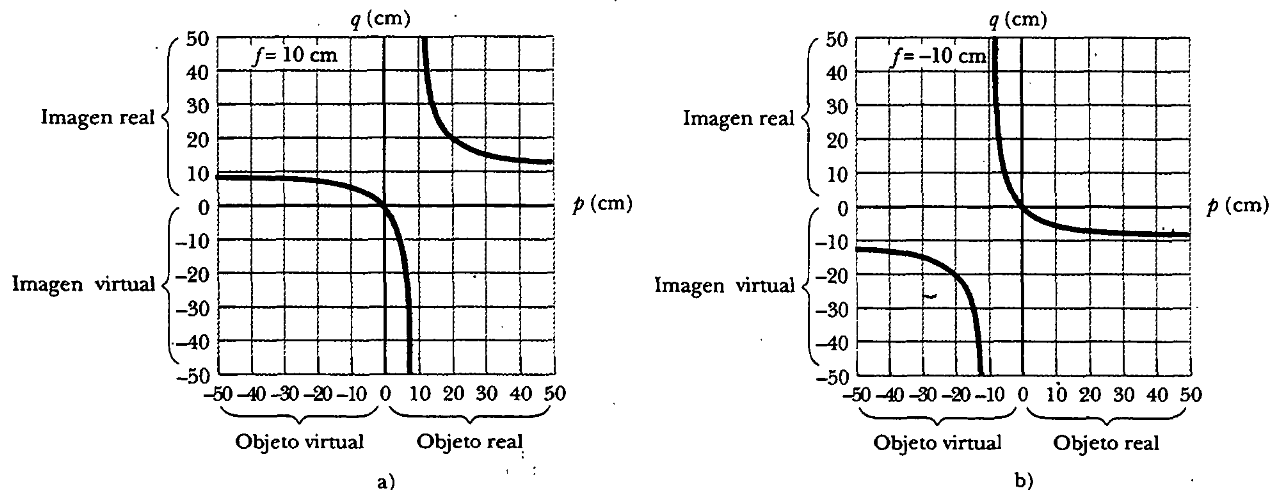


Figura 36.30 a) La posición de la imagen como una función de la posición del objeto para un lente que tiene una longitud focal de +10 cm. b) La posición de la imagen como una función de la posición del objeto para un lente tiene una longitud focal de −10 cm.

Sección opcional



36.5 ABERRACIONES DE LENTES

Uno de los principales problemas de los lentes son las imágenes imperfectas. La teoría de espejos y lentes que hemos estado manejando supone que los rayos forman ángulos pequeños con el eje principal y que los lentes son delgados. En este sencillo modelo todos los rayos que parten de la fuente puntual se enfocan en un solo punto produciendo una imagen nítida. Sin embargo, es claro que esto no siempre es cierto. Cuando las aproximaciones usadas en esta teoría no se cumplen, se forman imágenes imperfectas.

Si se desea efectuar un análisis preciso de la formación de imágenes, es necesario trazar cada rayo empleando la ley de Snell en cada superficie de refracción y la ley de reflexión en cada superficie reflejante. Dicho procedimiento muestra que los rayos provenientes de un objeto puntual no se enfocan en un solo punto, dando como resultado una imagen difusa. Las desviaciones (imperfecciones) de las imágenes reales de una imagen ideal predicha por la teoría se denominan **aberraciones**.

Aberraciones esféricas

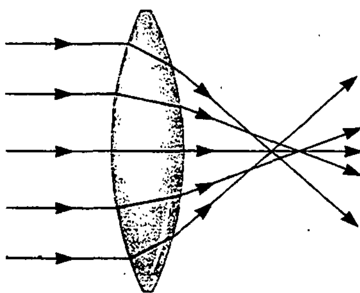


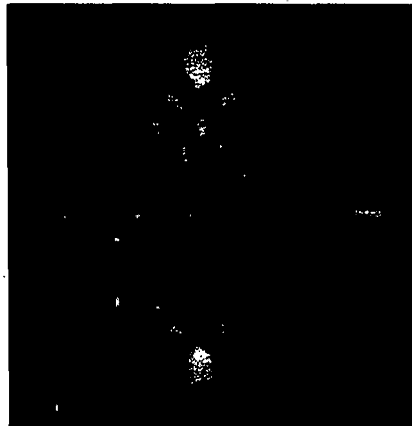
Figura 36.31 Aberración esférica causada por un lente convergente. ¿Un lente divergente ocasiona aberración esférica?

Las aberraciones esféricas se producen porque los puntos focales de rayos alejados del eje principal de un lente esférico (o espejo) son diferentes de los puntos focales de los rayos de la misma longitud de onda que pasan cerca del eje. La figura 36.31 ilustra la aberración esférica de rayos paralelos que pasan por un lente convergente. Los rayos que pasan por los puntos cercanos al centro del lente forman la imagen más lejos del lente que los rayos que pasan por los puntos cerca de los bordes.

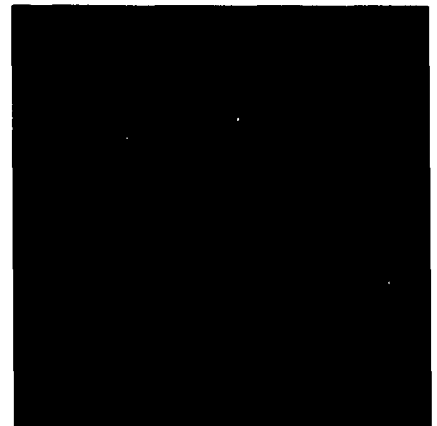
Muchas cámaras están equipadas con una abertura ajustable para controlar la intensidad de la luz y reducir la aberración esférica. (La abertura variable se emplea para controlar la cantidad de luz que pasa por el lente.) Las imágenes más nítidas se producen cuando se reduce el tamaño de la abertura, lo cual se debe a que en aberturas pequeñas sólo la porción central del lente se expone a la luz, lo que da como resultado que un gran porcentaje de los rayos sean paraxiales. Al mismo



a)



b)



c)

Aberraciones de los lentes. a) La *aberración esférica* ocurre cuando la luz que atraviesa el lente a diferentes distancias del eje principal se enfoca en diferentes puntos. b) El *astigmatismo* es una aberración que ocurre para objetos no localizados sobre el eje principal del lente. c) La aberración de *coma* ocurre cuando la luz atraviesa el lente lejos del eje principal y la luz pasa cerca del centro del foco del lente en diferentes partes del plano focal. (*Fotografías de Norman Goldberg*)

tiempo, sin embargo, pasa menos luz por el lente. Para compensar esta baja intensidad luminosa se utiliza un tiempo de exposición más largo.

En el caso de espejos empleados para objetos muy distantes, las aberraciones esféricas pueden minimizarse, utilizando una superficie parabólica reflejante en vez de una superficie esférica. Sin embargo, las superficies parabólicas no se emplean a menudo porque las que cuentan con óptica de alta calidad tienen un alto costo de fabricación. Los rayos luminosos paralelos que inciden en una de tales superficies se enfocan en un punto común, sin considerar su distancia desde el eje principal. Las superficies reflejantes parabólicas se usan en muchos telescopios astronómicos para mejorar la calidad de la imagen.

Aberraciones cromáticas

El hecho de que diferentes longitudes de onda de luz sean refractadas por un lente que enfoca en diferentes puntos origina las aberraciones cromáticas. En el capítulo 35 se describió cómo el índice de refracción de un material varía con la longitud de onda. Cuando pasa luz blanca a través de un lente se encuentra, por ejemplo, que los rayos de luz violeta se refractan más que los rayos de luz roja (Fig. 36.32). A partir de lo cual vemos que la longitud focal es más grande para luz roja que para luz violeta. Otras longitudes de onda (no mostradas en la figura 36.32) tienen puntos focales intermedios entre los rojos y los violetas.

La aberración cromática para un lente divergente también da como resultado una longitud focal corta para luz violeta más que para luz roja, pero en el lado frontal del lente. La aberración cromática se reduce en gran medida usando una combinación de lentes convergentes hechos de un tipo de vidrio y un lente divergente elaborado a partir de otro tipo de vidrio.

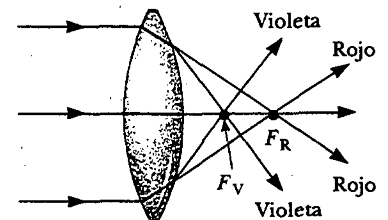


Figura 36.32 Aberración cromática causada por un lente convergente. Rayos de diferentes longitudes de onda se enfocan en puntos distintos.

Sección opcional



36.6 LA CÁMARA

La **cámara** fotográfica es un instrumento óptico sencillo cuyas características esenciales se muestran en la figura 36.33. Se componen de una caja cerrada a la luz, un lente convergente que produce una imagen real, y una película detrás del lente pa-

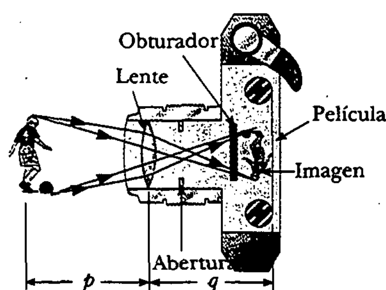


Figura 36.33 Vista de la sección transversal de una cámara simple. Advierta que en realidad $p \gg q$.

ra recibir la imagen. El enfoque de la cámara se logra al variar la distancia entre el lente y la película, lo cual se complementa con un fuelle ajustable en las cámaras antiguas o con algunos otros dispositivos mecánicos en las cámaras modernas. Para el enfoque adecuado —que es necesario para la formación de imágenes nítidas— la distancia del lente a la película dependerá de la distancia al objeto, así como de la longitud focal del lente.

El obturador, localizado detrás del lente, es un dispositivo mecánico que se abre en intervalos de tiempo seleccionados llamados *tiempos de exposición*. Uno es capaz de fotografiar objetos en movimiento empleando tiempos de exposición cortos o escenas oscuras (con bajos niveles luminosos) usando largos tiempos de exposición. Si no se contara con este aditamento sería imposible tomar fotografías fijas-movimiento. Por ejemplo, un vehículo que se mueve muy rápido se podría mover bastante en el momento en que se abriera el obturador y produciría una imagen borrosa. Otra causa principal de las imágenes borrosas es el movimiento de la cámara mientras el obturador está abierto. Para prevenir este movimiento deben usarse tiempos de exposición cortos o un tripié, incluso para objetos estacionarios. La rapidez de disparo (es decir, tiempos de exposición) más comunes son 1/30, 1/60, 1/125 y 1/250 s. Para cámaras manuales el uso de rapidez más lenta puede dar como resultado imágenes difusas (debido al movimiento), pero el uso de mayor rapidez reduce la intensidad de la luz recogida. En la práctica, un objeto estacionario se capta normalmente con una rapidez intermedia del obturador de 1/60 s.

Las cámaras más costosas también tienen una abertura de diámetro ajustable para controlar más la intensidad de la luz que llega a la película. Como se observó anteriormente, cuando se usa una abertura de pequeño diámetro, s[illegible] parte central del lente alcanza a la película; de esta forma se reduce la aber[illegible]férica.

La intensidad I de la luz que llega a la película es proporcional al área del lente. Puesto que tal área es proporcional al cuadrado del diámetro D, se concluye que I también es proporcional a D^2. Además, la intensidad de la luz es una medida de la rapidez a la cual la energía es recibida por la película por unidad de área de la imagen. Puesto que el área de la imagen es proporcional a q^2, y $q \approx f$ (cuando $p \gg f$, entonces p se puede aproximar al infinito), concluimos que la intensidad es también proporcional a $1/f^2$, de manera que $I \propto D^2/f^2$. La brillantez de la imagen formada en la película depende de la intensidad de la luz, de este modo vemos que la brillantez de la imagen depende tanto de la longitud focal como del diámetro del lente.

La relación f/D se define como el **número** f de un lente.

$$\text{número} f \equiv \frac{f}{D} \qquad \textbf{(36.14)}$$

Por tanto, la intensidad de la luz incidente sobre la película se expresa como

$$I \propto \frac{1}{(f/D)^2} \propto \frac{1}{(\text{número} f)^2} \qquad \textbf{(36.15)}$$

El número f a menudo se da como una descripción de la "rapidez" del lente. Cuanto menor sea el número f, más ancha será la abertura y mayor será la proporción a la cual la energía de la luz se expone a la película —así, un lente con un número f pequeño es un lente "rápido"—. La notación convencional para un número f es "f/" seguido por el número real. Por ejemplo, "f/4" significa un número f de 4 ¡esto **no** *significa* que f se divida entre 4! Los lentes extremadamente rápidos, que tienen números f tan bajos como f/1.2, son caros porque es muy difícil mantener las aberraciones aceptablemente pequeñas conforme los rayos de luz pasan a través de una gran área del lente. Los sistemas de lentes de cámara (es decir, combinaciones de lentes con aberturas ajustables) se marcan a menudo con diversos números f, por lo regular f/2.8, f/4, f/5.6, f/8, f/11 y f/16. Se selecciona cualquiera de estas posicio-

nes al ajustar la abertura, con lo que cambia el valor de D. Aumentando el ajuste de un número f al siguiente valor superior (por ejemplo, al cambiar de $f/2.8$ a $f/4$) disminuye el área de la abertura por un factor de dos. El ajuste al número f inferior en un lente de cámara corresponde a una abertura más amplia y al uso del área máxima posible de los lentes.

Las cámaras sencillas por lo común tienen una longitud focal fija y un tamaño de abertura fijo, con un número f aproximado de $f/11$. El valor grande del número f permite una gran **profundidad de campo**, significando que el objeto tiene un amplio rango de distancias desde el lente que forma imágenes razonablemente nítidas en la película. En otras palabras, no se tiene que enfocar la cámara.

EJEMPLO 36.11 Determinación del tiempo de exposición correcto

El lente de cierta cámara de 35 mm (donde 35 mm es el ancho de la película) tiene una longitud focal de 55 mm y una rapidez (número f) de $f/1.8$. El tiempo de exposición correcto para dicha rapidez en ciertas condiciones se sabe que es (1/500) s. a) Determine el diámetro del lente.

Solución A partir la ecuación 36.14 se encuentra que

$$D = \frac{f}{\text{número } f} = \frac{55 \text{ mm}}{1.8} = 31 \text{ mm}$$

b) Calcule el tiempo de exposición correcto si el número f cambia a $f/4$ en las mismas condiciones de iluminación.

Solución La energía luminosa total recibida por cada parte de la película es proporcional al producto de la intensidad y el tiempo de exposición. Si I es la intensidad luminosa que llega a la película, entonces en un tiempo t la energía recibida por unidad de área en la película es It. Al comparar los dos casos es necesario que $I_1 t_1 = I_2 t_2$, donde t_1 es el tiempo de exposición correcto para $f/1.8$, y t_2 es el tiempo de exposición correcto para $f/4$. Empleando este resultado, junto con la ecuación 36.15, se encuentra que

$$\frac{t_1}{(\text{número } f_1)^2} = \frac{t_2}{(\text{número } f_2)^2}$$

$$t_2 = \left(\frac{\text{número } f_2}{\text{número } f_1}\right)^2 t_1$$

$$= \left(\frac{4}{1.8}\right)^2 \left(\frac{1}{500} \text{ s}\right) \approx \frac{1}{100} \text{ s}$$

Conforme se reduce el tamaño de la abertura, se debe aumentar el tiempo de exposición.

Sección opcional

EL OJO

Al igual que la cámara, un ojo normal enfoca la luz y produce una imagen nítida. Sin embargo, los mecanismos mediante los cuales el ojo controla la cantidad de luz admitida y los ajustes para producir imágenes enfocadas correctamente son mucho más complejos, intrincados y efectivos que los correspondientes incluso a la cámara más avanzada. En todos aspectos el ojo es una maravilla fisiológica.

La figura 36.34 presenta las partes esenciales del ojo. La luz entra al ojo a través de una membrana transparente denominada *córnea,* detrás de la cual hay un líquido claro (el *humor acuoso*), una abertura variable (la *pupila,* que es una abertura en el *iris*) y el *lente cristalino.* La mayor parte de la refracción ocurre en la superficie exterior del ojo, donde la córnea está cubierta con una película de lágrimas. Hasta cierto punto ocurre poca refracción en el lente cristalino, ya que el humor acuoso en contacto con el lente tiene un índice de refracción promedio cercano al del lente. El iris, el cual es la parte de color del ojo, es un diafragma muscular que controla el tamaño de la pupila. El iris regula la cantidad de luz que entra al ojo al dilatar la pupila en condiciones de luz baja y contraerla en condiciones de luz alta. El intervalo del número f del ojo es aproximadamente de $f/2.8$ a $f/16$.

El sistema córnea-lente enfoca la luz hacia la parte posterior del ojo llamada *retina,* la cual está compuesta por millones de receptores sensibles llamados *bastonci-*



Acercamiento fotográfico de la córnea del ojo humano. (*Lennart Nilsson, en colaboración con Jan Lindberg,* Behold Man: A Photographic Journey of Discovery Inside the Body, *Boston, Little, Brown and Company, 1974.*)

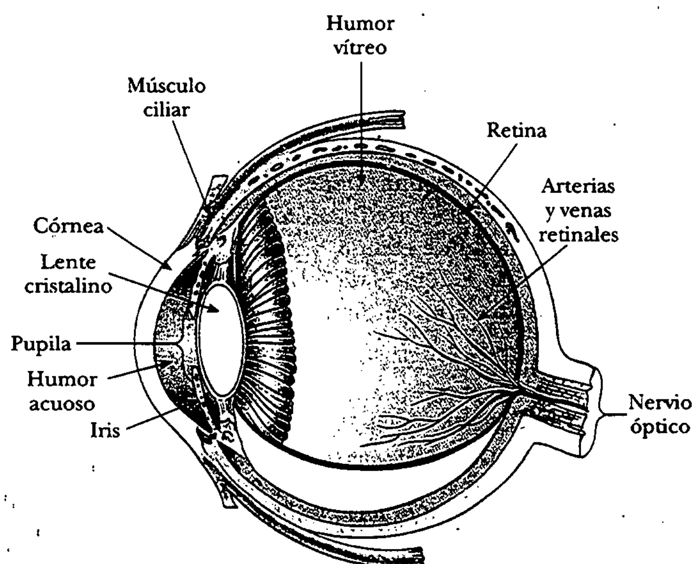


Figura 36.34 Partes esenciales del ojo.

llos y *conos*, los cuales, cuando son estimulados por la luz, envían impulsos al cerebro a través del nervio óptico, donde se percibe una imagen. Mediante este proceso se observa una imagen nítida de un objeto cuando la imagen llega a la retina.

El ojo enfoca a un objeto determinado variando la forma del lente cristalino plegable mediante un asombroso proceso conocido como **adaptación**. Un importante componente en la adaptación es el *músculo ciliar*, el cual está situado en un círculo alrededor del anillo del lente. Filamentos delgados, llamados *zónulas*, van de este músculo al borde del lente. Cuando el ojo enfoca un objeto distante, el músculo ciliar se relaja, tensando las zónulas que unen al músculo con el extremo del lente. La fuerza de las zónulas ocasiona que el lente se aplane y aumente su longitud focal. Para una distancia infinita al objeto, la longitud focal del ojo es igual a la distancia fija entre el lente y la retina, aproximadamente de 1.7 cm. El ojo enfoca objetos cercanos tensando el músculo ciliar, el cual relaja a las zónulas. Dicha acción permite que el lente se abulte un poco y que su longitud focal disminuya, lo que da como resultado que la imagen se enfoque sobre la retina. Todos estos ajustes del lente ocurren tan rápidamente que no nos damos cuenta del cambio. En dicho aspecto incluso la cámara electrónica más fina es un juguete comparado con el ojo.

Experimento sorpresa

Mueva este libro hacia su cara hasta que las letras se vean borrosas. La distancia del libro a sus ojos es su punto cercano.

La adaptación es limitada debido a que los objetos que están muy cercanos al ojo producen imágenes borrosas. El **punto cercano** representa la distancia más cercana a la cual el lente del ojo adaptado puede enfocar luz sobre la retina. Tal distancia por lo común aumenta con la edad y tiene un valor promedio de 25 cm. Por lo regular, a la edad de 10 años el punto cercano del ojo es aproximadamente de 18 cm. Éste aumenta a 25 cm a los 20 años, a 50 cm a los 40 y a 500 cm o más a la edad de 60. El **punto alejado** del ojo representa la distancia más larga para la cual el lente del ojo relajado puede enfocar luz sobre la retina. Una persona con visión normal puede ver objetos muy distantes, como la Luna, y por ello tiene un punto lejano cercano al infinito.

Recuerde que la luz que sale del espejo en la figura 36.8 se volverá blanca cuando converja, pero después divergirá en colores individuales nuevamente. Como no hay nada, excepto aire en el punto en el que los rayos se cruzan (y en consecuencia, no hay nada que cause que los colores se separen nuevamente), la luz blanca que se ve como resultado de una combinación de colores debe ser una ilusión visual. De hecho, éste es el caso. Sólo tres tipos de células sensibles al color están presentes en la retina; éstas se llaman conos rojo, verde y azul debido a los picos de los

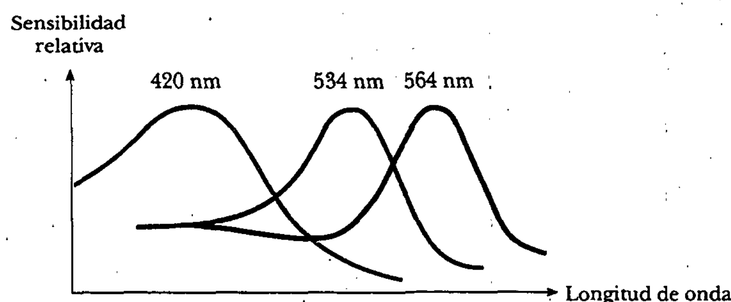


Figura 36.35 Sensibilidad aproximada al color de los tres tipos de conos en la retina.

rangos de color a los que responden (véase la figura 36.35). Si los conos rojo y verde son estimulados simultáneamente (como sería el caso si luz amarilla brillara sobre ellos), el cerebro los interpreta como luz amarilla. Si los tres tipos de conos son estimulados por los colores separados rojo, azul y verde, como en la figura 36.8, se ve luz blanca. Si los tres tipos de conos son estimulados por luz que contiene *todos* los colores, tal como la luz del Sol, se ve nuevamente luz blanca.

Los televisores a color sacan provecho de esta ilusión visual al tener sólo puntos rojo, verde y azul en la pantalla. Con combinaciones específicas de brillantez en estos tres colores primarios, nuestros ojos pueden estar hechos para ver cualquier color en el arco iris. Así, el amarillo limón que usted ve en la televisión comercial no es realmente amarillo, ¡es rojo y verde! El papel en el que está impresa esta página está hecho de fibras delgadas, matizadas y translúcidas, que al dispersar la luz en todas las direcciones producen una mezcla de colores que parece blanca al ojo. La nieve, las nubes y el cabello blanco no son realmente blancos. De hecho, no hay nada que sea un pigmento blanco. La apariencia de estas cosas es una consecuencia de la dispersión de la luz que contiene todos los colores, lo cual se interpreta como blanco.

Experimento sorpresa

Vierta un montón de sal o azúcar en la palma de su mano. Compare su blancura con la transparencia de un solo grano.

Condiciones del ojo

Cuando el ojo sufre un defecto entre el rango de enfoque del sistema lente-córnea y la longitud del ojo, hace que los rayos de luz lleguen a la retina antes de que converjan para formar una imagen, como se observa en la figura 36.36a. Dicha condición se conoce como **hipermetropía** (o *hiperopía*). Una persona con hipermetropía por lo regular puede ver con claridad objetos lejanos, pero no puede enfocar objetos cercanos. Aunque el punto cercano de un ojo normal es aproximadamente 25 cm, el punto cercano de una persona con hipermetropía es mucho más lejano que éste. El ojo de una persona con hipermetropía trata de enfocar por adaptación –es decir, acortando su longitud focal. Ello funciona para objetos lejanos, pero como la longitud focal de un ojo con hipermetropía es más grande que lo normal, no puede enfocar en forma nítida la luz de un objeto cercano antes de que llegue a la retina, y esto ocasiona que se forme una imagen borrosa. El poder de refracción en la córnea y el lente es insuficiente para enfocar la luz casi satisfactoria de los objetos distantes. Dicha condición se corrige poniendo un lente convergente enfrente del ojo, como se muestra en la figura 36.36b. El lente refracta los rayos que entran más hacia el eje principal antes de entrar al ojo, permitiendo que converjan y se enfoquen sobre la retina.

La **visión corta** (o *miopía*) es otro defecto en el que una persona puede enfocar objetos cercanos pero no puede ver claramente objetos más lejanos. En el caso de *miopía axial*, la visión corta se debe a que el lente también está lejos de la retina. En la *miopía refractiva*, el sistema lente-córnea es muy poderoso para la longitud del ojo.

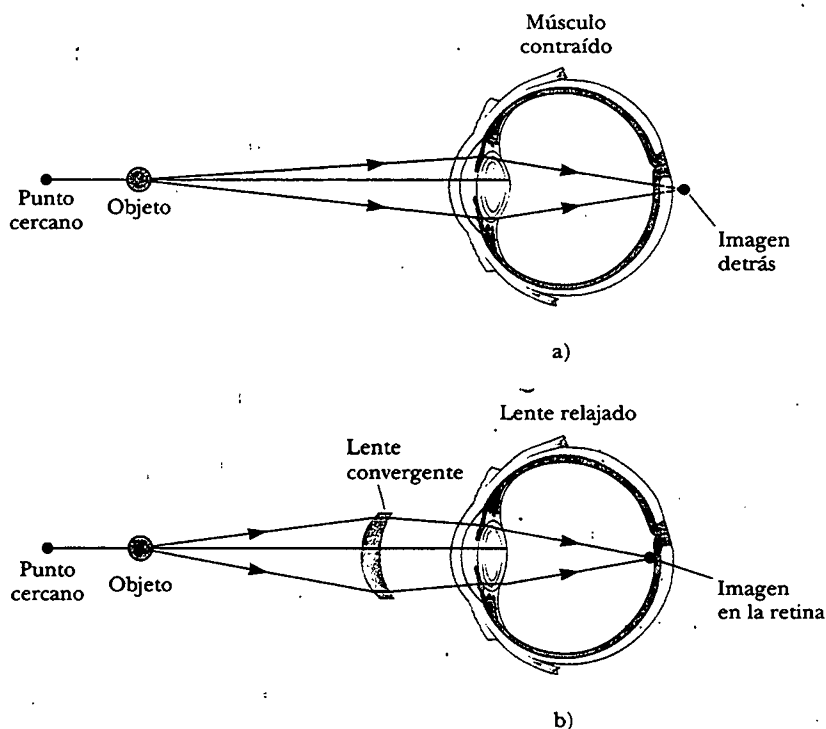


Figura 36.36 a) Cuando un ojo con hipermetropía observa un objeto situado entre el punto cercano y él, el punto de imagen está detrás de la retina, lo que produce una visión borrosa. El músculo del ojo se contrae para tratar de llevar al objeto dentro del foco. b) El estado de hipermetropía puede corregirse con lentes convergentes.

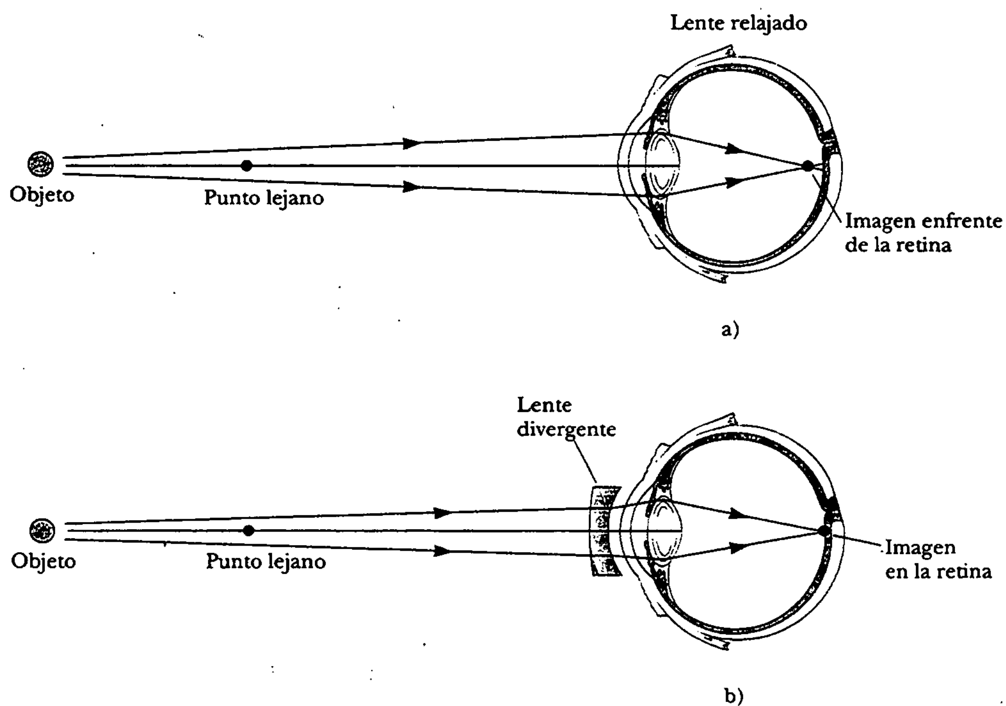
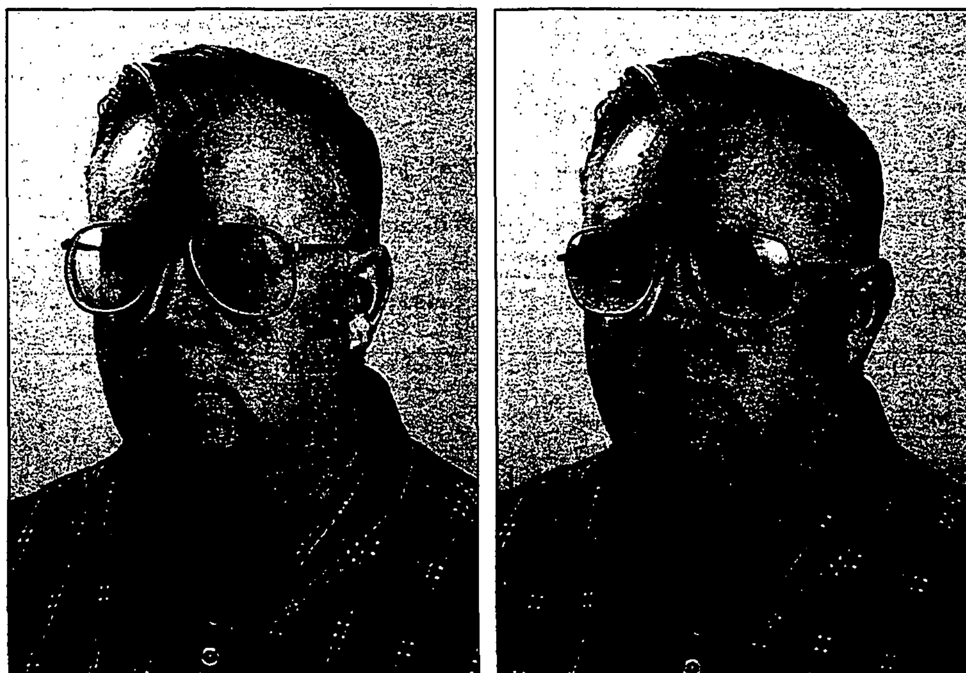


Figura 36.37 a) Cuando un ojo miope observa un objeto que está más allá del punto lejano, la imagen se forma enfrente de la retina, lo que da como resultado una visión borrosa. b) El estado de miopía puede corregirse con un lente divergente.

El punto lejano del ojo miope no está en el infinito y puede ser menor que 1 m. La máxima longitud focal del ojo miope es insuficiente para producir una imagen nítida en la retina, y los rayos desde un objeto distante convergen en un foco enfrente de la retina. Éstos continúan pasando el punto, divergen antes de llegar a la retina y causan visión borrosa (véase la figura 36.37a). La miopía se corrige con un lente divergente, como se observa en la figura 36.37b. El lente refracta el rayo lejos del eje principal antes de que entre al ojo, permitiendo que se enfoque en la retina.

Pregunta sorpresa 36.5

¿Cuáles anteojos de la figura 36.38 corrigen la miopía y cuáles corrigen la hipermetropía?



a) b)

Figura 36.38 (*George Semple*)

Al inicio de la edad madura, la mayor parte de la gente pierde algo de su potencia de adaptación a medida que el músculo ciliar se debilita y el lente se endurece. A diferencia de la hipermetropía, que es un defecto entre la potencia de enfoque y la longitud del ojo, la **presbicia** (literalmente, "vista cansada") se debe a una reducción en la capacidad de adaptación. La córnea y el lente no tienen suficiente potencia de enfoque al traer objetos cercanos al foco de la retina. Los síntomas son los mismos que en la hipermetropía, y la condición se puede corregir con un lente convergente.

En el defecto del ojo conocido como **astigmatismo**, la luz desde una fuente puntual produce una imagen lineal en la retina. Tal condición surge cuando la córnea, el lente, o ambos, no son perfectamente simétricos. El astigmatismo se puede corregir con lentes que tengan diferentes curvaturas en las dos direcciones mutuamente perpendiculares.

Los optometristas y los oftalmólogos prescriben lentes[1] medidos en **dioptrías.**

La **potencia** P de un lente en dioptrías es igual al inverso de la longitud focal en metros; es decir, $P = 1/f$.

Por ejemplo, un lente convergente cuya longitud focal es +20 cm tiene una potencia de +5.0 dioptrías, y un lente divergente cuya longitud focal es −40 cm tiene una potencia de −2.5 dioptrías.

EJEMPLO 36 **Un caso de miopía**

Una persona con una miopía particular es incapaz de ver objetos claramente cuando están más allá de 2.5 m (el punto lejano de este ojo en particular). ¿Cuál debe ser la longitud focal del lente prescrito para corregir este problema?

Solución El propósito del lente en este caso es "mover" un objeto del infinito a una distancia a la que se observe con claridad. Lo anterior se consigue con un lente que produzca una imagen en el punto lejano del ojo. De acuerdo con la ecuación del lente delgado, se tiene

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-2.5\text{ m}} = \frac{1}{f}$$

$$f = -2.5\text{ m}$$

¿Por qué usamos un signo negativo para la distancia a la imagen? Como usted debe haber sospechado, el lente para corregir la miopía debe ser uno divergente (uno con longitud focal negativa).

Ejercicio ¿Cuál es la potencia de este lente?

Respuesta −0.40 dioptrías.

Sección opcional

EL AMPLIFICADOR SIMPLE

El amplificador simple se compone de un solo lente convergente. Como su nombre lo indica, este dispositivo se emplea para aumentar el tamaño aparente de un objeto.

Suponga que un objeto se ve a cierta distancia p del ojo, como se ilustra en la figura 36.39. Resulta claro que el tamaño de la imagen formada en la retina depende del ángulo θ subtendido por el objeto en el ojo. A medida que el objeto se acerca al ojo, θ aumenta y se observan imágenes más grandes. Sin embargo, un ojo normal promedio es incapaz de enfocar un objeto más cercano que aproximadamente 25 cm, el punto cercano (véase la figura 36.40a). En consecuencia, θ es máximo en el punto cercano.

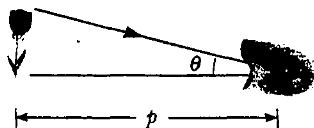


Figura 36.39 El tamaño de la imagen formada en la retina depende del ángulo θ subtendido en el ojo.

Para un mayor aumento del tamaño angular aparente de un objeto, puede colocarse un lente convergente enfrente del ojo como en la figura 36.40b, con el objeto localizado en el punto O, apenas dentro del punto focal del lente. En tal posición el lente forma una imagen virtual, vertical y alargada. Definimos el **aumento angular** m como la razón entre el ángulo subtendido por un objeto con un lente en uso (ángulo θ en la figura 36.40b) al ángulo subtendido por el objeto colocado cerca del punto sin lente en uso (ángulo θ_0 en la figura 36.40a):

[1] La palabra *lente* viene de *lentil*, el nombre de una legumbre italiana. (Usted debe haber comido sopa de lentejas.) Los primeros lentes fueron llamados "lentejas de vidrios" porque la forma biconvexa de los lentes se parecía a la forma de una lenteja. Los primeros lentes para la hipermetropía y para la presbicia aparecieron alrededor de 1280; los lentes cóncavos para corregir la miopía no aparecieron sino hasta 100 años más tarde.

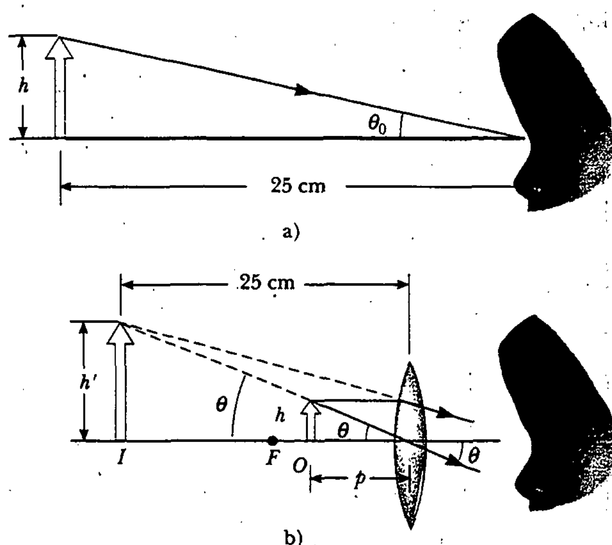


Figura 36.40 a) Un objeto situado en el punto cercano del ojo (p = 25 cm) subtiende un ángulo θ_0 en el ojo, donde $\theta_0 \approx h/25$. b) Un objeto colocado cerca del punto focal de un lente convergente produce una imagen aumentada, la cual subtiende un ángulo $\theta \approx h'/25$ en el ojo.

$$m = \frac{\theta}{\theta_0} \tag{36.16}$$

Aumento angular con el objeto en el punto cercano

El aumento angular es un máximo cuando la imagen está en el punto cercano del ojo —es decir, cuando $q = -25$ cm—. La distancia al objeto correspondiente a esta distancia a la imagen puede calcularse a partir de la fórmula del lente delgado:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{-25\,\text{cm}} = \frac{1}{f}$$

$$p = \frac{25f}{25+f}$$

donde f es la longitud focal del aumento en centímetros. Si hacemos las aproximaciones de ángulo pequeño

$$\tan\theta_0 \approx \theta_0 \approx \frac{h}{25} \qquad \text{y} \qquad \tan\theta \approx \theta \approx \frac{h}{p} \tag{36.17}$$

La ecuación 36.16 se transforma en

$$m_{\text{máx}} = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{h/p}{h/25} = \frac{25}{p} = \frac{25}{25f/(25+f)}$$

$$m_{\text{máx}} = 1 + \frac{25\,\text{cm}}{f} \tag{36.18}$$

Aunque el ojo puede enfocar una imagen formada en cualquier lugar entre el punto cercano y el infinito, está más relajado cuando la imagen está en el infinito. Para que la imagen formada por el lente de aumento aparezca en el infinito, el objeto tiene que estar en el punto focal del lente. Aquí, las ecuaciones 36.17 se vuelven

$$\theta_0 \approx \frac{h}{25} \qquad \text{y} \qquad \theta \approx \frac{h}{f}$$

y el aumento es

$$m_{\text{mín}} = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{25\,\text{cm}}{f} \tag{36.19}$$

Con un solo lente es posible obtener aumentos angulares casi por arriba de 4 sin grandes aberraciones. Los aumentos superiores a 20 se logran con uno o dos lentes adicionales para corregir las aberraciones.

EJEMPLO 36. **Aumento máximo de un lente**

¿Cuál es el aumento máximo posible de un lente que tiene una longitud focal de 10 cm, y cuál es el aumento de este lente cuando el ojo está relajado?

Solución El aumento máximo posible ocurre cuando la imagen se localiza en el punto cercano del ojo. En dichas circunstancias la ecuación 36.18 produce

$$m_{\text{máx}} = 1 + \frac{25\text{ cm}}{f} = 1 + \frac{25\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 3.5$$

Cuando el ojo está relajado, la imagen se encuentra en el infinito. En tal caso se emplea la ecuación 36.19:

$$m_{\text{min}} = \frac{25\text{ cm}}{f} = \frac{25\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 2.5$$

Sección opcional

EL MICROSCOPIO COMPUESTO

Un aumento simple sólo proporciona una ayuda limitada al inspeccionar los diminutos detalles de un objeto. Un aumento mayor puede conseguirse al combinar dos lentes en un dispositivo denominado **microscopio compuesto**, del cual se presenta un diagrama esquemático en la figura 36.41a. Éste consta de un lente, el *objetivo*, que tiene una longitud focal muy corta $f_o < 1$ cm, y un segundo lente, el *ocular*, que tiene una longitud focal f_e de unos cuantos centímetros. Los dos lentes están separados por una distancia L, la cual es mucho más grande que f_o o f_e. El objeto, que se coloca en el lado extremo del punto focal del objetivo, forma una imagen invertida real en I_1, y dicha imagen está localizada en o cerca del punto focal del ocular. El ocular, que sirve como un simple amplificador, produce en I_2 una imagen de I_1 virtual e in-

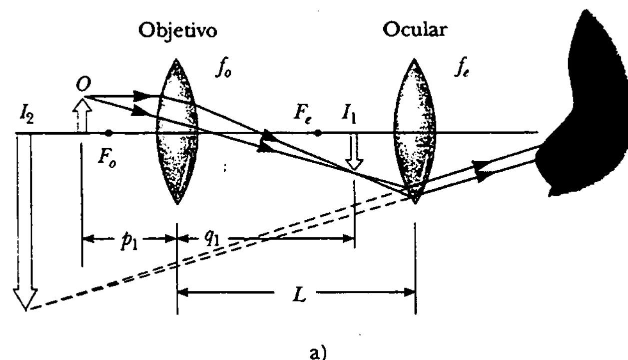




Figura 36.41 a) Diagrama de un microscopio compuesto, el cual consta de un lente objetivo y un lente ocular. b) Un microscopio compuesto. Los tres portaobjetos giratorios permiten al usuario cambiar a varias potencias de aumento diferentes. Las combinaciones de los oculares con diferentes longitudinales focales y diferentes objetivos pueden producir una amplia gama de aumentos. (*Henry Leap y Jim Lehman*)

vertida. El aumento lateral M_1 de la primera imagen es $-q_1/p_1$. Advierta en la figura 36.41a que q_1 es aproximadamente igual a L, y que el objeto está muy cerca del punto focal del objetivo: $p_1 \approx f_o$. Por consiguiente, el aumento lateral para el objetivo es

$$M_1 \approx -\frac{L}{f_o}$$

El aumento angular del ocular para un objeto (correspondiente a la imagen en I_1) situado en el punto focal del ocular se encuentra que es, a partir de la ecuación 36.19,

$$m_e = \frac{25\,\text{cm}}{f_e}$$

El aumento total del microscopio compuesto se define como el producto de los aumentos lateral y angular:

$$M = M_1 m_e = -\frac{L}{f_o}\left(\frac{25\,\text{cm}}{f_e}\right) \qquad \textbf{(36.20)}$$

El signo negativo indica que la imagen está invertida.

El microscopio ha extendido la visión humana hasta el punto donde se puede ver detalles antes desconocidos de objetos increíblemente pequeños. Las capacidades de tal instrumento se incrementan en forma continua con técnicas mejoradas para la precisión del pulido de lentes. Una pregunta que a menudo se hace respecto de los microscopios es: "Si uno fuera extremadamente paciente y cuidadoso, ¿podría construir un microscopio que le permitiera al ojo humano ver un átomo?" La respuesta a esta pregunta es no, mientras se emplee luz para iluminar el objeto. La razón es que, para observar un objeto en un microscopio óptico (uno que use luz visible), el objeto debe ser al menos tan grande como la longitud de onda de la luz. Como el diámetro de cualquier átomo es muchas veces más pequeño que las longitudes de onda de la luz visible, sus misterios deben ser investigados empleando otros tipos de "microscopios".

La capacidad de usar otros tipos de ondas para "ver" objetos también depende de la longitud de onda. Se puede ilustrar esto por medio de ondas en el agua de una tina. Suponga que usted agita su mano en el agua hasta producir ondas con una longitud de onda de aproximadamente 15 cm que se mueven sobre la superficie. Si usted sostiene un objeto pequeño, como un palillo, de modo que se encuentre en la trayectoria de las ondas, éstas no se perturban de manera apreciable, en lugar de eso continúan su trayectoria "olvidándose" del objeto pequeño. Suponga ahora que usted sostiene un objeto más grande, como un bote de juguete, en la trayectoria de ondas de 15 cm. En dicho caso las ondas son perturbadas considerablemente por el objeto. Como el palillo de dientes era más pequeño que la longitud de onda de las ondas, éstas no lo "veían" (la intensidad de las ondas dispersadas era menor). Sin embargo, ya que el bote es aproximadamente del mismo tamaño que la longitud de onda de las ondas, crea una perturbación. En otras palabras, el objeto actúa como fuente de dispersión de las ondas que parecen venir de éste.

En general, las ondas luminosas se comportan de la misma manera. La capacidad de un microscopio óptico de observar un objeto depende del tamaño del objeto en relación con la longitud de onda de la luz empleada para observarlo. Por consiguiente, nunca podremos observar átomos o moléculas con un microscopio óptico[2] porque sus dimensiones son pequeñas ($\approx$0.1 nm) en relación con la longitud de onda de la luz ($\approx$500 nm).

[2] Estudios ópticos en la cercanía del campo de una sola molécula se realizan normalmente con luz visible con longitud de onda aproximada de 500 nm. La técnica usa aberturas muy pequeñas para producir imágenes que tienen una resolución tan pequeña como 10 nm.

Sección opcional



EL TELESCOPIO

Hay dos tipos de **telescopios** fundamentalmente diferentes y diseñados para ayudar
14.1 a observar objetos distantes, como los planetas en nuestro Sistema Solar. El **telesco-**
y **pio de refracción** utiliza una combinación de lentes para formar una imagen, y el
14.9 **telescopio reflector** utiliza un espejo curvo y un lente.

La combinación de lentes mostrada en la figura 36.42a es un telescopio de refracción. Al igual que con un microscopio compuesto, este telescopio tiene un objetivo y un ocular. Los dos lentes se disponen de modo que el objetivo forme una imagen real e invertida del objeto distante muy cerca del punto focal del ocular. Este punto en el cual se forma I_1 es el punto focal del objetivo, puesto que el objeto está esencialmente en el infinito. En consecuencia, los dos lentes están separados por una distancia $f_o + f_e$, que corresponde a la longitud del tubo del telescopio. El ocular forma entonces, en I_2, una imagen invertida y más grande que la imagen en I_1.

El aumento angular del telescopio está dado por θ/θ_o, donde θ_o es el ángulo subtendido por el objeto en el objetivo, y θ es el ángulo subtendido por la imagen final en el ojo del observador. Considere la figura 36.42a, en la que el objeto está a una distancia muy grande a la izquierda de la figura. El ángulo θ_o (a la *izquierda* del objetivo) subtendido por el objeto en el objetivo es igual al ángulo (a la *derecha* del objetivo) subtendido por la primera imagen en el objetivo. Por consiguiente,

$$\tan\theta_o \approx \theta_o \approx -\frac{h'}{f_o}$$

donde el signo negativo indica que la imagen está invertida.

El ángulo θ subtendido por la imagen final en el ojo es el mismo ... gulo de un rayo que viene de la punta de I_1 y viaja paralelo al eje prin... rma con el eje principal después de que éste pasa por el lente. Así

$$\tan\theta \approx \theta \approx \frac{h'}{f_e}$$

No se ha usado un signo negativo en esta ecuación porque la imagen final no está invertida; el objeto que crea esta imagen final I_2 es I_1, y ambas apuntan en la misma dirección. Para saber por qué el lado adyacente del triángulo que contiene al ángulo θ es f_e y no $2f_e$, observe que se debe usar sólo la longitud doblada del rayo refractado. Así, el aumento angular del telescopio se puede expresar como

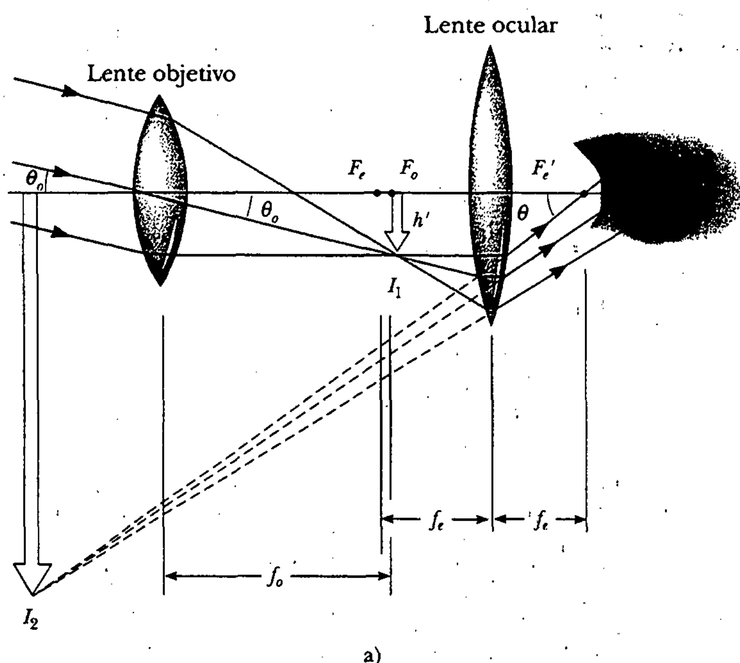
$$m = \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{h'/f_e}{-h'/f_o} = -\frac{f_o}{f_e} \quad \textbf{(36.21)}$$

y se percibe que el aumento angular de un telescopio es igual a la relación de la longitud focal del objetivo con la longitud focal del ocular. El signo negativo indica que la imagen está invertida.

Pregunta sorpresa 36.6

¿Por qué el aumento lateral dado por la ecuación 36.1 no es un concepto útil para telescopios?

Cuando se observa a través de un telescopio objetos relativamente cercanos, como la Luna o los planetas, el aumento es importante. Sin embargo, las estrellas es-



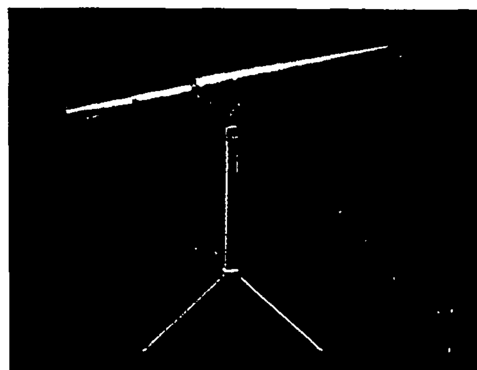


Figura 36.42 a) Disposición de lentes en un telescopio de refracción con el objeto en el infinito. b) Un telescopio de refracción. (*Henry Leap y Jim Lehman*)

tán tan alejadas que siempre aparecen como pequeños puntos de luz sin que importe cuánto aumento se emplee. Los grandes telescopios de investigación utilizados para estudiar objetos muy distantes deben tener un gran diámetro para adquirir la mayor cantidad de luz posible. Es difícil y costoso fabricar grandes lentes para telescopios de refracción. Otra dificultad con los grandes lentes es que su considerable peso hace que se pandeen, lo cual es una fuente adicional de aberración. Dichos problemas se superan parcialmente al sustituir el objetivo con un espejo cóncavo, lo que da como resultado un telescopio reflector. Como la luz se refleja del espejo y no atraviesa el lente, el espejo puede estar rígidamente soportado por el lado posterior. Tales soportes eliminan el problema de combamiento.

La figura 36.43 presenta el diseño de un telescopio de reflexión común. Los rayos luminosos que entran atraviesan el cilindro del telescopio y se reflejan por medio de un espejo parabólico en la base. Dichos rayos convergen hacia el punto A en la figura, donde se formaría una imagen. Sin embargo, antes de que se forme esta imagen, un pequeño espejo plano M refleja la luz hacia una abertura en el lado del tubo que circula hacia el ocular. Se dice que tal diseño particular tiene un foco newtoniano porque fue Newton quien lo desarrolló. Observe que la luz nunca atraviesa el vidrio en el telescopio de reflexión (excepto a través de un pequeño ocular). Como resultado, virtualmente se eliminan los problemas asociados con la aberración cromática.

Los telescopios de reflexión más grandes del mundo están en el observatorio Keck en Mauna Kea, Hawaii, donde hay dos telescopios con diámetros de 10 m, cada uno con 36 espejos hexagonales, controlados por computadora que funcionan en conjunto para formar una gran superficie reflectora. En contraste, el telescopio de refracción más grande del mundo está en el observatorio Yerkes en la bahía Williams en Wisconsin, y tiene un diámetro de sólo un metro.

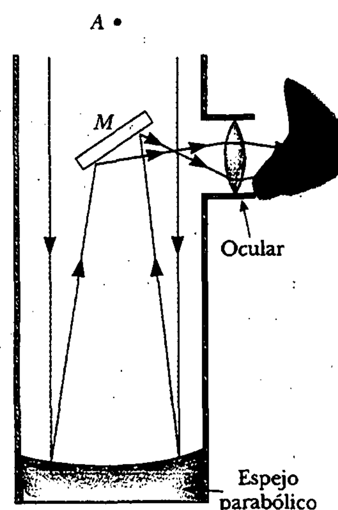


Figura 36.43 Un telescopio de reflexión con un foco newtoniano.

web
Para más información sobre los telescopios del observatorio Keck visite la página **http://www2.keck.hawaii.edu:3636/**

RESUMEN

El **aumento lateral** M de un espejo o lente se define como la relación entre la altura de la imagen h' y la altura del objeto h:

$$M = \frac{h'}{h} \tag{36.1}$$

En la aproximación de rayos paraxiales la distancia al objeto p, y la distancia a la imagen q para un espejo esférico de radio R, se relacionan por medio de la **ecuación del espejo**

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f} \tag{36.4, 36.6}$$

donde $f = R/2$ es la **longitud focal** del espejo.

Una imagen puede formarse por refracción en una superficie esférica de radio R. Las distancias al objeto y a la imagen para refractarse en dichas superficies se relacionan por medio de

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{36.8}$$

donde la luz incide en el medio para el cual el índice de refracción es n_1 y se refracta en el medio para el cual el índice de refracción es n_2.

El inverso de la **longitud focal** f de un lente delgado rodeado de aire está dado por la **ecuación del fabricante de lentes:**

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{36.11}$$

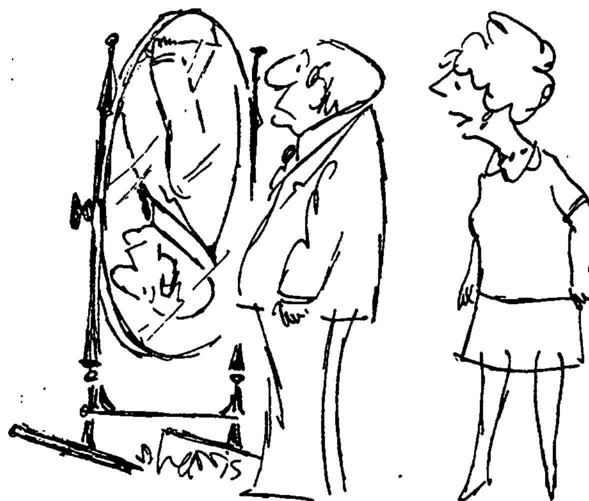
Los **lentes convergentes** tienen sus longitudes focales positivas, y los **lentes divergentes** tienen longitudes focales negativas.

Para un lente delgado, y en la aproximación de rayos paraxiales, el objeto y las distancias a la imagen se relacionan por medio de la **ecuación del lente delgado:**

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \tag{36.12}$$

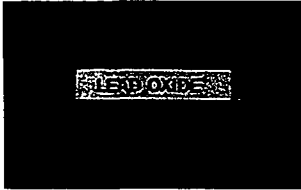
PREGUNTAS

1. ¿Qué está mal con la leyenda de la caricatura mostrada en la figura P36.1?
2. Empleando un diagrama de rayos simples, como el que se ilustra en la figura 36.2, demuestre que un espejo plano cuya parte superior está al nivel del ojo no necesita ser tan largo como su altura para que usted vea su cuerpo completo.
3. Considere un espejo esférico cóncavo con un objeto real. ¿La imagen siempre está invertida? ¿La imagen siempre es real? Justifique sus respuestas.
4. Repita la pregunta anterior para un espejo esférico convexo.
5. ¿Por qué una corriente de agua, clara, tal como un riachuelo, siempre parece estar más superficial de lo que en realidad está? ¿Cuánto se reduce aparentemente su profundidad?
6. Considere la imagen formada por un delgado lente convergente. ¿En qué condiciones la imagen está a) invertida, b) vertical, c) es real, d) es virtual, e) es más grande que el objeto, y f) es más pequeña que el objeto?
7. Repita la pregunta 6 para un lente divergente delgado.
8. Use la ecuación del fabricante de lentes para comprobar el signo de la longitud focal de cada uno de los lentes de la figura 36.26.



"La mayoría de los espejos invierten de izquierda a derecha. Éste invierte de arriba hacia abajo."
Figura P36.1

9. Si un cilindro de vidrio sólido o plástico transparente se coloca sobre las palabras LEAD OXIDE y se ve desde el lado que se muestra en la figura P36.9, la palabra LEAD aparece invertida pero OXIDE no. Explique.



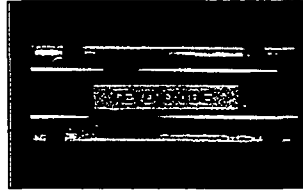


Figura P36.9 (*Henry Leap y Jim Lehman*)

10. Si la cámara "ve" el reflejo de un actor de cine en un espejo. ¿Qué ve el actor en el espejo?
11. Explique por qué un espejo no puede dar origen a una aberración cromática.
12. ¿Por qué algunos espejos de auto tienen impreso el enunciado "Los objetos están más cerca de lo que parece"? (véase la figura P36.12)

EL LADO LEJANO Por GARY LARSON

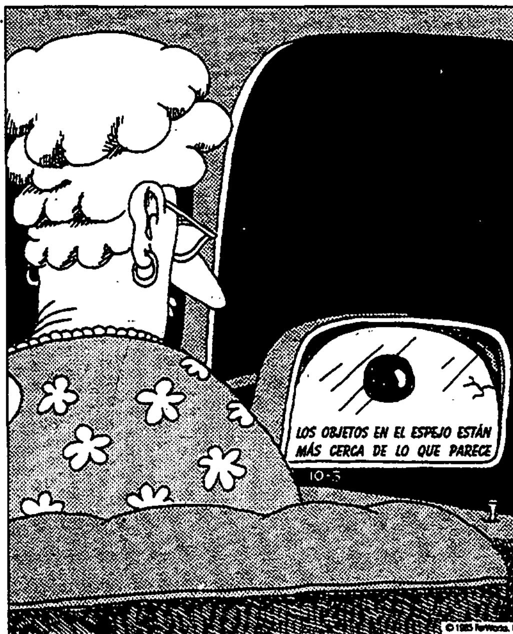


Figura P36.12 (*THE FAR SIDE ©1985 FARWORKS, INC. Usado con permiso. Todos los derechos reservados.*)

13. ¿Por qué algunos vehículos de emergencia tienen el símbolo AIƆИAJUBMA escrito en el frente?
14. Explique por qué un pescado en una pecera esférica parece más grande de lo que es en realidad.
15. Los lentes empleados en anteojos, ya sean convergentes o divergentes, siempre se diseñan de modo tal que la mitad del lente se curve alejándose del ojo, del mismo modo que los lentes centrales de las figuras 36.26a y 36.26b. ¿A qué se debe esto?
16. Un espejismo se forma cuando el aire se enfría gradualmente a medida que aumenta la altura. ¿Qué podría pasar si el aire se vuelve gradualmente más caliente a medida que la altura aumenta? Esto a menudo ocurre sobre cuerpos de agua o suelo cubierto de nieve: el efecto se denomina *sombra vaga.*
17. Considere un espejo cóncavo esférico con un objeto localizado a la izquierda del espejo más allá del punto focal. Empleando diagramas de rayos muestre que la imagen se mueve hacia la izquierda a medida que el objeto se acerca al punto focal.
18. En una novela de Julio Verne, un pedazo de hielo se moldea de manera que se forma un lente de aumento para enfocar la luz del Sol y encender una fogata. ¿Esto es posible?
19. El número f de una cámara es la longitud focal del lente dividida entre su abertura (o diámetro). ¿Cómo puede cambiarse el número f del lente? ¿Cómo influye el tiempo de exposición requerido en el cambio de este número?
20. Se puede construir un horno solar empleando un espejo cóncavo para reflejar y enfocar la luz del Sol dentro del recinto de un horno. ¿Qué factores en el diseño del espejo reflejante garantizarían las temperaturas más altas?
21. Un método para determinar la posición de una imagen, ya sea real o virtual, es por medio del *paralaje.* Si un dedo u otro objeto se colocan en la posición de la imagen, como se ve en la figura P36.21, y el dedo y la imagen se observan simultáneamente (la imagen se ve a través del lente si es virtual), el dedo y la imagen tienen el mismo paralaje, es decir, si la imagen se observa desde posiciones diferentes, parecerá moverse junto con el dedo. Emplee este método para localizar la imagen formada por un lente. Explique por qué funciona este método.

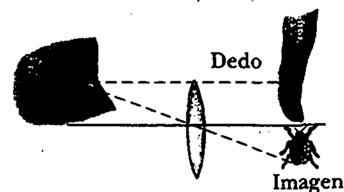


Figura P36.21

22. La figura P36.22 muestra una litografía de M. C. Escher titulada *Mano con esfera de reflexión (Autorretrato en un espejo esférico).* Escher dijo lo siguiente acerca de la obra: "La imagen muestra un espejo esférico, descansando sobre la mano izquierda. Pero como una impresión es lo inverso del dibujo original sobre piedra, es mi mano derecha la que usted ve pintada. (Como soy zurdo, necesitaba mi mano izquierda para hacer el dibujo.) Dicho reflejo en una esfera recoge casi todo lo que a uno lo rodea en una imagen

en forma de disco. El cuarto completo, las cuatro paredes, el piso y el techo, todo, si bien distorsionado, está comprimido dentro de un pequeño círculo. Su propia cabeza, o más exactamente, el punto entre sus ojos, es el centro absoluto. No importa cómo gire o dé vueltas, no puede salir de este punto central. Usted es el foco inamovible, el núcleo firme, de su mundo." Comente acerca de la exactitud de la descripción de Escher.

23. Usted puede hacer un reflector de esquina al colocar tres espejos planos en el rincón de un cuarto donde el techo se une con las paredes. Demuestre que sin importar dónde esté usted en el cuarto, puede verse reflejado en los espejos, de cabeza.



Figura P36.22 (*M. C. Escher/Cordon Art-Baarn-Holland. Derechos reservados.*)

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** = use computadora para resolver el problema = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 36.1 Imágenes formadas por espejos planos

1. ¿El espejo de su baño lo muestra a usted más viejo o más joven de lo que realmente es? Calcule un orden de magnitud estimado para la diferencia de edad, con base en los datos que usted especifique.
2. En el ático del coro de una iglesia, dos paredes paralelas están separadas por 5.30 m. Los cantantes se paran contra la pared norte. La cara del organista da hacia la pared sur y está a 0.800 m de ésta. Para que una persona pueda ver al coro, se coloca un espejo plano a 0.600 m de la pared sur, recto enfrente de ella. ¿Qué anchura de la pared norte puede ver? *Sugerencia:* Dibuje un diagrama de vista superior para justificar su respuesta.
3. Determine la altura mínima de un espejo plano vertical en el cual una persona de 5′10″ de estatura podría ver su imagen completa. (Un diagrama de rayos sería útil.)
4. Dos espejos planos tienen sus superficies reflejantes una frente a otra, con el borde de uno de los espejos en contacto con el borde del otro, de manera que el ángulo entre ellos es α. Cuando un objeto se sitúa entre los espejos se forman varias imágenes. En general, si el ángulo α es tal que $n\alpha = 360°$, donde n es un entero, el número de imágenes formadas es $n - 1$. Construya una gráfica y encuentre todas las posiciones de la imagen para el caso $n = 6$ cuando un objeto puntual está entre los espejos (pero no en el ángulo bisector).
5. Una persona camina dentro de un cuarto que tiene dos espejos planos en paredes opuestas, lo que produce múltiples imágenes. Cuando la persona está a 5.00 pies del espejo de la pared izquierda y a 10.0 pies del espejo de la pared derecha, encuentre las distancias que hay desde la persona a las tres primeras imágenes que se ven en el espejo de la izquierda.

Sección 36.2 Imágenes formadas por espejos esféricos

6. Un espejo cóncavo esférico tiene un radio de curvatura de 20.0 cm. Encuentre la posición de la imagen para distancias al objeto de a) 40.0 cm, b) 20.0 cm y c) 10.0 cm. En cada caso establezca si la imagen es real o virtual y vertical o invertida, y encuentre el aumento.
7. En una intersección de pasillos de hospital se coloca un espejo convexo alto en una pared para ayudar a que la gente evite choques. El espejo tiene un radio de curvatura de 0.550 m. Localice y describa la imagen de un paciente que está a 10.0 m del espejo. Determine el aumento.
8. Una gran iglesia tiene un nicho en una pared. En la planta de piso éste parece como una hendidura semicircular de 2.50 m de radio. Un devoto se para en la línea central del nicho, a 2.00 m de su punto más profundo, y hace una oración en voz baja. ¿Dónde se concentra el sonido después de que se ha reflejado en la pared de atrás del nicho?

WEB 9. Un espejo convexo esférico tiene un radio de curvatura de 40.0 cm. Determine la posición de la imagen virtual y el aumento para distancias al objeto de a) 30.0 cm y b) 60.0 cm. c) ¿Las imágenes están verticales o invertidas?

10. La altura de una imagen real formada por un espejo cóncavo es cuatro veces mayor que la altura del objeto cuando éste se encuentra a 30.0 cm enfrente del espejo. a) ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo? b) Emplee un diagrama de rayos para localizar esta imagen.

11. Un espejo cóncavo tiene un radio de curvatura de 60.0 cm. Calcule la posición de la imagen y el aumento de un objeto colocado enfrente del espejo a) a una distancia de 90.0 cm y b) a una distancia de 20.0 cm. c) En cada caso dibuje diagramas de rayos para obtener las características de la imagen.

12. Un espejo cóncavo tiene una longitud focal de 40.0 cm. Determine la posición del objeto para la cual la imagen resultante está vertical y es cuatro veces el tamaño del objeto.

13. Se va a utilizar un espejo esférico para formar, sobre una pantalla localizada a 5.00 m del objeto, una imagen cinco veces el tamaño del objeto. a) Describa el tipo de espejo requerido. b) ¿Dónde debe colocarse el espejo en relación con el objeto?

14. Un rectángulo de 10.0 cm × 20.0 cm se coloca de manera que su borde derecho está a 40.0 cm a la izquierda de un espejo esférico cóncavo, como se muestra en la figura P36.14. El radio de curvatura del espejo es 20.0 cm. a) Dibuje la imagen formada por este espejo. b) ¿Cuál es el área de la imagen?

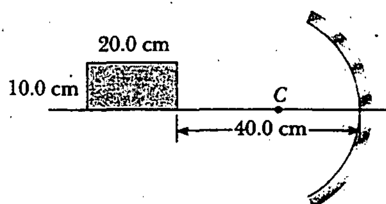


Figura P36.14

15. Una aficionada a los carros deportivos pule las superficies interior y exterior de un tapón de rueda que es una sección de una esfera. Cuando observa desde un lado del tapón, ve una imagen de su rostro 30.0 cm atrás de éste. Después lo voltea y ve otra imagen de su rostro a 10.0 cm atrás del tapón. a) ¿A qué distancia está su cara del tapón? b) ¿Cuál es el radio de curvatura del tapón?

16. Un objeto está a 15.0 cm de la superficie de un adorno esférico y reflejante de árbol de Navidad de 6.00 cm de diámetro. ¿Cuáles son el aumento y la posición de la imagen?

17. Una pelota se deja caer desde el reposo a 3.00 m directamente arriba del vértice de un espejo cóncavo que tiene un radio de 1.00 m y se encuentra en un plano horizontal. a) Describa el movimiento de la imagen de la pelota en el espejo. b) ¿En qué momento la pelota y su imagen coinciden?

Sección 36.3 Imágenes formadas por refracción

18. Una placa de cristal (n = 1.66) descansa en el fondo de un tanque de acuario. La placa tiene 8.00 cm de espesor (dimensión vertical) y está cubierta con agua (n = 1.33) a una profundidad de 12.0 cm. Calcule el espesor aparente de la placa cuando se observa desde arriba del agua. (Suponga incidencia casi normal).

19. Un bloque cúbico de hielo de 50.0 cm de lado se pone al nivel del piso sobre una mota de polvo. Encuentre la posición de la imagen de la mota si el índice de refracción del hielo es 1.309.

20. Un modelo simple del ojo humano ignora su lente por completo. La mayor parte de lo que el ojo hace con la luz ocurre en la córnea transparente. Suponga que su superficie exterior tiene un radio de curvatura de 6.00 mm, y suponga que el globo del ojo sólo contiene un fluido con índice de refracción de 1.40. Demuestre que un objeto muy distante será imaginado sobre la retina, 21.0 mm atrás de la córnea. Describa la imagen.

21. Una esfera de vidrio (n = 1.50) de 15 cm de radio tiene una diminuta burbuja de aire ubicada a 5.00 cm arriba de su centro. La esfera se ve observando abajo sobre el radio extendido que contiene a la burbuja. ¿Cuál es la profundidad aparente de la burbuja debajo de la superficie de la esfera?

22. Sobre la superficie de una esfera transparente de composición desconocida se observa que se forma una imagen del Sol. ¿Cuál es el índice de refracción del material de la esfera?

23. El extremo de una varilla larga de vidrio (n = 1.50) se forma en una superficie convexa de 6.00 cm de radio. Un objeto se coloca en el aire a lo largo del eje de la varilla. Encuentre las posiciones de la imagen correspondientes para distancias al objeto de a) 20.0 cm, b) 10.0 cm y c) 3.00 cm del extremo de la varilla.

24. Un pequeño pez nada a 2.00 cm/s hacia la pared frontal de un acuario rectangular. ¿Cuál es la rapidez aparente del pez medida por un observador que mira desde afuera de la pared frontal del tanque? El índice de refracción para el agua es 1.33.

25. Un pequeño pez nada en una pecera esférica de plástico con un índice de refracción de 1.33. Si el pez se encuentra a 10.0 cm de la pared de la pecera de 15.0 cm de radio, ¿dónde aparece éste para un observador que se encuentra afuera de la pecera?

Sección 36.4 Lentes delgados

26. Un lente de contacto está hecho de plástico con un índice de refracción de 1.50. El lente tiene un radio de curvatura exterior de +2.00 cm y un radio de curvatura interior de +2.50 cm. ¿Cuál es la longitud focal del lente?

WEB 27. La cara izquierda de un lente biconvexo tiene un radio de curvatura de 12.0 cm de magnitud, en tanto que la cara derecha tiene un radio de curvatura de 18.0 cm. El índice de refracción del vidrio es 1.44. a) Calcule la longitud focal del lente. b) Calcule la longitud focal si se intercambian los radios de curvatura de las dos caras.

28. Un lente convergente tiene una longitud focal de 20.0 cm. Localice la imagen para distancias al objeto de a) 40.0 cm, b) 20.0 cm y c) 10.0 cm. En cada caso establezca si la imagen es real o virtual y si está vertical o invertida. También en cada caso encuentre el aumento.
29. Un lente delgado tiene una longitud focal de 25.0 cm. Localice y describa la imagen cuando el objeto se coloca a) a 26.0 cm y b) a 24.0 cm enfrente de los lentes.
30. Un objeto colocado a 32.0 cm enfrente de un lente forma una imagen sobre una pantalla ubicada a 8.00 cm detrás de éste. a) Encuentre la longitud focal del lente. b) Determine el aumento. c) ¿El lente es convergente o divergente?

WEB 31. La imagen de la moneda de 5¢ de la figura P36.31 tiene el doble del diámetro de la moneda de 5¢ y está a 2.84 cm del lente. Determine la longitud focal del lente.



Figura P36.31

32. Un lente de aumento es un lente convergente de longitud focal de 15.0 cm. ¿A qué distancia de la estampilla postal se debe mantener este lente para obtener un aumento de +2.00?
33. Una diapositiva fotográfica se coloca enfrente de un lente convergente con una longitud focal de 2.44 cm. El lente forma una imagen de la diapositiva a 12.9 cm de la misma. ¿A qué distancia está el lente de la diapositiva si la imagen es a) real? b) virtual?
34. Una persona observa una joya con una lupa de joyero —la cual consta de un lente convergente que tiene una longitud focal de 12.5 cm—. La lupa forma una imagen virtual a 30.0 cm del lente. a) Determine el aumento. ¿La imagen está vertical o invertida? b) Construya un diagrama de rayos para este arreglo.
35. Suponga que un objeto tiene un espesor dp, de modo que éste extiende la distancia del objeto de p a $p + dp$. Demuestre que el espesor dq de su imagen está dado por $(-q^2/p^2)\,dp$, así que el aumento longitudinal es $dq/dp = -M^2$, donde M es el aumento lateral.
36. El lente de proyección en un cierto proyector de diapositivas es un solo lente delgado. Una diapositiva de 24.0 mm de alto se está proyectando de modo que su imagen llena toda la pantalla de 1.80 m de altura. La distancia de la diapositiva a la pantalla es de 3.00 m. a) Determine la longitud focal del lente de proyección. b) ¿A qué distancia de la diapositiva debería colocarse el lente del proyector para formar la imagen en la pantalla?
37. Un objeto se localiza 20.0 cm a la izquierda de un lente divergente que tiene una longitud focal $f = -32.0$ cm. Determine a) la localización, y b) el aumento de la imagen. c) Construya un diagrama de rayos para este arreglo.
38. La figura P36.38 muestra un delgado lente convergente de vidrio ($n = 1.50$) para el cual los radios de curvatura son $R_1 = 15.0$ cm y $R_2 = -12.0$ cm. A la izquierda del lente está un cubo con un área de cara de 100 cm². La base del cubo está sobre el eje del lente, y la cara derecha se encuentra a 20.0 cm a la izquierda del lente. a) Determine la longitud focal del lente. b) Dibuje la imagen de la cara cuadrada formada por el lente. ¿Qué tipo de figura geométrica es ésta? c) Determine el área de la imagen.

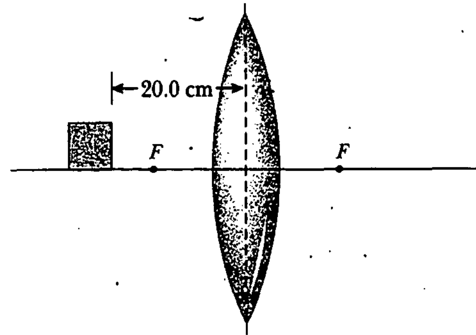


Figura P36.38

39. Un objeto está 5.00 m a la izquierda de una pantalla plana. Un lente convergente para el cual la longitud focal es $f = 0.800$ m se coloca entre el objeto y la pantalla. a) Muestre que hay dos posiciones del lente que forman una imagen sobre la pantalla, y determine a qué distancias están esas posiciones del objeto. b) ¿Cómo difieren entre sí las dos imágenes?
40. Un objeto está a una distancia d a la izquierda de una pantalla plana. Un lente convergente que tiene una longitud focal $f < d/4$ se coloca entre el objeto y la pantalla. a) Muestre que hay dos posiciones del lente que forman una imagen sobre la pantalla, y determine a qué distancias están esas posiciones del objeto. b) ¿Cómo difieren entre sí las dos imágenes?
41. La figura 36.33 esquematiza una sección transversal de una cámara. Ésta tiene un solo lente con una longitud focal de 65.0 mm, que es la que forma una imagen en la película en el lado posterior de la cámara. Suponga que la posición de los lentes se ha ajustado para enfocar la imagen de un objeto lejano. ¿Qué distancia y en qué dirección se debe mover el lente para formar una imagen nítida de un objeto que está a 2.00 m?

(Opcional)

Sección 36.5 Aberraciones de lentes

42. Las magnitudes de los radios de curvatura son 32.5 cm y 42.5 cm para las dos caras de un lente bicóncavo. El vidrio tiene un índice de 1.53 para la luz violeta y de 1.51 para la luz roja. Para un objeto muy lejano, localice y describa a) la imagen formada por la luz violeta y b) la imagen formada por la luz roja.

43. Los dos rayos que viajan paralelos al eje principal inciden en un plano extenso de un lente convexo que tiene un índice de refracción de 1.60 (véase la figura P36.43). Si la cara convexa es esférica, un rayo cerca del borde no atraviesa el punto focal (ocurre aberración esférica). Si esta cara tiene un radio de curvatura de 20.0 cm, y los dos rayos son $h_1 = 0.500$ cm y $h_2 = 12.0$ cm del eje principal, encuentre la diferencia en las posiciones donde éstos cruzan el eje principal.

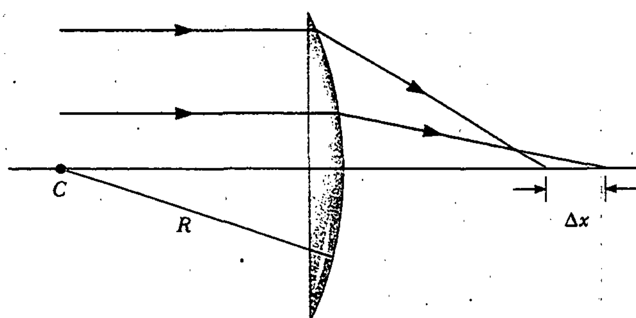


Figura P36.43

(Opcional)
Sección 36.7 El ojo

44. Los límites de adaptación para los ojos miopes de Nick son de 18.0 cm y 80.0 cm. Cuando usa sus lentes puede ver claramente objetos lejanos. ¿A qué distancia mínima puede ver los objetos claramente?

45. Una persona miope no puede ver claramente objetos que estén más allá de 25.0 cm (su punto lejano). Si no tiene astigmatismo y se le han recetado lentes de contacto, ¿qué potencia y qué tipo de lentes se requieren para corregir su visión?

46. Una persona ve claramente cuando usa anteojos que tienen una potencia de –4.00 dioptrías y se colocan 2.00 cm enfrente de sus ojos. Si quiere cambiar a lentes de contacto, ¿qué potencia de lentes se le debería recetar?

(Opcional)
Sección 36.8 El amplificador simple
Sección 36.9 El microscopio compuesto
Sección 36.10 El telescopio

47. Un filatelista examina los detalles de impresión en una estampilla empleando un lente biconvexo con 10.0 cm de longitud focal como un aumento simple. El lente se mantiene cerca del ojo, y la distancia lente a objeto se ajusta de modo que la imagen virtual se forme en el punto cercano normal (25.0 cm). Calcule el aumento.

48. Un lente que tiene una longitud focal de 5.00 cm se utiliza como un lente de aumento. a) Para obtener un aumento máximo, ¿dónde debe colocarse el objeto? b) ¿Cuál es el aumento?

49. La distancia entre el ocular y el lente objetivo en cierto microscopio compuesto es de 23.0 cm. La longitud focal del ocular es 2.50 cm y la del objetivo es 0.400 cm. ¿Cuál es el aumento total del microscopio?

50. El aumento total deseado de un microscopio compuesto es 140×. El objetivo sólo produce un aumento lateral de 12.0×. Determine la longitud focal requerida del ocular.

51. El telescopio de refracción de Yerkes tiene un lente objetivo con un diámetro de 1.00 m con una longitud focal de 20.0 m. Suponga que éste se usa con un ocular que tiene una longitud focal de 2.50 cm. a) Determine el aumento del planeta Marte cuando se ve a través de este telescopio. b) ¿Se ven las tapas polares al derecho o al revés?

52. Los astrónomos frecuentemente toman fotografías con el lente objetivo o sólo con el espejo del telescopio, sin el ocular. a) Muestre que el tamaño de la imagen h' para este telescopio está dado por $h' = fh/(f - p)$, donde h es el tamaño del objeto, f es la longitud focal del objetivo, y p es la distancia al objeto. b) Simplifique la expresión del inciso a para el caso en el que la distancia al objeto es mucho más grande que la longitud focal del objetivo. c) La "extensión" de la estación espacial internacional es de 108.6 m, que es el ancho total de su configuración de panel solar. Encuentre el ancho de la imagen formada por un objetivo de telescopio que tiene una longitud focal de 4.00 m cuando la estación está orbitando a una altura de 407 km.

53. Galileo ideó un telescopio simple terrestre que producía una imagen vertical. Éste consta de un lente objetivo convergente y un ocular divergente en los extremos opuestos del tubo del telescopio. Para objetos lejanos la longitud del tubo es la longitud focal del objetivo menos el valor absoluto de la longitud focal del ocular. a) ¿El usuario del telescopio ve una imagen real o virtual? b) ¿Dónde está la imagen final? c) Si el telescopio está construido con un tubo de 10.0 cm de largo y un aumento de 3.00, ¿cuáles son las longitudes focales del objetivo y del ocular?

54. Un cierto telescopio tiene un espejo objetivo con un diámetro de abertura de 200 mm y una longitud focal de 2 000 mm. Éste captura la imagen de una nebulosa en una película fotográfica en su primer foco con un tiempo de exposición de 1.50 min. Para producir la misma energía de la luz por unidad de área en la película, ¿cuál es el tiempo de exposición requerido para fotografiar la misma nebulosa con un pequeño telescopio que tiene un lente objetivo con un diámetro de abertura de 60.0 mm y una longitud focal de 900 mm?

PROBLEMAS ADICIONALES

55. La distancia entre un objeto y su imagen vertical es 20.0 cm. Si el aumento es 0.500, ¿cuál es la longitud focal del lente que se usa para formar la imagen?

56. La distancia entre un objeto y su imagen vertical es d. Si el aumento es M, ¿cuál es la longitud focal del lente que se usa para formar esta imagen?

57. El lente y el espejo de la figura P36.57 tienen longitudes focales de +80.0 cm y de –50.0 cm, respectivamente. Un objeto está colocado 1.00 m a la izquierda del lente,

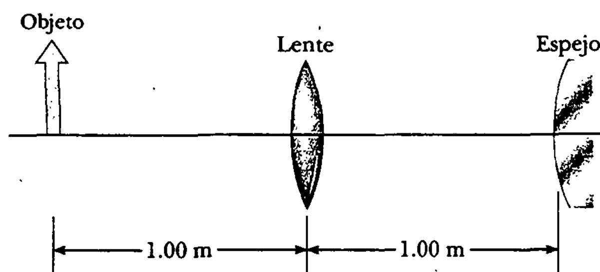


Figura P36.57

como se muestra. Localice la imagen final, que se forma por la luz cuando ha atravesado al lente dos veces. Establezca si la imagen está vertical o invertida, y determine el aumento total.

58. Su amigo necesita unos anteojos con lentes divergentes de longitud focal de –65.0 cm para ambos ojos. Usted le dice que luce bien cuando no entorna los ojos, pero él está preocupado por el grosor de los lentes. Si el radio de curvatura de la primera superficie es R_1 = 50.0 cm, y el plástico de alto índice tiene un índice de refracción de 1.66, a) encuentre el radio de curvatura requerido para la segunda superficie. b) Suponga que el lente es la base de un disco de 4.00 cm de diámetro y de 0.100 cm de grosor en el centro. Encuentre el grosor del plástico en el borde del lente, medido paralelo al eje. *Sugerencia:* Dibuje un gran diagrama de sección transversal.

59. El objeto en la figura P36.59 está a la mitad de la distancia entre el lente y el espejo. El radio de curvatura del espejo es de 20.0 cm, y el lente tiene una longitud focal de –16.7 cm. Considerando sólo la luz que deja el objeto y que viaja primero hacia el espejo, localice la imagen final formada por este sistema. ¿La imagen es real o virtual? ¿Está vertical o invertida? ¿Cuál es el aumento total?

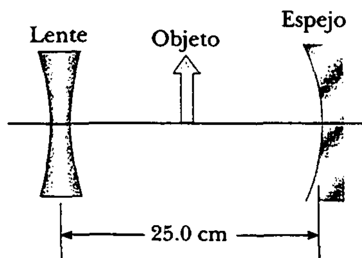


Figura P36.59

60. Un objeto situado a 10.0 cm de un espejo esférico cóncavo produce una imagen real a 8.00 cm del espejo. Si el objeto se mueve a una nueva posición a 20.0 cm del espejo, ¿cuál es la posición de la imagen? ¿La última imagen es real o virtual?

WEB 61. Un haz paralelo de luz entra en un hemisferio de vidrio perpendicular a la cara plana, como se muestra en la figura P36.61. El radio es R = 6.00 cm, y el índice de refracción es n = 1.560. Determine el punto en el que el haz está enfocado. (Suponga rayos paraxiales.)

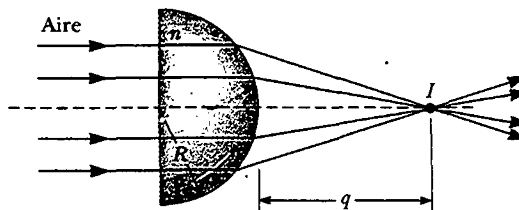


Figura P36.61

62. **Problema de repaso.** Un foco esférico con un diámetro de 3.20 cm radia luz igualmente en todas las direcciones, con una potencia de 4.50 W. a) Encuentre la intensidad de la luz en la superficie del foco. b) Encuentre la intensidad de la luz a 7.20 m del centro del foco. c) A esta distancia de 7.20 m se pone un lente con el eje apuntando hacia el foco. El lente tiene una cara circular con un diámetro de 15.0 cm y una longitud focal de 35.0 cm. Encuentre el diámetro de la imagen del foco. d) Encuentre la intensidad de la luz en la imagen.

63. Se coloca un objeto a 12.0 cm a la izquierda de un lente divergente con una longitud focal de –6.00 cm. Un lente convergente con una longitud focal de 12.0 cm se coloca a una distancia d a la derecha de un lente divergente. Encuentre la distancia d que corresponde a la imagen final en el infinito. Dibuje un diagrama de rayos para este caso.

64. Suponga que la intensidad de la luz del Sol es 1.00 kW/m^2 en una posición particular. Un espejo cóncavo altamente reflejante está apuntado hacia el Sol para producir una potencia de al menos 350 W en la imagen. a) Encuentre el radio requerido R_a del área de la cara circular del espejo. b) Ahora suponga que la intensidad de la luz es al menos de 120 kW/m^2 en la imagen. Encuentre la relación requerida entre R_a y el radio de curvatura R del espejo. El disco del Sol subtiende un ángulo de 0.533° en la Tierra.

WEB 65. El disco del Sol subtiende un ángulo de 0.533° en la Tierra. ¿Cuáles son la posición y el diámetro de la imagen solar formada por un espejo esférico cóncavo con un radio de curvatura de 3.00 m?

66. La figura P36.66 muestra un lente convergente delgado para el cual los radios son R_1 = 9.00 cm y R_2 = –11.0 cm. El lente está enfrente de un espejo esférico cóncavo de radio R = 8.00 cm. a) Si sus puntos focales F_1 y F_2 están a 5.00 cm del vértice del lente, determine su índice de refracción. b) Si el lente y el espejo están separados 20.0 cm, y el objeto se coloca a 8.00 cm a la izquierda del len-

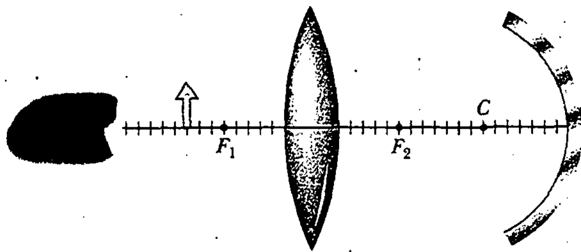


Figura P36.66

te, determine la posición de la imagen final y su aumento cuando es vista por el ojo en la figura. c) ¿La imagen final está invertida o vertical? Explique.

67. En un cuarto oscuro se pone una vela encendida a 1.50 m de un muro blanco. Entre la vela y el muro se coloca un lente en una posición que produce una imagen invertida más grande en el muro. Cuando el lente se mueve 90.0 cm hacia el muro se forma otra imagen de la vela. Encuentre a) las dos distancias al objeto que producen las imágenes indicadas antes, y b) la longitud focal del lente. c) Describa la segunda imagen.

68. Un lente delgado de longitud focal f está sobre un espejo plano horizontal con la superficie hacia el frente. ¿A qué distancia arriba del lente debería sostenerse un objeto para que su imagen coincida con él?

69. Un microscopio compuesto tiene un objetivo de longitud focal de 0.300 cm y un ocular de longitud focal de 2.50 cm. Si un objeto está a 3.40 mm del objetivo, ¿cuál es su aumento? (*Sugerencia:* Use la ecuación del lente para el objetivo.)

70. Dos lentes convergentes con longitudes focales de 10.0 cm y 20.0 cm están colocados con 50.0 cm de separación, como se muestra en la figura P36.70. La imagen final está localizada entre los lentes, en la posición indicada. a) ¿A qué distancia a la izquierda del primer lente debería estar el objeto? b) ¿Cuál es el aumento total? c) ¿Está la imagen final vertical o invertida?

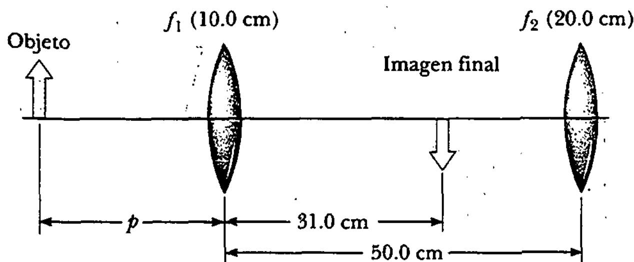
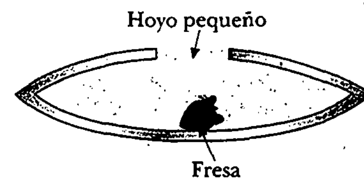


Figura P36.70

71. El lente dañado por cataratas en un ojo puede eliminarse quirúrgicamente y reemplazarse por uno artificial. La longitud focal necesaria para el nuevo lente está determinada por la distancia entre el lente y la retina, que se mide mediante un dispositivo como el sonar, y por el requerimiento de que el implante proporcione una visión lejana correcta. a) Si la distancia del lente a la retina es de 22.4 mm, calcule la potencia en dioptrías del lente implantado. b) Puesto que no hay adaptación, y el implante permite una visión lejana correcta, se debe usar un lente correctivo que funcione de cerca o para leer. Suponga una distancia de lectura de 33.0 cm y calcule la potencia del lente en los anteojos de lectura.

72. La ilusión de una fresa flotando consiste de dos espejos parabólicos, cada uno con una longitud focal de 7.50 cm, colocados frente a frente de modo que sus centros estén separados por 7.50 cm (véase la figura P36.72). Si una fresa se coloca en el espejo inferior, se forma una imagen de la fresa en la pequeña abertura en el centro del espejo superior. Muestre que la imagen final se forma en esta posición y describa sus características. (*Nota:* Un efecto muy impresionante es hacer brillar el haz de una linterna sobre estas imágenes. Incluso a un ángulo natural, ¡el haz de luz entrante aparentemente se refleja en las imágenes! ¿Entiende usted por qué?)



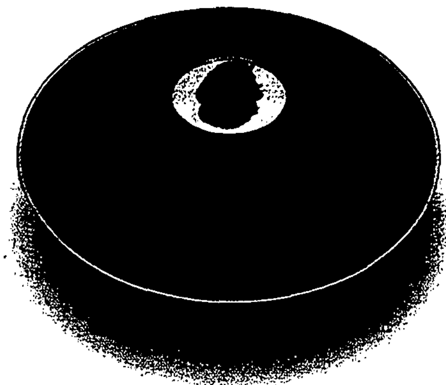


Figura P36.72 (© *Michael Levin/Opti-Gone Associates*)

73. Un objeto de 2.00 cm de altura se coloca 40.0 cm a la izquierda de un lente convergente con una longitud focal de 30.0 cm. Un lente divergente con una longitud focal de −20.0 cm se ubica a 110 cm a la derecha del lente convergente. a) Encuentre la posición final y el aumento de la imagen final. b) ¿La imagen está invertida o vertical? c) Repita los incisos a y b para el caso en el que el segundo lente es un lente convergente con una longitud focal de +20.0 cm.

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

36.1 En *C*. Un rayo trazado desde la piedra al espejo y después el observador 2 ve esto:

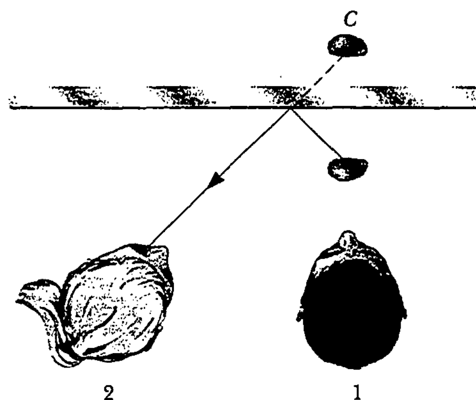


Figura RPS36.1

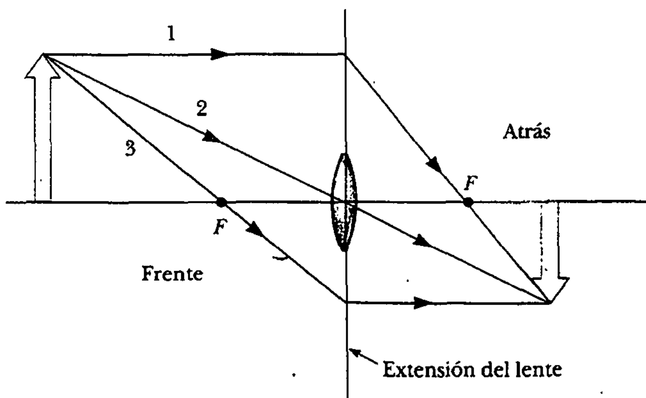


Figura RPS36.2

36.2 La longitud focal es infinita. Como las superficies planas de este panel tienen radios de curvatura infinitos, la ecuación 36.11 indica que la longitud focal es también infinita. Los rayos paralelos que pegan en el panel se enfocan en el infinito, lo que significa que permanecen paralelos después de atravesar el vidrio.

36.3 Un número infinito. En general, un número infinito de rayos salen de cada punto de cualquier objeto y viajan hacia afuera en todas las direcciones. (Los tres rayos principales que se usaron para localizar una imagen componen un subconjunto seleccionado del número infinito de rayos). Cuando un objeto es más alto que un lente, simplemente se extiende el plano que contiene al lente, como se muestra en la figura RPS36.2.

36.4 c) La imagen completa es visible pero tiene la mitad de intensidad. Cada punto del objeto es una fuente de rayos que viajan en todas las direcciones. Así, la luz viene de todas las partes del objeto y va hacia todas las partes del lente y forma una imagen. Si bloquea parte del lente, usted está bloqueando algunos de los rayos, pero los que permanecen aún vienen de todas las partes del objeto.

36.5 Los anteojos de la izquierda son lentes divergentes, que corrigen la miopía. Si usted observa cuidadosamente el borde de la cara de la persona a través del lente, verá que cualquier cosa vista a través de estos anteojos se reduce de tamaño. Los anteojos de la derecha son lentes convergentes, que corrigen la hipermetropía. Estos lentes hacen que cualquier cosa vista a través de ellos se vea más grande.

36.6 El aumento lateral de un telescopio no está bien definido. Al ver con el ojo relajado el usuario puede ajustar levemente la posición del ocular al colocar la imagen I_2 en la figura 36.42a en el infinito. Así, esta altura y este aumento lateral también son infinitos. El aumento angular de un telescopio como se define es el factor por el cual el telescopio aumenta el diámetro —sobre la retina del ojo del observador— de la imagen real de un objeto extendido.



ACERTIJO

Los colores brillantes que se ven en las plumas de un pavo real no son causados por pigmentos en las plumas. Entonces, ¿cómo se crean estos hermosos colores? (*Terry Qing/FPG International*)

capítulo

37

Interferencia de ondas luminosas

Líneas generales del capítulo

En el capítulo anterior sobre óptica geométrica se usaron rayos luminosos para examinar qué ocurre cuando la luz pasa por unos lentes o se refleja en un espejo. En éste y en el capítulo siguiente nos dedicaremos a la *óptica ondulatoria*, que estudia la interferencia, difracción y polarización de la luz. Estos fenómenos no pueden explicarse de manera adecuada con la óptica estudiada en el capítulo 36. Ahora se aprenderá a tratar a la luz como ondas en lugar de rayos, lo que nos conduce a una descripción satisfactoria de estos fenómenos.



CONDICIONES PARA LA INTERFERENCIA

En el capítulo 18 se encontró que la suma de dos ondas mecánicas puede ser constructiva o destructiva. En la interferencia constructiva la amplitud de la onda resultante es mayor que la de cualquiera de las ondas individuales, mientras que en la interferencia destructiva la amplitud resultante es menor que la de cualquiera de las ondas individuales. Las ondas de luz también interfieren entre sí. Fundamentalmente, toda interferencia asociada con ondas luminosas surge cuando se combinan los campos electromagnéticos que constituyen las ondas individuales.

Si se colocan dos focos uno al lado del otro, no se observan efectos de interferencia, ya que cada foco emite ondas de luz de manera independiente. Las emisiones de los dos focos no mantienen una relación de fase constante entre sí todo el tiempo. Las ondas luminosas de una fuente ordinaria, tal como un foco, experimentan cambios aleatorios casi cada 10^{-8} s. Por tanto, las condiciones para la interferencia constructiva, interferencia destructiva, o algún último estado intermedio para intervalos de tiempo es del orden de 10^{-8} s. Como el ojo no puede seguir estos cambios de breve duración, no observa los efectos de interferencia. (En 1993 se fotografió la interferencia de dos fuentes de luz separadas en una exposición muy rápida, sin embargo, no se vieron los efectos de interferencia debido a la relación del rápido cambio de fase entre las ondas luminosas.) Tales fuentes de luz se conocen como **incoherentes**.

Los efectos de interferencia en las ondas luminosas no se observan con facilidad debido a las cortas longitudes de onda implicadas (de 4×10^{-7} m a 7×10^{-7} m). Para la interferencia sostenida en las ondas luminosas que se observan se deben cumplir las condiciones siguientes:

Condiciones para la interferencia

- Las fuentes deben ser **coherentes**, es decir, deben mantener una constante de fase entre sí.
- Las fuentes deben ser **monocromáticas**, es decir, de una sola longitud de onda.

Ahora se describirán las características de las fuentes coherentes. Como se expuso cuando se estudiaron ondas mecánicas, se necesitan dos fuentes (que producen dos ondas viajeras) para crear interferencia. Con el fin de producir un patrón de interferencia estable, **las ondas individuales deben mantener una relación de constante de fase entre sí.** Por ejemplo, las ondas sonoras emitidas por dos altavoces colocados lado a lado excitados por un solo amplificador pueden interferir entre sí debido a que los dos son coherentes, es decir, responden al amplificador de la misma manera y al mismo tiempo.

Un método común para producir fuentes de luz coherente es emplear una fuente monocromática para iluminar una barrera que contiene dos pequeñas aberturas (usualmente en forma de rendijas). La luz que emerge de una de las dos rendijas es coherente porque una sola fuente produce el haz original y las dos rendijas sirven sólo para separar el haz original en dos partes (lo cual, después de todo, fue lo que hizo con la señal sonora de los altavoces colocados lado a lado). Todo cambio aleatorio en la luz emitida por la fuente ocurrirá en ambos haces al mismo tiempo, lo

cual permite observar efectos de interferencia cuando la luz de dos rendijas llega a una pantalla.

37.2 EXPERIMENTO DE LA DOBLE RENDIJA DE YOUNG

La interferencia en ondas luminosas de dos fuentes fue demostrada por primera vez por Thomas Young en 1801. Un diagrama esquemático del aparato que utilizó en este experimento se muestra en la figura 37.1a. La luz incide sobre una barrera en la cual hay una estrecha rendija S_0. Las ondas que emergen de esta rendija llegan a una segunda barrera, la cual contiene dos rendijas estrechas y paralelas, S_1 y S_2. Las dos rendijas sirven como un par de fuentes de luz coherente porque las ondas que emergen de ellas se originan en el mismo frente de onda y, en consecuencia, mantienen una relación de constante de fase. La luz de S_1 y S_2 produce sobre la pantalla un patrón visible de bandas paralelas brillantes y oscuras denominadas **franjas** (véase la figura 37.1b). Cuando la luz de S_1 y la de S_2 llegan a un punto sobre la pantalla en forma tal que ocurra interferencia constructiva en ese punto, aparece una línea brillante. Cuando la luz de las dos rendijas se combina en forma destructiva en cualquier punto sobre la pantalla, se produce una franja oscura. La figura 37.2 es una fotografía de un patrón de interferencia producido por dos fuentes vibratorias coherentes en un tanque de agua.

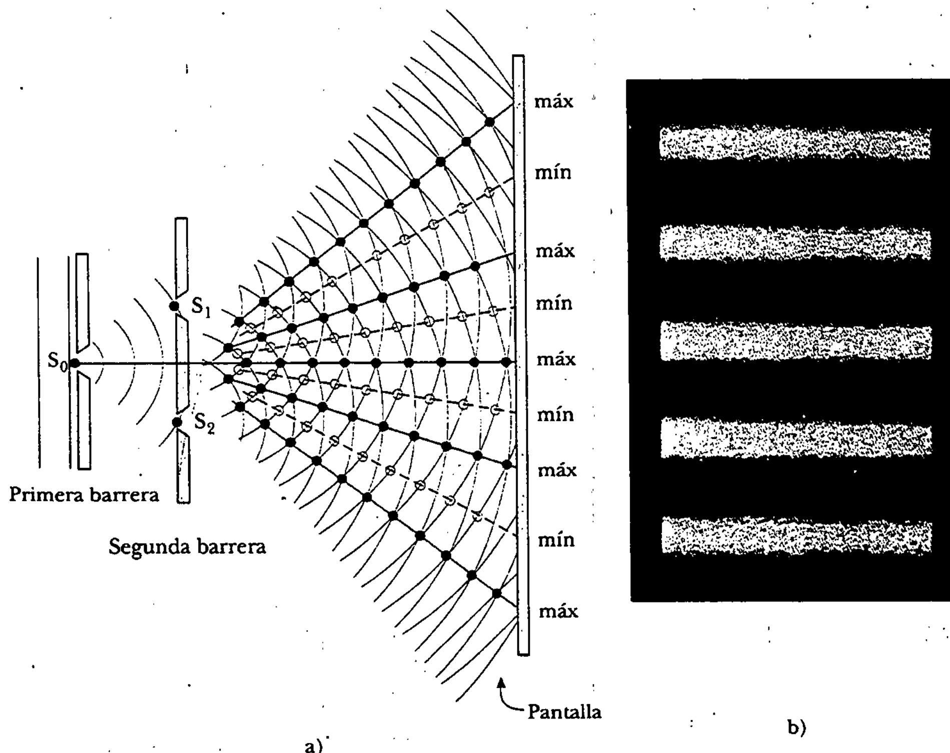


Figura 37.1 a) Diagrama esquemático del experimento de doble rendija de Young. Las rendijas S_1 y S_2 se comportan como fuentes de luz coherentes que producen un patrón de interferencia sobre la pantalla (advierta que este dibujo no está a escala). b) Un alargamiento del centro de un patrón de franjas formado en la pantalla con muchas rendijas podría verse como esto.

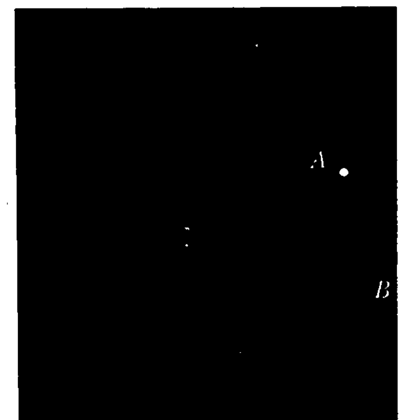


Figura 37.2 Un patrón de interferencia con ondas en el agua se produce por medio de dos fuentes vibratorias en la superficie del agua. El patrón es semejante al observado en el experimento de doble rendija de Young. Observe las regiones de interferencia constructiva (A) y destructiva (B). (*Richard Megna/Fundamental Photographs*)

Pregunta sorpresa 37.1

Si usted estuviera soplando humo dentro del espacio entre la segunda barrera y la pantalla de la figura 37.1a, ¿qué vería?

Experimento sorpresa

Observe un semáforo lejano a través de la tela de una sombrilla. ¿Puede usted explicar lo que ve? (El patrón de las franjas en la figura 37.1b es el de unas rendijas rectangulares. La tela de la sombrilla crea un conjunto bidimensional de hoyos cuadrados.)

Pregunta sorpresa 37.2

La figura 37.2 es una vista de arriba de la superficie de un tanque de agua poco profundo. Si usted quiere usar una pequeña regleta para medir la profundidad del agua, ¿podría localizar fácilmente la posición A o la posición B?

La figura 37.3 es un diagrama esquemático de algunas de las maneras en las que las dos ondas pueden combinarse en la pantalla. En la figura 37.3a las dos ondas, que salen en fase de las dos rendijas, inciden sobre la pantalla en el punto central P. Puesto que estas ondas viajan igual distancia, llegan a P en fase. Como resultado, hay interferencia constructiva en ese punto y se observa una franja brillante. En la figura 37.3b las dos ondas luminosas también empiezan en fase, pero en este caso la onda superior tiene que viajar una longitud de onda mayor que la onda inferior para alcanzar el punto Q. Puesto que la onda superior cae detrás de la inferior exactamente en una longitud de onda, las dos llegan en fase a Q, así que aparece una segunda franja brillante en este punto. Sin embargo, en el punto R, a la mitad entre P y Q en la figura 37.3c, la onda superior ha caído media longitud de onda detrás de la onda inferior. Lo anterior significa que el valle de la onda inferior se traslapa con la cresta de la onda superior, y da origen a interferencia destructiva en el punto R. Por esta razón se observa una franja oscura en dicho punto.

Se puede describir el experimento de Young cuantitativamente con la ayuda de la figura 37.4. La pantalla se localiza a una distancia perpendicular L de la barrera de doble rendija. S_1 y S_2 están separadas por una distancia d, y la fuente es monocromática. Para alcanzar cualquier punto arbitrario P, una onda desde la rendija inferior viaja una distancia d sen θ mayor que una onda de la rendija superior. Esta distancia se llama **diferencia de trayectoria** δ. Si se supone que r_1 y r_2 son paralelos, lo que hasta cierto punto es cierto, ya que L es mucho más grande que d, entonces δ está dada por

Diferencia de trayectoria

$$\delta = r_2 - r_1 = d \text{ sen } \theta \qquad \textbf{(37.1)}$$

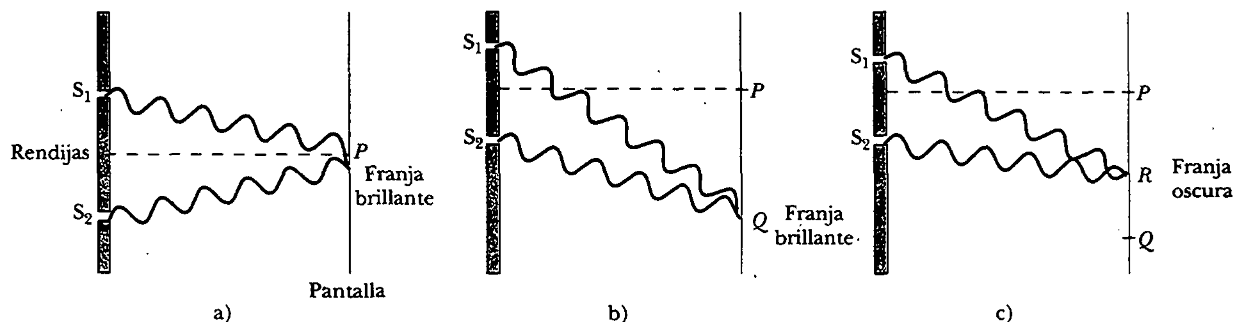


Figura 37.3 a) La interferencia constructiva ocurre en el punto P cuando se combinan las ondas. b) La interferencia constructiva también ocurre en el punto Q. c) La interferencia destructiva ocurre en R cuando las dos ondas se combinan porque la onda superior cae la mitad de una longitud de onda detrás de la onda inferior (advierta que estas figuras no están a escala).

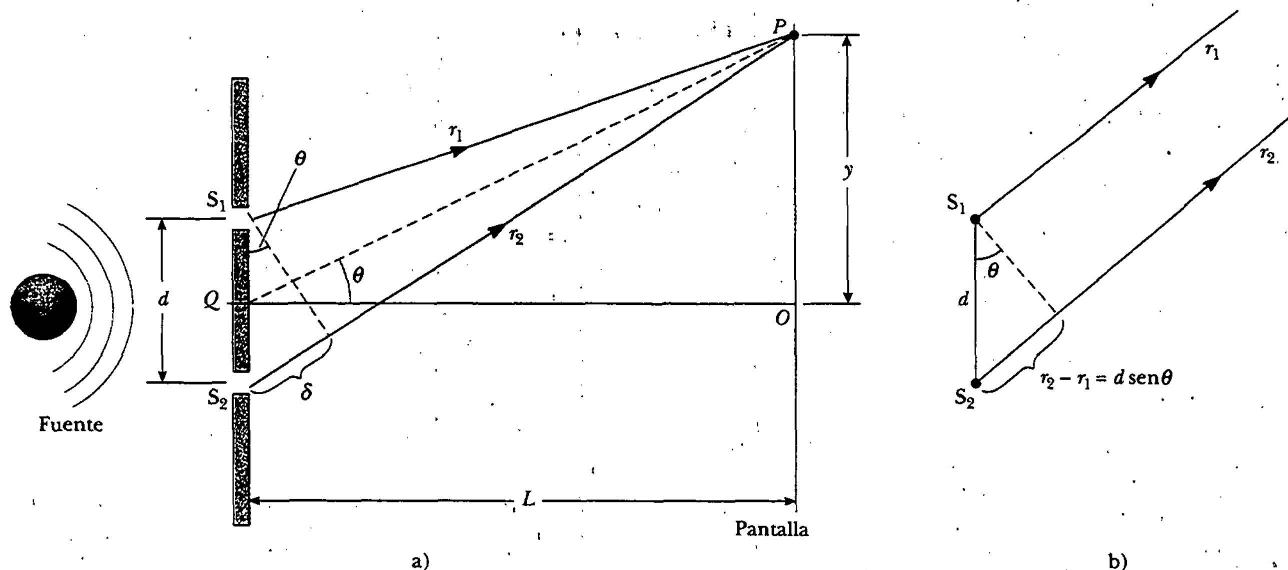


Figura 37.4 a) Construcción geométrica para describir el experimento de doble rendija de Young. (Advierta que esta figura no está dibujada a escala.) b) Cuando se supone que r_1 es paralelo a r_2, la diferencia de trayectoria entre los dos rayos es $r_2 - r_1 = d$ sen θ. Para que esta aproximación sea válida es esencial que $L >> d$.

El valor de δ determina si las dos ondas están o no en fase cuando llegan a P. Si δ es cero o algún múltiplo entero de la longitud de onda, las dos ondas están en fase en P y se produce interferencia constructiva. Por tanto, la condición para franjas brillantes, o **interferencia constructiva**, en el punto P es

$$\delta = d\,\text{sen}\,\theta = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{37.2}$$

Condiciones para la interferencia constructiva

El número m recibe el nombre de **número de orden**. La franja brillante central en $\theta = 0$ ($m = 0$) recibe el nombre de *máximo de orden cero*. El primer máximo en cualquier lado, donde $m = \pm 1$, se denomina *máximo de primer orden*, y así sucesivamente.

Cuando δ es un múltiplo impar de $\lambda/2$, las dos ondas que llegan al punto P están 180° fuera de fase y dan origen a interferencia destructiva. Por tanto, la condición para franjas oscuras o **interferencia destructiva**, en el punto P es

$$d\,\text{sen}\,\theta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{37.3}$$

Condiciones para la interferencia destructiva

Es útil obtener expresiones para las posiciones de franjas brillantes y oscuras medidas verticalmente de O a P. Además de nuestra suposición de que $L >> d$, suponemos que $d >> \lambda$. Estas suposiciones pueden ser válidas porque en la práctica L con frecuencia es del orden de 1 m, d es una fracción de un milímetro y λ es una fracción de un micrómetro para la luz visible. En tales condiciones θ es pequeño, por lo que se puede emplear la aproximación sen $\theta \approx$ tan θ. En consecuencia, en el triángulo OPQ en la figura 37.4 se ve que

$$y = L \tan\theta \approx L\,\text{sen}\,\theta \tag{37.4}$$

Resolviendo la ecuación 37.2 para sen θ, y sustituyendo el resultado en la ecuación 37.4, se ve que las posiciones de las franjas brillantes medidas desde O están dadas por la expresión

$$y_{\text{brillante}} = \frac{\lambda L}{d} m \tag{37.5}$$

Usando las ecuaciones 37.3 y 37.4 se encuentra que las franjas oscuras se localizan en

$$y_{\text{oscura}} = \frac{\lambda L}{d}(m + \tfrac{1}{2}) \qquad (37.6)$$

Como se demuestra en el ejemplo 37.1, el experimento de doble rendija de Young proporciona un método para medir la longitud de onda de la luz. De hecho, Young utilizó esta técnica para hacerlo. Además, el experimento dio una gran credibilidad al modelo ondulatorio de la luz. Era inconcebible que las partículas de luz que venían de las rendijas pudieran cancelarse entre sí de una manera que se pudieran explicar las franjas oscuras.

EJEMPLO 37.1 Medición de la longitud de onda de una fuente luminosa

Una pantalla de observación está a una distancia de 1.2 m de una fuente de doble rendija. La distancia entre las dos rendijas es 0.030 mm. La franja brillante de segundo orden ($m = 2$) está a 4.5 cm de la línea central. a) Determine la longitud de onda de la luz.

Solución Podemos emplear la ecuación 37.5, con $m = 2$, $y_2 = 4.5 \times 10^{-2}$ m, $L = 1.2$ m y $d = 3.0 \times 10^{-5}$ m:

$$\lambda = \frac{dy_2}{mL} = \frac{(3.0 \times 10^{-5}\,\text{m})(4.5 \times 10^{-2}\,\text{m})}{2(1.2\,\text{m})}$$

$$= 5.6 \times 10^{-7}\,\text{m} = 560\,\text{nm}$$

b) Calcule la distancia entre las franjas brillantes adyacentes.

Solución De la ecuación 37.5 y de los resultados del inciso a, obtenemos

$$y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda L(m+1)}{d} - \frac{\lambda L m}{d}$$

$$= \frac{\lambda L}{d} = \frac{(5.6 \times 10^{-7}\,\text{m})(1.2\,\text{m})}{3.0 \times 10^{-5}\,\text{m}}$$

$$= 2.2 \times 10^{-2}\,\text{m} = 2.2\,\text{cm}$$

Observe que el espaciado entre todas las franjas es el mismo.

EJEMPLO 37.2 Desdoblamiento de franjas por doble rendija de dos longitudes de onda

Una fuente luminosa emite luz visible de dos longitudes de onda: $\lambda = 430$ nm y $\lambda' = 510$ nm. La fuente se emplea en un experimento de interferencia de doble rendija en el cual $L = 1.5$ m y $d = 0.025$ mm. Encuentre la separación entre las franjas brillantes de tercer orden.

Solución Utilizando la ecuación 37.5, con $m = 3$, se encuentra que los valores de las posiciones de las franjas correspondientes a estas dos longitudes de onda son

$$y_3 = \frac{\lambda L}{d} m = 3\frac{\lambda L}{d} = 7.74 \times 10^{-2}\,\text{m}$$

$$y_3' = \frac{\lambda' L}{d} m = 3\frac{\lambda' L}{d} = 9.18 \times 10^{-2}\,\text{m}$$

Por tanto, la separación entre las dos franjas es

$$\Delta y = y_3' - y_3 = 9.18 \times 10^{-2}\,\text{m} - 7.74 \times 10^{-2}\,\text{m}$$

$$= 1.4 \times 10^{-2}\,\text{m} = 1.4\,\text{cm}$$



DISTRIBUCIÓN DE LA INTENSIDAD DEL PATRÓN DE INTERFERENCIA DE DOBLE RENDIJA

Observe que los bordes de las franjas brillantes en la figura 37.1b están borrosos. Hasta ahora sólo se han analizado las posiciones de los centros de las franjas brillantes y oscuras en una pantalla lejana. Ahora dirigiremos nuestra atención a la intensidad de la luz en otros puntos entre las posiciones de máxima interferencia constructiva e interferencia destructiva. En otras palabras, ahora se calculará la distribución de la intensidad de la luz asociada con el patrón de interferencia de doble rendija.

Suponga de nuevo que las dos rendijas representan fuentes coherentes de ondas senoidales de modo que las dos ondas que vienen de las rendijas tengan la misma frecuencia angular ω y una diferencia de fase constante ϕ. La magnitud de campo eléctrico total en el punto P sobre la pantalla en la figura 37.5 es la superposición vectorial de las dos ondas. Suponiendo que las dos ondas tienen la misma amplitud E_0, se pueden escribir las intensidades de campo eléctrico en el punto P debidas a cada onda por separado como

$$E_1 = E_0 \text{ sen } \omega t \quad \text{y} \quad E_2 = E_0 \text{ sen } (\omega t + \phi) \tag{37.7}$$

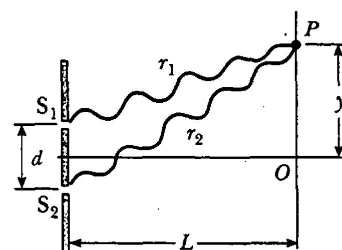


Figura 37.5 Construcción para analizar el patrón de interferencia de doble rendija. Se observa en O una franja brillante, o máximo de intensidad.

Aunque las ondas están en fase en las rendijas, *su diferencia de fase* ϕ *en el punto P depende de la diferencia de trayectorias* $\delta = r_2 - r_1 = d \text{ sen } \theta$. Puesto que una diferencia de trayectoria de λ (interferencia constructiva) corresponde a una diferencia de fase de 2π rad, se obtiene la relación

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\phi}{2\pi}$$

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \text{ sen } \theta \tag{37.8}$$

Diferencia de fase

Esta ecuación indica en forma precisa cómo la diferencia de fase ϕ depende del ángulo θ en la figura 37.4.

Empleando el principio de superposición y la ecuación 37.7 se puede obtener la magnitud del campo eléctrico resultante en el punto P:

$$E_P = E_1 + E_2 = E_0[\text{sen } \omega t + \text{sen}(\omega t + \phi)] \tag{37.9}$$

Para simplificar esta expresión se usa la identidad trigonométrica

$$\text{sen } A + \text{sen } B = 2 \text{ sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Tomando $A = \omega t + \phi$ y $B = \omega t$, se puede escribir la ecuación 37.9 en la forma

$$E_P = 2E_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \text{sen}\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) \tag{37.10}$$

Tal resultado indica que el campo eléctrico en el punto P tiene la misma frecuencia ω que la luz en las rendijas, pero que la amplitud del campo está multiplicada por el factor $2 \cos(\phi/2)$. Para comprobar la consistencia de este resultado advierta que si $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, entonces el campo eléctrico en el punto P es $2E_0$, lo que corresponde a la condición de interferencia constructiva. Dichos valores de ϕ son consistentes con la ecuación 37.2 para la interferencia constructiva. De igual modo, si $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$, entonces la magnitud del campo eléctrico en el punto P es cero, lo cual es consistente con la ecuación 37.3 para la interferencia destructiva.

Por último, con el fin de obtener una expresión para la intensidad luminosa en el punto P recuerde de la sección 34.3 que *la intensidad de una onda es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico resultante en ese punto* (Ec. 34.20). Usando la ecuación 37.10, por tanto, se expresa la intensidad luminosa en el punto P como

$$I \propto E_P^2 = 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \text{sen}^2\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

La mayor parte de los instrumentos detectores de luz miden la intensidad luminosa promedio en el tiempo, y el valor promedio en el tiempo de $\text{sen}^2(\omega t + \phi/2)$ sobre un ciclo es $\frac{1}{2}$. Por tanto, se puede escribir la intensidad luminosa promedio en el punto P como

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \tag{37.11}$$

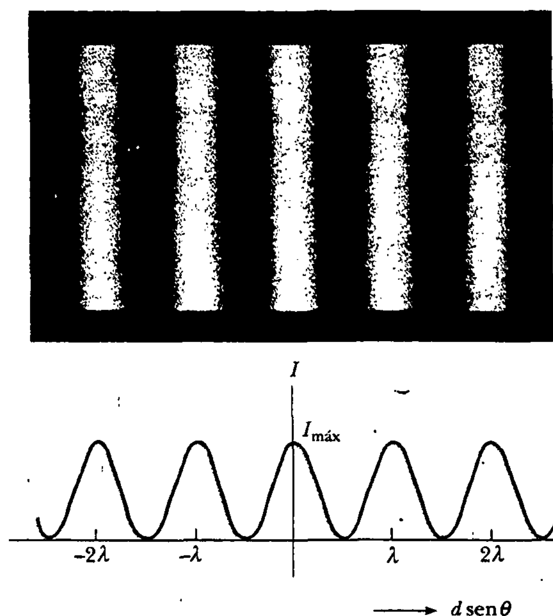


Figura 37.6 Distribución de la intensidad de la luz *versus* d sen θ para un patrón de interferencia de doble rendija cuando la pantalla está alejada de las dos rendijas ($L >> d$). (*Fotografía de M. Cagnet, M. Francon y J. C. Thierr,* Atlas de fenómenos ópticos, *Berlín, Springer-Verlag, 1962.)*

donde $I_{máx}$ es la intensidad máxima en la pantalla y la expresión representa el tiempo promedio. Sustituyendo el valor de ϕ dado en la ecuación 37.8 en esta expresión se encuentra que

$$I = I_{máx} \cos^2\left(\frac{\pi d \operatorname{sen} \theta}{\lambda}\right) \qquad \textbf{(37.12)}$$

De manera alternativa, puesto que sen $\theta \approx y/L$ para pequeños valores de θ en la figura 37.4, se puede escribir la ecuación 37.12 en la forma

$$I = I_{máx} \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda L} y\right) \qquad \textbf{(37.13)}$$

La interferencia constructiva, la cual produce máxima intensidad luminosa, ocurre cuando la cantidad $\pi dy/\lambda L$ es un múltiplo entero de π, lo que corresponde a $y = (\lambda L/d)m$. Esto es consistente con la ecuación 37.5.

Una gráfica de la distribución de la intensidad *versus* d sen θ se proporciona en la figura 37.6. Observe que el patrón de interferencia se compone de franjas igualmente espaciadas de la misma intensidad. Sin embargo, recuerde que este resultado sólo es válido si la distancia rendija-pantalla L es mucho más grande que la separación de las rendijas, y sólo para valores pequeños de θ.

Hemos visto que el fenómeno de interferencia que surge de dos fuentes depende de la fase relativa de las ondas en un punto dado. Además, la diferencia de fase en un punto dado depende de la diferencia de trayectoria entre las dos ondas. **La intensidad luminosa resultante en un punto es proporcional al cuadrado del campo eléctrico resultante en ese punto.** Es decir, la intensidad luminosa es proporcional a $(E_1 + E_2)^2$. Sería incorrecto calcular la intensidad luminosa sumando las intensidades de las ondas individuales. El procedimiento daría $E_1^2 + E_2^2$, lo cual, por supuesto, no es lo mismo que $(E_1 + E_2)^2$. Advierta, sin embargo, que $(E_1 + E_2)^2$ tiene el mismo valor *promedio* que $E_1^2 + E_2^2$ cuando el tiempo promedio se toma sobre todos los

valores de la diferencia de fase entre E_1 y E_2. Por tanto, no hay violación de la ley de conservación de la energía.

37.4 SUMA FASORIAL DE ONDAS

En la sección anterior se combinaron en forma algebraica dos ondas para obtener la amplitud de onda resultante en algún punto sobre la pantalla. Desafortunadamente, dicho procedimiento analítico se dificulta cuando se suman varias amplitudes de onda. Como en algún momento se estará interesado en combinar un gran número de ondas, a continuación se describirá un procedimiento gráfico para este propósito.

Nuevamente considere una onda senoidal cuya componente de campo eléctrico esté dada por

$$E_1 = E_0 \operatorname{sen} \omega t$$

donde E_0 es la amplitud de onda y ω es la frecuencia angular. Esta onda puede representarse de manera gráfica mediante un fasor de magnitud E_0, que gira alrededor del origen en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una frecuencia angular ω, como se indica en la figura 37.7a. Observe que el fasor forma un ángulo ωt con el eje horizontal. La proyección del fasor sobre el eje vertical representa E_1, la magnitud de la perturbación ondulatoria en algún momento t. En consecuencia, cuando el fasor gira en un círculo, la proyección E_1 oscila a lo largo del eje vertical en torno al origen.

A continuación se considerará una segunda onda senoidal cuya componente de campo eléctrico está dada por

$$E_2 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Dicha onda tiene la misma amplitud y frecuencia que E_1, pero su fase es ϕ respecto de E_1. El fasor que representa a la onda E_2 se muestra en la figura 37.7b. La onda resultante, que es la suma de E_1 y E_2, puede obtenerse de manera gráfica redibujando los fasores como se muestra en la figura 37.7c, en la cual la cola del segundo fasor se coloca en la punta del primero. Como con la adición de vectores, el fasor resultante $\mathbf{E}_R$ va de la cola del primer fasor a la punta del segundo. Además, $\mathbf{E}_R$ gira junto con los dos fasores individuales a la misma frecuencia angular ω. La proyección de $\mathbf{E}_R$ a lo largo del eje vertical es igual a la suma de las proyecciones de los otros dos fasores: $E_P = E_1 + E_2$.

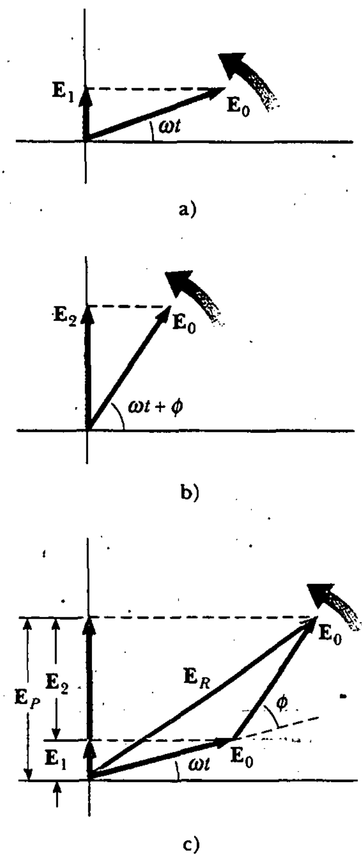


Figura 37.7 a) Diagrama de fasores para la perturbación ondulatoria $E_1 = E_0 \operatorname{sen} \omega t$. El fasor es un vector de longitud E_0 que gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj. b) Diagrama de fasores para la onda $E_2 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$. c) La perturbación $\mathbf{E}_R$ es el fasor resultante formado a partir de los fasores de los incisos a y b.

Es conveniente construir los fasores en $t = 0$ como en la figura 37.8. A partir de la geometría del triángulo rectángulo se ve que

$$\cos \alpha = \frac{E_R/2}{E_0}$$

lo cual da

$$E_R = 2E_0 \cos \alpha$$

Como la suma de los dos ángulos interiores opuestos es igual al ángulo exterior ϕ, se ve que $\alpha = \phi/2$, por lo que

$$E_R = 2E_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

En consecuencia, la proyección del fasor $\mathbf{E}_R$ a lo largo del eje vertical en cualquier momento t es

$$E_P = E_R \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) = 2E_0 \cos(\phi/2) \operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

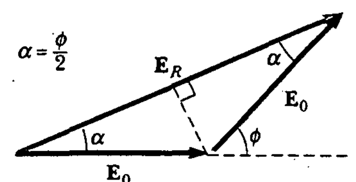


Figura 37.8 Reconstrucción del fasor resultante $\mathbf{E}_R$. A partir de la geometría advierta que $\alpha = \phi/2$.

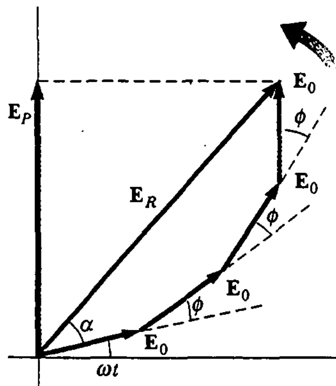


Figura 37.9 El fasor $\mathbf{E}_R$ es la resultante de cuatro fasores de igual magnitud E_0. La fase de E_R respecto del primer fasor es α.

Lo anterior concuerda con el resultado obtenido en forma algebraica, ecuación 37.10. El fasor resultante tiene una amplitud $2E_0 \cos(\phi/2)$ y forma un ángulo $\phi/2$ con el primer fasor. Además, la intensidad luminosa promedio en P, que varía como $E_P{}^2$, es proporcional a $\cos^2(\phi/2)$, como lo indica la ecuación 37.11.

Se puede describir ahora cómo obtener la resultante de varias ondas que tienen la misma frecuencia:

- Represente las ondas por fasores, como se muestra en la figura 37.9, pero recuerde mantener la relación de fase apropiada entre un fasor y el siguiente.
- El fasor resultante $\mathbf{E}_R$ es el vector suma de los fasores individuales. En cada instante la proyección de $\mathbf{E}_R$ a lo largo del eje vertical representa la variación en el tiempo de la onda resultante. El ángulo de fase α de la onda resultante es el ángulo entre $\mathbf{E}_R$ y el primer fasor. De acuerdo con la construcción de la figura 37.9 dibujada para cuatro fasores, se ve que el fasor de la onda resultante está dado por la expresión $E_P = E_R \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$.

Diagrama de fasores para dos fuentes coherentes

Como un ejemplo del método de fasores considere el patrón de interferencia producido por dos fuentes coherentes. La figura 37.10 representa los diagramas fasoriales para diversos valores de la diferencia de fase ϕ y los valores correspondientes de la diferencia de trayectoria δ, la cual se obtiene utilizando la ecuación 37.8. La intensidad luminosa en un punto es un máximo cuando $\mathbf{E}_R$ es un máximo; ello ocurre en $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ La intensidad luminosa en algún punto es cero cuando $\mathbf{E}_R$ es igual a cero. Esto pasa en $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ Tales resultados coinciden por completo con el procedimiento analítico descrito en la sección anterior.

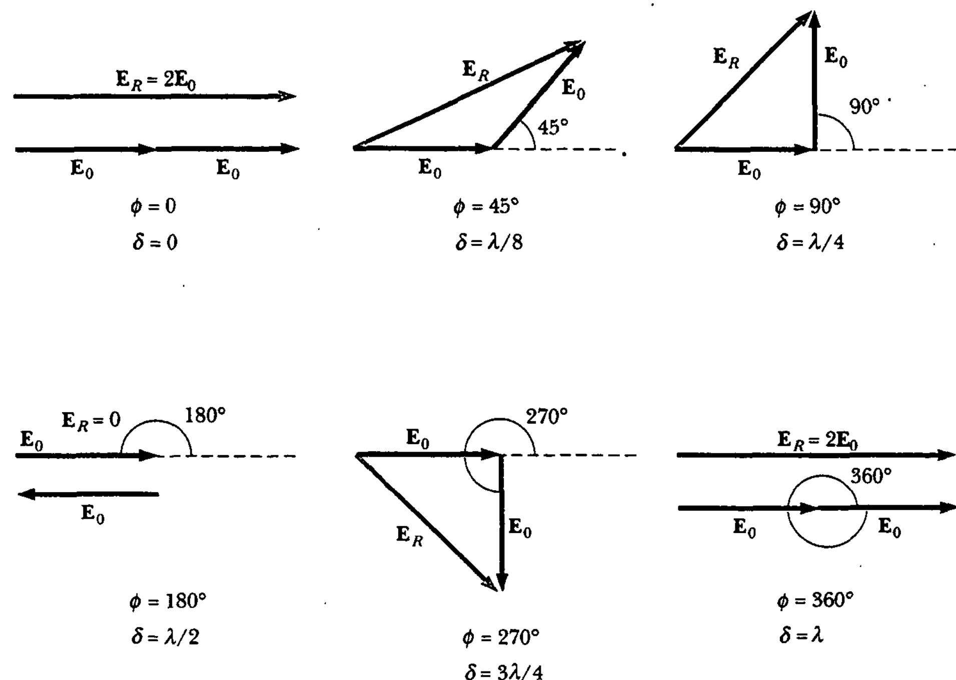


Figura 37.10 Diagrama de fasores para el patrón de interferencia de doble rendija. El fasor resultante $\mathbf{E}_R$ es un máximo cuando $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ y es cero cuando $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$

Patrón de interferencia de tres rendijas

Usando diagramas de fasores analizaremos el patrón de interferencia causado por tres rendijas igualmente espaciadas. Las componentes de campo eléctrico en un punto P sobre la pantalla causado por ondas provenientes de las rendijas individuales pueden expresarse como

$$E_1 = E_0 \text{ sen } \omega t$$
$$E_2 = E_0 \text{ sen}(\omega t + \phi)$$
$$E_3 = E_0 \text{ sen}(\omega t + 2\phi)$$

donde ϕ es la diferencia de fase entre ondas de rendijas adyacentes. Por tanto, la magnitud resultante del campo eléctrico en el punto P puede obtenerse del diagrama de fasores mostrado en la figura 37.11.

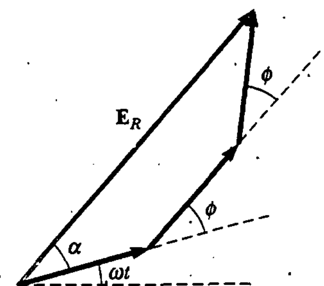


Figura 37.11 Diagrama de fasores para tres rendijas igualmente espaciadas.

Los diagramas de fasores para diversos valores de ϕ se muestran en la figura 37.12. Observe que la magnitud resultante del campo eléctrico en P tiene un valor máximo de $3E_0$, una condición que se presenta cuando $\phi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ Estos puntos se llaman *máximos primarios*. Los máximos primarios ocurren cuando los tres fasores se alinean como se muestra en la figura 37.12a. También encontramos que el máximo secundario de amplitud E_0 ocurre entre los máximos primarios en los puntos donde $\phi = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Para estos puntos la onda de una rendija cancela exactamente la de la otra rendija (véase la figura 37.12d). Lo anterior significa que sólo la luz de la tercera rendija contribuye a la resultante, lo cual da como resultado una amplitud total de E_0. La interferencia destructiva total ocurre siempre que los tres fasores formen un triángulo cerrado, como se muestra en la figura 37.12c. Dichos puntos en los que $E_R = 0$ corresponden a $\phi = \pm 2\pi/3, \pm 4\pi/3, \ldots$ Usted debe ser capaz de construir otros diagramas de fasores para valores de ϕ mayores que π.

La figura 37.13 muestra patrones de interferencia de rendijas múltiples para varias configuraciones. Para estas tres rendijas advierta que los máximos primarios son nueve veces más intensos que los máximos secundarios como se mide por la altura de la curva. Esto se debe a que la intensidad varía como E_R^2. Para N rendijas la intensidad de los máximos primarios es N^2 veces más grande que la debida a una sola rendija. Conforme el número de rendijas aumenta, el máximo primario aumenta en intensidad y se vuelve más estrecho, mientras que el máximo secundario disminuye en intensidad respecto al máximo primario. La figura 37.13 muestra también que cuando el número de rendijas aumenta, el número de máximos secundarios también aumenta. De hecho, el número de máximos secundarios siempre es igual a $N - 2$, donde N es el número de rendijas.

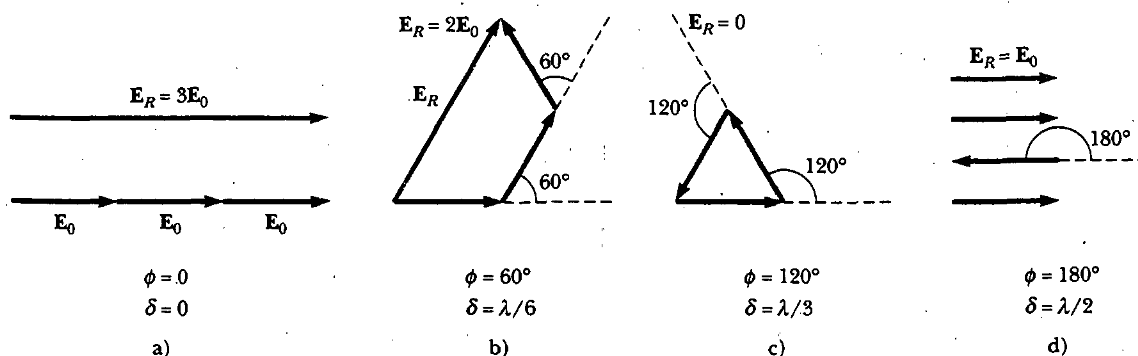


Figura 37.12 Diagrama de fasores para tres rendijas igualmente espaciadas a diversos valores de ϕ. Advierta en (a) que hay máximos primarios de amplitud $3E_0$ y en (d) que hay máximos secundarios de amplitud E_0.

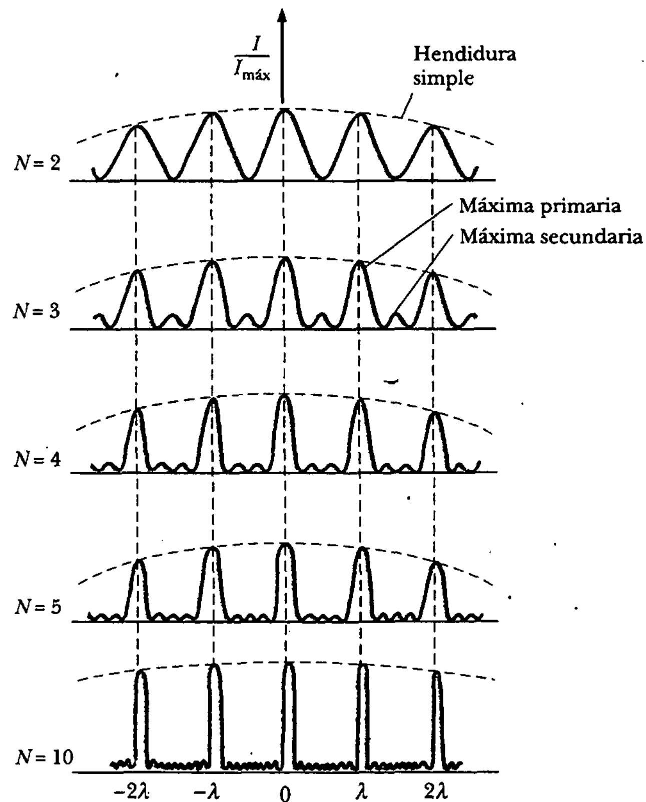


Figura 37.13 Patrón de interferencia de múltiples rendijas. Conforme el número de rendijas N aumenta, los máximos primarios (los picos más altos de cada gráfica) se vuelven más estrechos pero permanecen fijos en posición y el número de máximos secundarios se incrementa. Para cualquier valor de N la reducción en la intensidad en los máximos a la izquierda y a la derecha del máximo central, indicado por los arcos discontinuos en azul, se debe a la difracción, la cual se estudia en el capítulo 38.

Pregunta sorpresa 37.3

Usando como modelo la figura 37.13 bosqueje el patrón de interferencia para seis rendijas.

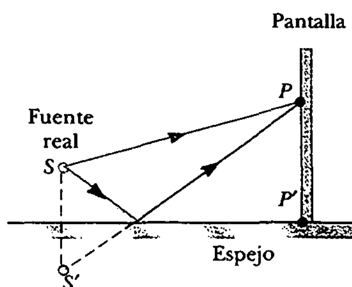


Figura 37.14 Espejo de Lloyd. Un patrón de interferencia se produce sobre una pantalla en P como resultado de la combinación del rayo directo (azul) y el rayo reflejado (rojo). El rayo reflejado experimenta un cambio de fase de 180°.

CAMBIO DE FASE DEBIDO A LA REFLEXIÓN

El método de Young para producir dos fuentes luminosas coherentes incluye la iluminación de un par de rendijas con una sola fuente. Otro arreglo sencillo, pero ingenioso, para producir un patrón de interferencia con una sola fuente luminosa se conoce como *espejo de Lloyd* (véase la figura 37.14). Se coloca una fuente luminosa en el punto S cerca de un espejo, y a cierta distancia, en ángulo recto en relación con éste, se coloca la pantalla de observación. Las ondas pueden alcanzar el punto P en la pantalla, ya sea por la trayectoria directa SP o por la que implica reflexión del espejo. El rayo reflejado puede tratarse como uno que se origina de una fuente virtual en S'. Como resultado, se considera este arreglo como una fuente de doble rendija con la distancia entre los puntos S y S' comparable con la longitud d de la

figura 37.14. Así, en puntos de observación lejos de la fuente ($L \gg d$), se esperan ondas desde los puntos S y S' que formen un patrón de interferencia igual al que se observa desde dos fuentes coherentes reales. Se observa, como se esperaba, un patrón de interferencia. Sin embargo, las posiciones de las franjas oscuras y brillantes se invierten en relación con el patrón que crean las dos fuentes coherentes reales (experimento de Young). Esto es porque las fuentes coherentes en los puntos S y S' difieren en fase por 180°, un cambio de fase producido por reflexión.

Para ilustrarlo considere el punto P', el punto en que el espejo cruza la pantalla. Este punto es equidistante de los puntos S y S'. Si la diferencia de trayectoria se debiera sólo a la diferencia de fase, se esperaría ver una franja brillante en el punto P' (puesto que la diferencia de trayectoria es cero en este punto), lo que corresponde a la franja central brillante del patrón de interferencia de doble rendija. En lugar de eso observamos una franja oscura en el punto P' debido al cambio de fase de 180° producido por la reflexión. En general,

una onda electromagnética experimenta un cambio de fase de 180° en la reflexión de un medio que tiene mayor índice de refracción que el medio en el cual la onda está viajando.

Es útil hacer una analogía entre las ondas luminosas reflejadas y las reflexiones de un pulso de onda transversal en una cuerda alargada (véase la sección 16.6). El pulso reflejado en una cuerda experimenta un cambio de fase de 180° cuando se refleja en la frontera de un medio denso, pero no ocurre cambio de fase cuando se refleja desde la frontera de un medio menos denso. De manera similar, una onda electromagnética experimenta un cambio de fase de 180° cuando se refleja desde una primera frontera a un medio ópticamente denso, pero no hay cambio de fase cuando la onda se refleja desde una primera frontera a un medio menos denso. Estas reglas, que se resumen en la figura 37.15, pueden deducirse de las ecuaciones de Maxwell, pero el tratamiento está más allá del alcance de este libro.

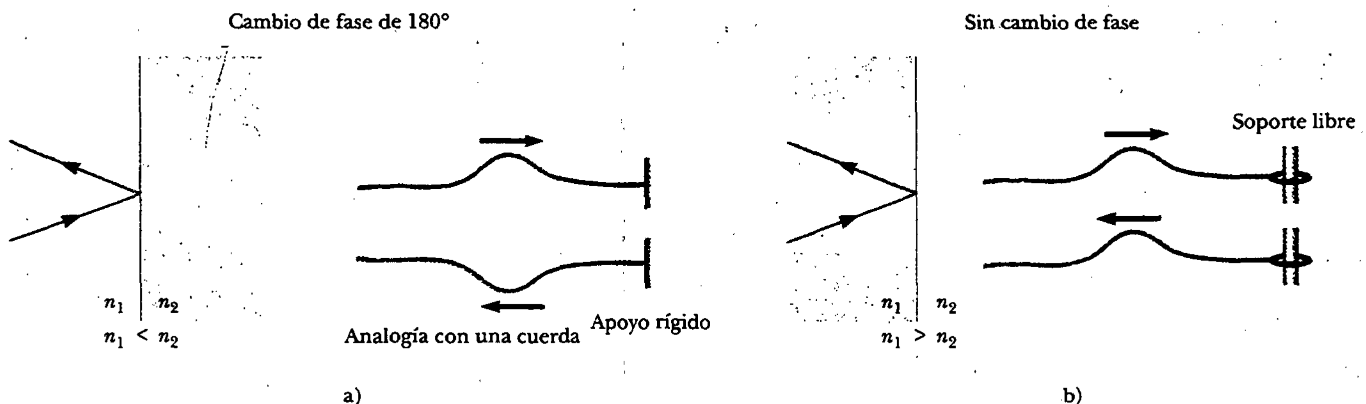


Figura 37.15 a) Para $n_1 < n_2$, un rayo que viaja en un medio 1 y que se refleja desde la superficie del medio 2 experimenta un cambio de fase de 180°. Lo mismo sucede con un pulso reflejado viajando sobre una cuerda fija en un extremo. b) Un rayo que viaja en el medio 1 y que se refleja en la superficie del medio 2, $n_1 > n_2$, no experimenta cambio de fase. Lo mismo es verdad de un pulso de onda reflejado en una cuerda cuyo extremo apoyado está libre.

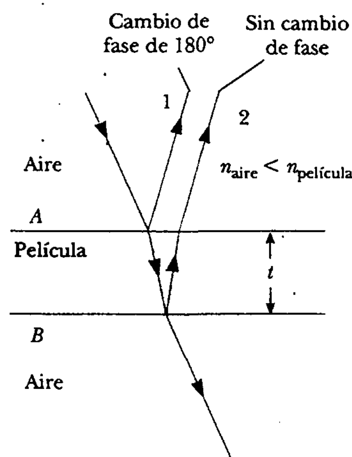


Figura 37.16 La interferencia en la luz reflejada sobre una película delgada se debe a una combinación de rayos reflejados en las superficies superior e inferior de la película.



INTERFERENCIA EN PELÍCULAS DELGADAS

Los efectos de interferencia por lo común se observan en películas delgadas, como capas delgadas de aceite en agua o la delgada superficie de una pompa de jabón. Los diversos colores que se observan cuando incide la luz blanca sobre estas películas son resultado de la interferencia de ondas reflejadas en las dos superficies de la película.

Considere una película de espesor uniforme t e índice de refracción n, como se muestra en la figura 37.16. Suponga que los rayos luminosos que viajan en el aire son casi normales a las dos superficies de la película. Para determinar si los rayos reflejados interfieren en forma constructiva o destructiva observe primero los siguientes hechos:

- Una onda que viaja de un medio de índice de refracción n_1 hacia un medio de índice de refracción n_2 experimenta un cambio de fase de 180° en la reflexión cuando $n_2 > n_1$, y no experimenta cambio de fase en la onda reflejada si $n_2 < n_1$.
- La longitud de onda de la luz λ_n en un medio cuyo índice de refracción es n (véase la sección 35.5) es

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} \qquad \textbf{(37.14)}$$

donde λ es la longitud de onda de la luz en el espacio libre.

Apliquemos estas reglas a la película de la figura 37.16, donde $n_{película} > n_{aire}$. El rayo 1, que se refleja en la superficie superior (A), experimenta un cambio de fase de 180° respecto de la onda incidente, y el rayo 2, el cual se refleja en la superficie inferior (B), no experimenta cambio de fase debido a que se refleja de un medio (aire) que tiene menor índice de refracción. Por tanto, el rayo 1 está 180° fuera de fase en relación con el rayo 2, lo cual es equivalente a una diferencia de trayectoria de $\lambda_n/2$.



Interferencia en burbujas de jabón. Los colores se deben a la interferencia entre los rayos de luz reflejados desde las superficies frontal y posterior de la delgada película de jabón que forma la burbuja. El color depende del espesor de la película, recorriendo desde el negro donde la película es más delgada hasta el rojo donde es más gruesa. *(Dr. Jeremy Burgess/Science Photo Library)*




Los colores brillantes de las plumas de un pavo real se deben a la interferencia. La estructura laminada de las plumas causa interferencia constructiva para ciertos colores, como el azul y el verde. Los colores cambian conforme uno ve a las plumas del pavo real desde ángulos diferentes. Los colores iridiscentes de las mariposas y de los colibríes son el resultado de efectos de interferencia similares. *(© Diane Schiumo 1988/Fundamental Photographs)*

Sin embargo, debemos considerar que el rayo 2 viaja una distancia adicional $2t$ antes de que las ondas se recombinen en el aire arriba de la superficie A. Por ejemplo, si $2t = \lambda_n/2$, los rayos 1 y 2 se recombinan en fase, y el resultado es interferencia constructiva. En general, la condición para la interferencia constructiva en estas situaciones es

$$2t = (m + \tfrac{1}{2})\lambda_n \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(37.15)}$$

Dicha condición toma en cuenta dos factores: 1) la diferencia en la longitud de la trayectoria para los dos rayos (el término $m\lambda_n$) y 2) el cambio de fase de 180° en la reflexión (el término $\lambda_n/2$). Puesto que $\lambda_n = \lambda/n$, se puede escribir la ecuación 37.15 como

Condiciones para interferencia constructiva en películas delgadas

$$2nt = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(37.16)}$$

Si la distancia adicional $2t$ recorrida por el rayo 2 corresponde a un múltiplo de λ_n, las dos ondas se combinan fuera de fase y el resultado es interferencia destructiva. La ecuación general para la interferencia destructiva es

Condiciones para interferencia destructiva en películas delgadas

$$2nt = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(37.17)}$$

Las condiciones anteriores para interferencias constructiva y destructiva son válidas cuando el medio arriba de la superficie superior de la película es el mismo que el medio abajo de la superficie inferior. El medio circundante de la película puede tener índice de refracción menor o mayor que el de la película. En cualquier caso, los rayos reflejados en las dos superficies están fuera de fase en 180°. Si se coloca la película entre dos medios diferentes, uno con $n < n_{\text{película}}$ y el otro con $n > n_{\text{película}}$, entonces se invierten las condiciones para las interferencias constructiva y destructiva. Aquí, ya sea que exista un cambio de fase de 180° tanto para el rayo 1 que se refleja en la superficie A como para el rayo 2 que se refleja en la superficie B, o no haya cambio de fase para cualquier rayo; por tanto, el cambio neto es cero en fases relativas debido a los reflejos.

Pregunta sorpresa 37.4

En la figura 37.17, ¿dónde varía menos el espesor de la película de aceite?

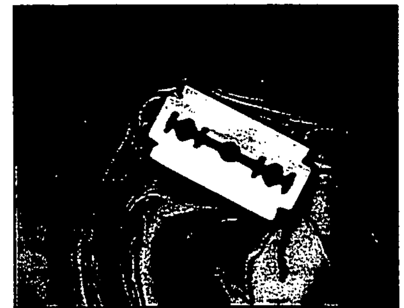


Figura 37.17 Una película delgada de aceite flotando en agua presenta interferencia, según muestra el patrón de colores que se produce cuando la luz blanca incide sobre la película. Variaciones en el espesor de la película producen el interesante patrón de colores. La navaja de rasurar da una idea del tamaño de las bandas de colores. (*Peter Aprahamian/Science Photo Library*)

Anillos de Newton

Otro método para observar interferencia de ondas luminosas es poner un lente plano-convexo en la parte superior de una superficie de vidrio plano, como se muestra en la figura 37.18a. Con este arreglo la película de aire entre la superficie de vidrio varía en espesor desde cero en el punto de contacto hasta algún valor t en el punto P. Si el radio de curvatura R del lente es mucho más grande que la distancia r, y si el sistema se ve desde arriba utilizando luz de una sola longitud de onda λ, se aprecia un patrón de anillos luminosos y oscuros. Una fotografía de este patrón se muestra en la figura 37.18b. Dichas franjas circulares, descubiertas por Newton, se denominan **anillos de Newton.**

El efecto de interferencia se debe a la combinación del rayo 1 reflejado en la placa plana, con el rayo 2 reflejado en la superficie curvada del lente. El rayo 1 experimenta un cambio de fase de 180° debido a la reflexión (puesto que se refleja en un medio de índice refractivo más alto) en tanto que el rayo 2 no sufre cambio de fase (porque se refleja en un medio de menor índice de refracción). Por tanto, las condiciones para interferencias constructiva y destructiva están dadas por las ecuaciones 37.16 y 37.17, respectivamente, con $n = 1$ porque la película es aire.

El punto de contacto en O es oscuro, como puede verse en la figura 37.18b, porque el rayo 1 experimenta un cambio de fase de 180° sobre el reflejo externo (de la

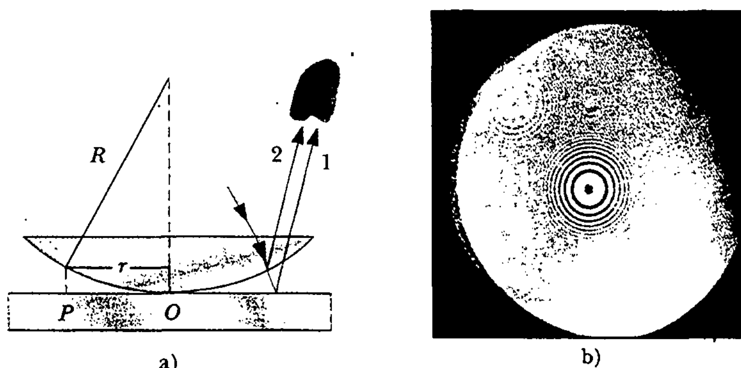


Figura 37.18 a) La combinación de rayos reflejados en la placa plana y en la superficie curva del lente origina un patrón de interferencia conocido como anillos de Newton. b) Fotografía de los anillos de Newton. (*Cortesía de Bausch and Lomb Optical Co.*)

superficie plana) en contraste, el rayo 2 no experimenta cambio de fase ante reflexión interna (en la superficie curva).

Empleando la geometría indicada en la figura 37.18a es posible obtener expresiones para los radios de las bandas brillantes y oscuras en función de los radios de curvatura R y la longitud de onda λ. Por ejemplo, los anillos oscuros tienen radios dados por la expresión $r \approx \sqrt{m\lambda R/n}$. Los detalles se dejan como problema para el lector (véase el problema 67). Al medir los radios de los anillos puede obtenerse la longitud de onda de la luz que causa el patrón de interferencia, siempre que se conozca R. Inversamente, se utiliza una longitud de onda conocida para obtener R.

Una de las aplicaciones importantes de los anillos de Newton es en la prueba de lentes ópticos. Un patrón circular como el que se presenta en la figura 37.18b se obtiene sólo cuando el lente está puesto sobre una curvatura perfectamente simétrica. Las variaciones de esta simetría producen un patrón como el que se muestra en la figura 37.19. Tales variaciones indican cómo el lente debe apoyarse y pulirse para eliminar imperfecciones.

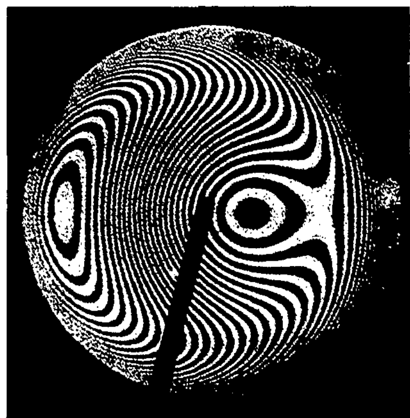


Figura 37.19 Este patrón de interferencia asimétrico indica imperfecciones en el lente de un aparato de anillos de Newton. (*De Physical Science Study Committee,* Colegio de Física, *Lexington, Mass., Heath, 1968.*)

Experimento sorpresa

Observe los colores que parecen arremolinarse en la superficie de una burbuja de jabón. ¿Qué ve antes de que explote la burbuja? ¿Por qué?

Sugerencias para resolver problemas

Interferencia de películas delgadas

Recuerde las siguientes ideas cuando trabaje problemas de interferencia de películas delgadas:

- Identifique la película delgada que produce la interferencia.
- El tipo de interferencia que ocurre se determina por medio de la relación de fase entre la porción de la onda reflejada en la superficie superior de la película y la porción reflejada en la superficie inferior.
- Las diferencias de fase entre las dos porciones de la onda tienen dos causas: 1) diferencias en las distancias recorridas por las dos porciones, y 2) cambios de fase que pueden ocurrir en la reflexión.
- Cuando se toma en cuenta tanto la distancia recorrida como los cambios de fase en la reflexión, la interferencia es constructiva si la diferencia de trayectoria equivalente entre las dos ondas es un múltiplo entero de λ, y destructiva si la diferencia de trayectoria es $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$, y así sucesivamente.

EJEMPLO 37 Interferencia en una película de jabón

Calcule el espesor mínimo de la película de una burbuja de jabón ($n = 1.33$) que origina interferencia constructiva en la luz reflejada si la película se ilumina con luz cuya longitud de onda en el espacio libre es $\lambda = 600$ nm.

Solución El espesor mínimo de película para interferencia constructiva en la luz reflejada corresponde a $m = 0$ en la ecuación 37.16. Esto produce $2nt = \lambda/2$, o

$$t = \frac{\lambda}{4n} = \frac{600\,\text{nm}}{4(1.33)} = 113\,\text{nm}$$

Ejercicio ¿Qué otro espesor de la película produce interferencia constructiva?

Respuesta 338 nm, 564 nm, 789 nm, y así sucesivamente.

EJEMPLO 37 Recubrimientos no reflejantes para celdas solares

Las celdas solares —dispositivos que generan electricidad cuando se exponen a la luz solar— con frecuencia se recubren con películas transparentes, delgadas, de monóxido de silicio (SiO, $n = 1.45$) con el fin de minimizar las pérdidas reflexivas en la superficie. Suponga que una celda solar de silicio ($n = 3.5$) se recubre con una película delgada de monóxido de silicio para dicho propósito (véase la figura 37.20). Determine el espesor mínimo de película que produce la menor reflexión a una longitud de onda de 550 nm, cercana al centro del espectro visible.

Solución La luz reflejada es un mínimo cuando los rayos 1 y 2 en la figura 37.20 cumplen la condición de interferencia destructiva. Advierta que en dicho caso ambos rayos experimentan un cambio de fase de 180° en la reflexión —el rayo 1 desde la superficie superior y el rayo 2 desde la superficie inferior de SiO—. Por tanto, el cambio neto en la fase debido a la reflexión es cero, y la condición para la reflexión mínima requiere una diferencia de trayectoria de $\lambda_n/2$; por tanto, $2t = \lambda/2n$, y el espesor requerido es

$$t = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550\,\text{nm}}{4(1.45)} = 94.8\,\text{nm}$$

Por lo común una celda solar sin recubrir tiene pérdidas reflexivas tan altas como 30%; con recubrimiento de SiO se reduce este valor a casi 10%. Esta importante disminución en las pérdidas reflexivas aumenta la eficiencia de la celda, porque menos reflexión significa que entra más luz solar al silicio para crear portadores de carga de celda. En realidad, el recubrimiento nunca es perfectamente antirreflejante porque el espesor requerido depende de la longitud de onda y la luz incidente cubre una amplia gama de longitudes de onda.

Los lentes de vidrio utilizados en las cámaras y otros instrumentos ópticos suelen recubrirse con una película delgada transparente para reducir o eliminar la reflexión indeseable. Aún más, estos recubrimientos incrementan la transmisión de luz a través de los lentes.

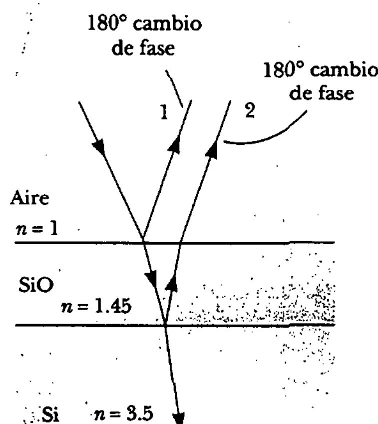
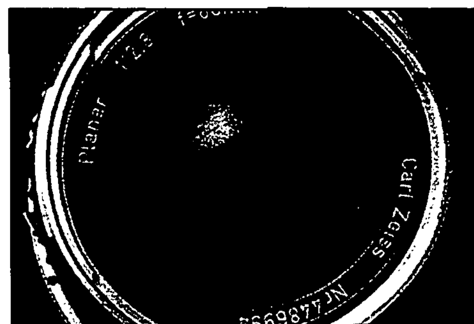


Figura 37.20 Las pérdidas reflexivas en una celda solar de silicio se minimizan recubriéndola con una película delgada de monóxido de silicio.



El lente de cámara tiene varios recubrimientos (de espesores diferentes) que minimizan la reflexión de ondas de luz que tienen longitudes de onda cercanas al centro del espectro visible. Como resultado, la pequeña luz que se refleja por el lente tiene una gran proporción de extremos lejanos del espectro y aparece rojizo-violeta. (*Kristen Brochmann/Fundamental Photographs*)

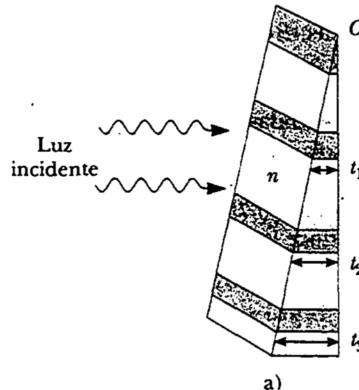
EJEMPLO 37.5 **Interferencia en una película en forma de cuña**

Una película delgada en forma de cuña de índice de refracción n se ilumina con luz monocromática de longitud de onda λ, como se ilustra en la figura 37.21a. Describa el patrón de interferencia observado en este caso.

Solución El patrón de interferencia, ya que se crea por una película delgada de espesor variable rodeada por aire, es una serie de franjas paralelas brillantes y oscuras alternas. Una franja oscura que corresponde a interferencia destructiva aparece en el punto O, la punta, ya que el rayo reflejado superior experimenta un cambio de fase de 180° mientras que el inferior no.

De acuerdo con la ecuación 37.17, otras bandas oscuras aparecen cuando $2nt = m\lambda$, por lo que $t_1 = \lambda/2n$, $t_2 = \lambda/n$, $t_3 = 3\lambda/2n$, etcétera. De manera similar, el máximo brillo se observa en los lugares en que el espesor satisface la ecuación 37.16, $2nt = (m + \frac{1}{2})\lambda$, lo que corresponde a un espesor de $\lambda/4n$, $3\lambda/4n$, $5\lambda/4n$, y así sucesivamente.

Si se emplea luz blanca, se observan bandas de colores distintos en diferentes puntos, lo que corresponde a las diferentes longitudes de onda de la luz (véase la figura 37.21b). Ésta es la razón por la que se ven colores diferentes en las burbujas de jabón.



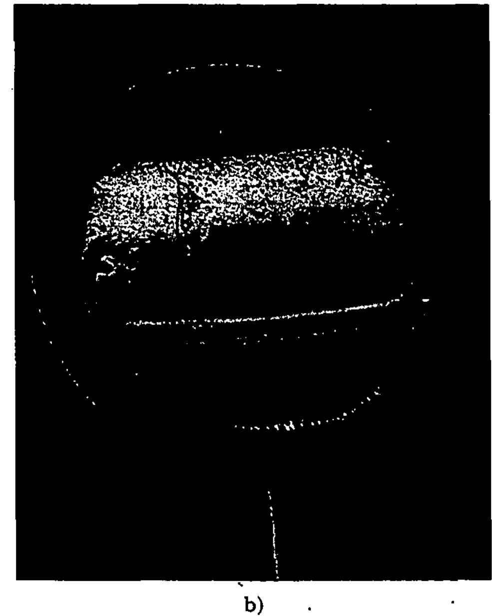


Figura 37.21 a) Bandas de interferencia en luz reflejada pueden observarse iluminando una película en forma de cuña con luz monocromática. Las áreas oscuras corresponden a regiones donde los rayos tienden a cancelarse unos a otros debido a los efectos de interferencia. b) Interferencia en una película vertical de espesor variable. La parte superior de la película aparece más oscura donde la película es más delgada. (*Richard Megna/Fundamental Photographs*)

Sección opcional

EL INTERFERÓMETRO DE MICHELSON

El **interferómetro**, inventado por el físico estadounidense A. A. Michelson (1852-1931), divide un haz luminoso en dos partes y después las recombina para formar un patrón de interferencia. El dispositivo puede utilizarse para medir con gran precisión longitudes de onda u otras longitudes.

Un diagrama esquemático del interferómetro se muestra en la figura 37.22. Un rayo de luz proporcionado por una fuente monocromática se divide en dos rayos por medio de un espejo M inclinado a 45° en relación con el haz de luz incidente. El espejo M, conocido como *divisor del haz*, transmite la mitad de luz incidente en él y refleja el resto. Un rayo se refleja desde M verticalmente hacia arriba, hacia el espejo M_1, en tanto que el segundo rayo se transmite en forma horizontal a través de M hacia el espejo M_2. Por tanto, los dos rayos recorren trayectorias independientes L_1 y L_2. Después de reflejarse en M_1 y M_2, los dos rayos se recombinan finalmente en M para producir un patrón de interferencia, el cual puede verse a través de un telescopio. La placa de vidrio P, de igual espesor que el espejo M, se coloca en la trayectoria del rayo horizontal para asegurar que los dos rayos de regreso recorran el mismo espesor del vidrio.

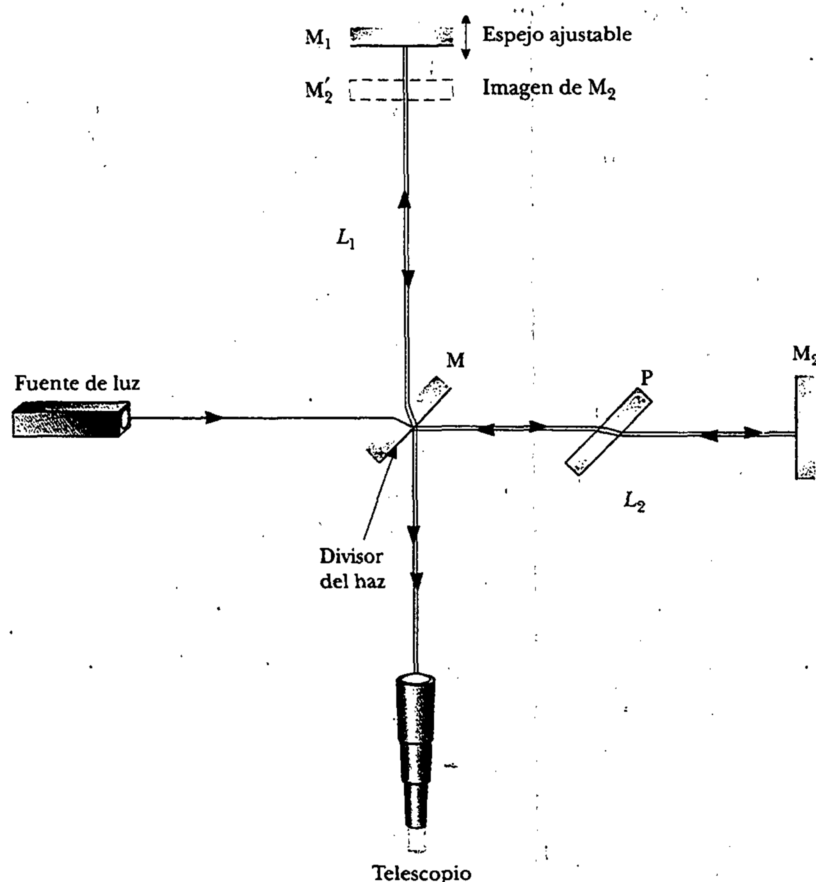


Figura 37.22 Diagrama del interferómetro de Michelson. Un solo rayo de luz se separa en dos rayos por el espejo M, que se llama divisor del haz. La diferencia de trayectoria entre los dos rayos se varía con el espejo ajustable M_1. Conforme M_1 se mueve hacia M, se mueve un patrón de interferencia a través del campo de visión.

La condición de interferencia para los dos rayos se determina por la diferencia en sus longitudes de trayectoria. Cuando los dos rayos se ven como se muestra, la imagen de M_2 producida por el espejo M está en M_2 que es casi paralela a M_1. (Ya que M_1 y M_2 no son exactamente perpendiculares entre sí, la imagen M_2 está a un leve ángulo de M_1.) Así, el espacio efectivo entre M_2 y M_1 es el equivalente a una película en forma de cuña de aire. El espesor efectivo de la película de aire se varía moviendo el espejo M_1 paralelo a sí mismo con un tornillo de rosca fina. En estas condiciones el patrón de interferencia es una serie de franjas paralelas brillantes y oscuras como se describió en el ejemplo 37.5. Conforme M_1 se mueve, el patrón de franjas se corre. Por ejemplo, si aparece una franja oscura en el campo de visión (correspondiente a la interferencia destructiva) y M_1 se mueve después una distancia $\lambda/4$, hacia M, la diferencia de trayectoria cambia en $\lambda/2$ (el doble de la separación entre M_1 y M_2). Lo que era una franja oscura ahora será una franja brillante. A medida que M_1 se mueve una distancia adicional $\lambda/4$ hacia M, la franja brillante será una franja oscura. Así, el patrón de las franjas se corre media franja cada vez que M_1 se mueve una distancia $\lambda/4$. La longitud de onda de la luz se mide contando el número de franjas que se corren un desplazamiento determinado de M_1. Si la longitud de onda se conoce con exactitud (como con un haz de láser), los desplazamientos del espejo se miden hasta una fracción de la longitud de onda.

RESUMEN

La **interferencia** en ondas luminosas ocurre siempre que dos o más ondas se traslapan en un punto dado. Un patrón de interferencia sostenido se observa si 1) las fuentes son coherentes, y 2) las fuentes tienen idénticas longitudes de onda.

En el experimento de doble rendija de Young, dos rendijas S_1 y S_2 separadas por una distancia d se iluminan por medio de una fuente luminosa de una sola longitud de onda. Se observa un patrón de interferencia que consta de franjas brillantes y oscuras sobre una pantalla de observación. La condición para las franjas brillantes (**interferencia constructiva**) es

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \textbf{(37.2)}$$

La condición de franjas oscuras (**interferencia destructiva**) es

$$d \operatorname{sen} \theta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \textbf{(37.3)}$$

El número m se denomina **número de orden** de la franja.

La **intensidad** en un punto del patrón de interferencia de doble rendija es

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2\left(\frac{\pi d \operatorname{sen} \theta}{\lambda}\right) \qquad \textbf{(37.12)}$$

donde $I_{\text{máx}}$ es la intensidad máxima sobre la pantalla y la expresión representa el tiempo promedio.

Una onda que viaja de un medio de índice de refracción n_1 hacia un medio de índice de refracción n_2 experimenta un cambio de fase de 180° en la reflexión cuando $n_2 > n_1$. No hay cambio de fase cuando $n_2 < n_1$.

La condición para la interferencia constructiva en una película de espesor t e índice de refracción n rodeado por aire es

$$2nt = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(37.16)}$$

donde λ es la longitud de onda de la luz en el espacio libre.

De manera similar, la condición para interferencia destructiva en una película delgada es

$$2nt = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{(37.17)}$$

PREGUNTAS

1. ¿Cuál es la condición necesaria en la diferencia de longitud de trayectoria entre dos ondas que interfieren a) en forma constructiva y b) en forma destructiva?
2. Explique por qué dos linternas que se mantienen muy próximas no producen un patrón de interferencia sobre una pantalla distante.
3. Si el experimento de doble rendija de Young se efectuara bajo el agua, ¿cómo se afectaría el patrón de interferencia observado?
4. En el experimento de doble rendija de Young, ¿por qué empleamos luz monocromática? Si se emplea luz blanca, ¿cómo cambiaría el patrón?
5. Considere una franja oscura en un patrón de interferencia, en el que casi no llega luz. La luz de ambas rendijas está llegando a este punto, pero las ondas se cancelan. ¿Adónde va la energía?
6. Una película de aceite sobre agua brilla más en las regiones exteriores, donde ésta es más delgada. A partir de esta información, ¿qué se puede decir acerca del índice de refracción del aceite respecto al del agua?
7. En nuestro análisis de interferencia de películas delgadas se observa la luz que se *refleja* en una película delgada. Considere un rayo de luz, el rayo directo, que se transmite a través de la película sin reflejarse. Considere un segundo rayo, el rayo reflejado que se transmite a través de la primera superficie, se refleja en la segunda, y se refleja nuevamente en la primera, y después se transmite hacia afuera en el aire, paralelo a la dirección del rayo. Para incidencia normal, ¿qué espesor debe tener la película, en función de la longitud de onda de la luz, para que los rayos salientes interfieran en forma destructiva? ¿Es este espesor igual al de la interferencia destructiva reflejada?
8. Suponga que está viendo la televisión conectada a una antena en lugar de a un sistema de cable y que un avión vuela cerca de su localidad produciendo imágenes fantasmas en la pantalla del televisor. ¿A qué podría deberse esto?
9. Si se observara interferencia en una película delgada, ¿por qué la película no debe ser muy gruesa (en el orden de pocas longitudes de onda)?

10. Un lente con radio exterior de curvatura R e índice de refracción n reposa sobre una placa de vidrio plana, y la combinación se ilumina con luz blanca desde arriba. ¿Hay un lugar oscuro o iluminado en el centro del lente? ¿Qué significa si se observan anillos que no sean circulares?

11. ¿Por qué el lente en una cámara de buena calidad está recubierto con una película delgada?

12. ¿Por qué es mucho más fácil efectuar experimentos de interferencia con un láser que con una fuente luminosa ordinaria?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** = use computadora para resolver el problema = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 37.1 Condiciones para la interferencia
Sección 37.2 Experimento de la doble rendija de Young

1. Un haz láser ($\lambda = 632.8$ nm) incide sobre dos rendijas separadas 0.200 mm. ¿Aproximadamente qué distancia separa las franjas de interferencia brillantes sobre una pantalla de 5.00 m alejadas de las rendijas?

2. Un experimento de interferencia de Young se realiza con luz monocromática. La separación entre las rendijas es 0.500 mm, y el patrón de interferencia sobre una pantalla a 3.30 m muestra el primer máximo a 3.40 mm del centro del patrón. ¿Cuál es la longitud de onda?

WEB [3.] Dos antenas de radio separadas 300 m, como se ve en la figura P37.3 transmiten simultáneamente señales idénticas a la misma longitud de onda. Un radio en un auto que viaja rumbo al norte las recibe. a) Si el auto está en la posición del segundo máximo, ¿cuál es la longitud de onda de las señales? b) ¿Qué distancia debe viajar un auto para encontrar el siguiente mínimo? (*Advertencia:* No emplee aproximaciones de ángulo pequeño en este problema.)

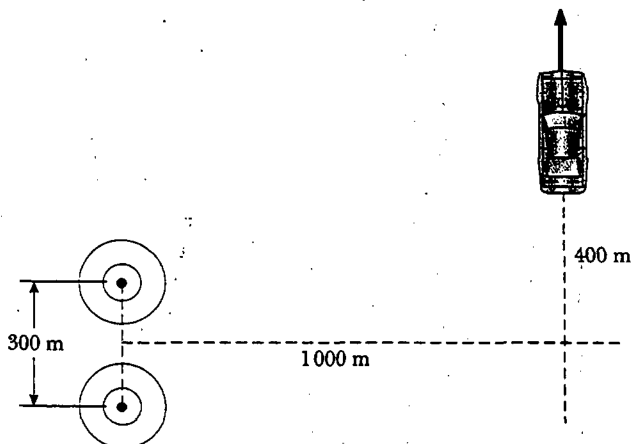


Figura P37.3

4. En una posición donde la rapidez del sonido es 354 m/s, una onda sonora de 2 000 Hz choca contra dos rendijas que están separadas 30.0 cm. a) ¿A qué ángulo se localiza el primer máximo? b) Si la onda sonora se reemplaza por microondas de 3.00 cm, ¿qué separación de las rendijas da el mismo ángulo para el primer máximo? c) Si la separación es de 1.00 μm, ¿qué frecuencia de la luz da el mismo primer ángulo máximo?

WEB [5.] El experimento de doble rendija de Young se realizó con luz de 589 nm y una distancia de rendija a pantalla de 2.00 m. El décimo mínimo de interferencia se observa a 7.26 mm del máximo central. Determine el espaciamiento de las rendijas.

6. Los dos altavoces de una caja acústica están separados 35.0 cm Un oscilador sencillo hace que los altavoces vibren en fase a una frecuencia de 2.00 kHz. ¿A qué ángulos, medidos desde el bisector perpendicular de la línea que une a los altavoces, un observador distante escucharía la máxima intensidad de sonido? ¿Y la mínima? (Tome la rapidez del sonido como 340 m/s.)

[7.] Un par de rendijas paralelas estrechas que están separadas 0.250 mm son iluminadas por luz verde ($\lambda = 546.1$ nm). El patrón de interferencia se observa en una pantalla a 1.20 m de distancia desde el plano de las rendijas. Calcule la distancia a) desde el máximo central a la primera región brillante en cualquier lado del máximo central y b) entre la primera y la segunda bandas oscuras.

8. Luz con una longitud de onda de 442 nm pasa por un sistema de doble rendija entre las cuales hay una separación $d = 0.400$ mm. Determine a qué distancia debe colocarse la pantalla de modo que las franjas oscuras aparezcan directamente opuestas a ambas rendijas, con sólo una franja brillante entre ellas.

9. Un almacén a la orilla del río tiene dos puertas abiertas, como se muestra en la figura P37.9. Sus paredes están forradas con material absorbente del sonido. Un bote sobre el río suena su bocina. Para la persona A el sonido es intenso y claro. Para la persona B el sonido apenas es audible. La longitud de onda principal de las ondas sonoras es de 3.00 m. Suponga que la persona B está en la posición del primer mínimo y determine la distancia entre las dos puertas de centro a centro.

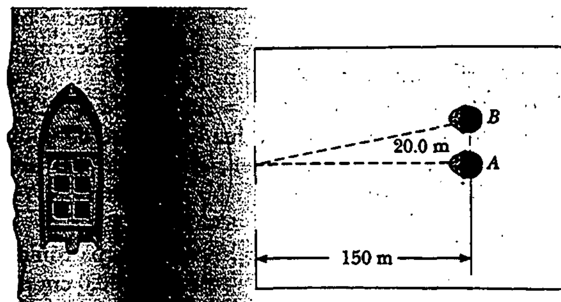


Figura P37.9

10. Dos rendijas están separadas por 0.320 mm. Un haz de luz de 500 nm pega en las rendijas produciendo un patrón de interferencia. Determine el número de máximos observados en el intervalo angular de $-30.0° < \theta < 30.0°$.

11. En la figura 37.4, donde $L = 1.20$ m y $d = 0.120$ mm, suponga que el sistema de rendija está iluminado con luz monocromática de 500 nm. Calcule la diferencia de fase entre los dos frentes de onda que llegan al punto P cuando a) $\theta = 0.500°$ y b) $y = 5.00$ mm. c) ¿Cuál es el valor de θ para el que la diferencia de fase es 0.333 rad? d) ¿Cuál es el valor de θ para el que la diferencia de trayectoria es $\lambda/4$?

12. Considere rayos de luz coherente de longitud de onda λ que inciden sobre dos rendijas separadas por una distancia d a un ángulo θ_1 como se muestra en la figura P37.12. Si un máximo de interferencia se forma a un ángulo θ_2 lejos de las rendijas, muestre que $d(\text{sen } \theta_2 - \text{sen } \theta_1) = m\lambda$, donde m es un entero.

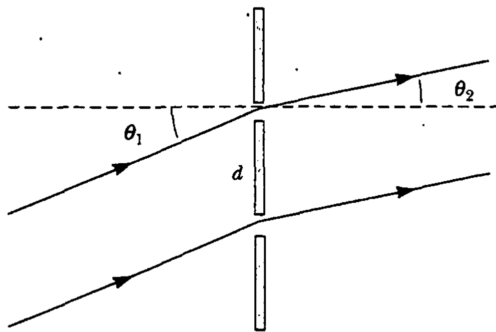


Figura P37.12

13. En el arreglo de doble rendija de la figura 37.4, $d = 0.150$ mm, $L = 140$ cm, $\lambda = 643$ nm, y $y = 1.80$ cm. a) ¿Cuál es la diferencia de trayectoria d para los rayos que provienen de las dos rendijas y llegan a P? b) Exprese esta diferencia de trayectoria en términos de λ. c) ¿El punto P corresponde a un máximo, un mínimo o una condición intermedia?

Sección 37.3 Distribución de intensidad del patrón de interferencia de doble rendija

14. La intensidad en la pantalla en un cierto punto en un patrón de interferencia de doble rendija es 64.0% del valor máximo. a) ¿Qué diferencia de fase mínima (en radianes) entre las fuentes produce este resultado? b) Exprese esta diferencia de fase como la diferencia de trayectoria para luz de 486.1 nm.

WEB **15.** En la figura 37.4 considere $L = 120$ cm y $d = 0.250$ cm. Las rendijas se iluminan con luz coherente de 600 nm. Calcule la distancia y sobre el máximo central para el que la intensidad promedio sobre la pantalla es 75.0% del máximo.

16. Dos rendijas están separadas 0.180 mm. Un patrón de interferencia se forma sobre una pantalla a 80.0 cm por la luz de 656.3 nm. Calcule la fracción de la intensidad máxima 0.600 cm sobre el máximo central.

17. Dos rendijas paralelas estrechas que están separadas por 0.850 mm son iluminadas por luz de 600 nm, y la pantalla de visión está a 2.80 m de estas rendijas. a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre las dos ondas que interfieren en una pantalla en un punto a 2.50 mm de la franja brillante central? b) ¿Cuál es la relación de la intensidad en este punto a la intensidad en el centro de la franja brillante?

18. Luz coherente monocromática de amplitud E_0 y frecuencia angular ω pasa por tres rendijas paralelas separadas cada una por una distancia d de su vecina. a) Muestre que la intensidad promedio en el tiempo como una función del ángulo θ es

$$I(\theta) = I_{\text{máx}}\left[1 + 2\cos\left(\frac{2\pi d \text{ sen } \theta}{\lambda}\right)\right]^2$$

b) Determine la relación de las intensidades del máximo primario y el máximo secundario.

Sección 37.4 Suma fasorial de ondas

19. Marie Cornu inventó los fasores aproximadamente en 1880. Este problema le ayudará a ver su utilidad. Encuentre la amplitud y la constante de fase de la suma de dos ondas representadas por las expresiones

$$E_1 = (12.0 \text{ kN/C}) \text{ sen } (15x - 4.5t)$$

y

$$E_2 = (12.0 \text{ kN/C}) \text{ sen } (15x - 4.5t + 70°)$$

a) usando una identidad trigonométrica (véase el apéndice B) y b) al representar a las ondas por fasores. c) Encuentre la amplitud y la constante de fase de la suma de las tres ondas representadas por

$$E_1 = (12.0 \text{ kN/C}) \text{ sen } (15x - 4.5t + 70°)$$

$$E_2 = (15.5 \text{ kN/C}) \text{ sen } (15x - 4.5t - 80°)$$

y

$$E_3 = (17.0 \text{ kN/C}) \text{ sen } (15x - 4.5t + 160°)$$

20. Los campos eléctricos de tres fuentes coherentes se describen por medio de $E_1 = E_0 \text{ sen } \omega t$, $E_2 = E_0 \text{ sen}(\omega t + \phi)$ y $E_3 = E_0 \text{ sen}(\omega t + 2\phi)$. Considere que el campo resultante está representado por $E_P = E_R \text{ sen}(\omega t + \alpha)$. Emplee fasores para encontrar E_R y α cuando a) $\phi = 20.0°$, b) $\phi = 60.0°$, c) $\phi = 120°$. d) Repita cuando $\phi = (3\pi/2)$ rad.

WEB **21.** Determine la resultante de las dos ondas $E_1 = 6.0 \text{ sen}(100\pi t)$ y $E_2 = 8.0 \text{ sen}(100\pi t + \pi/2)$.

22. Suponga que las aberturas de rendija en un experimento de doble rendija de Young tienen tamaños diferentes, de modo que el campo eléctrico y la intensidad de cada rendija son diferentes. Si $E_1 = E_{01} \text{ sen}(\omega t)$ y $E_2 = E_{02} \text{ sen}(\omega t + \phi)$, demuestre que el campo eléctrico resultante es $E = E_0 \text{ sen}(\omega t + \theta)$, donde

$$E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos\phi}$$

y

$$\text{sen }\theta = \frac{E_{02}\text{ sen }\phi}{E_0}.$$

23. Emplee fasores para encontrar la resultante (magnitud y ángulo de fase) de dos campos representados por $E_1 = 12 \text{ sen } \omega t$ y $E_2 = 18 \text{ sen}(\omega t + 60°)$. (Observe que en este caso las amplitudes de los dos campos son diferentes.)

24. Dos ondas coherentes se describen mediante las expresiones

$$E_1 = E_0 \text{ sen}\left(\frac{2\pi x_1}{\lambda} - 2\pi f t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$E_2 = E_0 \text{ sen}\left(\frac{2\pi x_2}{\lambda} - 2\pi f t + \frac{\pi}{8}\right)$$

Determine la relación entre x_1 y x_2 que produce interferencia constructiva cuando las dos ondas se superponen.

25. Cuando se iluminan, cuatro rendijas paralelas separadas por el mismo espacio actúan como fuentes coherentes múltiples, pero difieren cada una en fase con la adyacente en un ángulo ϕ. Con un diagrama de fasores determine el valor más pequeño de ϕ para el cual la resultante de las cuatro ondas (que se supone son de igual amplitud) es cero.

26. Dibuje un diagrama de fasores para ilustrar la resultante de $E_1 = E_{01} \text{ sen } \omega t$ y $E_2 = E_{02} \text{ sen}(\omega t + \phi)$, donde $E_{02} = 1.50E_{01}$ y $\pi/6 \leq \phi \leq \pi/3$. Utilice el dibujo y la ley de los cosenos para demostrar que, para dos ondas coherentes, la intensidad resultante puede escribirse en la forma

$$I_R = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\phi$$

[27.] Considere N fuentes coherentes descritas por $E_1 = E_0 \text{ sen}(\omega t + \phi)$, $E_2 = E_0 \text{ sen}(\omega t + 2\phi)$, $E_3 = E_0 \text{ sen}(\omega t + 3\phi)$, . . . , $E_N = E_0 \text{ sen}(\omega t + N\phi)$. Encuentre el valor mínimo de ϕ para el cual $E_R = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_N$ es cero.

Sección 37.5 Cambio de fase debido a la reflexión
Sección 37.6 Interferencia en películas delgadas

28. Una burbuja de jabón ($n = 1.33$) está flotando en el aire. Si el espesor de la pared de la burbuja es 115 nm, ¿cuál es la longitud de onda de la luz que se refleja con más fuerza?

[29.] Una película de aceite ($n = 1.45$) que flota sobre el agua es iluminada por medio de luz blanca que incide de manera normal. La película tiene un espesor de 280 nm. Encuentre a) el color dominante observado en la luz reflejada y b) el color dominante en la luz transmitida. Explique su razonamiento.

30. Una delgada película de aceite ($n = 1.25$) cubre un pavimento húmedo y liso. Cuando se observa en dirección perpendicular al pavimento, la película aparece predominantemente roja (640 nm) y no hay color azul (512 nm). ¿Cuál es su espesor?

31. Un medio posible para hacer invisible a un avión al radar es recubrirlo con un polímero antirreflejante. Si las ondas de radar tienen una longitud de onda de 3.00 cm y el índice de refracción del polímero es $n = 1.50$, ¿de qué grueso haría usted el recubrimiento?

32. Un material que tiene un índice de refracción de 1.30 se usa para recubrir una pieza de vidrio ($n = 1.50$). ¿Cuál debe ser el espesor mínimo de esta película para minimizar la reflexión de luz de 500 nm?

33. Una película de MgF_2 ($n = 1.38$) que tiene un espesor de 1.00×10^{-5} cm se usa para recubrir un lente de cámara. ¿Todas las longitudes de onda en el espectro visible se intensifican en la luz reflejada?

34. Los astrónomos observan la cromosfera del Sol con un filtro que pasa la línea espectral de la luz roja del hidrógeno de longitud de onda 656.3 nm, denominada línea H_α. El filtro consiste en un dieléctrico transparente de espesor d mantenido entre dos placas de vidrio parcialmente aluminizadas. El filtro se mantiene a temperatura constante. a) Encuentre el valor mínimo de d que produzca la máxima transmisión de luz perpendicular H_α, si el dieléctrico tiene un índice de refracción de 1.378. b) Suponga que la temperatura del filtro aumenta arriba de su valor normal y que su índice de refracción no cambia en forma significativa. ¿Qué le ocurre a la longitud de onda transmitida? c) ¿Qué longitudes de onda cerca de la región visible también pasarán por el dieléctrico? Una de las placas de vidrio está pintada de rojo para absorber esta luz.

35. Un haz de luz de 580 nm atraviesa dos placas de vidrio muy cercanas una de otra, como se muestra en la figura P37.35. ¿Para qué valor mínimo diferente de cero de la separación de las placas, d, la luz que se transmite es brillante?

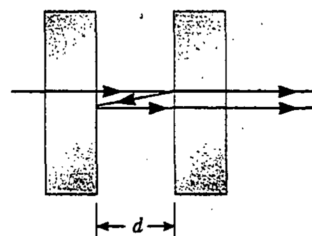


Figura P37.35

36. Cuando se introduce un líquido en el espacio de aire entre lentes y la placa en un aparato de anillos de Newton, el diámetro del décimo anillo cambia de 1.50 a 1.31 cm. Encuentre el índice de refracción del líquido.

WEB [37.] Una cuña de aire se forma entre dos placas de vidrio separadas en un borde por un alambre muy delgado, como se muestra en la figura P37.37. Cuando el borde se ilumina desde arriba con luz de 600 nm, se observan 30 franjas oscuras. Calcule el radio del alambre.

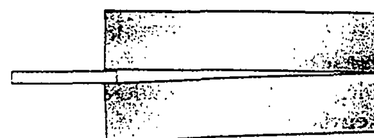


Figura P37.37

38. Dos placas de vidrio planas y rectangulares ($n = 1.52$) están en contacto a lo largo de un extremo y separadas a lo largo del otro extremo por una lámina de papel de 4.00×10^{-3} cm de espesor (véase la figura P37.37). La placa superior se ilumina con luz monocromática (λ = 546.1 nm). Calcule el número de bandas paralelas oscuras que cruzan la placa superior (incluya la banda oscura en el espesor cero a lo largo del borde de contacto entre las dos placas).

39. Dos placas de vidrio de 10.0 cm de longitud están en contacto en un extremo y separadas en el otro por un hilo de 0.050 0 mm de diámetro. La luz que contiene dos longitudes de onda de 400 nm y 600 nm incide de manera perpendicular. ¿A qué distancia del punto de contacto está la siguiente franja oscura?

(Opcional)

Sección 37.7 El interferómetro de Michelson

40. Se utiliza luz de 550.5 nm de longitud de onda para calibrar un interferómetro de Michelson, y el espejo M_1 se mueve 0.180 mm. ¿Cuántas franjas oscuras se cuentan?

[41.] El espejo M_1 en la figura 37.22 se desplaza una distancia ΔL. Durante dicho desplazamiento se cuentan 250 franjas invertidas (formación de bandas oscuras o brillantes sucesivas). Se emplea luz que tiene una longitud de onda de 632.8 nm. Calcule el desplazamiento ΔL.

42. Un haz de luz monocromática se envía hacia un interferómetro de Michelson. El espejo móvil se desplaza 0.382 mm, lo que origina que el patrón del interferómetro se reproduzca a sí mismo 1 700 veces. Determine la longitud de onda y el color de la luz

43. Un poste de un interferómetro de Michelson contiene un cilindro al vacío de 3.00 cm de largo y que tiene una placa de vidrio en cada borde. Se filtra lentamente un gas hacia el interior del cilindro hasta que se alcanza una presión de 1.00 atm. Si pasan 35 franjas brillantes sobre la pantalla cuando se utiliza luz de longitud de onda de 633 nm, ¿cuál es el índice de refracción del gas?

44. Un poste de un interferómetro de Michelson contiene un cilindro al vacío de largo L y que tiene una placa de vidrio en cada borde. Se filtra lentamente un gas hacia el interior del cilindro hasta que se alcanza una presión de 1 atm. Si pasan N franjas brillantes sobre la pantalla cuando se usa luz de longitud de onda λ, ¿cuál es el índice de refracción del gas?

PROBLEMAS ADICIONALES

45. Un radiotransmisor A operando a 60.0 MHz está a 10.0 m de otro transmisor similar B que está a 180° fuera de fase con el transmisor A. ¿A qué distancia se debe mover un observador del transmisor A hacia el transmisor B a lo largo de la línea que une a A y B para alcanzar el punto más cercano donde los dos haces están en fase?

46. Levante su mano y manténgala plana. Piense que el espacio entre su dedo índice y su dedo medio es una rendija, y que el espacio entre su dedo medio y su dedo anular es una segunda rendija. a) Considere la interferencia resultante de enviar luz coherente visible en forma perpendicular a través de este par de rendijas. Calcule una estimación del orden de magnitud para el ángulo entre zonas adyacentes de interferencia constructiva. b) Haga los ángulos en el patrón de interferencia fáciles de medir con un transportador. ¿De qué frecuencia o de qué orden de magnitud usaría una onda electromagnética? ¿Cómo se clasifica esta onda en el espectro electromagnético?

47. En un experimento de doble rendija de Young donde se usa luz de longitud de onda λ, una pieza delgada de plexiglás que tiene un índice de refracción n cubre una de las rejillas. Si el punto central en la pantalla es un lugar oscuro en lugar de un lugar brillante, ¿cuál es el espesor mínimo del plexiglás?

48. **Problema de repaso.** Una tira plana de vidrio se mantiene fija y horizontal arriba del extremo plano superior de una barra vertical de metal de 10.0 cm de largo y su extremo inferior rígidamente fijo. La película delgada de aire entre la barra y el vidrio se observa brillante por luz reflejada cuando se ilumina con luz de longitud de onda de 500 nm. Conforme la temperatura se incrementa lentamente en 25°C, la película cambia de brillante a oscuro y de regreso a brillante 200 veces. ¿Cuál es el coeficiente de expansión lineal del metal?

49. Un cierto aceite crudo tiene un índice de refracción de 1.25. Un barco descarga 1.00 m^3 de este aceite en el océano, y el aceite se desparrama en una película uniforme delgada. Si la película produce un máximo de primer orden en luz de longitud de onda de 500 nm que incide de manera normal sobre el aceite, ¿cuánta área superficial del océano cubre la película de aceite? Suponga que el índice de refracción del agua del océano es 1.34.

50. Se producen efectos de interferencia en un punto P en una pantalla como resultado de los rayos directos de una fuente de 500 nm y de los rayos reflejados del espejo, como se muestra en la figura P37.50. Si la fuente está 100 m a la izquierda de la pantalla y 1.00 cm arriba del espejo encuentre la distancia y (en milímetros) a la primera banda oscura arriba del espejo.

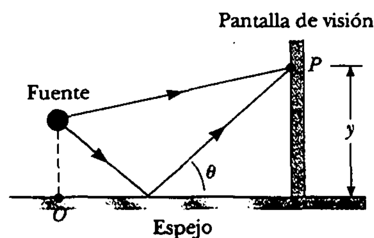


Figura P37.50

[51.] Ciertos astrónomos observan en el mar una fuente de radio de 60.0 MHz tanto directamente como por reflexión. Si la antena receptora se encuentra 20.0 m sobre el nivel del mar, ¿cuál es el ángulo de la fuente de radio sobre el horizonte en el primer máximo?

52. Las ondas de una estación de radio pueden llegar a un receptor doméstico por dos vías. Una es la trayectoria en línea recta del transmisor a la casa, a una distancia de 30 km. La segunda trayectoria es por reflexión en la ionosfera (una capa de moléculas de aire ionizadas en la parte superior de la atmósfera). Suponga que esta reflexión ocurre en un punto a la mitad entre el receptor y el transmisor. La longitud de onda transmitida por la esta-

ción de radio es de 350 m. Encuentre la altura mínima de la capa ionosférica que produce interferencia destructiva entre los haces directo y reflejado. (Suponga que no hay cambios de fase en la reflexión.)

53. Mediciones hechas de la distribución de intensidad en el patrón de interferencia de Young (véase la figura 37.6). En un valor particular de y se encuentra que $I/I_{máx} = 0.810$ cuando se usa luz de 600 nm. ¿Cuál es la longitud de onda de la luz que usaría si la intensidad relativa en la misma posición se reduce a 64.0%?

54. En un experimento de interferencia de Young las dos rendijas están separadas 0.150 mm y la luz incidente incluye luz de longitudes de onda $\lambda_1 = 540$ nm y $\lambda_2 = 450$ nm. Los patrones de interferencia que se traslapan se forman sobre una pantalla a 1.40 m de las rendijas. Calcule la distancia mínima desde el centro de la pantalla al punto donde una línea brillante de la luz de λ_1 coincide con una línea brillante de la luz de λ_2.

55. Una cuña de aire se forma entre dos placas de vidrio en contacto a lo largo de un borde y ligeramente separadas en el borde opuesto. Cuando las placas se iluminan con luz monocromática desde arriba, la luz reflejada tiene 85 franjas oscuras. Calcule el número de franjas oscuras que aparecerían si en lugar de aire se pusiera agua ($n = 1.33$) entre las placas.

56. Nuestro análisis de las técnicas para determinar las interferencias constructiva y destructiva por reflexión de una película delgada en aire está limitada a rayos que pegan en la película con incidencia casi normal. Suponga que un rayo está incidiendo a un ángulo de 30.0° (respecto a la normal) sobre una película que tiene un índice de refracción de 1.38. Calcule el espesor mínimo para la interferencia constructiva si la luz es luz de sodio con una longitud de onda de 590 nm.

57. La condición para interferencia constructiva por reflexión en una película delgada en aire, según se desarrolló en la sección 37.6, supone incidencia casi normal. a) Muestre que si la luz incide sobre la película a un ángulo diferente de cero ϕ_1 (respecto a la normal), entonces la condición para interferencia constructiva es $2nt \cos \theta_2 = (m + \frac{1}{2})\lambda$, donde θ_2 es el ángulo de refracción.

58. a) Los dos lados de una película uniforme que tiene un índice de refracción n y espesor d están en contacto con el aire. Para incidencia en dirección normal de la luz, se observa una intensidad mínima en la luz reflejada en λ_2 y se observa una intensidad máxima en λ_1, donde $\lambda_1 > \lambda_2$. Si no hay mínimos de intensidad observados entre λ_1 y λ_2, muestre que el entero m en las ecuaciones 37.16 y 37.17 está dado por $m = \lambda_1/2(\lambda_1 - \lambda_2)$. b) Determine el espesor de la película si $n = 1.40$, $\lambda_1 = 500$ nm y $\lambda_2 = 370$ nm.

59. La figura P37.59 muestra un transmisor y un receptor de ondas de radio separados por una distancia d y localizados a una distancia h sobre el suelo. El receptor puede recibir señales tanto directas del transmisor como indirectas reflejadas en el suelo. Suponga que el suelo está al mismo nivel entre las dos torres, y que ocurre un corrimiento de fase de 180° en la reflexión. Determine las longitudes de onda más largas que interfieren a) en forma constructiva y b) en forma destructiva.

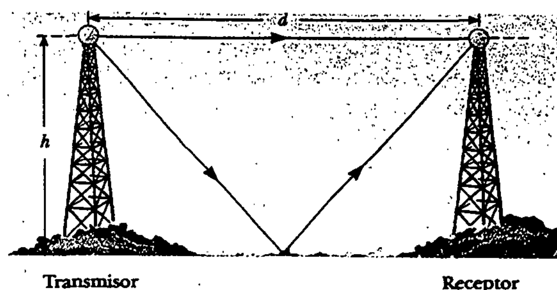


Figura P37.59

60. Considere el arreglo de doble rendija mostrado en la figura P37.60, donde la separación d está a 0.300 mm y la distancia L es 1.00 m. Una hoja de plástico transparente ($n = 1.50$) de 0.0500 mm de espesor (aproximadamente el espesor de esta página) se coloca sobre la rendija superior. Como resultado, el máximo central del patrón de interferencia se mueve hacia arriba una distancia y'. Encuentre esta distancia.

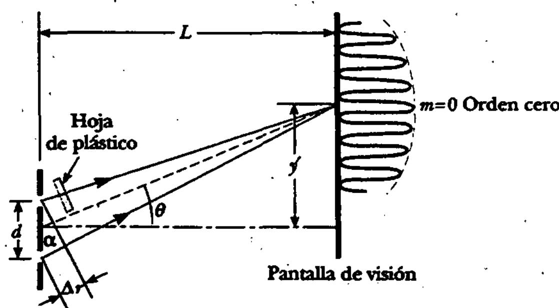


Figura P37.60 Problemas 60 y 61.

61. Considere el arreglo de doble rendija mostrado en la figura P37.60, donde la separación de las rendijas es d y la distancia rendija-pantalla es L. Una hoja de plástico transparente que tiene un índice de refracción n y un espesor t se coloca sobre la rendija superior. Como resultado, el máximo central del patrón de interferencia se mueve hacia arriba una distancia y'. Encuentre y'.

62. Una estación de radio transmite ondas de 1 500 kHz que llegan a un receptor en casa por dos vías. Una es una vía directa, y la otra es la reflexión de un avión que está exactamente arriba del receptor. El avión está aproximadamente 100 m arriba del receptor, y la distancia directa de la estación a la casa es de 20.0 km. ¿Cuál es la altura precisa del avión si ocurre interferencia destructiva? (Suponga que no hay cambio de fase cuando ocurre la reflexión.)

63. En un experimento de anillos de Newton, un lente de vidrio plano-convexo ($n = 1.52$) de 10.0 cm de diámetro se pone sobre una placa plana, como se muestra en la figura 37.18a. Cuando la luz de 650 nm incide en dirección normal, se observan 55 anillos brillantes, con el último anillo justo en el borde del lente. a) ¿Cuál es el radio de curvatura de la superficie convexa del lente? b) ¿Cuál es la longitud focal del lente?

64. Un pedazo de material transparente que tiene un índice de refracción n se corta en forma de cuña, como se

muestra en la figura P37.64. El ángulo de la cuña es pequeño, e incide luz monocromática de longitud de onda λ en dirección normal desde arriba. Si la altura de la cuña es h y el ancho es ℓ, muestre que las franjas brillantes ocurren en las posiciones $x = \lambda\ell\,(m + \frac{1}{2})/2hn$ y que las franjas oscuras ocurren en las posiciones $x = \lambda\ell m/2hn$, donde $m = 0, 1, 2, \ldots$ y x se mide como se indica.

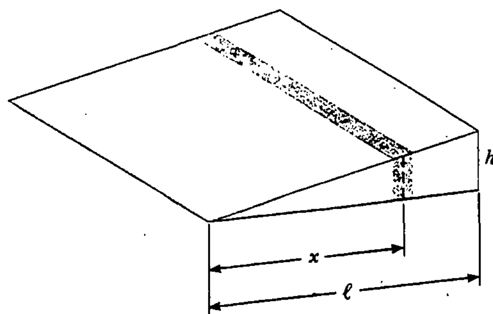


Figura P37.64

65. Use la suma de fasores para encontrar la amplitud resultante y la constante de fase cuando se combinan las siguientes tres funciones armónicas: $E_1 = \text{sen}(\omega t + \pi/6)$, $E_2 = 3.0\ \text{sen}(\omega t + 7\pi/2)$, $E_3 = 6.0\ \text{sen}\ (\omega t + 4\pi/3)$.

66. Un lente plano-convexo que tiene un radio de curvatura $r = 4.00$ m se coloca sobre una superficie reflejante cóncava cuyo radio de curvatura es $R = 12.0$ m, como se muestra en la figura P37.66. Determine el radio del anillo brillante número 100 si luz de 500 nm incide en dirección normal a la superficie plana del lente.

67. Un lente plano-convexo tiene un índice de refracción n. El lado curvo del lente tiene un radio de curvatura R y descansa sobre una superficie plana de vidrio de igual índice de refracción, con una película de índice $n_{\text{película}}$ entre ellos. Los lentes están iluminados desde arriba por luz de longitud de onda λ. Muestre que los anillos oscuros de Newton tienen radios dados aproximadamente por

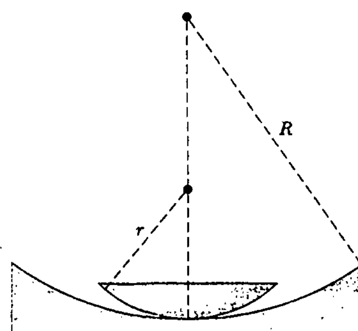


Figura P37.66

$$r \cong \sqrt{m\lambda R/n_{\text{película}}}$$

donde m es un entero y r es mucho menor que R.

68. Una película de jabón ($n = 1.33$) está contenida dentro de un marco rectangular de alambre. El marco se sostiene verticalmente, de modo que la película se desagua hacia abajo y se vuelve más gruesa en el fondo que en la parte superior, donde el grosor en esencia es cero. La película se ve con luz blanca con incidencia cercana a la normal, y la primera banda de interferencia violeta ($\lambda = 420$ nm) se observa a 3.00 cm del borde superior de la película. a) Localice la primera banda de interferencia roja ($\lambda = 680$ nm). b) Determine el espesor de la película en las posiciones de las bandas violeta y roja. c) ¿Cuál es el ángulo de cuña de la película?

69. Se producen franjas de interferencia utilizando un espejo de Lloyd y una fuente de 606 nm, como se muestra en la figura 37.14. Si franjas separadas 1.20 mm se forman sobre una pantalla a 2.00 m desde la fuente real S, encuentre la distancia vertical h de la fuente sobre la superficie reflejante.

70. La rendija 1 de una doble rendija es más ancha que la rendija 2, de manera que la luz que sale de la rendija 1 tiene una amplitud 3.00 veces la de la luz de la rendija 2. Muestre que en este caso la ecuación 37.11 tiene la forma $I = (4I_{\text{máx}}/9)(1 + 3\cos^2 \phi/2)$.

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

37.1 Bandas de luz a lo largo de las líneas naranja se intercalan con bandas oscuras que van a lo largo de las líneas negras discontinuas.

37.2 En la posición B. En A, que es una línea de interferencia constructiva, la superficie de agua se ondula tanto que quizá no pueda usted determinar la profundidad. Como B está sobre una línea de interferencia destructiva, el nivel del agua no cambia, y usted podrá leer la regla fácilmente.

37.3 La gráfica se muestra en la figura RPS37.1. El ancho del máximo primario es ligeramente más delgado que el ancho primario $N = 5$, pero más ancho que el ancho primario $N = 10$. Debido a que $N = 6$, los máximos secundarios son 1/36 de la intensidad de los máximos primarios.

37.4 La variación más grande es en el espesor, lo delgado de las bandas de color (como las líneas de un mapa topográfico). Las bandas más anchas son las doradas a lo largo del extremo izquierdo de la fotografía y en la esquina inferior derecha de la navaja de rasurar. Así, el espesor de la película de aceite cambia más lentamente con la posición en estas áreas.

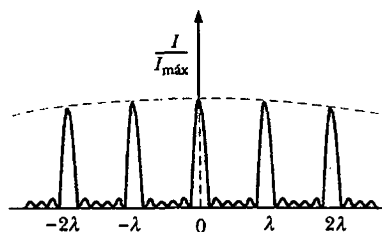


Figura RPS37.1

ACERTIJO

En el atardecer el cielo es radiante con brillantes rojos, rosas y naranjas. Sin embargo, no seríamos capaces de ver este atardecer si no fuera por el hecho de que otra persona viera simultáneamente un cielo azul. ¿Qué causa los hermosos colores de un atardecer, y por qué el cielo debe estar azul en otra parte para que nosotros lo disfrutemos? (*© W. A. Banaszewski/Visuals Unlimited*)

capítulo

38

Difracción y polarización

Líneas generales del capítulo

38.1 Introducción a la difracción
38.2 Difracción de rendijas estrechas
38.3 Resolución de abertura circular y de una sola rendija
38.4 La rejilla de difracción
38.5 (*Opcional*) Difracción de rayos X por cristales
38.6 Polarización de ondas luminosas

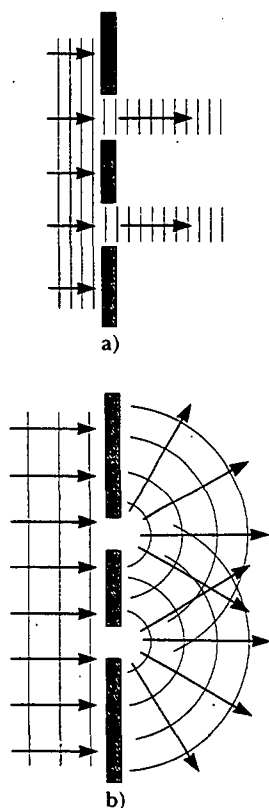


Figura 38.1 a) Si las ondas luminosas no se dispersaran después de pasar por las rendijas, no ocurriría interferencia. b) Las ondas luminosas de las dos rendijas se traslapan cuando se dispersan, llenan las regiones sombreadas esperadas con luz y producen franjas de interferencia.

Cuando las ondas luminosas pasan por una pequeña abertura, se observa un patrón de interferencia en lugar de un punto definido de luz. Tal conducta indica que la luz, una vez que ha pasado la abertura, se dispersa más allá de la estrecha trayectoria definida por la abertura en las regiones donde se esperaría una sombra si la luz viajara en líneas rectas. Otras ondas, como las sonoras y las que se producen en el agua, también tienen esta propiedad de dispersarse cuando pasan a través de aberturas o de bordes afilados. Dicho fenómeno, conocido como difracción, sólo puede ser descrito con un modelo ondulatorio de la luz.

En el capítulo 34 aprendimos que las ondas electromagnéticas son transversales, lo cual significa que los vectores de campos eléctrico y magnético son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. En este capítulo veremos que en ciertas condiciones las ondas transversales pueden polarizarse de diversas maneras.

INTRODUCCIÓN A LA DIFRACCIÓN

En la sección 37.2 aprendimos que cuando dos rendijas se iluminan por medio de una fuente luminosa de una sola longitud de onda se forma un patrón de interferencia sobre la pantalla de observación. Si la luz viajara sólo en su dirección original después de atravesar las rendijas, como se muestra en la figura 38.1a, las ondas no se traslaparían y no se observaría un patrón de interferencia. En vez de eso, el principio de Huygens requiere que las ondas se dispersen desde las rendijas, como se muestra en la figura 38.1b. En otras palabras, la luz se desvía de una trayectoria en línea recta y entra a la región que de otra manera estaría sombreada. Como se señaló en la sección 35.1, tal divergencia de la luz a partir de su línea inicial de recorrido se conoce como **difracción**.

En general, la difracción ocurre cuando las ondas pasan por pequeñas aberturas, alrededor de obstáculos o por bordes afilados, como se observa en la figura 38.2. Cuando se coloca un objeto opaco entre una fuente puntual y una pantalla, no existen fronteras definidas en la pantalla entre una región sombreada y una región iluminada. La región iluminada arriba de la sombra del objeto contiene franjas de luz brillantes y oscuras alternándose. A este despliegue se le conoce como **patrón de difracción.**

La figura 38.3 muestra un patrón de difracción asociado con la sombra de una pequeña moneda. Hay un sitio brillante en el centro y franjas circulares se extienden hacia afuera desde el borde de la sombra. El sitio brillante central puede explicarse sólo por medio de la teoría ondulatoria de la luz, la cual predice interferencia

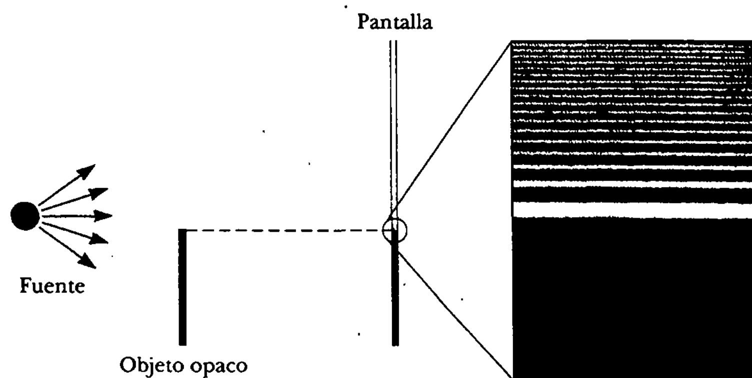


Figura 38.2 La luz de una pequeña fuente pasa por el borde de un objeto opaco. Se podría esperar que no apareciese luz en la pantalla debajo de la posición del borde del objeto. En realidad, la luz se desvía en el borde superior del objeto y entra en esta región. Debido a estos efectos, un patrón de difracción que consiste en franjas brillantes y oscuras aparece en la región arriba del extremo del objeto.

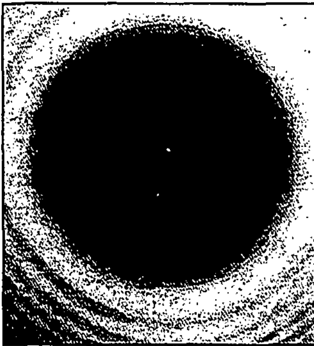


Figura 38.3 Patrón de difracción creado por la iluminación de una pequeña moneda, con la moneda colocada a la mitad de la distancia entre la pantalla y la fuente de luz. (*P.M. Rinard*, Am. J. Phys. *44:70, 1976.*)

constructiva en ese punto. De acuerdo con el punto de vista de la óptica geométrica (en donde la luz se ve como rayos que viajan en línea recta) se esperaría que el centro de la sombra sea oscuro, porque esa parte de la pantalla de observación está completamente cubierta por la moneda.

Es interesante señalar un incidente histórico que ocurrió un poco después de que el punto luminoso central fue observado por primera vez. Uno de los defensores de la óptica geométrica, Simeon Poisson, argüía que si la teoría ondulatoria de la luz de Augustin Fresnel fuera válida, entonces un punto brillante central debía observarse en la sombra de un objeto circular iluminado por una fuente de luz puntual. Para el asombro de Poisson, el punto fue observado por Dominique Arago poco tiempo después. Así, la predicción de Poisson reforzó la teoría ondulatoria en vez de desaprobarla.

En el presente capítulo enfocaremos nuestra atención a la **difracción de Fraunhofer**, la cual ocurre, por ejemplo, cuando los rayos que pasan a través de una rendija angosta son casi paralelos entre sí. Esto se puede lograr experimentalmente colocando la pantalla lejos de la abertura usada para crear la difracción, o usando un lente convergente para enfocar los rayos una vez que éstos han atravesado la abertura, como se indica en la figura 38.4a. Una franja oscura se observa a lo largo del eje en $\theta = 0$, con franjas alternantes oscuras y brillantes ocurriendo en cualquier lado de la franja brillante central. La figura 38.4b es una fotografía de un patrón de difracción de Fraunhofer de una sola rendija.

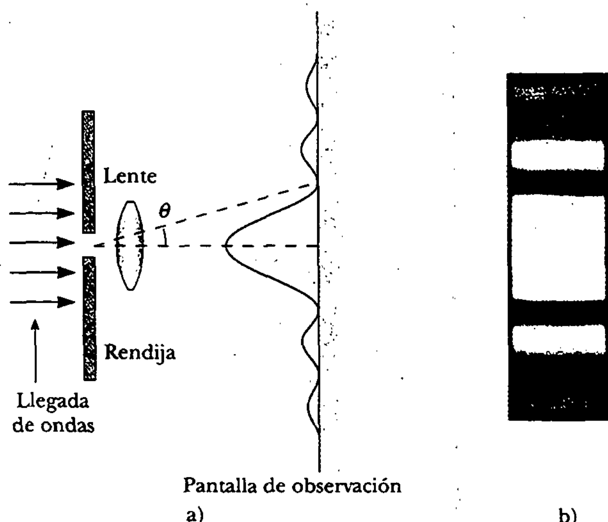


Figura 38.4 a) Patrón de difracción de Fraunhofer de una sola rendija. El patrón se compone de una franja brillante central flanqueada por máximos más débiles que se alternan con franjas oscuras. (Advierta que el dibujo no está a escala.) b) Fotografía de un patrón de difracción de Fraunhofer de una sola rendija. (*De M. Cagnet, M. Francon y J. C. Thierr,* Atlas de fenómenos ópticos, *Berlín, Springer-Verlag, 1962, placa 18.*)



38.2 DIFRACCIÓN DE RENDIJAS ESTRECHAS

Hasta ahora hemos supuesto que las rendijas son fuentes puntuales de luz. En la presente sección abandonamos esta suposición y determinamos cómo el ancho finito de las rendijas es la base para comprender la difracción de Fraunhofer.

Podemos deducir algunos rasgos importantes de dicho fenómeno examinando ondas provenientes de diversas partes de la rendija, como se muestra en la figura 38.5. De acuerdo con el principio de Huygens, **cada parte de la rendija actúa como una fuente de ondas luminosas.** Por tanto, la luz de una parte de la rendija puede interferir con luz de otra parte, y la intensidad de luz resultante en una pantalla de observación depende de la dirección θ.

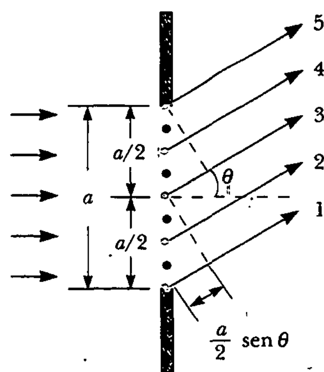


Figura 38.5 Difracción de luz mediante una estrecha rendija de ancho a. Cada parte de la rendija actúa como una fuente puntual de ondas luminosas. La diferencia de trayectoria entre los rayos 1 y 3 o entre los rayos 2 y 4 es $(a/2)$ sen θ. (Note que esto no está dibujado a escala.)

Para analizar el patrón de difracción es conveniente dividir la rendija en dos mitades, como se indica en la figura 38.5. Tomando en cuenta que todas las ondas están en fase cuando dejan la rendija, considere los rayos 1 y 3. Conforme estos dos rayos viajan hacia la pantalla de observación lejos hacia la derecha de la figura, el rayo 1 viaja más lejos que el rayo 3 por una cantidad igual a la diferencia de trayectoria $(a/2)$ sen θ, donde a es el ancho de la rendija. De manera similar, la diferencia de trayectoria entre los rayos 2 y 4 también es $(a/2)$ sen θ. Si esta diferencia de trayectoria es exactamente la mitad de una longitud de onda (lo que corresponde a una diferencia de fase de 180°), entonces las dos ondas se cancelan entre sí y se produce interferencia destructiva. Lo anterior es cierto, de hecho, para dos rayos cualesquiera que se originan en puntos separados por la mitad del ancho de la rendija, puesto que la diferencia de fase entre dos de dichos puntos es 180°. En consecuencia, las ondas provenientes de la mitad superior de la rendija interfieren destructivamente con ondas provenientes de la mitad inferior de la rendija cuando

$$\frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta = \frac{\lambda}{2}$$

o cuando

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\lambda}{a}$$

Si dividimos la rendija en cuatro partes iguales y usamos un razonamiento similar, encontramos que la pantalla de observación también está oscura cuando

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{2\lambda}{a}$$

De igual modo, podemos dividir las rendijas en seis partes iguales y mostrar que la pantalla se oscurece cuando

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{3\lambda}{a}$$

Por tanto, la condición general para interferencia destructiva es

Condición para interferencia destructiva

$$\operatorname{sen} \theta = m\frac{\lambda}{a} \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{38.1}$$

Esta ecuación proporciona los valores de θ para los cuales el patrón de difracción tiene intensidad luminosa cero —es decir, cuando se forma una franja oscura—. Sin embargo, dicha ecuación no indica nada acerca de la variación de intensidad luminosa a lo largo de la pantalla. Las características generales de la distribución de in-

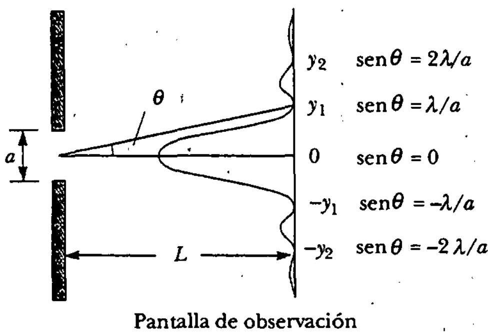
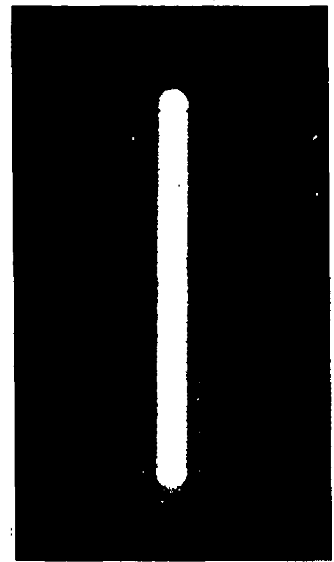


Figura 38.6 Distribución de intensidad para un patrón de difracción de Fraunhofer de una sola rendija de ancho *a*. Las posiciones de los dos mínimos de cada lado del máximo central están etiquetadas. (Observe que el dibujo no está a escala.)



Patrón de difracción que aparece en una pantalla cuando la luz pasa por una rendija vertical estrecha. El patrón consiste en una franja brillante central ancha y una serie de luz menos intensa y al lado unas franjas delgadas brillantes.

tensidad se muestran en la figura 38.6. Se observa una ancha franja brillante central; flanqueada por franjas brillantes mucho más débiles que se alternan con franjas oscuras. Las diversas franjas oscuras ocurren en los valores de θ que satisfacen la ecuación 38.1. Cada pico de franja brillante se encuentra aproximadamente a la mitad entre sus mínimos limitantes de las franjas oscuras. Advierta que la franja brillante central es dos veces más ancha que los máximos secundarios.

Pregunta sorpresa 38.1

¿Por qué, si la puerta de un cuarto adjunto está ligeramente entreabierta, se pueden escuchar los sonidos que se producen en el interior, pero no se puede ver lo que ocurre en él?

EJEMPLO 38.1 ¿Dónde están las franjas oscuras?

Luz de 580 nm de longitud de onda incide sobre una rendija de 0.300 mm de ancho. La pantalla de observación está a 2.00 m de la rendija. Encuentre las posiciones de las primeras franjas oscuras y el ancho de la franja brillante central.

Solución Las dos franjas oscuras que flanquean a la franja brillante central corresponden a $m = \pm 1$ en la ecuación 38.1. Por tanto, encontramos que

$$\text{sen}\,\theta = \pm\frac{\lambda}{a} = \pm\frac{5.80\times10^{-7}\,\text{m}}{0.300\times10^{-3}\,\text{m}} = \pm 1.93\times10^{-3}$$

A partir del triángulo en la figura 38.6 advierta que $\tan\theta = y_1/L$. Ya que θ es muy pequeña, podemos usar la aproximación sen $\theta \gg \tan\theta$, de manera que sen $\theta \gg y_1/L$. Por consiguiente, las posiciones de los primeros mínimos medidos desde el eje central están dadas por

$$y_1 \approx L\,\text{sen}\,\theta = \pm L\frac{\lambda}{a} = \pm 3.87\times10^{-3}\,\text{m}$$

Los signos positivo y negativo corresponden a las franjas oscuras en cualesquiera de los lados de la franja brillante central. Por tanto, el ancho de la franja brillante central es igual a $2|y_1| = 7.74\times10^{-3}$ m = 7.74 mm. Observe que este valor es mucho más grande que el ancho de la rendija. Sin embargo, a medida que el ancho de la rendija aumenta, el patrón de difracción se estrecha, lo que corresponde a valores más pequeños de θ. De hecho, para valores grandes de *a*, los diversos máximos y mínimos están tan próximos que lo único que se observa es una gran área brillante central, la cual se asemeja a la imagen geométrica de la rendija. Dicho asunto es de gran importancia en el diseño de lentes empleados en telescopios, microscopios y otros instrumentos ópticos.

Ejercicio Determine el ancho de la franja brillante de primer orden ($m = 1$).

Respuesta 3.87 mm.

Intensidad de un patrón de difracción de una sola rendija

Podemos emplear fasores para determinar la distribución de la intensidad luminosa de un patrón de difracción de una sola rendija. Suponga una rendija dividida en un gran número de pequeñas zonas, cada una de ancho Δy, como se observa en la figura 38.7. Cada zona actúa como una fuente de radiación coherente y cada una contribuye con un campo eléctrico incremental de magnitud ΔE en algún punto P

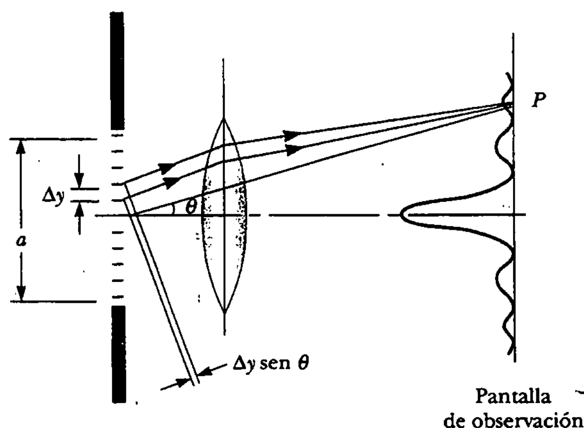


Figura 38.7 Difracción de Fraunhofer mediante una sola rendija. La intensidad luminosa en el punto P es la resultante de todas las magnitudes de campo eléctrico incrementales desde las zonas de ancho Δy.

Experimento sorpresa

Haga una V con sus dedos índice y medio. Mantenga su mano muy cerca de su ojo, de tal manera que esté viendo entre sus dos dedos hacia el área brillante. Ahora junte sus dedos hasta que sólo exista una muy delgada rendija entre ellos. Usted será capaz de ver una serie de líneas paralelas. Aunque las líneas parezcan estar localizadas en el estrecho espacio entre sus dedos, lo que realmente está viendo es un patrón de difracción que está sobre su retina.

sobre la pantalla. Obtenemos la magnitud del campo eléctrico total E en el punto P al sumar las contribuciones de todas las zonas. La intensidad de luz en el punto P es proporcional al cuadrado de la magnitud del campo eléctrico (véase la sección 37.3).

Las magnitudes incrementales del campo eléctrico entre zonas adyacentes están fuera de fase entre sí en una cantidad $\Delta\beta$, donde la diferencia de fase $\Delta\beta$ se relaciona con la diferencia de trayectoria Δy sen θ entre zonas adyacentes mediante la expresión

$$\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta y \operatorname{sen}\theta \qquad \textbf{(38.2)}$$

Para encontrar la magnitud del campo eléctrico total sobre la pantalla a cualquier ángulo θ, sumamos las magnitudes incrementales ΔE producidas por cada zona. Para valores pequeños de θ podemos suponer que todos los valores ΔE son los mismos. Es conveniente emplear diagramas de fasores para diversos ángulos, como se muestra en la figura 38.8. Cuando $\theta = 0$, todos los fasores se alinean como se presenta en la figura 38.8a, debido a que todas las ondas de las diversas zonas están en fase. En este caso el campo eléctrico total en el centro de la pantalla es $E_0 = N\,\Delta E$, donde N es el número de zonas. La magnitud resultante E_R a cierto ángulo pequeño θ se observa en la figura 38.8b, donde cada fasor difiere en fase de uno adyacente en una cantidad $\Delta\beta$. En este caso E_R es el vector suma de las magnitudes incre-

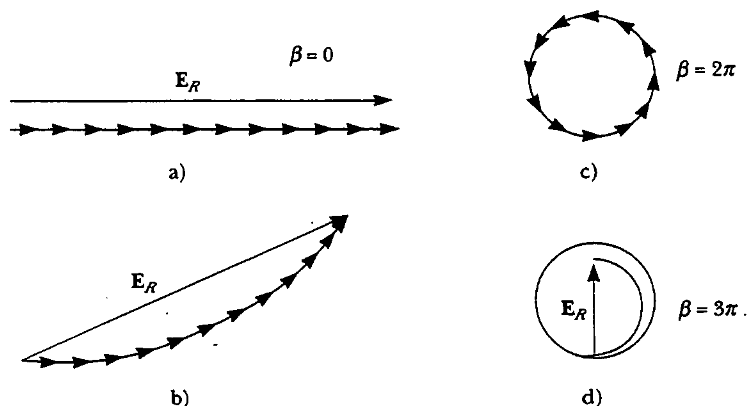


Figura 38.8 Diagrama de fasores para obtener los diversos máximos y mínimos de un patrón de difracción de una sola rendija.

mentales y por tanto se da por la longitud de la cuerda. En consecuencia, $E_R < E_0$. La diferencia de fase total β entre las ondas de las partes superior e inferior de la rendija es

$$\beta = N\,\Delta\beta = \frac{2\pi}{\lambda}N\,\Delta y \operatorname{sen}\theta = \frac{2\pi}{\lambda}a \operatorname{sen}\theta \tag{38.3}$$

donde $a = N\,\Delta y$ es el ancho de la rendija.

A medida que θ aumenta, la cadena de fasores termina por formar la trayectoria cerrada, que se presenta en la figura 38.8c. En este punto el vector suma es cero, así que $E_R = 0$ corresponde al primer mínimo sobre la pantalla. Observando que $\beta = N\,\Delta\beta = 2\pi$ en tal situación, se ve a partir de la ecuación 38.3 que

$$2\pi = \frac{2\pi}{\lambda}a \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{a}$$

Es decir, el primer mínimo en el patrón de difracción ocurre cuando sen $\theta = \lambda/a$; lo cual concuerda con la ecuación 38.1.

A valores más grandes de θ, la cadena espiral de fasores se estrecha. Por ejemplo, la figura 38.8d representa la situación correspondiente al segundo máximo, el cual ocurre cuando $\beta = 360° + 180° = 540°$ (3π rad). El segundo mínimo (dos espirales completos que no se muestran) corresponde a $\beta = 720°$ (4π rad), lo cual satisface la condición sen $\theta = 2\lambda/a$.

La magnitud E_R e intensidad I totales del campo eléctrico en cualquier punto P sobre la pantalla en la figura 38.7 puede obtenerse considerando el caso límite en el cual Δy se vuelve infinitesimal (dy) y N se aproxima a ∞. En este límite la cadena de fasores en la figura 38.8 se convierte en la curva roja de la figura 38.9. La longitud de arco de la curva es E_0, ya que es la suma de las magnitudes de los fasores (que es la magnitud de campo eléctrico total en el centro de la pantalla). De acuerdo con esa misma figura, vemos que a cierto ángulo θ, la magnitud del campo eléctrico resultante sobre la pantalla E_R, es igual a la longitud de la cuerda. Del triángulo que contiene al ángulo $\beta/2$, vemos que

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \frac{E_R/2}{R}$$

donde R es el radio de curvatura. Pero la longitud del arco E_0 es igual al producto $R\beta$, donde β está en radianes. Combinando esta información con la expresión anterior se obtiene

$$E_R = 2R \operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = 2\left(\frac{E_0}{\beta}\right)\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = E_0\left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]$$

Ya que la intensidad luminosa resultante I en el punto P sobre la pantalla es proporcional al cuadrado de la magnitud E_R, encontramos que

Intensidad de un patrón de difracción de Fraunhofer de una sola rendija

$$I = I_{\text{máx}}\left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2 \tag{38.4}$$

donde $I_{\text{máx}}$ es la intensidad en $\theta = 0$ (el máximo central). La sustitución de esta expresión para β (ec. 38.3) en la ecuación 38.4 origina

$$I = I_{\text{máx}}\left[\frac{\operatorname{sen}(\pi a \operatorname{sen}\theta/\lambda)}{\pi a \operatorname{sen}\theta/\lambda}\right]^2 \tag{38.5}$$

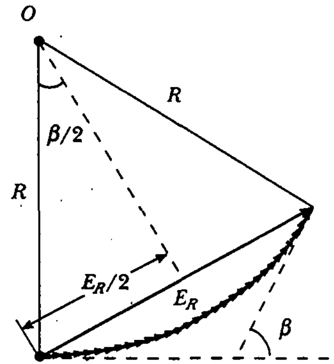


Figura 38.9 Diagrama de fasores para un gran número de fuentes coherentes. Advierta que todos los extremos de los fasores están sobre un arco circular rojo de radio R. La magnitud de campo eléctrico resultante E_R es igual a la longitud de la cuerda.

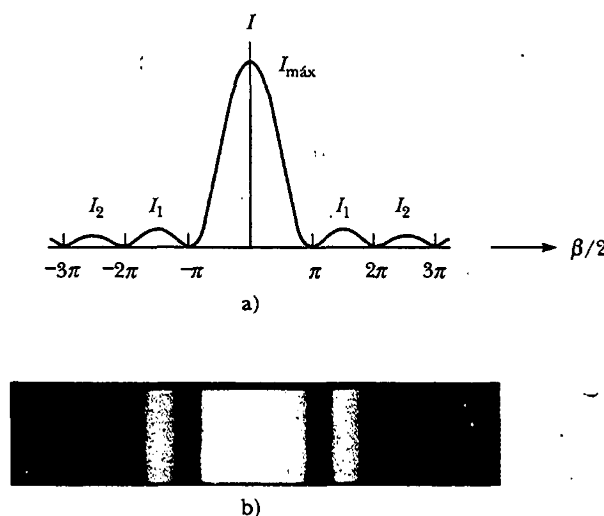


Figura 38.10 a) Una gráfica de la intensidad luminosa I *versus* $\beta/2$ para un patrón de difracción de Fraunhofer de una sola rendija. b) Fotografía de un patrón de difracción de Fraunhofer de una sola rendija. (*De M. Cagnet, M. Francon y J. C. Thierr,* Atlas de fenómenos ópticos, *Berlín, Springer-Verlag, 1962, placa 18.*)

A partir de este resultado vemos que los mínimos ocurren cuando

$$\frac{\pi a \operatorname{sen} \theta}{\lambda} = m\pi$$

o

Condición para mínimos de intensidad

$$\operatorname{sen} \theta = m\frac{\lambda}{a} \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

esto concuerda con la ecuación 38.1.

La figura 38.10a representa una gráfica de la ecuación 38.5, y la figura 38.10b es una fotografía de un patrón de difracción de Fraunhofer de una sola rendija. Observe que la mayor parte de la intensidad luminosa se concentra en la franja brillante central.

EJEMPLO 38.2 Intensidades relativas de los máximos

Encuentre la relación de las intensidades de los máximos secundarios y la intensidad del máximo central para un patrón de difracción de Fraunhofer de una sola rendija.

Solución Para una buena aproximación, los máximos secundarios se encuentran a la mitad entre los puntos cero. De acuerdo con la figura 38.10a, vemos que esto corresponde a valores $\beta/2$ de $3\pi/2$, $5\pi/2$, $7\pi/2$, . . . Sustituyendo estos valores en la ecuación 38.4 obtenemos para las primeras dos relaciones

$$\frac{I_1}{I_{máx}} = \left[\frac{\operatorname{sen}(3\pi/2)}{3\pi/2}\right]^2 = \frac{1}{9\pi^2/4} = 0.045$$

$$\frac{I_2}{I_{máx}} = \left[\frac{\operatorname{sen}(5\pi/2)}{5\pi/2}\right]^2 = \frac{1}{25\pi^2/4} = 0.016$$

Lo cual significa que el primer máximo secundario (el adyacente al máximo central) tiene una intensidad de 4.5% del máximo central, y el siguiente máximo secundario tiene una intensidad de 1.6% de la correspondiente al máximo central.

Ejercicio Determine la intensidad, respecto al máximo central, de los máximos secundarios correspondientes a $m = \pm 3$.

Respuesta 0.008 3.

Intensidad de patrones de difracción de doble rendija

Cuando hay más de una rendija presente, se debe considerar no sólo la difracción debida a las rendijas individuales, sino también la interferencia de las ondas que vienen desde las diferentes rendijas. Quizá usted observó que la línea curva discontinua de la figura 37.13, que indica una disminución en la intensidad de los máximos

de interferencia como θ, aumenta. Tal disminución se debe a la difracción. Para determinar los efectos de la interferencia y de la difracción simplemente combinamos la ecuación 37.12 y la ecuación 38.5:

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2\left(\frac{\pi d \operatorname{sen} \theta}{\lambda}\right)\left[\frac{\operatorname{sen}(\pi a \operatorname{sen} \theta/\lambda)}{\pi a \operatorname{sen} \theta/\lambda}\right]^2 \qquad \textbf{(38.6)}$$

Aunque esta fórmula parece complicada, sólo representa el patrón de difracción (el factor entre corchetes) actuando como una "envoltura" para un patrón de interferencia de doble rendija (el factor coseno cuadrado), como se muestra en la figura 38.11.

La ecuación 37.2 indica las condiciones para la interferencia máxima cuando $d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$, donde d es la distancia entre las dos rendijas. La ecuación 38.1 especifica que el primer mínimo de difracción ocurre cuando $a \operatorname{sen} \theta = \lambda$, donde a es el ancho de la rendija. Dividiendo la ecuación 37.2 entre la ecuación 38.1 (con $m = 1$) es posible determinar qué máximo de interferencia coincide con el primer mínimo de difracción:

$$\frac{d \operatorname{sen} \theta}{a \operatorname{sen} \theta} = \frac{m\lambda}{\lambda}$$

$$\frac{d}{a} = m \qquad \textbf{(38.7)}$$

En la figura 38.11, $d/a = 18\ \mu\text{m}/3.0\ \mu\text{m} = 6$. Así, el sexto máximo de interferencia (si se cuenta al máximo central como $m = 0$) está alineado con el primer mínimo de difracción y no se puede ver.

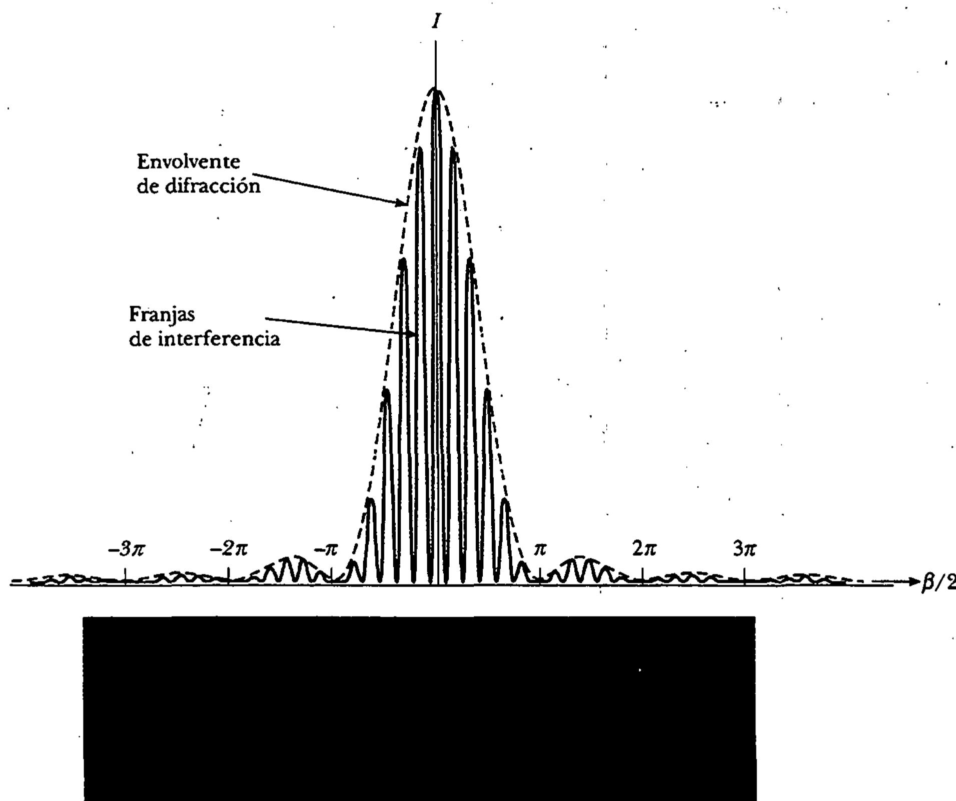


Figura 38.11 Efectos combinados de difracción e interferencia. Éste es el patrón que se produce cuando ondas luminosas de 650 nm pasan por dos rendijas de 3.0 μm que están separadas 18 μm. Observe cómo el patrón de difracción actúa como una "envolvente" y controla la intensidad de los máximos de interferencia regularmente espaciados. *(Fotografía cortesía de Central Scientific Company)*

Pregunta sorpresa 38.2

Usando la figura 38.11 como punto inicial, haga un bosquejo del patrón de difracción e interferencia combinado para ondas luminosas de 650 nm que pegan sobre dos rendijas de 3.0 μm localizadas a 9.0 μm de separación.

RESOLUCIÓN DE ABERTURA CIRCULAR Y DE UNA SOLA RENDIJA

La capacidad de los sistemas ópticos para distinguir entre objetos muy próximos es limitada debido a la naturaleza ondulatoria de la luz. Para entender esta dificultad considere la figura 38.12, la cual muestra dos fuentes de luz alejadas de una rendija estrecha de ancho *a*. Las fuentes pueden considerarse como dos fuentes puntuales no coherentes S_1 y S_2. Por ejemplo, podrían ser dos estrellas distantes. Si no hay difracción, dos puntos (o imágenes) brillantes distintos se verían sobre la pantalla de observación. Sin embargo, debido a la difracción, cada fuente se proyecta como una región central brillante flanqueada por franjas débiles brillantes y oscuras. Lo que se observa sobre la pantalla es la suma de dos patrones de difracción, uno de S_1 y el otro de S_2.

Si las dos fuentes están separadas lo suficiente para evitar que se traslapen sus máximos centrales, como en la figura 38.12a, sus imágenes pueden distinguirse y se dice que están *resueltas*. Sin embargo, si las fuentes están demasiado juntas, como se muestra en la figura 38.12b, los dos máximos centrales se traslapan y las imágenes no están resueltas. Para decidir cuándo dos imágenes están resueltas a menudo se emplea el siguiente criterio:

Cuando el máximo central de una imagen cae sobre el primer mínimo de otra imagen, se dice que las imágenes están resueltas. Esta condición límite de resolución se conoce como **criterio de Rayleigh**.

La figura 38.13 ilustra los patrones de difracción de tres situaciones. Cuando los objetos están muy alejados, sus imágenes están bien resueltas (Fig. 38.13a). Las imá-

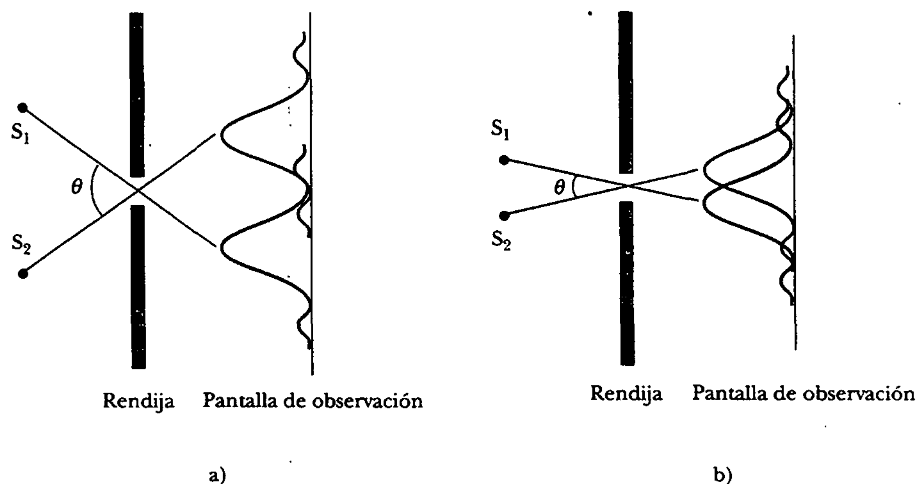


Figura 38.12 Dos fuentes puntuales alejadas de una rendija estrecha producen cada una un patrón de difracción. a) El ángulo subtendido por las fuentes en la rendija es bastante grande para que se distingan los patrones de difracción. b) El ángulo subtendido por las fuentes es tan pequeño que sus patrones de difracción se traslapan y las imágenes no se resuelven bien. (Advierta que los ángulos están considerablemente exagerados. El dibujo no está a escala.)

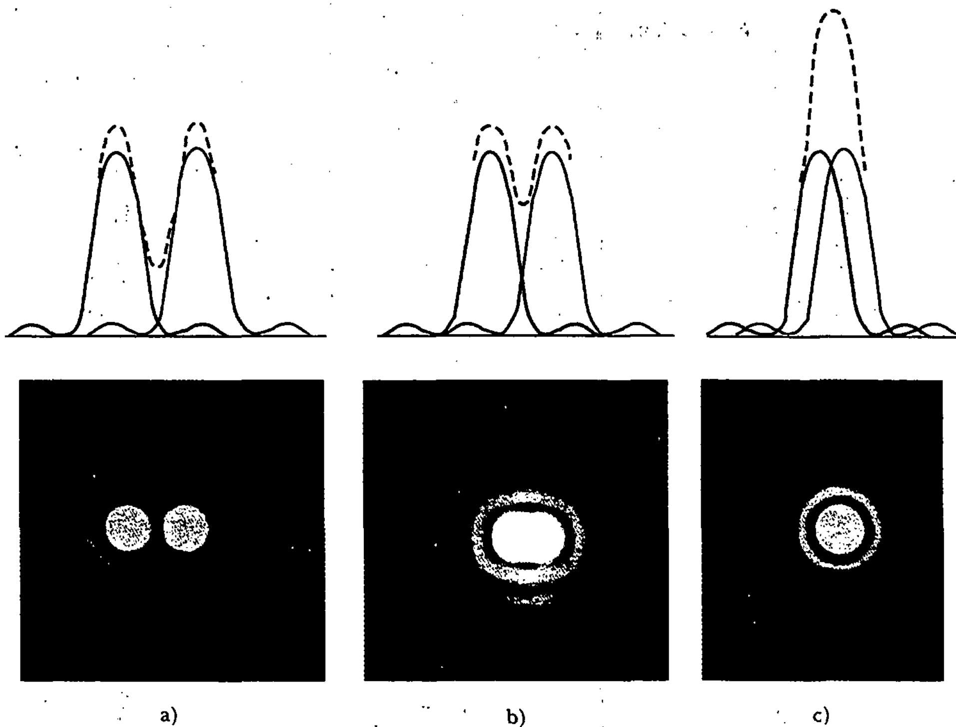


Figura 38.13 Los patrones de difracción de dos fuentes puntuales (curvas continuas) y el patrón resultante (curvas discontinuas) para diferentes separaciones angulares de las fuentes. En cada caso la curva discontinua es la suma de las dos curvas continuas. a) Las fuentes están bastante separadas, y los patrones se resuelven bien. b) Las fuentes están muy cercanas entre sí, de manera que la separación angular apenas satisface el criterio de Rayleigh, y los patrones se resuelven exactamente. c) Las fuentes están tan cercanas que los patrones no se resuelven. (*De M. Cagnet, M. Francon y J. C. Thierr,* Atlas de fenómenos ópticos, *Berlín, Springer-Verlag, 1962, placa 16.*)

genes se resuelven exactamente cuando la separación angular de los objetos satisface el criterio de Rayleigh (véase la figura 38.13b). Por último, cuando los objetos están tan cercanos entre sí, las imágenes no se resuelven (véase la figura 38.13c).

De acuerdo con el criterio de Rayleigh, podemos determinar la separación angular mínima $\theta_{\text{mín}}$, subtendida por las fuentes en la rendija para la cual sus imágenes apenas se resuelven. La ecuación 38.1 indica que el primer mínimo en un patrón de difracción de una sola rendija ocurre a un ángulo para el cual

$$\text{sen } \theta = \frac{\lambda}{a}$$

donde a es el ancho de la rendija. De acuerdo con el criterio de Rayleigh, esta expresión proporciona la separación angular más pequeña para la cual se resuelven las dos imágenes como $\lambda \ll a$ en muchas situaciones, sen θ es pequeño y podemos emplear la aproximación sen $\theta \approx \theta$. Por tanto, el ángulo de resolución límite para una rendija de ancho a es

$$\theta_{\text{mín}} = \frac{\lambda}{a} \tag{38.8}$$

donde $\theta_{\text{mín}}$ se expresa en radianes. Por tanto, el ángulo subtendido por las dos fuentes en la rendija debe ser mayor que λ/a si las imágenes van a estar resueltas.

Muchos sistemas ópticos emplean aberturas circulares en lugar de rendijas. El patrón de difracción de una abertura circular, ilustrado en la figura 38.14, consta de un disco brillante circular central rodeado por anillos brillantes y oscuros progresi-

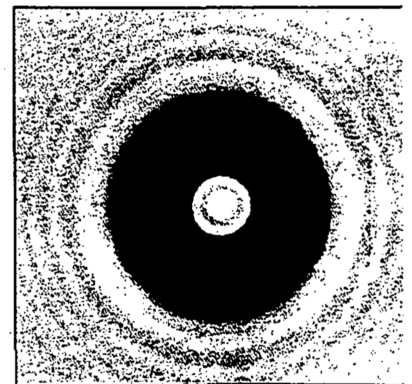


Figura 38.14 El patrón de difracción de una abertura circular está compuesto por un disco brillante central rodeado por anillos concéntricos brillantes y oscuros. (*De M. Cagnet, M. Francon y J. C. Thierr,* Atlas de fenómenos ópticos, *Berlín, Springer-Verlag, 1962, placa 34.*)

vamente más tenues. Los análisis muestran que el ángulo de resolución límite de la abertura circular es

Ángulo de resolución límite para una abertura circular

$$\theta_{\text{mín}} = 1.22\frac{\lambda}{D} \qquad \textbf{(38.9)}$$

donde D es el diámetro de la abertura. Advierta que la ecuación 38.9 es similar a la ecuación 38.8 excepto por el factor de 1.22, el cual surge de un complejo análisis matemático de la difracción a partir de una abertura circular.

EJEMPLO 38. **Límite de resolución de un microscopio**

Se emplea luz de 589 nm para ver un objeto bajo un microscopio. Si la abertura del objetivo tiene un diámetro de 0.900 cm, a) ¿cuál es el ángulo de resolución límite?

Solución a) Usando la ecuación 38.9 se encuentra que el ángulo de resolución límite es

$$\theta_{\text{mín}} = 1.22\left(\frac{589 \times 10^{-9}\,\text{m}}{0.900 \times 10^{-2}\,\text{m}}\right) = 7.98 \times 10^{-5}\,\text{rad}$$

Lo cual significa que dos puntos cualesquiera sobre el objeto que subtiendan un ángulo menor que esto en el objetivo no pueden distinguirse en la imagen.

b) Si fuera posible emplear luz visible de cualquier longitud de onda, ¿cuál sería el límite de resolución máximo de este microscopio?

Solución Para obtener el ángulo limitante más pequeño tenemos que usar la longitud de onda más corta disponible en el espectro visible. La luz violeta (400 nm) nos proporciona un ángulo de resolución limitante de

$$\theta_{\text{mín}} = 1.22\left(\frac{400 \times 10^{-9}\,\text{m}}{0.900 \times 10^{-2}\,\text{m}}\right) = 5.42 \times 10^{-5}\,\text{rad}$$

c) Suponga que el espacio entre el objeto y el objetivo está lleno de agua ($n = 1.33$). ¿Qué efecto tendría esto en la capacidad de resolución cuando se usa luz de 589 nm?

Solución Se encuentra que la longitud de onda en el agua es de 589 nm de luz usando la ecuación 35.7:

$$\lambda_{\text{agua}} = \frac{\lambda_{\text{aire}}}{n_{\text{agua}}} = \frac{589\,\text{nm}}{1.33} = 443\,\text{nm}$$

El ángulo de resolución limitante en esta longitud de onda es ahora más pequeño que el que se calculó en el inciso a:

$$\theta_{\text{mín}} = 1.22\left(\frac{443 \times 10^{-9}\,\text{m}}{0.900 \times 10^{-2}\,\text{m}}\right) = 6.00 \times 10^{-5}\,\text{rad}$$

EJEMPLO 38. **Resolución de un telescopio**

El telescopio *Hale* en Monte Palomar tiene un diámetro de 200 pulg. ¿Cuál es el ángulo de resolución limitante para luz de 600 nm?

Solución Puesto que $D = 200$ pulg $= 5.08$ m y $\lambda = 6.00 \times 10^{-7}$ m, la ecuación 38.9 produce

$$\theta_{\text{mín}} = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22\left(\frac{6.00 \times 10^{-7}\,\text{m}}{5.08\,\text{m}}\right)$$
$$= 1.44 \times 10^{-7}\,\text{rad} \approx 0.03\,\text{s de arco}$$

Dos estrellas cualesquiera que subtiendan un ángulo mayor o igual que dicho valor están resueltas (suponiendo condiciones atmosféricas ideales).

El telescopio *Hale* nunca puede alcanzar su límite de difracción porque su ángulo de resolución limitante siempre se ajusta por borrosidad atmosférica. Tal límite de visión suele ser cercano a 1 s de arco y nunca es más pequeño que aproximadamente 0.1 s de arco. Se trata de una de las razones para la superioridad de las fotografías del telescopio espacial *Hubble*, el cual contempla objetos en el espacio desde una posición orbital por encima de la atmósfera.

Ejercicio El gran radiotelescopio en Arecibo, Puerto Rico, tiene un diámetro de 305 m y está diseñado para detectar ondas de radio de 0.75 m. Calcule el ángulo de resolución mínimo para este telescopio y compare su respuesta con el valor correspondiente al telescopio *Hale*.

Respuesta 3.0×10^{-3} rad (10 min de arco), más de 10 000 veces más grande (es decir, *peor*) que el mínimo del *Hale*.

EJEMPLO 38. **Resolución del ojo**

Calcule el ángulo de resolución limitante para el ojo humano, suponiendo que su resolución está limitada sólo por difracción.

Solución Se elige una longitud de onda de 500 nm, cerca del centro del espectro visible. Aunque el diámetro de la pupila varía de persona a persona, calculamos un diámetro de

2 mm. Se usa la ecuación 38.9 tomando λ = 500 nm y D = 2 mm:

$$\theta_{\text{mín}} = 1.22\frac{\lambda}{D} = 1.22\left(\frac{5.00 \times 10^{-7}\,\text{m}}{2 \times 10^{-3}\,\text{m}}\right)$$

$$\approx 3 \times 10^{-4}\,\text{rad} \approx 1 \text{ min de arco}$$

Podemos usar el resultado para calcular la distancia de separación mínima d entre las dos fuentes puntuales que el ojo puede distinguir si hay una distancia L desde el observador (véase la figura 38.15). Como $\theta_{\text{mín}}$ es pequeña, vemos que

$$\text{sen}\,\theta_{\text{mín}} \approx \theta_{\text{mín}} \approx \frac{d}{L}$$

$$d = L\theta_{\text{mín}}$$

Por ejemplo, si las fuentes puntuales están a 25 cm del ojo (el punto cercano), entonces

$$d = (25\text{ cm})(3 \times 10^{-4}\text{ rad}) = 8 \times 10^{-3}\text{ cm}$$

Que es aproximadamente igual al espesor de un cabello humano.

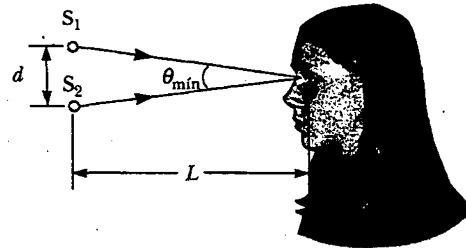


Figura 38.15 Dos fuentes puntuales separadas por una distancia d cuando se observan por medio del ojo.

Ejercicio Suponga que la pupila está dilatada hasta un diámetro de 5.0 mm y que está mirando hacia dos fuentes puntuales a 3.0 m. ¿A qué distancia deben estar las fuentes para que el ojo las pueda definir?

Respuesta 0.037 cm.

APLICACIÓN Diseño de un altavoz

Las tres vías de un sistema de altavoz mostrado en la figura 38.16 contienen un woofer, una bocina de rango medio y una tweeter. El pequeño diámetro del tweeter es para frecuencias altas, y el gran diámetro del woofer es para frecuencias bajas. La bocina de rango medio de diámetro intermedio se usa para la banda de frecuencias arriba de la frecuencia alta de corte del woofer y abajo de la frecuencia baja de corte del tweeter. El circuito conocido como malla de paso incluye filtros de paso bajo, de medio rango y de paso alto que envían la señal eléctrica al altavoz apropiado. El tamaño de la abertura efectiva de un altavoz es aproximadamente su diámetro. Puesto que las longitudes de onda de las ondas sonoras son comparables con los tamaños típicos de los altavoces, los efectos de difracción determinan el patrón de radiación angular. Será más efectivo un altavoz que radie sonido sobre un amplio rango de ángulos de tal manera que el oyente no tenga que pararse en un punto particular en el cuarto para escuchar la máxima intensidad del sonido. Con base en el patrón de radiación angular investigaremos el rango de frecuencias para el cual a 6 pulg (0.15 m) la bocina de medio rango sea la más útil.

La rapidez del sonido en el aire es de 344 m/s, y para una abertura circular los efectos de difracción serán importantes cuando $\lambda = 1.22D$, donde D es el diámetro de la bocina. Por tanto, se esperaría que la bocina radiara de manera no uniforme para todas las frecuencias arriba de

$$\frac{344\text{ m/s}}{1.22(0.15\text{ m})} = 1\,900\text{ Hz}$$

Suponga que nuestros diseños especifican que la bocina de medio rango opera entre 500 Hz (la frecuencia superior de

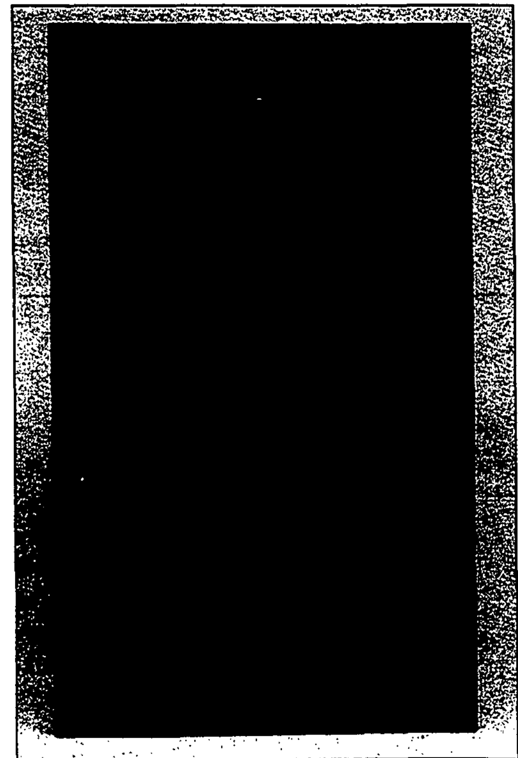


Figura 38.16 Un sistema de altavoz de audio para reproducción de sonido con alta fidelidad. El tweeter está en la parte superior, la bocina de medio rango está en el medio, y el woofer está en la parte inferior. *(International Stock Photography)*

corte para el woofer) y 2 000 Hz. Mediciones de la dispersión del sonido radiado a una gran distancia adecuada desde el altavoz proporcionan los perfiles angulares de intensidad de sonido que se muestran en la figura 38.17. Al examinar estas gráficas se observa que el patrón de dispersión para el sonido de 500 Hz es bastante uniforme. El rango angular es suficientemente grande, lo que nos permite decir que este altavoz de rango medio satisface el criterio del diseño. La intensidad de un sonido de 2 000 Hz disminuye a cerca de la mitad de su valor máximo casi 30° de la línea central.

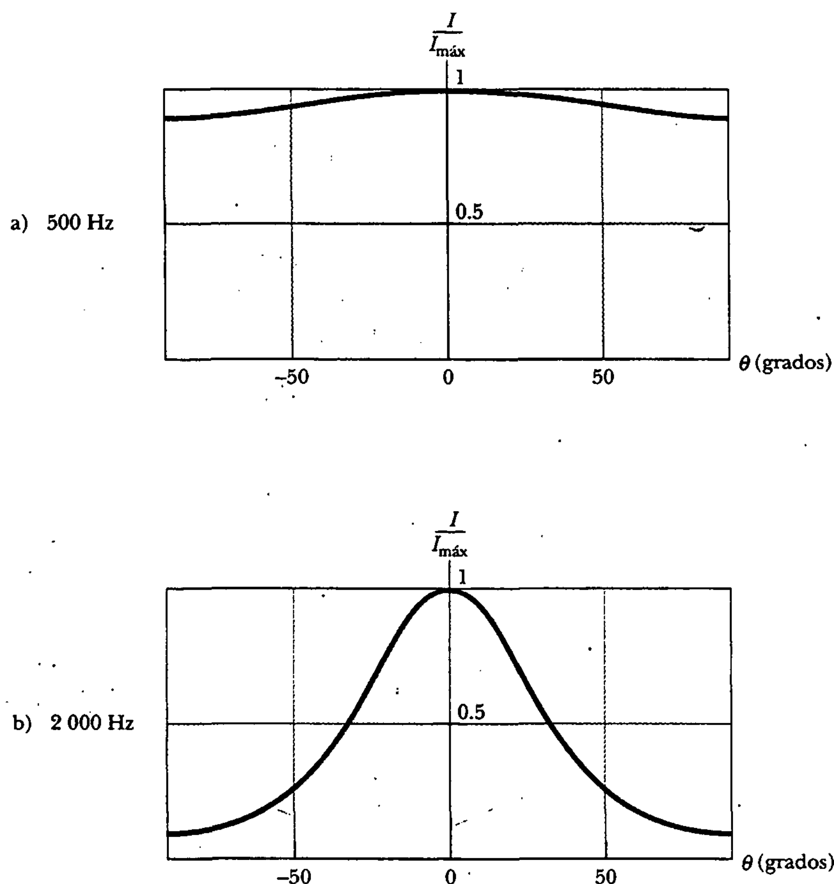


Figura 38.17 Dispersión angular de intensidad del sonido I para un altavoz de rango medio en a) 500 Hz y b) 2 000 Hz.

LA REJILLA DE DIFRACCIÓN

La **rejilla de difracción**, un dispositivo útil para analizar fuentes luminosas, se compone de un gran número de rendijas paralelas igualmente espaciadas. Una *rejilla de transmisión* puede hacerse cortando líneas paralelas sobre una placa de vidrio con una máquina de rayado de precisión. Los espacios entre las líneas son transparentes a la luz y, en consecuencia, actúan como rendijas individuales. Una *rejilla de reflexión* puede hacerse cortando líneas paralelas en la superficie de un material que refleja. La reflexión de la luz de los espacios entre las líneas es especular, y la reflexión de las líneas cortadas en el material es difusa. Por consiguiente, los espacios entre las líneas que actúan como fuentes paralelas de luz reflejada, se parecen a las rendijas en una rejilla de transmisión. Las rejillas que tienen muchas líneas demasiado juntas pueden tener espaciamientos de rendija muy pequeños. Por ejemplo, una rendija rayada con 5 000 líneas/cm tiene un espaciamiento de rendija $d = (1/5\ 000)$ cm = 2.00×10^{-4} cm.

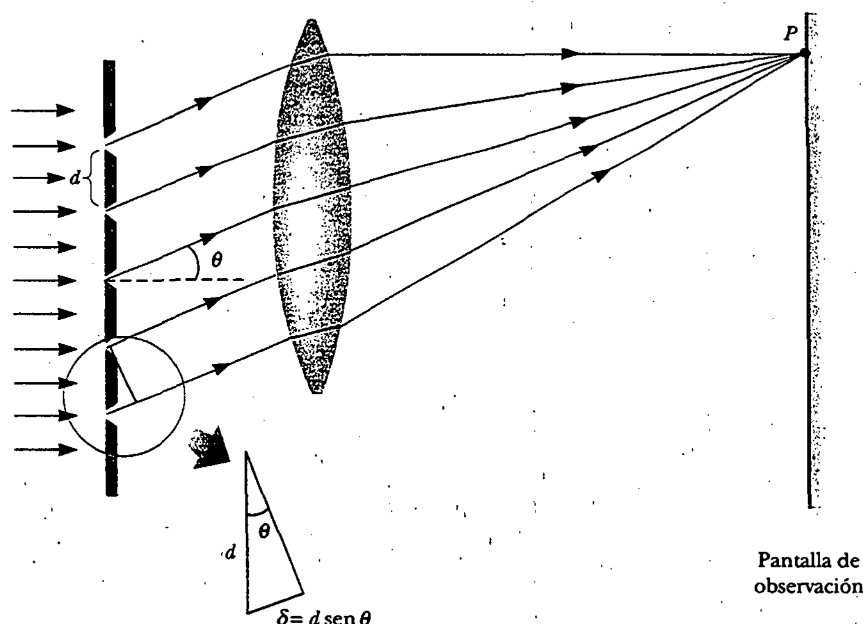


Figura 38.18 Vista lateral de una rejilla de difracción. La separación de rendijas es *d*, y la diferencia de trayectoria entre rendijas adyacentes es *d* sen *θ*.

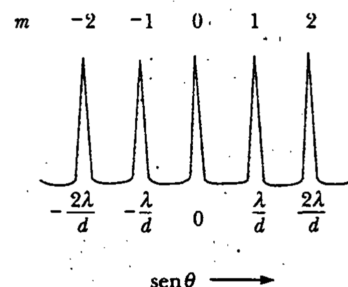


Figura 38.19 Intensidad *versus* sen *θ* para una rejilla de difracción. Se muestran los máximos de orden cero, primero y segundo.

Una sección de una rejilla de difracción se ilustra en la figura 38.18. Una onda plana incide desde la izquierda, normal al plano de la rejilla. Un lente convergente junta los rayos en el punto *P*. El patrón observado sobre la pantalla es el resultado de los efectos combinados de interferencia y difracción. Cada rendija produce difracción, y los rayos difractados interfieren entre sí para producir el patrón final.

Las ondas de todas las rendijas están en fase cuando dejan las rendijas. Sin embargo, para alguna dirección arbitraria θ medida desde la horizontal, las ondas deben recorrer diferentes longitudes de trayectoria antes de llegar al punto *P*. Observe en la figura 38.18 que la diferencia de trayectoria δ entre rayos de dos rendijas adyacentes cualesquiera es igual a d sen θ. Si tal diferencia de trayectoria es igual a una longitud de onda o a algún múltiplo entero de una longitud de onda, entonces las ondas provenientes de todas las rendijas están en fase en el punto *P* y se observa una franja brillante. Por consiguiente, la condición para máximos en el patrón de interferencia en el ángulo θ es

Condición para el máximo de interferencia en una rejilla

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(38.10)}$$

La expresión anterior puede emplearse para calcular la longitud de onda a partir del conocimiento del espaciamiento de la rejilla y del ángulo θ. Si la radiación incidente contiene varias longitudes de onda, el máximo de orden *m*-ésimo para cada longitud de onda ocurre a un ángulo específico. Todas las longitudes de onda se ven en $\theta = 0$, lo que corresponde a $m = 0$, el máximo de orden cero. El máximo de primer orden ($m = 1$) se observa en un ángulo que satisface la relación sen $\theta = \lambda/d$; el máximo de segundo orden ($m = 2$) se observa en un ángulo θ más grande, y así sucesivamente.

La distribución de intensidades para una rejilla de difracción obtenida empleando una fuente monocromática se muestra en la figura 38.19. Advierta la nitidez del máximo principal y la amplitud de las áreas oscuras. Lo anterior contrasta con la amplitud característica de franjas brillantes del patrón de interferencia de doble rendija (véase la figura 37.6). Ya que los máximos principales son definidos, éstos tienen mucho más brillo que los máximos de interferencia de las dos rendijas. La razón de

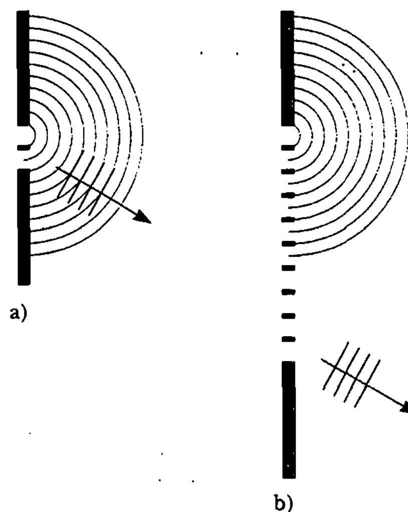


Figura 38.20 a) Suma de dos frentes de onda para dos rendijas. b) Suma de diez frentes de onda de diez rendijas. La onda resultante es mucho más intensa en el inciso b que en el inciso a.

ello se ilustra en la figura 38.20, en la que la combinación de frentes de onda múltiples para una rejilla de diez rendijas se compara con los frentes de onda para un sistema de dos rendijas. Las rejillas reales tienen miles de veces más rendijas y, por tanto, los máximos son aún más intensos.

Un dibujo esquemático de un aparato sencillo utilizado para medir ángulos en un patrón de difracción se presenta en la figura 38.21. Se trata de un espectrómetro de rejilla de difracción. La luz que se analiza pasa a través de una rendija, y un haz de luz colimado incide sobre la rejilla. La luz difractada sale de la rejilla en ángulos que satisfacen la ecuación 38.10, y con un telescopio se observa la imagen de la rendija. La longitud de onda puede determinarse midiendo los ángulos precisos a los cuales las imágenes de la rendija aparecen para los diversos órdenes.

Experimento sorpresa

Párese a un par de metros de un foco. Enfrente de la luz, sostenga un disco compacto aproximadamente a 10 cm de su ojo e inclínelo hasta que la reflexión del foco se localice en el hoyo del centro del disco. Usted verá al espectro radiando hacia afuera del centro con luz violeta en el interior y luz roja en el exterior. Ahora aleje el disco hasta que la banda violeta esté en el extremo exterior. Mida con cuidado la distancia desde su ojo al centro del disco y también determine el radio del disco. Con esta información encuentre el ángulo θ para el máximo de primer orden de la luz violeta. Ahora use la ecuación 38.10 para determinar el espaciamiento entre los surcos del disco. El estándar de la industria es 1.6 μm. ¿Qué tan cerca está usted?

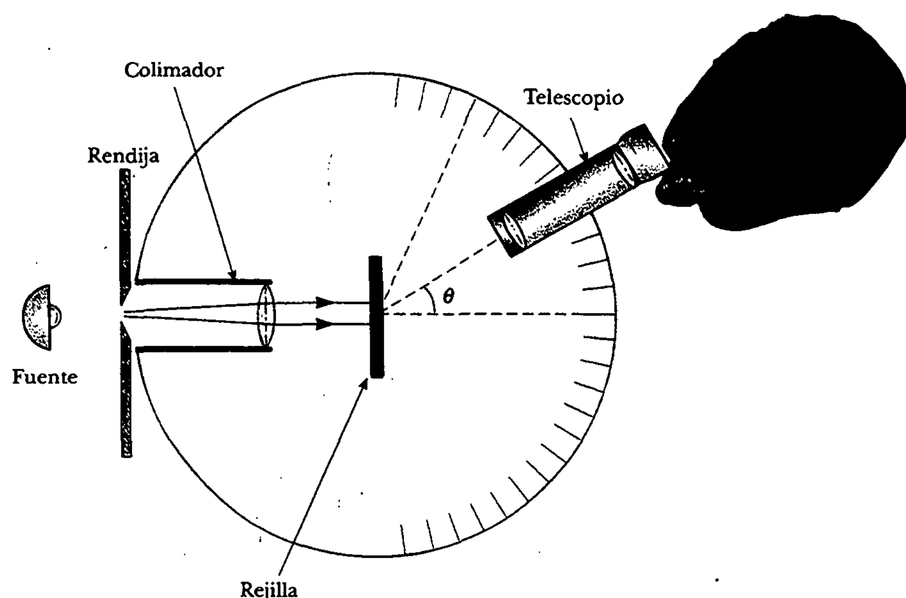


Figura 38.21 Diagrama de un espectrómetro de rejilla de difracción. El haz colimado incidente sobre la rejilla se difracta en los diversos órdenes a los ángulos θ que satisfacen la ecuación $d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$, donde $m = 0, 1, 2, \ldots$

EJEMPLO CONCEPTUAL **El disco compacto es una rejilla de difracción**

En la figura 38.22 se muestra que la luz reflejada en la superficie de un disco compacto tiene una apariencia multicolor. Los colores y sus intensidades dependen de la orientación del disco en relación con el ojo y la fuente luminosa. Explique cómo funciona.

Solución La superficie de un disco compacto tiene una pista acanalada (con canales adyacentes que tienen una separación del orden de 1 μm). Así, la superficie actúa como una rejilla de reflexión. La luz reflejada desde las regiones entre estos surcos muy próximos entre sí interfiere constructivamente sólo en ciertas direcciones que dependen de la longitud de onda y de la dirección de la luz incidente. Cualquier sección del disco sirve como una rejilla de difracción para luz blanca, enviando diferentes colores en diferentes direcciones. Los distintos colores que se ven cuando se observa una sección del disco cambian cuando la fuente luminosa, el disco o el observador se mueven para variar los ángulos de incidencia o difracción.

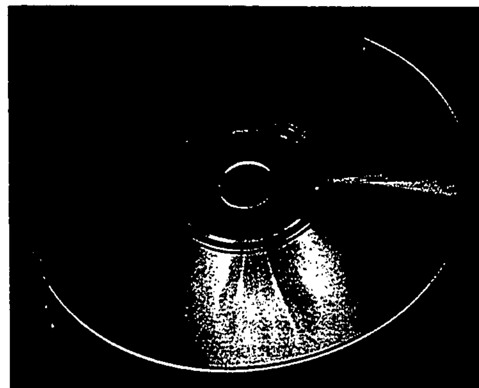


Figura 38.22 Un disco compacto observado bajo luz blanca. Los colores que se advierten en la luz reflejada y sus intensidades dependen de la orientación del disco en relación con el ojo y la fuente luminosa. *(Kristen Brochmann/Fundamental Photographs)*

EJEMPLO 38.7 **Los órdenes de una rejilla de difracción**

Luz monocromática de un láser de helio-neón (λ = 632.8 nm) incide en dirección normal sobre una rejilla de difracción que contiene 6 000 líneas por centímetro. Encuentre los ángulos a los cuales pueden observarse los máximos de primero, segundo y tercer órdenes.

Solución Primero debemos calcular la separación de rendijas, la cual es igual al inverso del número de líneas por centímetro:

$$d = \frac{1}{6\,000}\text{ cm} = 1.667 \times 10^{-4}\text{ cm} = 1667\text{ nm}$$

Para el máximo de primer orden (m = 1) obtenemos

$$\text{sen}\ \theta_1 = \frac{\lambda}{d} = \frac{632.8\text{ nm}}{1667\text{ nm}} = 0.379\,6$$

$$\theta_1 = 22.31°$$

Para el máximo de segundo orden (m = 2) encontramos

$$\text{sen}\ \theta_2 = \frac{2\lambda}{d} = \frac{2(632.8\text{ nm})}{1\,667\text{ nm}} = 0.759\,2$$

$$\theta_2 = 49.39°$$

Para m = 3 encontramos que sen θ_3 = 1.139. Puesto que sen θ no puede ser mayor que la unidad, lo cual no representa una solución realista. En consecuencia, sólo se observan en esta situación los máximos de cero, primero y segundo órdenes.

Potencia de resolución de la rejilla de difracción

La rejilla de difracción es más útil para medir con exactitud las longitudes de onda. Al igual que el prisma, la rejilla de difracción puede emplearse para dispersar un espectro en sus componentes de longitud de onda. De los dos dispositivos, la rejilla puede ser más precisa si uno desea distinguir dos longitudes de onda muy cercanas.

Si λ_1 y λ_2 son dos longitudes de onda casi iguales, de modo que una rejilla de difracción apenas puede distinguirlas, la **potencia de resolución** R de la rejilla se define como

$$R = \frac{\lambda}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \qquad \textbf{(38.11)}$$

Potencia de resolución

donde $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$ y $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Así, una rejilla con una alta potencia de resolución puede distinguir pequeñas diferencias en la longitud de onda. Además, si N

Potencia de resolución de una rejilla

líneas de la rejilla se iluminan, puede mostrarse que la potencia de resolución en la difracción de orden *m*-ésimo es

$$R = Nm \qquad \textbf{(38.12)}$$

Por consiguiente, la potencia de resolución aumenta conforme aumenta el número de orden y con el número creciente de rendijas iluminadas.

Observe que para $m = 0$, $R = 0$, lo cual significa que todas las longitudes de onda son indistinguibles en el máximo de orden cero. Sin embargo, considere el patrón de difracción de segundo orden ($m = 2$) de una rejilla que tiene 5 000 líneas iluminadas por la fuente de luz. La potencia de resolución de una rejilla de este tipo en el segundo orden es $R = 5\,000 \times 2 = 10\,000$. Por consiguiente, para una longitud de onda media de, por ejemplo, 600 nm, la mínima separación de longitud de onda entre dos líneas espectrales que se pueden resolver es $\Delta\lambda = \lambda/R = 6.00 \times 10^{-2}$ nm. Para el máximo principal de tercer orden, $R = 15\,000$ y $\Delta\lambda = 4.00 \times 10^{-2}$ nm, y así sucesivamente.

Una de las aplicaciones más interesantes de la difracción es la holografía, la cual se usa para crear las imágenes tridimensionales que se encuentran prácticamente en cualquier parte, desde las tarjetas de crédito hasta los timbres postales. La producción de las películas de difracción especiales se analiza en el capítulo 42 de la versión ampliada de este libro.

EJEMPLO 38 Resolución de las líneas espectrales del sodio

Cuando un elemento resalta a una temperatura muy alta, los átomos emiten radiación que tiene longitudes de onda discretas. El conjunto de longitudes de onda para un elemento dado se llama *espectro atómico.* Dos componentes intensos en el espectro atómico del sodio tienen longitudes de onda de 589.00 nm y 589.59 nm. a) ¿Cuál debe ser la potencia de resolución de una rejilla para distinguir dichas longitudes de onda?

Solución

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589.30\,\text{nm}}{589.59\,\text{nm} - 589.00\,\text{nm}} = \frac{589.30}{0.59} = 999$$

b) Para resolver estas líneas en el espectro de segundo orden, ¿cuántas líneas de la rejilla deben iluminarse?

Solución A partir de la ecuación 38.12 y los resultados del inciso a, encontramos que

$$N = \frac{R}{m} = \frac{999}{2} = 500 \text{ líneas}$$

Sección opcional

DIFRACCIÓN DE RAYOS X POR CRISTALES

En principio, la longitud de onda de cualquier onda electromagnética puede determinarse si se dispone de una rejilla con el espaciamiento apropiado (del orden de λ). Los rayos X, descubiertos por Wilhelm Roentgen (1845-1923) en 1895, son ondas electromagnéticas de longitud de onda muy corta (del orden de 0.1 nm). Como se puede ver, sería imposible construir una rejilla que tuviera un espaciamiento tan pequeño por el proceso detallado descrito al inicio de la sección 38.4. Sin embargo, se sabe que el espaciamiento atómico en un sólido es de casi 0.1 nm. En 1913 Max von Laue (1879-1960) sugirió que la disposición regular de átomos en un cristal podría actuar como una rejilla de difracción tridimensional para los rayos X. Experimentos posteriores confirmaron esta predicción. Los patrones de difracción que se observan son complicados debido a la naturaleza tridimensional del cristal. A pesar

de eso la difracción de rayos X ha probado ser una invaluable técnica para dilucidar las estructuras cristalinas y comprender la estructura de la materia.[1]

La figura 38.23 es un arreglo experimental para observar la difracción de rayos X de un cristal. Un haz colimado de rayos X incide sobre un cristal. Los haces difractados son muy intensos en ciertas direcciones, lo que corresponde a interferencia constructiva de ondas reflejadas en capas de átomos en el cristal. Los haces difractados pueden detectarse por medio de película fotográfica formando un arreglo de puntos conocidos como *patrón de Laue.* La estructura cristalina se puede deducir analizando las posiciones e intensidades de los diversos puntos en el patrón.

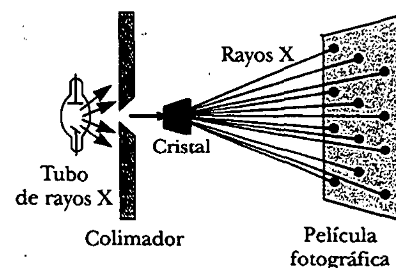


Figura 38.23 Diagrama esquemático de la técnica empleada para observar la difracción de rayos X por medio de un cristal. El arreglo de puntos formados sobre la película se denomina patrón de Laue.

La disposición de átomos en un cristal de cloruro de sodio (NaCl) se muestra en la figura 38.24. Cada celda unitaria (la geometría del sólido que se repite a través del cristal) es un cubo con una longitud de arista a. Un examen detenido de la estructura de NaCl muestra que los iones se ubican en planos discretos (las áreas sombreadas en la figura 38.24). Suponga ahora un haz de rayos X incidente que forma un ángulo θ con uno de los planos, como se muestra en la figura 38.25. El haz puede reflejarse tanto desde el plano superior como desde el inferior. Sin embargo, el haz reflejado desde el plano inferior viaja más lejos que el reflejado en el superior. La diferencia de recorrido efectivo entre los dos haces es $2d \text{ sen } \theta$. Los dos haces se refuerzan uno con otro (interferencia constructiva) cuando tal diferencia de trayectoria es igual a un múltiplo entero de λ. Esto mismo es cierto para la reflexión de la familia completa de planos paralelos. Así, la condición para la interferencia constructiva (máximo en el haz reflejado) es

$$2d \text{ sen } \theta = m\lambda \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(38.13)}$$

Ley de Bragg

Esta condición se conoce como **ley de Bragg**, en honor de W. L. Bragg (1890-1971), quien dedujo esta relación. Si la longitud de onda y el ángulo de difracción se miden, se utiliza la ecuación 38.13 para calcular el espaciamiento entre los planos atómicos.

Pregunta sorpresa 38.3

Cuando usted recibe rayos X en su pecho en un hospital, los rayos pasan a través de una serie de costillas paralelas en su pecho. ¿Las costillas actúan como una rejilla de difracción de rayos X?

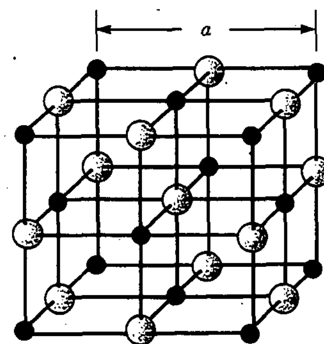


Figura 38.24 Estructura cristalina del cloruro de sodio (NaCl). Las esferas azules representan los iones Cl^- y las esferas rojas representan los iones Na^+. La longitud de la arista del cubo es $a = 0.562\ 737$ nm.

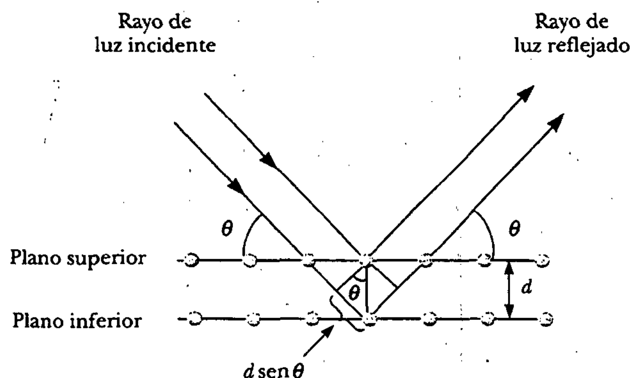


Figura 38.25 Una descripción bidimensional de la reflexión de un haz de rayos X a partir de dos planos cristalinos paralelos separados por una distancia d. El haz reflejado desde el plano inferior viaja más lejos que el reflejado desde el plano superior en una distancia igual a $2d \text{ sen } \theta$.

[1] Para mayores detalles sobre este tema véase Sir Lawrence Bragg, "X-Ray Crystallography", *Sci. Am.*, 219:58-70, 1968.



POLARIZACIÓN DE ONDAS LUMINOSAS

En el capítulo 34 describimos la naturaleza transversal de la luz y todas las ondas electromagnéticas. La polarización es una firme evidencia de esta naturaleza transversal.

Un haz ordinario de luz consta de un gran número de ondas emitidas por los átomos de una fuente de luz. Cada átomo produce una onda que tiene alguna orientación particular del vector de campo eléctrico **E**, que corresponde a la dirección de vibración atómica. La *dirección de polarización* de cada onda individual está definida para ser la dirección en la cual el campo eléctrico está vibrando. En la figura 38.26 tal dirección es a lo largo del eje *y*. Sin embargo, una onda electromagnética individual podría tener su vector **E** en el plano *yz*, lo que haría posible cualquier ángulo con el eje *y*. Como todas las direcciones de vibración desde una fuente de ondas son posibles, la onda electromagnética resultante es una superposición de ondas vibrantes en muchas direcciones diferentes. El resultado es el haz luminoso **no polarizado** que se representa en la figura 38.27a. La dirección de propagación de la onda en esta figura es perpendicular a la página. Las flechas son sólo algunas de las posibles direcciones de los vectores de campo eléctrico para las ondas individuales que componen el haz resultante. En un punto dado y en algún instante del tiempo, todos estos vectores de campo eléctrico se suman para dar un vector de campo eléctrico resultante.

Como se observó en la sección 34.2, se dice que una onda está **polarizada linealmente** si el campo eléctrico resultante **E** vibra en la misma dirección *todo el tiempo* en un punto particular, como se ilustra en la figura 38.27b. (Algunas veces una onda de este tipo se describe como *plana-polarizada* o simplemente *polarizada.*) El plano formado por **E** y la dirección de propagación se llama *plano de polarización* de la onda. Si la onda en la figura 38.26 representa la resultante de ondas individuales, el plano de polarización es el plano *xy*.

Es posible obtener un haz polarizado linealmente a partir de un haz no polarizado eliminando todas las ondas desde el haz, excepto aquellas cuyos vectores de campo eléctrico oscilan en un solo plano. A continuación analizaremos cuatro procesos para producir luz polarizada a partir de luz no polarizada.

Polarización mediante absorción selectiva

La técnica más común para polarizar luz es emplear un material que transmite ondas cuyos vectores de campo eléctrico vibran en un plano paralelo a una dirección determinada y que absorbe ondas cuyos vectores de campo eléctrico vibran en otras direcciones.

En 1938, E. H. Land (1909-1991) descubrió un material, al cual llamó *polaroide*, que polariza la luz a través de absorción selectiva por medio de moléculas orientadas. Dicho material se fabrica en láminas delgadas de hidrocarburos de cadena larga. Las láminas son estiradas durante su fabricación de modo que las moléculas se alineen en largas cadenas. Después de que una lámina se sumerge en una solución que contiene ioduro, las moléculas se vuelven buenos conductores eléctricos. Sin embargo, la conducción ocurre principalmente a lo largo de la cadena de hidrocar-

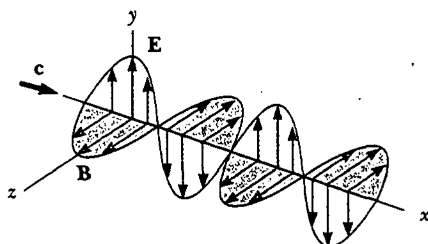


Figura 38.26 Diagrama esquemático de una onda electromagnética que se propaga a velocidad **c** en la dirección *x*. El campo eléctrico vibra en el plano *xy* y el campo magnético vibra en el plano *xz*.

buros porque los electrones de las moléculas sólo pueden moverse sin dificultad a lo largo de las cadenas. En consecuencia, las moléculas absorben fácilmente luz cuyo vector de campo eléctrico es paralelo a su longitud y admite luz a través de cuyo vector de campo eléctrico es perpendicular a su longitud.

Es común referirse a la dirección perpendicular a las cadenas moleculares como el *eje de transmisión*. En un polarizador ideal, toda la luz con **E** paralelo al eje de transmisión se transmite y toda la luz con **E** perpendicular al eje de transmisión se absorbe.

La figura 38.28 representa un haz de luz no polarizada que incide sobre una primera lámina polarizada, llamada *polarizador*. Ya que el eje de transmisión está orientado en forma vertical en la figura, la luz transmitida a través de esta hoja está polarizada en forma vertical. Una segunda lámina de polarización, denominada *analizador*, interseca el haz. En la figura 38.28 el eje de transmisión en el analizador está puesto a un ángulo θ con el eje del polarizador. Llamamos al vector de campo eléctrico del haz transmitido $\mathbf{E}_0$. La componente de $\mathbf{E}_0$ perpendicular al eje del analizador se absorbe por completo. La componente de $\mathbf{E}_0$ paralela al eje del analizador, al cual se le admite a través del analizador, es $E_0 \cos\theta$. Ya que la intensidad del haz transmitido varía con el cuadrado de la magnitud transmitida, concluimos que la intensidad del haz transmitido (polarizado) mediante el analizador varía como

$$I = I_{\text{máx}} \cos^2 \theta \qquad \textbf{(38.14)}$$

donde $I_{\text{máx}}$ es la intensidad del haz polarizado incidente en el analizador. Esta expresión, conocida como **ley de Malus**,[2] se aplica a dos materiales polarizantes cualesquiera cuyos ejes de transmisión están a un ángulo θ entre sí. A partir de tal expresión, advierta que la intensidad del haz transmitido es un máximo cuando los ejes de transmisión son paralelos ($\theta = 0$ o $180°$) y es cero (absorción completa por el analizador) cuando los ejes de transmisión son perpendiculares entre sí. Dicha variación en la intensidad transmitida a través de un par de láminas polarizantes se ilustra en la figura 38.29. Ya que el valor promedio de $\cos^2\theta$ es $\frac{1}{2}$, la intensidad de la luz que pasa por un polarizador ideal es un medio de la intensidad de la luz no polarizada.

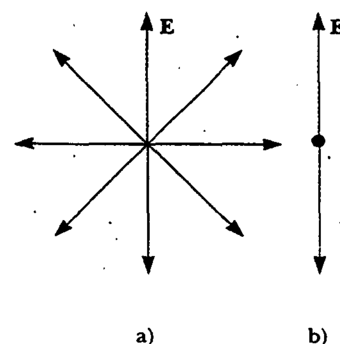


Figura 38.27 a) Un haz de luz no polarizada visto a lo largo de la dirección de propagación (perpendicular a la página). El campo eléctrico transversal puede vibrar en cualquier dirección en el plano de la página con igual probabilidad. b) Un haz de luz polarizada linealmente con el campo eléctrico vibrando en la dirección vertical.

Polarización por reflexión

Cuando un haz de luz no polarizada se refleja en una superficie, la luz reflejada puede ser completamente polarizada, polarizada en forma parcial o no polarizada, según el ángulo de incidencia. Si el ángulo de incidencia es 0, el haz reflejado es no polarizado. Para otros ángulos de incidencia, la luz reflejada es polarizada en cierta

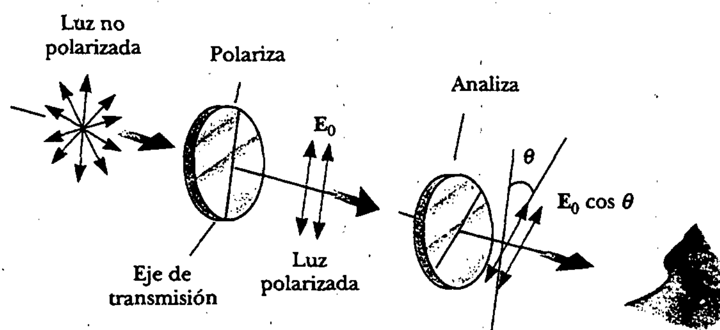


Figura 38.28 Dos láminas de polarización cuyos ejes de transmisión forman un ángulo θ entre sí. Sólo una fracción de la luz polarizada incidente en el analizador se transmite a través de él.

[2] En honor de su descubridor, E. L. Malus (1775-1812), quien descubrió que la luz reflejada se polarizaba al observarla a través de un cristal de calcita ($CaCO_3$).

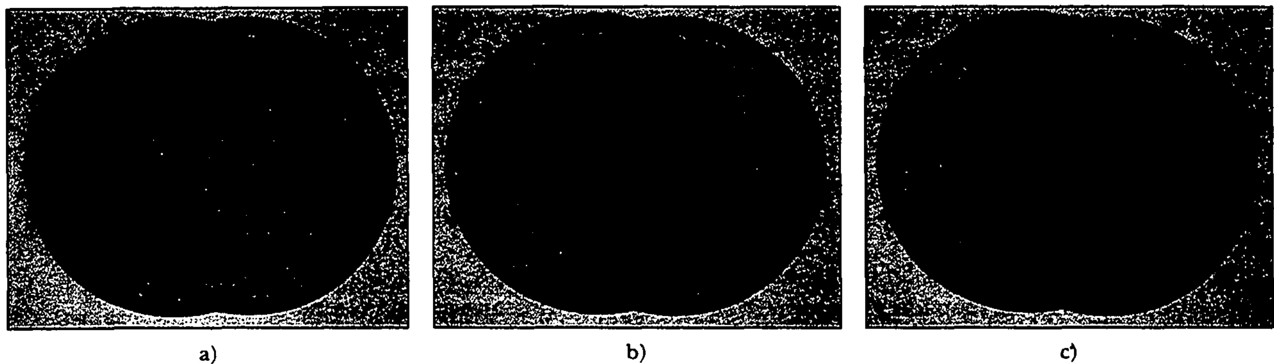


Figura 38.29 La intensidad de la luz transmitida a través de dos polarizadores depende de la orientación relativa de sus ejes de transmisión. a) La luz transmitida tiene una intensidad máxima cuando los ejes de transmisión se alinean entre sí. b) La intensidad de luz transmitida disminuye cuando los ejes de transmisión están a un ángulo de 45° entre sí. c) La intensidad de la luz transmitida es un mínimo cuando los ejes de transmisión forman ángulos rectos entre sí. *(Henry Leap y Jim Lehman)*

extensión y para un ángulo de incidencia particular, la luz reflejada está completamente polarizada. Investiguemos la reflexión a un ángulo especial.

Suponga que un haz de luz no polarizada incide sobre una superficie, como se ilustra en la figura 38.30a. Cada vector de campo eléctrico individual puede resolverse en dos componentes: una paralela a la superficie (y perpendicular a la página en la figura 38.30 representada por los puntos) y la otra (representada por las flechas rojas) perpendicular tanto a la primera componente como a la dirección de propagación. Por consiguiente, la polarización del haz completo se describe por dos componentes de campo eléctrico en estas direcciones. Se encuentra que la componente paralela se refleja con más intensidad que la componente perpendicular, lo que produce un haz reflejado polarizado en forma parcial. Además, el haz refractado también está polarizado en forma parcial.

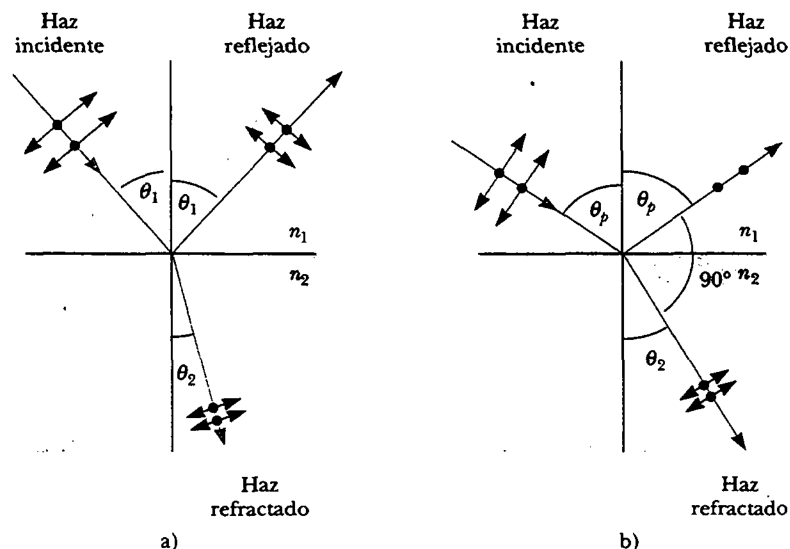


Figura 38.30 a) Cuando incide luz no polarizada sobre una superficie reflejante, los haces reflejado y refractado se polarizan en forma parcial. b) El haz reflejado está polarizado completamente cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo de polarización, θ_p, lo cual satisface la ecuación $n = \tan\theta_p$.

Suponga ahora que el ángulo de incidencia, θ_1, varía hasta que el ángulo entre los haces reflejado y refractado es 90°, como se muestra en la figura 38.30b. En este ángulo particular de incidencia el haz reflejado está completamente polarizado (con su vector de campo eléctrico paralelo a la superficie) en tanto que el haz refractado está aún sólo parcialmente polarizado. El ángulo de incidencia al cual esto ocurre se conoce como **ángulo de polarización**, θ_p.

Ángulo de polarización

Se puede obtener una expresión que relacione el ángulo de polarización con el índice de refracción de la sustancia reflectora usando la figura 38.30b. De acuerdo con la figura, vemos que $\theta_p + 90° + \theta_2 = 180°$, por lo que $\theta_2 = 90° - \theta_p$. Empleando la ley de refracción de Snell (Ec. 35.8) y considerando $n_1 = 1.00$ para el aire y $n_2 = n$, tenemos

$$n = \frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{\text{sen } \theta_p}{\text{sen } \theta_2}$$

Ya que sen $\theta_2 = \text{sen}(90° - \theta_p) = \cos \theta_p$, podemos escribir esta expresión para n como $n = \text{sen } \theta_p / \cos \theta_p$, lo que significa que

$$n = \tan \theta_p \qquad (38.15)$$

Ley de Brewster

La expresión anterior recibe el nombre de **ley de Brewster**, y el ángulo de polarización θ_p algunas veces se nombra **ángulo de Brewster**, en honor a su descubridor, David Brewster (1781-1868). Como n varía con la longitud de onda para una determinada sustancia, el ángulo de Brewster es también una función de la longitud de onda.

La polarización por reflexión es un fenómeno común. La luz solar reflejada en agua, vidrio y nieve se polariza en forma parcial. Si la superficie es horizontal, el vector de campo eléctrico de la luz reflejada tiene una fuerte componente horizontal. Los lentes contra el sol hechos de material polarizante reducen el resplandor de la luz reflejada. Los ejes de transmisión de los lentes se orientan verticalmente hasta absorber la intensa componente horizontal de la luz reflejada. Si gira sus lentes de sol 90°, disminuye su eficacia para bloquear el deslumbramiento de las superficies horizontales brillantes.

Experimento sorpresa

Idee una forma de usar un transportador, una lámpara de escritorio, y unos lentes de sol polarizados para medir el ángulo de Brewster del vidrio de una ventana. A partir de éste determine el índice de refracción del vidrio. Compare sus resultados con los valores dados en la tabla 35.1.

Polarización por doble refracción

Los sólidos pueden clasificarse de acuerdo con su estructura interna. Aquellos en los cuales los átomos se encuentran dispuestos en un orden específico se conocen como *cristalinos*; la estructura del NaCl de la figura 38.24 es sólo un ejemplo de un sólido cristalino. Aquellos sólidos en los cuales los átomos se distribuyen al azar se denominan *amorfos*. Cuando la luz viaja a través de un material amorfo como el vidrio, se desplaza a la misma rapidez en todas las direcciones, lo cual significa que el vidrio tiene un solo índice de refracción. Sin embargo, en ciertos materiales cristalinos, como la calcita y el cuarzo, la rapidez de la luz no es la misma en todas las direcciones. Dichos materiales se caracterizan por dos índices de refracción, por lo que a menudo se les denomina materiales de **doble refracción** o **birrefringentes**.

Cuando luz no polarizada entra a un cristal de calcita se divide en dos rayos polarizados planos que viajan a velocidades diferentes, lo que corresponde a dos ángulos de refracción, como se muestra en la figura 38.31. Los dos rayos se polarizan en dos direcciones mutuamente perpendiculares, según se indica mediante los puntos y las flechas. Un rayo, llamado **rayo ordinario (O)**, se caracteriza por un índice de refracción, n_O, que es el mismo en todas las direcciones. Esto significa que si uno pudiera poner una fuente puntual de luz dentro del cristal, como se muestra en la figura 38.32, las ondas ordinarias se dispersarían como esferas a partir de la fuente.

El segundo rayo polarizado plano, denominado **rayo extraordinario (E)**, viaja a magnitudes de velocidad diferentes en direcciones diferentes y, consecuentemente, se caracteriza por un índice de refracción n_E que varía con la dirección de propaga-

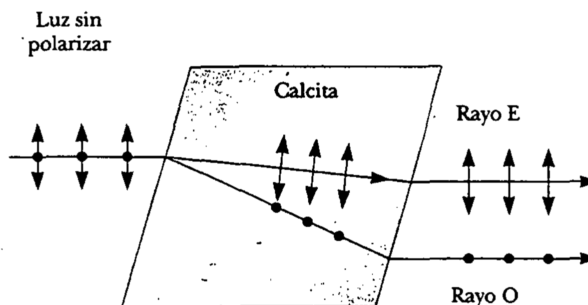


Figura 38.31 Luz no polarizada que incide sobre un cristal de calcita se divide en un rayo ordinario (O) y en un rayo extraordinario (E). Estos dos rayos se polarizan en direcciones mutuamente perpendiculares. (Note que el dibujo no está a escala.)

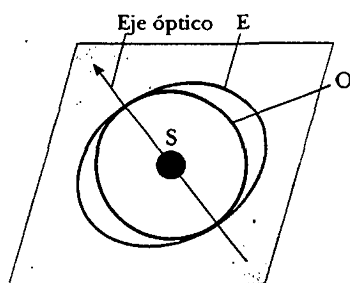


Figura 38.32 Una fuente puntual, S, dentro de un cristal de doble refracción, produce un frente de onda esférica correspondiente al rayo ordinario y un frente de onda elíptica correspondiente al rayo extraordinario. Las dos ondas se propagan a la misma velocidad a lo largo del eje óptico.

ción. La fuente puntual de la figura 38.32 enviaría hacia afuera una onda extraordinaria con frentes de onda que son de sección transversal elíptica. Advierta que en la figura 38.32 hay una dirección llamada **eje óptico**, a lo largo de la cual los rayos ordinario y extraordinario tienen la misma rapidez, lo que corresponde a la dirección para la cual $n_O = n_E$. La diferencia de rapidez para los dos rayos es un máximo en la dirección perpendicular al eje óptico. Por ejemplo, en calcita, $n_O = 1.658$ a una longitud de onda de 589.3 nm, y en n_E varía de 1.658 a lo largo del eje óptico hasta 1.486 perpendicular al eje óptico. Los valores de n_O y n_E para diversos cristales de doble refracción se proporcionan en la tabla 38.1.

Si se coloca una pieza de calcita sobre una hoja de papel y después se mira a través del cristal cualquier texto escrito sobre el papel, se observan dos imágenes, como se muestra en la figura 38.33. Como puede verse en la figura 38.31 las dos imágenes corresponden a una formada por el rayo ordinario y a otra formada por el rayo extraordinario. Si las dos imágenes se observan a través de una lámina de vidrio polarizado giratorio, aparecen y desaparecen en forma alternativa debido a que los rayos ordinario y extraordinario están polarizados en un plano a lo largo de direcciones mutuamente perpendiculares.

Polarización por dispersión

Cuando incide la luz sobre cualquier material, los electrones en éste pueden absorber y rerradiar parte de la luz. Tal absorción y rerradiación de la luz por electrones en las moléculas de gas que conforman el aire son la causa de que la luz solar que llega a un observador sobre la Tierra esté polarizada en forma parcial. Usted puede observar este efecto —llamado **dispersión**— mirando directamente hacia arriba a través de unos anteojos para sol cuyos lentes están hechos de material polarizante. Pasa menos luz a través de ciertas orientaciones de los lentes que en otras.

La figura 38.34 ilustra cómo la luz solar se vuelve polarizada cuando se dispersa. Un haz no polarizado de luz solar que viaja en la dirección horizontal (paralelo a la tierra) golpea en una molécula de uno de los gases que conforman el aire, po-

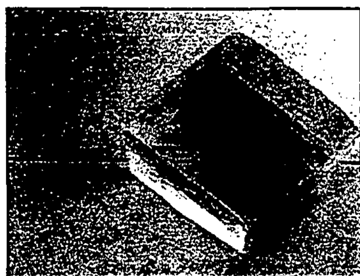


Figura 38.33 Un cristal de calcita produce una imagen doble debido a su material birrefringente (doblemente refractante). *(Henry Leap y Jim Lehman)*

TABLA 38.1 Índices de refracción para algunos cristales doble-refracción a una longitud de onda de 589.3 nm

Cristal	n_O	n_E	n_O/n_E
Calcita ($CaCO_3$)	1.658	1.486	1.116
Cuarzo (SiO_2)	1.544	1.553	0.994
Nitrato de sodio ($NaNO_3$)	1.587	1.336	1.188
Sulfito de sodio ($NaSO_3$)	1.565	1.515	1.033
Cloruro de zinc ($ZnCl_2$)	1.687	1.713	0.985
Sulfuro de zinc (ZnS)	2.356	2.378	0.991

niendo a los electrones a vibrar. Dichas cargas vibrantes actúan como las cargas vibrantes en una antena. La componente horizontal del vector de campo eléctrico en la onda incidente da como resultado una componente horizontal de la vibración de las cargas, y la componente vertical del vector ocasiona una componente vertical de vibración. Si el observador de la figura 38.34 está mirando hacia arriba (perpendicular a la dirección original de propagación de la luz), las oscilaciones verticales de las cargas no envían radiación al observador. Así, el observador ve luz que está completamente polarizada en la dirección horizontal, como se indica por las flechas rojas. Si el observador mira en otras direcciones, la luz se polariza en forma parcial en la dirección horizontal.

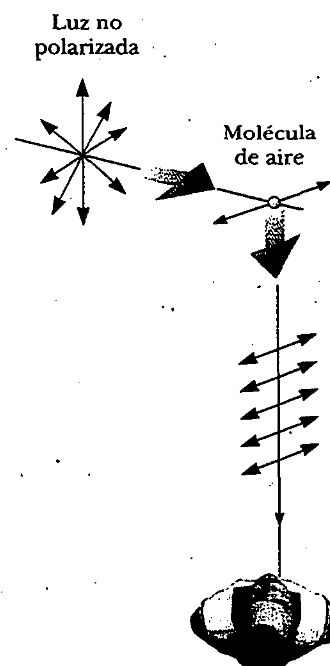


Figura 38.34 Dispersión de la luz solar no polarizada por medio de moléculas de aire. La luz dispersada que viaja en forma perpendicular a la luz incidente es polarizada plana, ya que las vibraciones verticales de las cargas en las moléculas de aire no envían luz en esta dirección.

Algunos fenómenos, incluido el de la dispersión de luz en la atmósfera, pueden entenderse de la manera siguiente. Cuando luz de diversas longitudes de onda λ incide sobre una molécula de gas de diámetro d, donde $d \ll \lambda$, la intensidad relativa de la luz dispersada varía como $1/\lambda^4$. La condición $d \ll \lambda$ se satisface para la dispersión de las moléculas de oxígeno (O_2) y de nitrógeno (N_2) en la atmósfera, cuyos diámetros son aproximadamente 0.2 nm. Así, longitudes de onda más cortas (luz azul) se dispersan de manera más eficiente que las longitudes de onda más largas (luz roja). Por tanto, cuando la luz solar es dispersada por moléculas de gas en el aire, la radiación de longitud de onda más corta (azul) se dispersa de manera más intensa que la radiación de longitud de onda larga (roja).

Cuando usted está mirando el cielo en una dirección que no es hacia el Sol, puede ver la luz dispersada, que es predominantemente azul; por consiguiente, ve un cielo azul. Si viera hacia el oeste en el atardecer (o hacia el este al amanecer), usted estaría mirando en la dirección del Sol y vería que la luz pasa a través de una gran distancia de aire. La mayoría de la luz azul ha sido dispersada por el aire entre usted y el Sol. La luz que sobrevive este viaje entre el aire y usted tiene mucha de su componente azul dispersada y está, por tanto, cargada hacia el extremo rojo del espectro; como resultado, usted ve los colores rojo y naranja del atardecer. Sin embargo, un cielo azul es visto por alguien hacia su oeste para quien está tan sólo a un cuarto de hora antes del atardecer.

Actividad óptica

Muchas aplicaciones importantes de la luz polarizada incluyen materiales con **actividad óptica**. Se dice que un material debe ser ópticamente activo si gira el plano de polarización de cualquier luz transmitida a través del material. El ángulo a lo largo del cual se hace girar a la luz por medio de un material específico depende de la longitud de la trayectoria a través del material y de la concentración si el material está en solución. Un material ópticamente activo es una solución de la dextrosa del azúcar común. Un método estándar para determinar la concentración de las soluciones de azúcar es medir la rotación producida por una longitud fija de la solución.

La asimetría molecular determina si un material es ópticamente activo. Por ejemplo, algunas proteínas son ópticamente activas debido a su forma de espiral. Otros materiales, como el vidrio y el plástico, se vuelven ópticamente activos cuando se tensan. Suponga que una pieza sin tensar de plástico se pone entre un polarizador y un analizador de manera que la luz pasa del polarizador al plástico y luego al analizador. Cuando el plástico está relajado y el eje del analizador es perpendicular al del polarizador, no llega luz polarizada al analizador. En otras palabras, el plástico sin tensar no tiene efecto en la luz que pasa por él. Sin embargo, si el plástico se tensa, las regiones de mayor tensión rotan la luz polarizada a través de ángulos más grandes. Por tanto, se observa una serie de bandas brillantes y oscuras en la luz admitida, con las bandas brillantes correspondiendo a regiones de tensiones más grandes.

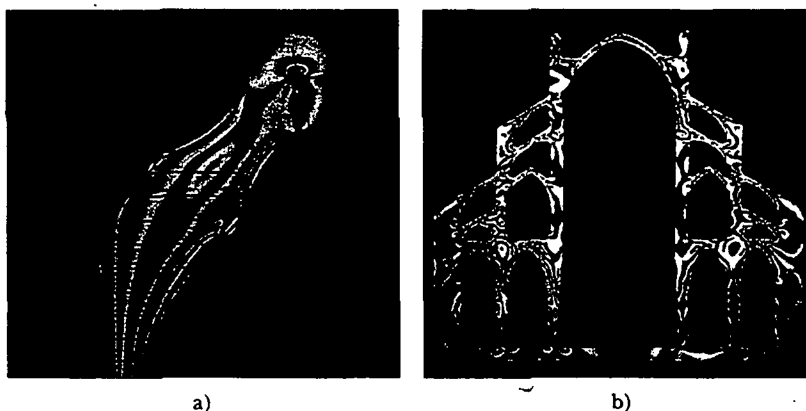

a) b)

Figura 38.35 a) Distribución de esfuerzos en un modelo plástico de una prótesis de cadera usada en un laboratorio de investigación médica. El patrón se produce cuando el modelo plástico se ve entre un polarizador y un analizador orientados en forma perpendicular entre sí. (*Sepp Seitz 1981*) b) Un modelo plástico de una estructura de arco en condiciones de carga observado entre polarizadores perpendiculares. Tales patrones son útiles en el diseño óptimo de componentes arquitectónicos: (*Peter Aprahamian/Science Photo Library*).

Los ingenieros emplean a menudo esta técnica, llamada *análisis de esfuerzos ópticos,* para apoyar el diseño de estructuras que van desde puentes hasta pequeñas herramientas. Un modelo plástico se construye y analiza en diferentes condiciones de carga para determinar regiones de debilidad y falla potenciales bajo tensión. Algunos ejemplos de modelos plásticos bajo tensión se muestran en la figura 38.35.

Las pantallas de cristal líquido de la mayoría de las calculadoras cambian su actividad óptica aplicando diferentes potenciales eléctricos a través de diferentes partes de la pantalla. Intente usar un par de anteojos polarizados para investigar la polarización usada en la pantalla de su calculadora.

RESUMEN

La **difracción** es la desviación de la luz de una trayectoria de línea recta cuando pasa a través de una abertura o al rodear obstáculos.

El **patrón de difracción de Fraunhofer** producido por una sola rendija de ancho a sobre una pantalla distante se compone de una franja brillante central y de franjas brillantes y oscuras alternas de intensidades mucho más bajas. Los ángulos θ a los cuales el patrón de difracción tiene intensidad cero, que corresponde a interferencia destructiva, están dados por

$$\text{sen}\ \theta = m\frac{\lambda}{a} \qquad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{38.1}$$

Cómo varía la intensidad I de un patrón de difracción de una rendija con el ángulo θ se proporciona por la expresión

$$I = I_{\text{máx}}\left[\frac{\text{sen}\ (\beta/2)}{\beta/2}\right]^2 \tag{38.4}$$

donde $\beta = (2\pi a\ \text{sen}\ \theta)/\lambda$ e $I_{\text{máx}}$ es la intensidad en $\theta = 0$.

El **criterio de Rayleigh**, el cual es una condición límite de resolución, indica que las imágenes formadas por una abertura apenas se distinguen si el máximo central del patrón de difracción correspondiente a una imagen cae sobre el primer mínimo

del patrón de difracción de la otra imagen. El ángulo de resolución límite para una rendija de ancho a es $\theta_{mín} = \lambda/a$, y el ángulo de resolución límite para una abertura circular de diámetro D está dado por $\theta_{mín} = 1.22\lambda/D$.

Una **rejilla de difracción** se compone por un gran número de rendijas idénticas separadas por espacios iguales. La condición para los máximos de intensidad en el patrón de interferencia de una rejilla de difracción para incidencia normal es

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad m = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(38.10)}$$

donde d es el espaciamiento entre rendijas adyacentes y m es el número de orden del patrón de difracción. La potencia de resolución de una rejilla de difracción de orden m-ésimo del patrón de difracción es

$$R = Nm \qquad \textbf{(38.12)}$$

donde N es el número de líneas en la rejilla que está iluminada.

Cuando la luz polarizada de intensidad I_0 se emite por un polarizador y entonces incide sobre un analizador, la luz transmitida a través del analizador tiene una intensidad igual a $I_{máx} \cos^2 \theta$, donde θ es el ángulo entre el eje de transmisión del polarizador y el vector de campo eléctrico de la luz incidente.

En general, la luz reflejada se polariza en forma parcial. Sin embargo, la luz reflejada se polariza por completo cuando el ángulo de incidencia es tal que el ángulo entre los haces reflejado y refractado es 90°. Este ángulo de incidencia, conocido como **ángulo polarizante** θ_p, satisface la **ley de Brewster:**

$$n = \tan \theta_p \qquad \textbf{(38.15)}$$

donde n es el índice de refracción del medio reflejante.

PREGUNTAS

1. ¿Por qué podemos oír alrededor de las esquinas, pero no podemos ver alrededor de ellas?
2. Observe la sombra de su libro cuando lo sostiene a pocas pulgadas arriba de una mesa mientras se ilumina por una lámpara varios pies arriba de ésta. ¿Por qué la sombra está algo difusa en los extremos?
3. Sabiendo que las ondas de radio viajan a la rapidez de la luz y que la frecuencia típica de un radio AM es de 1 000 kHz mientras que la frecuencia de un radio FM podría ser 100 MHz, calcule las longitudes de onda de las señales de radio AM y FM. Use esta información para explicar por qué las estaciones de radio en la banda FM con frecuencia no se escuchan cuando usted viaja a través de un túnel corto o un paso a desnivel, pero no ocurre lo mismo con las estaciones de radio en AM.
4. Describa el cambio en el ancho del máximo central de un patrón de difracción de una rendija a medida que el ancho de la rendija se hace más estrecho.
5. Suponiendo que los faros de un auto son fuentes puntuales, estime la distancia máxima a la que debe estar un observador en relación con el auto para poder todavía distinguirlos.
6. Un haz láser incide con un ángulo poco profundo en una máquina rayadora que tiene una escala finamente calibrada. Las líneas grabadas sobre la escala dan realce para un patrón de difracción sobre una pantalla. Analice cómo puede usted emplear esta técnica para obtener una medida de la longitud de onda de la luz láser.
7. Ciertos anteojos para el sol emplean material polarizante para reducir la intensidad de la luz reflejada en superficies brillantes. ¿Qué orientación de la polarización debe tener el material para ser más efectivo?
8. Durante el "día" en la Luna (es decir, cuando el Sol es visible), usted puede ver un cielo negro en el que las estrellas son claramente visibles. Durante el día en la Tierra, usted ve un cielo azul y no ve a las estrellas. Explique el porqué de esta diferencia.
9. Usted puede hacer visible la trayectoria de un haz de luz al poner polvo en el aire (quizá al sacudir un borrador de pizarrón en la trayectoria de un haz de luz). Explique por qué puede ver el haz en estas circunstancias.
10. ¿La luz del cielo está polarizada? ¿Por qué las nubes que se ven a través de lentes Polaroid destacan porque contrastan en forma marcada con el cielo?
11. Si una moneda se adhiere a una lámina de vidrio, y esta unión se mantiene frente a un haz láser, la sombra proyectada tiene anillos de difracción alrededor de su borde y un punto brillante en el centro. ¿Cómo es esto posible?
12. Si un alambre delgado se alarga cruzando la trayectoria de un haz láser, ¿es posible producir un patrón de difracción?
13. ¿Cómo podría determinarse el índice de refracción de una pieza plana de vidrio de obsidiana oscuro?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante ☐ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** = use computadora para resolver el problema = Física interactiva ☐ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 38.1 Introducción a la difracción
Sección 38.2 Difracción de rendijas estrechas

1. Una luz láser de helio-neón ($\lambda = 632.8$ nm) se envía a través de una sola rendija de 0.300 mm de ancho. ¿Cuál es el ancho del máximo central sobre una pantalla a 1.00 m de la rendija?
2. Un haz de luz verde es difractado por una rendija con un ancho de 0.550 mm. El patrón de difracción se forma sobre una pared a 2.06 m de la rendija. La distancia entre las posiciones de intensidad cero en ambos lados de la franja central brillante es de 4.10 mm. Calcule la longitud de onda de la luz láser.

WEB 3. Una pantalla se pone a 50.0 cm de una rendija, la cual está iluminada con luz de 690 nm. Si la distancia entre el primero y el tercer mínimos en el patrón de difracción es 3.00 mm, ¿cuál es el ancho de la rendija?

4. Microondas coherentes de longitud de onda de 5.00 cm entran en una larga ventana angosta en un edificio de otra manera esencialmente opaco a las microondas. Si la ventana tiene 36.0 cm de ancho, ¿cuál es la distancia desde el máximo central al mínimo de primer orden a lo largo de una pared de 6.50 m de la ventana?
5. El sonido con una frecuencia de 650 Hz desde una fuente lejana pasa por una puerta de 1.10 m de ancho en una pared que absorbe sonido. Encuentre el número y las direcciones aproximadas de los haces de máxima difracción radiados más allá del espacio.
6. Luz de 587.5 nm de longitud de onda ilumina una sola rendija de 0.750 mm de ancho. a) ¿A qué distancia de la rendija debe localizarse una pantalla si el primer mínimo en el patrón de difracción va a estar a 0.850 mm del centro de la pantalla? b) ¿Cuál es el ancho del máximo central?
7. Un patrón de difracción se forma sobre una pantalla a 120 cm desde una rendija de 0.400 mm de ancho. Se emplea una luz monocromática de 546.1 nm. Calcule la intensidad fraccionaria I/I_0 en el punto sobre la pantalla a 4.10 mm del centro del máximo principal.
8. La franja brillante de segundo orden en un patrón de difracción de una sola rendija está a 1.40 mm del centro del máximo central. La pantalla se encuentra a 80.0 cm de la rendija de 0.800 mm de ancho. Suponiendo que la luz incidente es monocromática calcule la longitud de onda aproximada de la luz.
9. Si la luz en la figura 38.5 golpea la única rendija en un ángulo β desde la dirección perpendicular, muestre que la ecuación 38.1, la condición para interferencia destructiva, debe modificarse para leer.

$$\text{sen } \theta = m\left(\frac{\lambda}{a}\right) - \text{sen } \beta$$

10. Luz coherente con una longitud de onda de 501.5 nm se envía a través de dos rendijas paralelas en una larga pared plana. Cada rendija tiene 0.700 μm de ancho y los centros de las rendijas están separados 2.80 μm. La luz llega a una pantalla semicilíndrica, con sus ejes en la línea media entre las rendijas. a) Prediga la dirección de cada máximo de interferencia sobre la pantalla, cuando un ángulo del bisector de la línea une las rendijas. b) Describa el patrón de luz sobre la pantalla y especifique el número de franjas brillantes y la posición de cada una. c) Encuentre la intensidad de la luz en la pantalla en el centro de cada franja brillante, expresada como una fracción de la intensidad de la luz I_0 en el centro del patrón.

Sección 38.3 Resolución de abertura circular y de una sola rendija

11. La pupila del ojo de un gato se estrecha como una rendija vertical de 0.500 mm de ancho con luz del día. ¿Cuál es la resolución angular para los ratones separados de manera horizontal? Suponga que la longitud de onda promedio de la luz es 500 nm.
12. Determine el radio de una imagen de una estrella formada en la retina del ojo si el diámetro de abertura (la pupila) en la noche es de 0.700 cm y la longitud del ojo es 3.00 cm. Suponga que la longitud de onda representativa de la luz estelar en el ojo es 500 nm.

WEB 13. Un láser de helio-neón emite luz que tiene una longitud de onda de 632.8 nm. La abertura circular a través de la cual emerge el haz tiene un diámetro de 0.500 cm. Determine el diámetro del haz a 10.0 km del láser.

14. La noche del 18 de abril de 1775 se encendió una señal desde el campanario de la Vieja Iglesia del Norte en Boston para Paul Revere, quien se encontraba a 1.80 millas. "Una si es por tierra, dos si es por mar." ¿A qué separación mínima debía tener el sacristán colocadas las linternas de manera que Paul Revere recibiera el mensaje correcto? Suponga que las pupilas de Paul Revere tienen un diámetro de 4.00 mm en la noche y que la luz de la linterna tiene una longitud de onda predominante de 580 nm.
15. El pintor impresionista George Seurat creó pinturas con un enorme número de puntos de pigmento puro de aproximadamente 2.00 mm de diámetro. La idea era localizar colores como el rojo y el verde uno después de otro para formar lienzos centelleantes (véase la figura P38.15). ¿Más allá de qué distancia uno puede ser capaz de distinguir puntos individuales sobre el lienzo? (Suponga que $\lambda = 500$ nm y que el diámetro de la pupila es de 4.00 mm.)
16. Un sistema de estrella binaria en la constelación de Orión tiene una separación interestelar de 1.00×10^{-5} rad. Si $\lambda = 500$ nm, ¿cuál es el diámetro más pequeño que el telescopio puede tener para definir las dos estrellas?



Figura P38.15 *Tarde de domingo en la Isla de La Grande Jatte,* Georges Seurat. *(SuperStock)*

17. Una niña está de pie en una orilla de una autopista recta y observa el carro de sus abuelos que se aleja a 20.0 m/s. El aire es perfectamente claro y estable, y después de 10.0 min las dos luces traseras del auto parecen una. Suponiendo que el diámetro de la pupila de la niña es de 5.00 mm, estime el ancho del auto.
18. Suponga que usted está de pie sobre una autopista recta y observa un carro que se aleja a una rapidez v. El aire está perfectamente claro y estable, y después de un tiempo t de las dos luces traseras usted sólo ve una. Suponiendo que el diámetro de su pupila es d, estime el ancho del auto.

19. Una antena circular del radar de un barco guardacostas tiene un diámetro de 2.10 m y radia a una frecuencia de 15.0 GHz. Dos pequeños botes están localizados a 9.00 km del barco. ¿Qué tan cerca podrían estar los botes y aún ser detectados como dos objetos?

20. Si fuera a enviar un haz de láser de rubí (λ = 694.3 nm) hacia afuera del barril de un telescopio de 2.70 m de diámetro, ¿cuál sería el diámetro del gran punto rojo cuando el haz llegara a la Luna a 384 000 km de distancia? (Desprecie la dispersión atmosférica.)

21. La resolución angular de un radiotelescopio va a ser 0.100° cuando las ondas incidentes tienen una longitud de onda de 3.00 mm. ¿Qué diámetro mínimo se requiere para la antena receptora del telescopio?

22. Cuando Marte está más cerca de la Tierra, la distancia que separa a los dos planetas es igual a 88.6 × 10^6 km. Marte se observa a través de un telescopio cuyo espejo tiene un diámetro de 30.0 cm. a) Si la longitud de onda de la luz es 590 nm, ¿cuál es la resolución angular del telescopio? b) ¿Cuál es la distancia más pequeña que puede definirse entre dos puntos sobre Marte?

Sección 38.4 La rejilla de difracción

Nota: En los siguientes problemas suponga que la luz está incidiendo normalmente en las rejillas.

[23.] Luz blanca se descompone en sus componentes espectrales por medio de una rejilla de difracción. Si la rejilla tiene 2 000 líneas por centímetro, ¿a qué ángulo la luz roja de 640 nm de longitud de onda aparece en primer orden?

24. Luz de un láser de argón golpea a una rejilla de difracción que tiene 5 310 líneas por centímetro. Los máximos principales de primer orden y central están a una distancia de 0.488 m en una pared a 1.72 m de la rejilla. Determine la longitud de onda de la luz láser.

WEB [25.] El espectro del hidrógeno tiene una línea roja a 656 nm y una línea violeta a 434 nm. ¿Cuál es la separación angular entre dos líneas espectrales obtenidas con una rejilla de difracción que tiene 4 500 líneas por centímetro?

26. Un láser de helio-neón (λ = 632.8 nm) se usa para calibrar una rejilla de difracción. Si el máximo de primer orden ocurre a 20.5°, ¿cuál es el espaciamiento entre los surcos adyacentes en la rejilla?

27. Tres líneas espectrales discretas ocurren en ángulos de 10.09°, 13.71° y 14.77° en el espectro de primer orden de un espectroscopio de rejilla. a) Si la rejilla tiene 3 660 rendijas por centímetro, ¿cuáles son las longitudes de onda de la luz? b) ¿A qué ángulos se encuentran estas líneas en el espectro de segundo orden?

28. Una rejilla de difracción tiene 800 líneas por milímetro. Un haz de luz que contiene longitudes de onda de 500 a 700 nm incide en la rejilla. ¿Se traslapan los espectros de diferente orden? Explique.

WEB [29.] Una rejilla de difracción con un ancho de 4.00 cm se graduó con 3 000 surcos por centímetro. a) ¿Cuál es la potencia de resolución de esta rejilla en los tres primeros órdenes? b) Si dos ondas monocromáticas están incidiendo sobre una rejilla que tiene una longitud de onda media de 400 nm, ¿cuál es su separación de longitud de onda si están precisamente definidas en el tercer orden?

30. Muestre que cuando está pasando luz blanca por una rejilla de difracción de cualquier tamaño de espaciamiento, el extremo violeta del espectro visible continuo en tercer orden siempre traslapa la luz roja al otro extremo del espectro de segundo orden.

[31.] Una fuente emite luz de 531.62 nm y 531.81 nm. a) ¿Qué número mínimo de líneas se requiere para una rejilla que resuelve las dos longitudes de onda en el espectro de primer orden? b) Determine el espaciamiento de las rendijas en una rejilla de 1.32 cm de ancho que tiene el número mínimo requerido de líneas.

32. Dos longitudes de onda λ y $\lambda + \Delta\lambda$ (con $\Delta\lambda \ll \lambda$) inciden sobre una rejilla de difracción. Demuestre que la separación angular entre los espectros de orden m-ésimo es

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{(d/m)^2 - \lambda^2}}$$

donde d es la separación de las rendijas y m es el número de orden.

[33.] Una rejilla con 250 líneas por milímetro se usa con una fuente de luz incandescente. Suponga que los rangos del espectro visible son de 400 a 700 nm. ¿Cuántos órdenes

puede ver para a) todo el espectro visible y b) la región de longitud de onda corta?

34. Una rejilla de difracción tiene 4 200 marcas por centímetro. En una pantalla a 2.00 m desde la rejilla se encuentra que para un orden particular m, el máximo correspondiente a dos longitudes de onda cercanamente espaciadas del sodio (589.0 nm y 589.6 nm) están a una distancia de 1.59 mm. Determine el valor de m.

(Opcional)

Sección 38.5 Difracción de rayos X por cristales

35. El yoduro de potasio (KI) tiene la misma estructura cristalina que el NaCl, con $d = 0.353$ nm. Un haz de rayos X monocromático muestra un máximo de difracción cuando el ángulo rasante es 7.60°. Calcule la longitud de onda de los rayos X. (Suponga primer orden.)

36. Una longitud de onda de 0.129 nm caracteriza a los rayos X K_α del zinc. Cuando un haz de estos rayos X incide sobre la superficie de un cristal cuya estructura es similar a la del NaCl, se observa un máximo de primer orden a 8.15°. A partir de esta información calcule el espaciamiento interplanar.

WEB 37. Si el espacio interplanar de NaCl es de 0.281 nm, ¿cuál es el ángulo predicho al cual se difractan rayos X de 0.140 nm en un máximo de primer orden?

38. El máximo de difracción a primer orden se observa a 12.6° para un cristal en el que el espaciamiento interplanar es de 0.240 nm. ¿Cuántos otros órdenes se pueden observar?

39. Rayos X monocromáticos de la línea K_α de potasio provenientes de un blanco de níquel ($\lambda = 0.166$ nm) inciden sobre una superficie de cristal de cloruro de potasio (KCl). La distancia interplanar entre KCl es 0.314 nm. ¿A qué ángulo (respecto de la superficie) debe dirigirse el haz de manera que se observe un máximo de segundo orden?

40. En agua de profundidad uniforme, un ancho muelle está soportado por pilotes en varias filas paralelas con una separación de 2.80 m. Las olas del océano de longitud de onda uniforme ondean, moviéndose en una dirección que hace un ángulo de 80.0° con la fila de postes. Encuentre las tres longitudes de onda más grandes de olas que se reflejan más fuertemente por los pilotes.

Sección 38.6 Polarización de ondas luminosas

41. Luz no polarizada pasa a través de dos hojas de polaroide. El eje de la primera es vertical, y el de la segunda está a 30.0° de la vertical. ¿Qué fracción de la luz inicial se transmite?

42. Tres discos polarizantes cuyos planos son paralelos están centrados en un eje común. La dirección del eje de transmisión en cada caso se muestra en la figura P38.42 en relación con la dirección vertical común. Un haz de luz polarizada plana con E_0 paralelo a la dirección de referencia vertical incide desde la izquierda sobre el primer disco con intensidad $I_i = 10.0$ unidades (arbitrarias). Calcule la intensidad transmitida I_f cuando a) $\theta_1 = 20.0°$, $\theta_2 = 40.0°$ y $\theta_3 = 60.0°$; b) $\theta_1 = 0°$, $\theta_2 = 30.0°$ y $\theta_3 = 60.0°$.

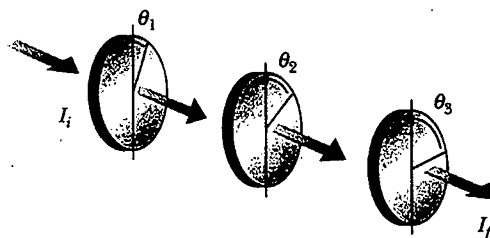


Figura P38.42 Problemas 42 y 48.

43. Luz polarizada plana está incidiendo sobre un disco de una sola polarización con la dirección de E_0 paralela a la dirección del eje de transmisión. ¿A través de qué ángulo debería girar el disco para que la intensidad del haz transmitido se reduzca por un factor de a) 3.00, b) 5.00, c) 10.0?

44. El ángulo de incidencia de un haz de luz en una superficie reflejante es continuamente variable. El rayo reflejado se encuentra polarizado por completo cuando el ángulo de incidencia es 48.0°. ¿Cuál es el índice de refracción del material reflejante?

45. El ángulo crítico para reflexión interna total para un zafiro rodeado por aire es 34.4°. Calcule el ángulo de polarización para el zafiro.

46. Para un medio transparente particular rodeado por aire, muestre que el ángulo crítico para la reflexión interna total y el ángulo de polarización están relacionados por la expresión $\cot \theta_p = \operatorname{sen} \theta_c$.

47. ¿Qué tan arriba del horizonte está la Luna cuando su imagen reflejada en agua tranquila está completamente polarizada? ($n_{agua} = 1.33$).

PROBLEMAS ADICIONALES

48. En la figura P38.42 suponga que el eje de transmisión de los discos polarizados izquierdo y derecho son perpendiculares entre sí. Suponga también que el centro del disco está girando en un eje común con una rapidez angular ω. Muestre que si luz no polarizada está incidiendo en el disco izquierdo con una intensidad $I_{máx}$, la intensidad del haz que sale del disco derecho es

$$I = \frac{1}{16} I_{máx}(1 - \cos 4\omega t)$$

Esto significa que la intensidad del haz que sale es modulada a una rapidez que es cuatro veces la rapidez de rotación del centro del disco. [*Sugerencia:* Use las identidades trigonométricas $\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ y $\operatorname{sen}^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2$, y recuerde que $\theta = \omega t$.]

49. Usted quiere girar el plano de polarización de un haz de luz polarizada a 45.0° con una reducción de la intensidad máxima del 10.0%. a) ¿Cuántas láminas de polarizadores perfectos necesita para conseguir esto? b) ¿Cuál es el ángulo entre los polarizadores adyacentes?

50. La figura P38.50 muestra el uso de un megáfono. Construya una descripción teórica de cómo funciona un megáfono. Usted puede suponer que el sonido de su voz radia sólo a través de su boca. La mayoría de la información hablada no se transmite mediante una señal con una frecuencia fundamental, sino más bien con ruidos y en armónicos, con frecuencias de unos cuantos miles de hertz. ¿Su teoría le permite cualquier predicción que sea fácil de probar?

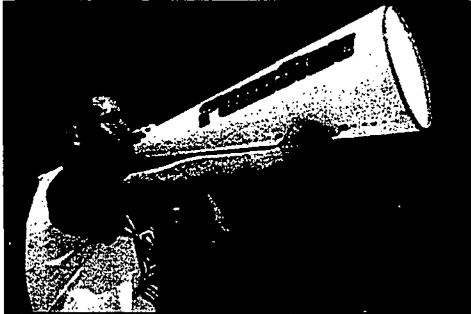


Figura P38.50 (*Susan Allen Sigmon/Allsport USA*)

51. Luz de un láser helio-neón ($\lambda = 632.8$ nm) está incidiendo en una sola rendija. ¿Cuál es el máximo ancho para el que no hay mínimos de difracción observados?
52. ¿Cuáles son las dimensiones aproximadas del objeto más pequeño sobre la Tierra para el que el astronauta pueda definir a simple vista cuando está orbitando a 250 km por arriba de la Tierra? Suponga que $\lambda = 500$ nm y que el diámetro de la pupila es de 5.00 mm.
53. **Problema de repaso.** Un haz de luz de 541 nm está incidiendo en una rejilla de difracción que tiene 400 líneas por milímetro. a) Determine el ángulo para el rayo de segundo orden. b) Si el aparato entero está inmerso en agua, ¿cuál es el nuevo ángulo de difracción de segundo orden? c) Muestre que los dos rayos difractados de los incisos a y b están relacionados mediante la ley de la refracción.
54. El *Very Large Array* es un conjunto de 27 platos de radiotelescopios en los condados de Caton y Socorro en Nuevo México (véase la figura P38.54). Las antenas se pueden mover para separarlas sobre sus rieles, y sus señales combinadas dan la potencia de resolución de una abertura de 36.0 km de diámetro. a) Si los detectores se sintonizan a una frecuencia de 1.40 GHz, ¿cuál es la resolución angular del *VLA*? b) Nubes de hidrógeno radian a esta frecuencia. ¿Cuál debe ser la distancia de separación para las dos nubes en el centro de la galaxia, a 26 000 años luz de la galaxia, si se pudiera definirlas? c) Conforme el telescopio observa hacia arriba, un halcón da vueltas mirando hacia abajo. Por comparación encuentre la resolución angular del ojo del halcón. Suponga que éste es más sensible a la luz verde que tiene una longitud de onda de 500 nm y que tiene una pupila con un diámetro de 12.0 mm. d) Un ratón está en el suelo 30.0 m abajo. ¿A qué distancia deben estar separados los bigotes del ratón para que el halcón los defina?



Figura 38.54 Un ranchero en Nuevo México cabalga y pasa uno de los 27 radiotelescopios que componen el *Very Large Array* (*VLA*) (© *Danny Lehman*)

55. Grote Reber fue un pionero en radioastronomía. Construyó un radiotelescopio con un plato de recepción de 10.0 m de diámetro. ¿Cuál es la resolución angular del telescopio para ondas de radio de 2.00 m?
56. Un haz de luz de 750 nm incide a la superficie plana de un cierto líquido, y el haz se separa en un rayo reflejado y en un rayo refractado. Si el rayo reflejado está polarizado por completo a 36.0°, ¿cuál es la longitud de onda del rayo refractado?
57. Luz de longitud de onda de 500 nm está incidiendo normalmente sobre una rejilla de difracción. Si el máximo de tercer orden del patrón de difracción se observa a 32.0°, a) ¿cuál es el número de marcas por centímetro para la rejilla? b) Determine el número total de máximos primarios que se pueden observar en esta situación.
58. Llega luz a la superficie de agua con un ángulo de polarización. La parte del haz refractado en el agua pega en una placa de vidrio sumergido (índice de refracción, 1.50), como se muestra en la figura P38.58. Si la luz reflejada sobre la superficie superior de esta placa está polarizada por completo, ¿cuál es el ángulo entre la superficie del agua y la placa de vidrio?

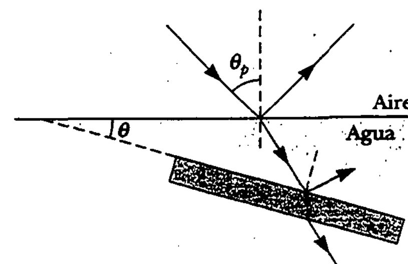


Figura P38.58

59. Una imagen de televisión estadounidense normal está compuesta de aproximadamente 485 líneas horizontales al variar la intensidad de la luz. Suponga que su capacidad para definir las líneas está limitada sólo por el criterio de Rayleigh y que las pupilas de sus ojos tienen 5.00 mm de diámetro. Calcule la relación de la distancia mínima de visión a la dimensión vertical de la imagen de modo que uno sea capaz de definir las líneas. Suponga que la longitud de onda promedio de la luz que sale de la pantalla es de 550 nm.

60. a) Si la luz que viaja en un medio para el que el índice de refracción es n_1 está incidiendo con un ángulo θ sobre la superficie de un medio de índice n_2, tal que el ángulo entre los rayos reflejado y refractado es β, demuestre que

$$\tan\theta = \frac{n_2 \operatorname{sen}\beta}{n_1 - n_2\cos\beta}$$

[*Sugerencia:* Use la identidad sen $(A + B)$ = sen A cos B + cos A sen B.] b) Muestre que esta expresión para tan θ se reduce a la ley de Brewster cuando $\beta = 90°$, $n_1 = 1$ y $n_2 = n$.

61. Suponga que una sola rendija en la figura 38.6 mide 6.00 cm de ancho y está enfrente de una fuente de microondas que opera a 7.50 GHz. a) Calcule el ángulo subtendido por el primer mínimo en el patrón de difracción. b) ¿Cuál es la intensidad relativa $I/I_{máx}$ en $\theta = 15.0°$? c) Considere el caso en que hay dos de estas fuentes separadas lateralmente por 20.0 cm, detrás de la rendija. ¿Cuál debe ser la distancia máxima entre el plano de las fuentes y la rendija, si los patrones de difracción deben definirse? (En este caso la aproximación sen $\theta \approx$ tan θ no es válida, debido a que el valor de a/λ es relativamente pequeño.)

62. Dos hojas polarizantes se ponen juntas con sus ejes de transmisión cruzados de tal manera que no se transmite luz. Una tercera hoja se inserta entre ellas con su eje de transmisión a un ángulo de 45.0° respecto de cada uno de los otros ejes. Encuentre la fracción de la luz incidente no polarizada con la intensidad de la luz transmitida por la combinación de las tres hojas. (Suponga que cada hoja polarizada es ideal.)

63. La figura P38.63a es un diagrama tridimensional de un cristal birrefringente. Las líneas punteadas ilustran cómo una placa paralela delgada enfrente del material podría cortarse de la gran muestra con el eje óptico del cristal paralelo a las caras de la placa. Se corta una sección del cristal de esta forma, la cual se conoce como *placa retrasada*. Cuando está incidiendo un haz de luz en la placa perpendicular a la dirección del eje óptico, como se muestra en la figura P38.63b, el rayo O y el rayo E viajan a lo largo de una sola línea recta pero a diferentes magnitudes de velocidad. a) Haciendo el espesor de la placa igual a d, muestre que la diferencia de fase entre el rayo O y el rayo E es

$$\theta = \frac{2\pi d}{\lambda}(n_O - n_E)$$

donde λ es la longitud de onda del aire. b) Si en un caso particular la luz incidente tiene una longitud de onda de 550 nm, ¿cuál es el valor mínimo de d para una placa de cuarzo en la cual $\theta = \pi/2$? Esta placa se llama *placa de cuarto de onda*. (Use los valores de n_o y n_E de la tabla 38.1)

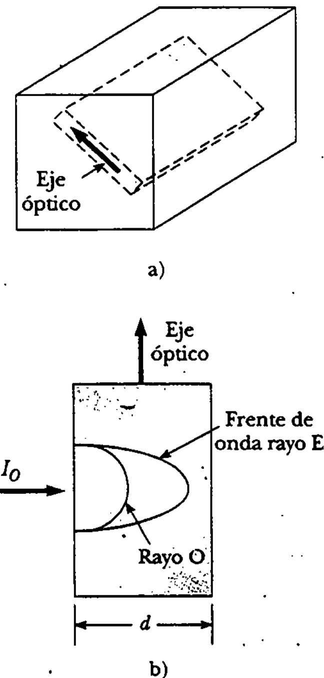


Figura P38.63

64. Deduzca la ecuación 38.12 para la potencia de definición de una rejilla, $R = Nm$, donde N es el número de líneas iluminadas y m es el orden en el patrón de difracción. Recuerde que el criterio de Rayleigh (véase la sección 38.3) establece que dos longitudes de onda estarán resueltas cuando el máximo principal para una está en el primer mínimo de la otra.

65. Luz de longitud de onda de 632.8 nm ilumina una sola rendija, y el patrón de difracción se forma en una pantalla a 1.00 m de la rendija. Usando los datos de la tabla de la página siguiente grafique la intensidad relativa *versus* la distancia. Escoja un valor apropiado para el ancho de rendija a, y en la misma gráfica usada para los datos experimentales, grafique la expresión teórica de la intensidad relativa

$$\frac{I}{I_{máx}} = \frac{\operatorname{sen}^2(\beta/2)}{(\beta/2)^2}$$

¿Qué valor de a da el mejor ajuste entre la teoría y el experimento?

66. ¿Cuánta difracción dispersa experimenta un haz de luz? Una respuesta cuantitativa es el *ancho completo a la mitad del máximo* del máximo central del patrón de difracción de Fraunhofer de una sola rendija. Puede evaluar este ángulo de dispersión en este problema y en el próximo. a) En la ecuación 38.4, se define $\beta/2 = \phi$ y se demuestra que, en el punto donde $I = 0.5\ I_{máx}$, se debe tener sen $\phi = \phi/\sqrt{2}$. b) Sea y_1 = sen ϕ y $y_2 = \phi/\sqrt{2}$. Grafique y_1 y y_2 sobre el mismo conjunto de ejes en el intervalo desde $\phi = 1$ rad hasta $\phi = \pi/2$ rad. Determine ϕ desde el punto de intersección de las dos curvas. c) A continua-

ción demuestre que, si la fracción λ/α no es grande, el ancho total angular a la mitad del máximo del máximo de difracción central es $\Delta\theta = 0.886\ \lambda/\alpha$.

Intensidad relativa	Distancia desde el centro del máximo central (mm).
1.00	0
0.95	0.8
0.80	1.6
0.60	2.4
0.39	3.2
0.21	4.0
0.079	4.8
0.014	5.6
0.003	6.5
0.015	7.3
0.036	8.1
0.047	8.9
0.043	9.7
0.029	10.5
0.013	11.3
0.002	12.1
0.000 3	12.9
0.005	13.7
0.012	14.5
0.016	15.3
0.015	16.1
0.010	16.9
0.004 4	17.7
0.000 6	18.5
0.000 3	19.3
0.003	20.2

67. Otro método para resolver la ecuación $\phi = \sqrt{2}$ sen ϕ en el problema 66 consiste en el uso de una calculadora; intente un primer valor de ϕ, vea si es la solución, y continúe actualizando su estimación hasta que se iguale la ecuación. ¿Cuántos pasos (iteraciones) realizó?

68. En el patrón de difracción de una sola rendija, descrita por la ecuación.

$$I_\theta = I_{\text{máx}}\left[\frac{\text{sen }(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$$

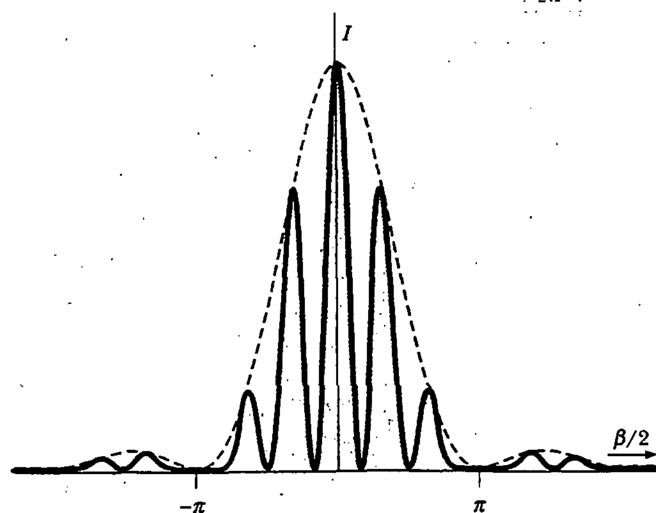
con $\beta = (2\pi\ a \text{ sen } \theta)/\lambda$, el máximo central está en $\beta = 0$ y el máximo contiguo está aproximadamente en $\beta/2 = (m + \frac{1}{2})$ para $m = 1, 2, 3, \ldots$ Determine con más exactitud a) el lugar del primer máximo contiguo, donde $m = 1$, y b) el lugar del segundo máximo contiguo. Observe en la figura 38.10a que en la gráfica de intensidad *versus* $\beta/2$ tiene una tangente horizontal en el máximo y también en el mínimo. Necesita resolver una ecuación *trascendente*.

69. Un *esteroscopio* tiene una abertura circular pequeña de diámetro D. La luz de un objeto distante pasa a través de la abertura hacia adentro en el otro lado oscuro de la caja, incidiendo en una pantalla que se localiza a una distancia L. Si D es muy grande la representación sobre la pantalla será difusa, ya que un punto brillante en el campo visual enviará luz sobre un círculo de diámetro ligeramente mayor que D. Por otro lado, si D es muy pequeño, la difracción desenfocará la presentación sobre la pantalla. La pantalla muestra una imagen razonablemente definida si el diámetro del disco central del patrón de difracción, es igual a D en la pantalla, especificado por la ecuación 38.9. a) Muestra que para la luz monocromática con ondas cuyos frentes son planos y $L \gg D$, las condiciones para una vista definida se cumplen se $D^2 = 2.44\ \lambda L$. b) Encuentre el diámetro óptimo del esteroscopio si se proyecta luz de 500 nm sobre una pantalla a 15.0 cm.

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

38.1 El espacio entre la puerta ligeramente abierta y su marco actúan como una rendija simple. Las ondas sonoras tienen longitudes de onda que son aproximadamente del mismo tamaño que la abertura y, de este modo, se difractan y se extienden en toda la habitación en la que usted se encuentre. Ya que la longitud de onda de la luz es mucho más pequeña que el ancho de la rendija, virtualmente no se difractan. Como resultado, necesita una percepción en la línea directa para detectar las ondas de luz.

38.2 La situación es parecida a la que se describe en la figura 38.11 excepto que ahora las rendijas están separadas sólo la mitad. El patrón de difracción es el mismo, pero el patrón de interferencia se alarga porque d es muy pequeña. Ya que $d/a = 3$, el tercer máximo de interferencia coincide con el primer mínimo de la difracción. Su dibujo sería parecido a la figura de la derecha.



38.3 Sí, pero no se observan efectos de difracción porque la distancia de separación entre las costillas contiguas es demasiado grande con respecto a la longitud de onda de los rayos X.


Tamaño aproximado de la Tierra para comparación

parte 6

Física moderna

Hacia el fin del siglo XIX, la mayoría de los científicos estaba convencida de que habían aprendido la mayor parte de lo que se necesitaba saber acerca de la física. Las leyes del movimiento de Newton y su teoría de la gravitación universal, el trabajo teórico de Maxwell en la unificación de la electricidad y el magnetismo, así como las leyes de la termodinámica y la teoría cinética explicaron con gran éxito una amplia variedad de fenómenos.

Sin embargo, al comenzar el nuevo siglo, una revolución más importante impactó al mundo de la física. En 1900 Planck proporcionó las ideas básicas que llevaron a la formulación de la teoría cuántica, y en 1905 Einstein formuló su admirable teoría especial de la relatividad. Las palabras del propio Einstein expresan la emoción de la época: "Fue una época maravillosa para vivir." Las dos ideas tuvieron un profundo efecto en la comprensión de la naturaleza. En unas cuantas décadas esas dos teorías inspiraron nuevos desarrollos y otras teorías en los campos de la física atómica, la física nuclear y la física de la materia condensada.

En el capítulo 39 se presenta la teoría especial de la relatividad. Dicha teoría proporciona una nueva y más profunda visión de las leyes físicas. Aunque los conceptos que fundamentan esta teoría parecen contradecir el sentido común, la misma predice de manera correcta los resultados de los experimentos que involucran rapidez cercana a la de la luz. En la versión amplia del presente libro de texto, *Física para ciencias e ingeniería*, se cubren los conceptos básicos de la mecánica cuántica y su aplicación a las físicas atómica y molecular, y se introducen la física del estado sólido, la física nuclear, la física de partículas y la cosmología.

Usted no debe perder de vista que, si bien la física desarrollada durante el siglo XX ha permitido numerosos e importantes logros tecnológicos, la historia aún no termina. Los descubrimientos continuarán surgiendo durante el transcurso de su vida, y muchos de ellos harán más profunda o perfeccionarán la comprensión de la naturaleza y del mundo que le rodea. Aún es "una época maravillosa para vivir".

◄ Cortesía del Consorcio SOHO-EIT.

ACERTIJO

Los relojes de pulsera que usan los pasajeros de este vuelo comercial registran de manera adecuada el paso del tiempo, según lo experimentan los viajeros. De forma sorprendente, sin embargo, la duración del viaje como lo mide un observador que se encuentra en la Tierra es ligeramente más largo. ¿Cómo pueden afectar los viajes a alta rapidez algo tan regular como el tictac de un reloj?
(© Larry Mulvehill/Photo Researchers, Inc.)



capítulo

39 Relatividad

Líneas generales del capítulo

La mayor parte de las experiencias y observaciones cotidianas se relacionan con objetos que se mueven con rapidez mucho menor que la de la luz. La mecánica newtoniana se formuló para describir el movimiento de dichos objetos, y este formalismo todavía es muy útil al describir una amplia gama de fenómenos que ocurren a rapidez baja. Sin embargo, fracasa cuando se aplica a partículas cuya rapidez se acerca a la de la luz.

Experimentalmente, las predicciones de la teoría newtoniana pueden probarse a elevada rapidez por medio de electrones en aceleración u otras partículas cargadas a través de una gran diferencia de potencial eléctrico. Por ejemplo, es posible acelerar un electrón a una rapidez de $0.99c$ (donde c es la rapidez de la luz) empleando una diferencia de potencial de varios millones de volts. De acuerdo con la mecánica newtoniana, si la diferencia de potencial se incrementa por un factor de 4, la energía cinética del electrón es cuatro veces mayor y su rapidez debe duplicarse a $1.98c$. A pesar de ello los experimentos muestran que la rapidez del electrón —así como la de cualquier otra partícula en el universo— siempre permanece menor que la rapidez de la luz, independientemente de la cantidad del voltaje de aceleración. Como no impone un límite superior a la rapidez, la mecánica newtoniana es contraria a los resultados experimentales modernos y salta a la vista que es una teoría limitada.

En 1905, a la edad de sólo 26 años, Einstein publicó su teoría especial de la relatividad. En relación con la misma, Einstein escribió:

> La teoría de la relatividad surge de una necesidad, por contradicciones serias y profundas en la vieja teoría, de las cuales parece no haber salida. La fuerza de la nueva teoría radica en la consistencia y simplicidad con la cual resuelve todas estas dificultades...[1]

Aunque Einstein hizo muchas otras contribuciones importantes a la ciencia, la sola teoría especial de la relatividad representa una de las hazañas intelectuales más grandes de todos los tiempos. Con esta teoría las observaciones experimentales pueden predecirse correctamente en la gama de rapidez de $v = 0$ a rapidez que se acerca a la de la luz. A baja rapidez, la teoría de Einstein se reduce a la mecánica newtoniana como situación límite. Es importante reconocer que Einstein trabajaba en electromagnetismo cuando desarrolló la teoría especial de la relatividad. Él estaba convencido de que las ecuaciones de Maxwell eran correctas, y para reconciliarlas con uno de sus postulados, fue forzado a la excéntrica noción de suponer que el espacio y el tiempo no eran absolutos.

El presente capítulo ofrece una introducción a la teoría especial de la relatividad, con énfasis en algunas de sus consecuencias. La relatividad especial comprende fenómenos como el retraso de relojes y la contracción de longitudes en marcos de referencia en movimiento cuando son medidos por un observador estacionario. También se analizan las formas relativistas del *momentum* y la energía, así como algunas consecuencias de la famosa fórmula masa-energía, $E = mc^2$.

Además de su bien conocido y esencial papel en la física teórica, la teoría especial de la relatividad tiene aplicaciones prácticas que incluyen el diseño de plantas nucleoeléctricas y modernos sistemas de posicionamiento global (GPS, por sus siglas en inglés). Tales dispositivos no funcionan si se diseñan de acuerdo con principios no relativistas.

Habrá ocasión de emplear la relatividad en algunos capítulos subsecuentes de la versión extendida de este texto, presentando con mayor frecuencia sólo los resultados de los efectos relativistas.

[1] A. Einstein y L. Infeld, *The Evolution of Physics*, Simon and Schuster, Nueva York, 1961.

EL PRINCIPIO DE LA RELATIVIDAD GALILEANA

Marco de referencia inercial

Para describir un evento físico es necesario establecer un marco de referencia. Recuerde del capítulo 5 que las leyes de Newton son válidas en todos los marcos de referencia inerciales. Puesto que un marco inercial se define como aquel en el cual la primera ley de Newton es válida, puede decirse que **un marco de referencia inercial es uno en el cual se observa que un objeto no tiene aceleración cuando no actúa fuerza alguna sobre el mismo**. Además, cualquier sistema que se mueve a velocidad constante respecto de un sistema inercial también debe ser un sistema inercial.

No hay un marco de referencia inercial privilegiado. Esto significa que los resultados de un experimento efectuado en un vehículo que se mueve a velocidad uniforme serán idénticos a los resultados del mismo experimento efectuado en un vehículo estacionario. El enunciado formal de este resultado se denomina **principio de la relatividad galileana:**

> Las leyes de la mecánica deben ser las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.

Considere una observación que ilustra la equivalencia de las leyes de la mecánica en diferentes marcos inerciales. Una camioneta pickup se mueve a una velocidad constante, como se muestra en la figura 39.1a. Si un pasajero en la camioneta lanza una pelota en línea recta hacia arriba, y se ignoran los efectos del aire, el pasajero observa que la pelota se mueve en una trayectoria vertical. El movimiento de la pelota parece ser precisamente el mismo que sería si la bola fuera lanzada por una persona en reposo sobre la Tierra. La ley de la gravedad y las ecuaciones de movimiento bajo aceleración constante se cumplen independientemente de si la camioneta está en reposo o en movimiento uniforme.

Considere a continuación el mismo experimento visto por un observador en reposo sobre la Tierra. El observador estacionario percibe la trayectoria de la pelota como una parábola, según se muestra en la figura 39.1b. Además, de acuerdo con este observador, la pelota tiene una componente horizontal de velocidad igual a la velocidad de la camioneta. A pesar de que los dos observadores están en desacuerdo con ciertos aspectos de la situación, coinciden en la validez de las leyes de Newton y de principios clásicos como la conservación de la energía y la conservación del *momentum* lineal. Dicha concordancia implica que ningún experimento mecánico puede detectar diferencia alguna entre los dos marcos inerciales. La única cosa que puede detectarse es el movimiento relativo de un marco respecto del otro. Es decir, la noción de movimiento absoluto a través del espacio no tiene sentido, como ocurre con la noción de un marco de referencia privilegiado.

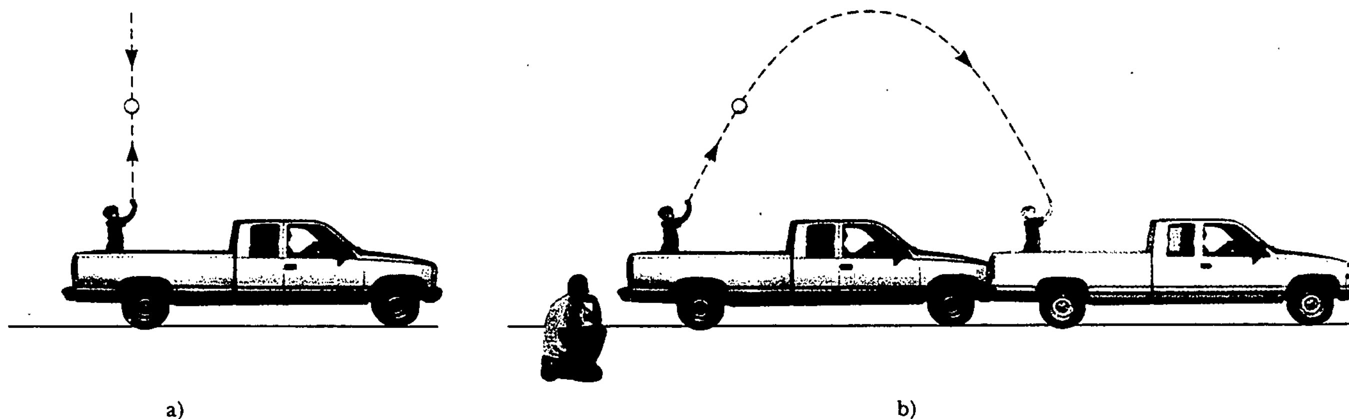


Figura 39.1 a) El observador en el vehículo ve que la bola se mueve en una trayectoria vertical cuando la lanza hacia arriba. b) El observador en la Tierra ve la trayectoria de la bola como una parábola.

Pregunta sorpresa 39.1

¿Cuál observador en la figura 39.1 tiene razón acerca de la trayectoria de la bola?

Suponga que algún fenómeno físico, al cual se puede llamar *evento*, ocurre en un sistema inercial. La localización y tiempo de ocurrencia del evento pueden especificarse por medio de las cuatro coordenadas (x, y, z, t). Se desearía transformar dichas coordenadas de un sistema inercial a otro que se mueva a velocidad relativa uniforme.

Considere dos sistemas inerciales S y S′ (Fig. 39.2). El sistema S′ se mueve a una velocidad constante **v** a lo largo de los ejes xx', donde **v** se mide en relación con S. Suponga que un evento ocurre en el punto P y que los orígenes de S y S′ coinciden en $t = 0$. Un observador en S describe el evento con coordenadas espacio-tiempo (x, y, z, t), en tanto que un observador en S′ emplea (x', y', z', t') para describir el mismo evento. Como se ve en la figura 39.2, las relaciones entre estas varias coordenadas se pueden escribir

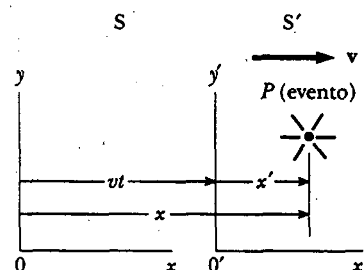


Figura 39.2 Un evento ocurre en el punto P. El evento es visto por dos observadores en marcos inerciales S y S′, donde S′ se mueve a una velocidad **v** relativa a S.

$$x' = x - vt$$
$$y' = y \qquad \textbf{(39.1)}$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

Ecuaciones de transformación espacio-tiempo galileanas

Tales ecuaciones son las **ecuaciones de transformación espacio-tiempo galileanas.** Advierta que se considera que el tiempo es igual en ambos sistemas inerciales. Es decir, dentro del marco de la mecánica clásica, todos los relojes funcionan al mismo ritmo, sin importar su velocidad, de modo que el tiempo en el cual ocurre un evento para un observador en S es igual que el tiempo para el mismo evento en S′. En consecuencia, el intervalo de tiempo entre dos eventos sucesivos debe ser el mismo para ambos observadores. Aunque tal suposición puede ser obvia, se vuelve incorrecta en situaciones donde v es comparable con la rapidez de la luz.

Ahora suponga que una partícula se mueve una distancia dx en un intervalo de tiempo dt según lo mide un observador en S. Se deduce de las ecuaciones 39.1 que la distancia correspondiente dx' medida por un observador en S′ es $dx' = dx - v\,dt$, donde el marco S′ se está moviendo a rapidez v en relación con el marco S. Puesto que $dt = dt'$, se encuentra que

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v$$

o

$$u_x' = u_x - v \qquad \textbf{(39.2)}$$

Ecuación de transformación de velocidad galileana

donde u_x y u_x' son las componentes x de la velocidad en relación con S y S′, respectivamente. (Se usa el símbolo **u** para velocidad de partícula en lugar de **v**, la cual se usa para la velocidad relativa de dos marcos de referencia.) Es la **ecuación de transformación de velocidad galileana.** Se emplea en observaciones cotidianas y es consistente con la noción intuitiva de tiempo y espacio. Sin embargo, como se verá más adelante, conduce a serias contradicciones cuando se aplica a ondas electromagnéticas.

Pregunta sorpresa 39.2

Aplicando la ecuación de transformación de velocidad galileana, determine cuán rápido (en relación con la Tierra) un pítcher de béisbol con una bola rápida de 90 mi/h puede lanzar una pelota mientras está parado sobre un vagón que se mueve a 110 mi/h.

La rapidez de la luz

Es muy natural preguntar si el principio de la relatividad galileana también se aplica a la electricidad, magnetismo y óptica. Los experimentos indican que la respuesta es no. Recuerde del capítulo 34 que Maxwell demostró que la rapidez de la luz en el espacio libre es $c = 3.00 \times 10^8$ m/s. Los físicos de finales del siglo XIX pensaban que las ondas luminosas se movían a través de un medio denominado *éter*, y que la rapidez de la luz sólo era c en un marco especial de referencia absoluto, en reposo respecto del éter. Se esperaba que la ecuación de transformación de velocidad galileana se cumpliera en cualquier otro marco moviéndose a rapidez v en relación con el marco del éter absoluto.

Puesto que la existencia de un marco del éter absoluto y privilegiado hubiera mostrado que la luz era similar a otras ondas clásicas, y que las ideas newtonianas de un marco absoluto eran ciertas, se dio considerable importancia al establecimiento de la existencia del marco del éter. Antes de que finalizara el siglo XIX, los experimentos que implicaban el viaje de la luz en medios moviéndose a las más altas magnitudes de velocidad de laboratorio alcanzables en ese tiempo no habían sido capaces de detectar cambios tan pequeños como $c \pm v$. Iniciando en aproximadamente 1880, los científicos decidieron emplear a la Tierra como marco móvil en un intento por mejorar sus oportunidades para detectar estos pequeños cambios en la rapidez de la luz.

Los observadores fijos sobre la Tierra pueden afirmar que están estacionarios y que el marco del éter absoluto contiene al medio para la propagación de la luz que pasa a su lado con rapidez v. Determinar la rapidez de la luz en estas circunstancias es exactamente lo mismo que determinar la rapidez de un avión que viaja en una corriente de aire en movimiento, o viento; consecuentemente, se habla de un "viento de éter" que sopla a través de su aparato fijo a la Tierra.

Un método directo para detectar un viento de éter sería usar un aparato fijo a la Tierra para medir la influencia del viento en la rapidez de la luz. Si v es la rapidez del éter en relación con la Tierra, entonces la rapidez de la luz debe tener su valor máximo, $c + v$, cuando se propague en la dirección del viento, como se ilustra en la figura 39.3a. Del mismo modo, la rapidez de la luz debe tener su valor mínimo, $c - v$, cuando se propague contra el viento, como se ilustra en la figura 39.3b, y un valor intermedio, $(c^2 - v^2)^{1/2}$, en la dirección perpendicular al viento de éter, como se muestra en la figura 39.3c. Si se supone que el Sol está en reposo en el éter, entonces la velocidad del viento de éter sería igual a la velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol, la cual tiene una magnitud de aproximadamente 3×10^4 m/s. En vista de que $c = 3 \times 10^8$ m/s, debe ser posible detectar un cambio en la rapidez de aproximadamente una parte en 10^4 para mediciones en las direcciones a favor o en contra del viento. Sin embargo, como se verá en la siguiente sección, todos los intentos para detectar dichos cambios y establecer la existencia del viento de éter (y, por tanto, el marco absoluto) ¡han sido inútiles! (Quizá usted desee regresar al problema 40 del capítulo 4 para ver una situación en la cual la ecuación galileana de transformación de velocidad sí se mantiene.)

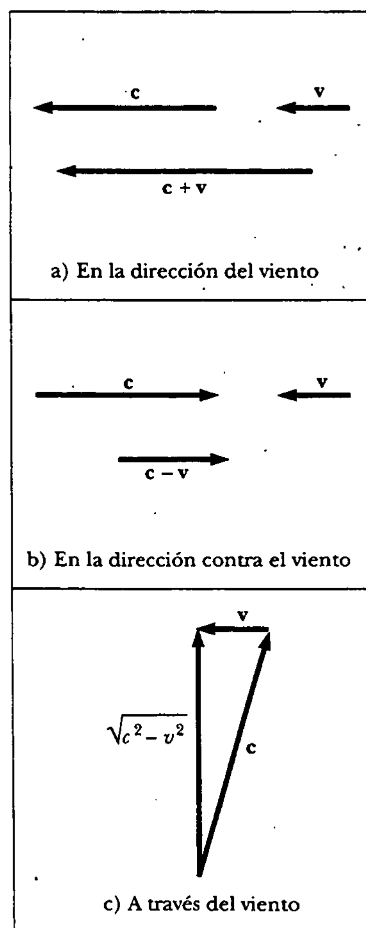


Figura 39.3 Si la velocidad del viento de éter en relación con la Tierra es **v**, y la velocidad de la luz relativa al éter es **c**, entonces la rapidez de la luz relativa a la Tierra es a) $c + v$ en la dirección del viento, b) $c - v$ en la dirección contra el viento, y c) $(c^2 - v^2)^{1/2}$ en la dirección perpendicular al viento.

Si se supone que las leyes de la electricidad y el magnetismo son las mismas en todos los marcos inerciales, de inmediato surge una paradoja relacionada con la rapidez de la luz. Lo anterior puede entenderse si se reconoce que las ecuaciones de Maxwell parecen implicar que la rapidez de la luz siempre tiene el valor fijo 3.00×10^8 m/s en todos los marcos inerciales, un resultado en directa contradicción con lo que se esperaría con base en la ecuación de transformación de velocidad galileana. De acuerdo con la relatividad galileana, la rapidez de la luz no debería ser la misma en todos los marcos inerciales.

Por ejemplo, suponga que un pulso de luz es enviado por un observador S′ de pie sobre un vagón que se mueve a una velocidad **v** relativa a un observador estacionario de pie junto a la vía (Fig. 39.4). El pulso de luz tiene una rapidez c en relación con S′. De acuerdo con la relatividad galileana, la rapidez del pulso relativa a S debe ser $c + v$, lo cual contradice la teoría especial de la relatividad de Einstein, don-

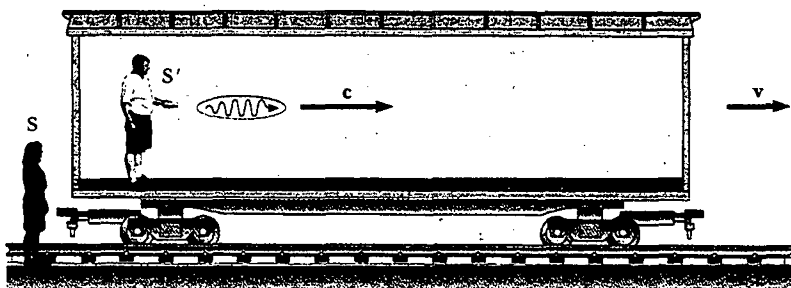


Figura 39.4 Un pulso luminoso es enviado por una persona en un vagón en movimiento. De acuerdo con la relatividad galileana, la rapidez del pulso debe ser $c + v$ relativa a un observador estacionario.

de, como se verá, se postula que la rapidez del pulso de luz es la misma para todos los observadores.

Para resolver esta contradicción en las teorías, debe concluirse que 1) las leyes de la electricidad y el magnetismo no son las mismas en todos los marcos inerciales, o que 2) la ecuación de transformación de velocidad galileana es incorrecta. Si se supone la primera alternativa, entonces debe existir un marco de referencia privilegiado en el cual la rapidez de la luz tiene el valor c y la rapidez medida debe ser mayor o menor que este valor en cualquier otro marco de referencia, en concordancia con la ecuación de transformación de velocidad galileana. Si se supone la segunda alternativa, se tiene que abandonar las nociones de tiempo absoluto y longitud absoluta que forman la base de las ecuaciones galileanas de transformación espacio-tiempo.

EL EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY

El más famoso experimento ideado para detectar pequeños cambios en la rapidez de la luz fue efectuado por primera vez en 1881 por Albert A. Michelson (véase la sección 37.7), y más tarde repetido en diversas condiciones por Michelson y Edward W. Morley (1838-1923). Al principio se estableció que el resultado del experimento contradecía la hipótesis del éter.

El experimento se diseñó para determinar la velocidad de la Tierra en relación con el éter hipotético. La herramienta experimental utilizada fue el interferómetro de Michelson, el cual fue analizado en la sección 37.7, y de nuevo se muestra en la figura 39.5. El brazo 2 se alinea a lo largo de la dirección del movimiento de la Tierra a través del espacio. La Tierra que se mueve a través del éter a rapidez v es equivalente al éter que fluye más allá de la Tierra en dirección opuesta a la rapidez v. El viento del éter, que sopla en dirección opuesta a la dirección del movimiento de la Tierra, debería hacer que la rapidez de la luz medida en el marco de referencia de la Tierra sea $c - v$ a medida que la luz se aproxima al espejo M_2 y $c + v$ después de la reflexión, donde c es la rapidez de la luz en el marco del éter.

Los dos haces reflejados desde M_1 y M_2 se recombinan y forman un patrón de interferencia compuesto de franjas oscuras y brillantes alternas. El patrón de interferencia se observó mientras el interferómetro se había rotado un ángulo de 90°. Tal rotación supuestamente cambiaría la rapidez del viento del éter a lo largo de los brazos del interferómetro. La rotación debía haber causado que el patrón de franjas se corriera ligera pero mesurablemente, ¡pero las mediciones fracasaron en la demostración de algún cambio en el patrón de interferencia! El experimento de Michelson-Morley se repitió en diferentes épocas del año en que se esperaba que el viento del éter cambiara de dirección y magnitud, pero los resultados siempre fueron los mismos: **nunca se observó un corrimiento de franjas de la magnitud requerida.**[2]

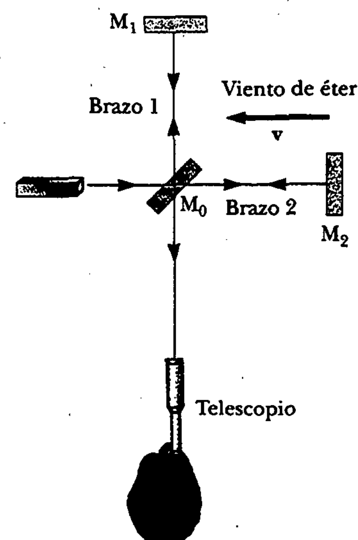


Figura 39.5 De acuerdo con la teoría del viento de éter, la rapidez de la luz debe ser $c - v$ a medida que el haz se acerca al espejo M_2 y $c + v$ después de la reflexión.

[2] Desde el punto de vista de un observador terrestre, los cambios en la rapidez y dirección del movimiento de la Tierra en el transcurso de un año se ven como desplazamiento del viento de éter. Incluso si la rapidez de la Tierra respecto del éter fuera cero en algún momento, seis meses después la rapidez de la Tierra sería de 60 km/s respecto al éter, y como resultado se debe advertir un claro corrimiento de franjas. Sin embargo, nunca se ha observado ningún corrimiento.

Los resultados negativos del experimento de Michelson-Morley no sólo contradijeron la hipótesis del éter, sino que también demostraron que es imposible medir la velocidad absoluta de la Tierra respecto del marco del éter. Sin embargo, como se verá en la siguiente sección, Einstein ofreció un postulado de su teoría especial de la relatividad que dio una interpretación bastante diferente de estos resultados nulos. En años ulteriores, cuando se conoció más acerca de la naturaleza de la luz, la idea de un éter que permea todo el espacio fue reducida al montón de cenizas de los conceptos que implicaba. **Ahora se considera a la luz como una onda electromagnética, la cual no requiere un medio para su propagación.** Como resultado, la idea de tener un éter en el cual estas ondas podrían viajar se vuelve innecesaria.



[illegible]

En 1916 Einstein publicó su trabajo acerca de la teoría general de la relatividad. La predicción más dramática de esta teoría es el grado en el cual la luz se desvía por un campo gravitacional. Las mediciones realizadas por los astrónomos sobre las estrellas brillantes en la vecindad del Sol eclipsado en 1919 confirmaron la predicción de Einstein, el cual, en consecuencia, se volvió una celebridad mundial.

Einstein estaba muy inquieto por el desarrollo de la mecánica cuántica en los años 1920, a pesar de su propio papel como científico revolucionario. En particular, él nunca pudo aceptar la visión probabilística de los eventos en la naturaleza, que es un postulado central de la teoría cuántica. Las últimas décadas de su vida las dedicó a una búsqueda sin éxito de una teoría unificada que combinaría la gravitación y el electromagnetismo. *(AIP Niels Bohr Library)*

Sección opcional

Detalles del experimento de Michelson-Morley

Para comprender los resultados del experimento de Michelson-Morley, suponga que los dos brazos del interferómetro de la figura 39.5 son de igual longitud L. La situación se analizará como si hubiera un viento de éter, pues se trata de lo que Michelson y Morley esperaban encontrar. Como antes se señaló, la rapidez del haz de luz a lo largo del brazo 2 debería ser $c - v$ a medida que el haz se acerca a M_2 y $c + v$ después de que el haz es reflejado. De este modo, el tiempo del viaje hacia la derecha es $L/(c - v)$, y el tiempo del viaje hacia la izquierda es $L/(c + v)$. El tiempo total necesario para el viaje redondo a lo largo del brazo 2 es:

$$t_1 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$$

Considere a continuación el haz de luz que viaja a lo largo del brazo 1, perpendicular al viento de éter. Ya que la rapidez del haz en relación con la Tierra es $(c^2 - v^2)^{1/2}$ en este caso (véase la Fig. 39.3), el tiempo de viaje para cada mitad de este recorrido es $L/(c^2 - v^2)^{1/2}$, y el tiempo total para el recorrido completo es

$$t_2 = \frac{2L}{(c^2 - v^2)^{1/2}} = \frac{2L}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

De este modo, la diferencia de tiempo entre el viaje horizontal completo (brazo 2) y el viaje vertical completo (brazo 1) es

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L}{c}\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right]$$

Ya que $v^2/c^2 \ll 1$, esta expresión puede simplificarse empleando el siguiente desarrollo del binomio después de eliminar todos los términos de orden más alto que el segundo:

$$(1 - x)^n \approx 1 - nx \qquad \text{para } x \ll 1$$

Aquí $x = v^2/c^2$, y se encuentra que

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{Lv^2}{c^3} \tag{39.3}$$

Tal diferencia de tiempo entre los dos instantes en los que los haces reflejados llegan al telescopio origina una diferencia de fase entre los haces, produciendo un patrón de interferencia cuando se combinan en la posición del telescopio. Cuando el interferómetro se gira 90° en un plano horizontal, de manera que los dos haces intercambien posiciones, debería detectarse un corrimiento en el patrón de interferencia. Lo anterior produce una diferencia de tiempo del doble de la dada por la

ecuación 39.3. Así, la diferencia de trayectoria que corresponde a esa diferencia de tiempo es

$$\Delta d = c(2\,\Delta t) = \frac{2Lv^2}{c^2}$$

Puesto que un cambio en la longitud de la trayectoria de una longitud de onda corresponde al corrimiento de una franja, el correspondiente corrimiento de las franjas es igual a esta diferencia de trayectoria dividida entre la longitud de onda de la luz:

$$\text{Corrimiento} = \frac{2Lv^2}{\lambda c^2} \tag{39.4}$$

En los experimentos de Michelson y Morley, cada haz luminoso se reflejaba en espejos varias veces para producir una longitud de trayectoria efectiva L de aproximadamente 11 m. Si se emplea este valor, y se considera v igual a 3.0×10^4 m/s, la rapidez de la Tierra alrededor del Sol, se obtiene una diferencia de trayectoria de

$$\Delta d = \frac{2(11\,\text{m})(3.0 \times 10^4\,\text{m/s})^2}{(3.0 \times 10^8\,\text{m/s})^2} = 2.2 \times 10^{-7}\,\text{m}$$

Esta distancia de viaje adicional debería producir un corrimiento notable en el patrón de franjas. En especial, si emplea luz de 500 nm, se esperaría un corrimiento de franja para una rotación de 90° de

$$\text{Corrimiento} = \frac{\Delta d}{\lambda} = \frac{2.2 \times 10^{-7}\,\text{m}}{5.0 \times 10^{-7}\,\text{m}} \approx 0.44$$

El instrumento que Michelson y Morley emplearon tiene la capacidad de detectar corrimientos tan pequeños como 0.01 de franja. Sin embargo, **no detectó corrimiento en parte alguna del patrón de franjas.** Desde entonces el experimento se ha repetido muchas veces por diferentes científicos bajo una amplia variedad de condiciones, y nunca se ha detectado un corrimiento de franjas. Por ende, se concluyó que el movimiento de la Tierra respecto al postulado éter no puede detectarse.

Se hicieron muchos esfuerzos para explicar los resultados nulos de los experimentos de Michelson-Morley y para salvar el concepto del marco del éter y de la ecuación de transformación de velocidad galileana para la luz. Todas las propuestas resultantes de estos esfuerzos han mostrado estar equivocadas. A ningún experimento en la historia de la física se le han dedicado tan valientes esfuerzos para explicar la ausencia de un resultado esperado como el de Michelson-Morley. El escenario estaba puesto para Einstein, quien resolvió el problema en 1905 con su teoría especial de la relatividad.

39.3 PRINCIPIO DE LA RELATIVIDAD DE EINSTEIN

En la sección anterior se señaló la imposibilidad de medir la rapidez del éter respecto de la Tierra y el fracaso de la ecuación de transformación de velocidad galileana en el caso de la luz. Einstein propuso una teoría que eliminó audazmente estas dificultades y al mismo tiempo alteró por completo las nociones de espacio y tiempo.[3] Einstein basó su teoría especial de la relatividad en dos postulados:

[3] A. Einstein, "On the Electrodynamics of Moving Bodies", *Ann. Physik* 17:891, 1905. Para una traducción al inglés de este artículo y otras publicaciones de Einstein, véase el libro de H. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski y H. Weyl, *The Principle of Relativity*, Dover, 1958.

Los postulados de la teoría especial de la relatividad

1. **El principio de la relatividad:** Las leyes de la física deben ser las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.
2. **La constancia de la rapidez de la luz:** La rapidez de la luz en el vacío tiene el mismo valor, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, en todos los marcos inerciales, independientemente de la velocidad del observador o de la velocidad de la fuente que emite la luz.

El primer postulado sostiene que *todas* las leyes de la física —aquellas que se ocupan de la mecánica, la electricidad y el magnetismo, la óptica, la termodinámica, etcétera— son las mismas en todos los marcos de referencia que se mueven a velocidad constante relativa entre sí. Dicho postulado es una extensa generalización del principio de la relatividad galileana que sólo se refiere a las leyes de la mecánica. Desde un punto de vista experimental, el principio de la relatividad de Einstein significa que cualquier tipo de experimento (la medición de la rapidez de la luz, por ejemplo) efectuado en un laboratorio en reposo debe dar el mismo resultado cuando se realiza en un laboratorio que se mueve a velocidad constante respecto del primero. Por tanto, no existe un marco de referencia inercial privilegiado, y es imposible detectar movimiento absoluto.

Observe que el postulado 2 es requerido por el postulado 1: Si la rapidez de la luz no fuera la misma en todos los marcos inerciales, la medición de diferentes magnitudes de velocidad haría posible distinguir entre marcos inerciales; como resultado, se podría identificar un marco absoluto privilegiado, en contradicción con el postulado 1.

Aunque el experimento de Michelson-Morley se llevó a cabo antes de que Einstein publicara su trabajo sobre la relatividad, no es claro si Einstein estaba al tanto o no de los detalles del experimento. De cualquier modo, el resultado nulo del experimento puede entenderse fácilmente dentro del esquema de la teoría de Einstein. De acuerdo con su principio de la relatividad, las premisas del experimento de Michelson-Morley eran incorrectas. En el proceso de tratar de explicar los resultados esperados, se ha establecido que cuando la luz viajó contra el viento del éter su rapidez era $c - v$, de acuerdo con la ecuación de transformación de velocidad galileana. Sin embargo, si el estado de movimiento del observador o de la fuente no tiene influencia sobre el valor encontrado para la rapidez de la luz, uno siempre medirá el valor igual a c. De manera similar, la luz hace el viaje de regreso después de la reflexión en el espejo a rapidez c, no a la rapidez $c + v$. Por consiguiente, el movimiento de la Tierra no afecta el patrón de franjas observado en el experimento de Michelson-Morley y se esperaría el resultado nulo.

Si se acepta la teoría de la relatividad de Einstein, se debe concluir que el movimiento relativo no es importante cuando se mide la rapidez de la luz. Al mismo tiempo, se debe modificar la noción basada en el sentido común acerca del espacio y del tiempo y estar preparado para algunas de las consecuencias más inesperadas. Leer las páginas siguientes puede ayudarle a tener en mente que las ideas apoyadas por el sentido común están basadas en una vida de experiencias cotidianas y no en observaciones de objetos que se mueven a cientos o miles de kilómetros por segundo.



CONSECUENCIAS DE LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

Antes de estudiar las consecuencias de la teoría especial de la relatividad de Einstein, primero debe entender cómo describe un evento un observador localizado en un marco de referencia inercial. Como se mencionó antes, un evento es una ocurrencia que puede describirse por medio de tres coordenadas espaciales y una coordenada de tiempo. Diferentes observadores en diferentes marcos inerciales suelen describir el mismo evento con diferentes coordenadas.

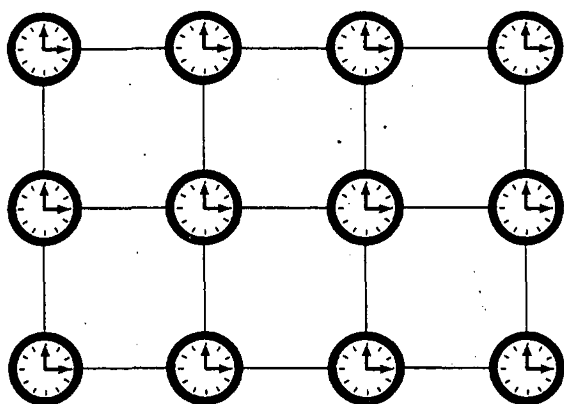


Figura 39.6 Al estudiar relatividad, se usa un marco de referencia que consta de una cuadrícula coordenada y un conjunto de relojes sincronizados.

El marco de referencia utilizado para describir un evento consta de una cuadrícula de coordenadas y de un conjunto de relojes sincronizados que se ubican en las intersecciones de la cuadrícula, como se muestra en la figura 39.6 en dos dimensiones. Los relojes pueden sincronizarse de muchas maneras con la ayuda de señales luminosas. Por ejemplo, suponga que un observador se localiza en el origen con un reloj maestro y envía hacia afuera un pulso luminoso en $t = 0$. El pulso tarda un tiempo r/c para llegar a un reloj localizado a una distancia r del origen. Por tanto, este reloj se sincroniza con el reloj maestro si éste registra un tiempo r/c en el instante en que el pulso lo alcanza. Este procedimiento de sincronización supone que la rapidez de la luz tiene el mismo valor en todas las direcciones y en todos los marcos inerciales. Además, el procedimiento se relaciona con un evento registrado por un observador en un marco de referencia inercial específico. Un observador en algún otro marco inercial asignaría diferentes coordenadas espacio-tiempo a eventos que se están observando utilizando otra cuadrícula de coordenadas y otro arreglo de relojes.

Conforme se examinen algunas de las consecuencias de la relatividad en el resto de esta sección, el análisis se restringe a los conceptos de simultaneidad, tiempo y longitud, los cuales son bastante diferentes en la mecánica relativista de lo que son en la mecánica newtoniana. Por ejemplo, en la mecánica relativista la distancia entre dos puntos y el intervalo de tiempo entre dos eventos depende del marco de referencia en el cual se miden, lo cual significa que **en mecánica relativista no hay tal cosa como la longitud absoluta o el tiempo absoluto.** Además, **los eventos en diferentes posiciones que ocurren de manera simultánea en un marco no son simultáneos en otro marco que se mueve de manera uniforme respecto al primero.**

Simultaneidad y relatividad del tiempo

Una premisa básica de la mecánica newtoniana es que existe una escala de tiempo universal que es la misma para todos los observadores. De hecho, Newton escribió que "el tiempo absoluto, verdadero y matemático, por sí mismo, y a partir de su propia naturaleza, fluye de manera uniforme sin relación con nada externo". Así, Newton y sus seguidores hablaron de la simultaneidad dándola simplemente por un hecho. En su teoría especial de la relatividad Einstein abandonó esta suposición.

Einstein ideó el siguiente experimento mental para ilustrar este punto. Un vagón se mueve a velocidad uniforme y dos relámpagos inciden en sus extremos, como se ilustra en la figura 39.7a, dejando marcas sobre el vagón y el suelo. Las marcas sobre el vagón se denominan A' y B', en tanto que aquellas sobre el suelo se denominan A y B. Un observador O' que se mueve con el vagón está a la mitad entre A' y B', mientras que un observador O en el suelo está a la mitad entre A y B. Los acontecimientos registrados por los observadores son las marcas sobre el vagón realizadas por los dos relámpagos.

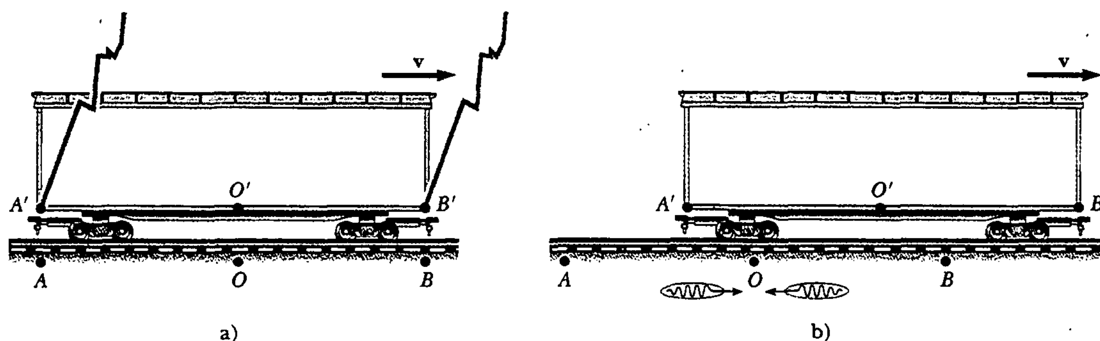


Figura 39.7 a) Dos relámpagos golpean los extremos de un vagón en movimiento. b) Los eventos parecen ser simultáneos al observador estacionario O, quien se encuentra a la mitad entre A y B. Los eventos no parecen ser simultáneos al observador O', quien indica que la parte frontal del carro es golpeada antes que la parte trasera. Advierta que en b) la señal de luz que viaja hacia la izquierda ya ha pasado O', pero la señal que viaja hacia la derecha aún no ha alcanzado O'.

Las señales luminosas registran el instante en que los dos relámpagos golpean y alcanzan al observador O al mismo tiempo, como se indica en la figura 39.7b. Tal observador se da cuenta de que las señales han viajado a la misma rapidez a lo largo de distancias iguales, de manera que concluye correctamente que los eventos en A y B ocurrieron en forma simultánea. Considere ahora los mismos eventos como los ve el observador O'. En el momento en que las señales han llegado al observador O, el observador O' se ha movido como se indica en la figura 39.7b. De este modo, la señal desde B' ha rebasado a O', en tanto que la señal de A' no ha llegado aún a O'. En otras palabras, O' ve la señal desde B' antes de ver la señal desde A'. De acuerdo con Einstein, *los dos observadores deben descubrir que la luz viaja a la misma rapidez.* Por consiguiente, el observador O' concluye que el rayo incide sobre el frente del vagón antes de incidir en la parte posterior.

El anterior experimento mental demuestra claramente que los dos acontecimientos, los cuales parecen ser simultáneos para el observador O, no parecen serlo para el observador O'. En otras palabras,

dos eventos que son simultáneos en un marco de referencia en general no son simultáneos en un segundo marco que se mueve en relación con el primero. Es decir, la simultaneidad no es un concepto absoluto sino que depende del estado de movimiento del observador.

Pregunta sorpresa 39.3

¿Cuál observador en la figura 39.7 está en lo correcto?

El punto central de la relatividad es éste: cualquier marco de referencia inercial puede usarse para describir acontecimientos y hacer física. **No hay un marco de referencia inercial preferido.** Sin embargo, los observadores en diferentes marcos de referencia inerciales siempre miden diferentes intervalos de tiempo con sus relojes y distintas distancias con sus regletas de medir. A pesar de eso, todos los observadores concuerdan en las formas de las leyes de la física en sus respectivos marcos, porque estas leyes deben ser las mismas para todos los observadores en movimiento uniforme. Por ejemplo, la relación $F = ma$ en un marco S tiene la misma forma $F' = ma'$ en un marco S′ que se está moviendo a velocidad constante en relación con el marco S. Es la alteración del tiempo y del espacio lo que permite a las leyes de la fí-

sica (incluidas las ecuaciones de Maxwell) ser las mismas para todos los observadores en movimiento uniforme.

Dilatación del tiempo

El hecho de que observadores en diferentes marcos inerciales siempre midan distintos intervalos de tiempo entre un par de eventos puede ilustrarse considerando un vehículo que se mueve hacia la derecha a rapidez v, como se observa en la figura 39.8a. Un espejo se fija al techo del vehículo, y la observadora O' en reposo en este sistema sostiene un láser a una distancia d debajo del espejo. En cierto momento el láser emite un pulso de luz dirigido hacia el espejo (evento 1), y cierto tiempo después de reflejarse en el espejo, el pulso regresa al láser (evento 2). La observadora O' lleva un reloj C' y lo usa para medir el intervalo de tiempo Δt_p entre estos dos eventos. (El p subíndice se emplea para representar *propio*, como se verá en seguida.) Puesto que el pulso luminoso tiene una rapidez c, el tiempo que tarda el pulso en viajar de O' al espejo y regresar a O' es:

$$\Delta t_p = \frac{\text{Distancia recorrida}}{\text{Rapidez}} = \frac{2d}{c} \tag{39.5}$$

Este intervalo de tiempo Δt_p medido por O' requiere de un solo reloj C' localizado en el mismo lugar que el láser en este marco.

Considere a continuación el mismo par de eventos visto por el observador O en un segundo marco, como en la figura 39.8b. De acuerdo con este observador, el espejo y el láser se mueven a la derecha a una rapidez v, y como resultado la secuencia de eventos aparece por completo diferente. En el momento en que la luz del láser llega al espejo, éste se ha movido a la derecha una distancia $v\,\Delta t/2$, donde Δt es el tiempo que tarda la luz en viajar de O' al espejo y regresar a O', según mide el observador O. En otras palabras, O concluye que, debido al movimiento del vehículo, si la luz va a incidir sobre el espejo, debe salir del láser a un ángulo respecto de la dirección vertical. Al comparar las figuras 39.8a y b, se ve que la luz debe viajar más lejos en b) que en a). (Advierta que ningún observador "sabe" que se está moviendo. Cada uno está en reposo en su propio marco inercial.)

De acuerdo con el segundo postulado de la teoría especial de la relatividad, ambos observadores deben medir c para la rapidez de la luz. En virtud de que la luz via-

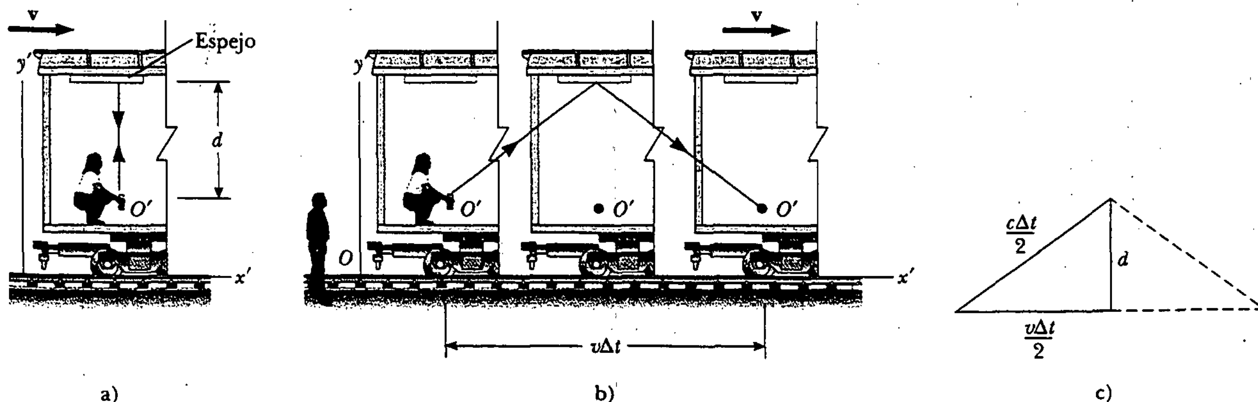


Figura 39.8 a) Un espejo está fijo a un vehículo en movimiento, y un pulso luminoso es enviado por el observador O' en reposo en el vehículo. b) En relación con un observador estacionario O parado junto al vehículo, el espejo y O' se mueven a una rapidez v. Note que lo que el observador O mide para la distancia que el pulso viaja es mayor que $2d$. c) Triángulo rectángulo para calcular la relación entre Δt y Δt_p.

ja más lejos en el marco de O, se concluye que el intervalo de tiempo Δt medido por O es más largo que el intervalo de tiempo Δt_p medido por O'. Para obtener una relación entre estos dos intervalos de tiempo, es conveniente usar el triángulo rectángulo que se muestra en la figura 39.8c. El teorema de Pitágoras produce

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + d^2$$

Resolviendo para Δt se obtiene

$$\Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2d}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \textbf{(39.6)}$$

Ya que $\Delta t_p = 2d/c$, también se puede expresar como

Dilatación del tiempo

$$\Delta t = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t_p \quad \textbf{(39.7)}$$

donde

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad \textbf{(39.8)}$$

Puesto que γ siempre es más grande que la unidad, este resultado dice que **el intervalo de tiempo Δt medido por un observador que se mueve respecto de un reloj es más largo que el intervalo de tiempo Δt_p medido por un observador en reposo respecto del reloj**. (Esto es, $\Delta t > \Delta t_p$.) Dicho efecto se conoce como **dilatación del tiempo**. La figura 39.9 señala que conforme la velocidad tiende a la rapidez de la luz, γ aumenta de manera dramática. Advierta que para magnitudes de velocidad menores a un décimo de la rapidez de la luz, γ está muy cerca de ser igual a la unidad.

El intervalo de tiempo Δt_p en las ecuaciones 39.5 y 39.7 se denomina **tiempo propio**. (En alemán, Einstein usó el término *Eigenzeit*, lo cual significa "tiempo–propio".) En general, **el tiempo propio es el intervalo de tiempo entre dos eventos medidos por un observador que ve que los acontecimientos ocurren en el mismo punto en el espacio**. El tiempo propio siempre es el tiempo medido con un solo reloj (aquí el reloj C') en reposo en el marco en el cual ocurre el evento.

Si un reloj está en movimiento respecto a usted, parecerá retrasarse (su tictac es más lento).en comparación con los relojes en la cuadrícula de relojes sincronizados en su marco de referencia. Ya que el intervalo de tiempo $\gamma(2d/c)$, el intervalo entre cada tictac de un reloj en movimiento resulta ser más largo que $2d/c$, el intervalo de tiempo entre los tictac de un reloj idéntico en su marco de referencia, se dice con

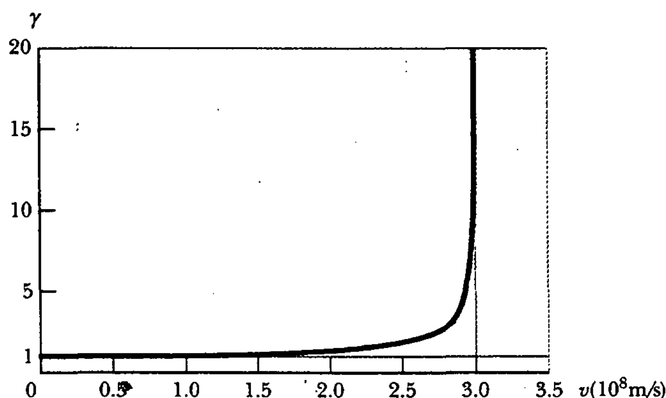


Figura 39.9 Gráfica de γ *versus* v. Conforme la velocidad se aproxima a la rapidez de la luz, γ aumenta rápidamente.

frecuencia que un reloj en movimiento funciona más despacio que un reloj en su marco de referencia por un factor γ. Esto es cierto tanto para relojes mecánicos ordinarios como para el reloj de luz que se acaba de describir. Se pueden generalizar estos resultados estableciendo que todos los procesos físicos, incluyendo los químicos y biológicos, se retardan respecto de un reloj estacionario cuando dichos procesos ocurren en un marco en movimiento. Por ejemplo, el latido del corazón de un astronauta que se mueve por el espacio mantendría el tiempo con un reloj dentro de la nave espacial. Tanto el reloj del astronauta como su latido cardiaco se retrasan respecto de un reloj estacionario allá en la Tierra (aunque el astronauta no tendría ninguna sensación de que la vida se está retrasando en la nave espacial).

Pregunta sorpresa 39.4

Un cohete tiene un reloj construido dentro de su panel de control. Use la figura 39.9 para determinar aproximadamente qué tan rápido se está moviendo el cohete antes de que a un observador terrestre le parezca que su reloj está pulsando a un quinto de la rapidez de un reloj sobre la pared del Control de la Misión. ¿Qué observa un astronauta en el cohete?

Por extraño que parezca, la dilatación del tiempo es un fenómeno verificable. Un experimento reportado por Hafele y Keating proporcionó evidencia directa de la dilatación del tiempo.[4] Los intervalos de tiempo medidos con cuatro relojes atómicos de cesio en un vuelo de jet se compararon con los intervalos de tiempo medidos por relojes atómicos de referencia con base en la Tierra. Para comparar los resultados con la teoría, se deben considerar muchos factores, incluyendo periodos de aceleración y desaceleración relativos a la Tierra, variaciones en la dirección del viaje y el hecho de que el campo gravitacional experimentado por los relojes en vuelo fue más débil que el experimentado por los relojes terrestres. Los resultados correspondieron con las predicciones de la teoría especial de la relatividad y se pueden explicar en términos del movimiento relativo entre la Tierra y el avión jet. En su reporte, Hafele y Keating establecieron que: "En relación con la escala de tiempo atómico del Observatorio Naval de Estados Unidos, los relojes en vuelo perdieron 59 ± 10 ns durante el viaje hacia el este y ganaron 273 ± 7 ns durante el viaje hacia el oeste... Estos resultados proporcionan una resolución empírica clara de la famosa paradoja de los relojes con relojes macroscópicos."

Otro interesante ejemplo de la dilatación del tiempo involucra la observación de *muones*, partículas elementales inestables que tienen una carga igual a la del electrón y 207 veces su masa. Los muones pueden producirse por el choque de radiación cósmica con átomos a gran altura en la atmósfera. Estas partículas tienen una vida media de 2.2 μs cuando se miden en un marco de referencia en el cual están en reposo o moviéndose lentamente. Si se toma 2.2 μs como el tiempo de vida promedio de un muón, y se supone que su rapidez es cercana a la de la luz, se encuentra que estas partículas viajan sólo una distancia aproximada de 600 m antes de su decaimiento (Fig. 39.10a). En consecuencia, no pueden alcanzar la Tierra desde la atmósfera superior donde se producen. Sin embargo, los experimentos muestran que un gran número de muones llegan a la Tierra. El fenómeno de la dilatación del tiempo explica este efecto. En relación con un observador sobre la Tierra, los muones tienen un tiempo de vida igual a $\gamma\tau_p$, donde $\tau_p = 2.2$ μs es el tiempo de vida en el marco de referencia que viaja con los muones o el tiempo de vida propio. Por ejemplo, para una rapidez de muón $v = 0.99c$, $\gamma \approx 7.1$ y $\gamma\tau_p \approx 16$ μs. Por tanto, la distancia promedio recorrida, según la mide un observador en la Tierra, es $\gamma v\tau_p \approx$ 4 800 m, como se indica en la figura 39.10b.

En 1976, en el laboratorio del Consejo Europeo para Investigación Nuclear (CERN) en Ginebra, muones inyectados en un gran anillo de almacenamiento al-

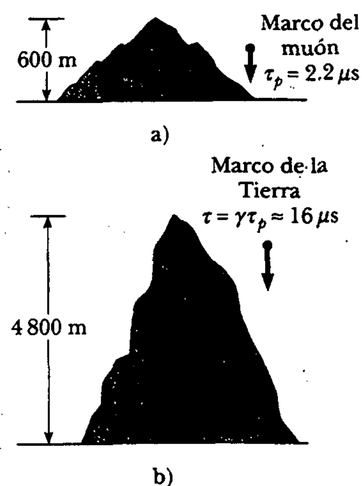


Figura 39.10 a) Los muones que se mueven a una rapidez de 0.99c viajan aproximadamente 600 m según se mide en el marco de referencia de los muones, donde su vida media es de alrededor de 2.2 μs. b) Los muones viajan a alrededor de 4 800 m según mide un observador sobre la Tierra.

[4] J. C. Hafele y R. E. Keating, "Around the World Atomic Clocks: Relativistic Time Gains Observed", *Science*, 177:168, 1972.

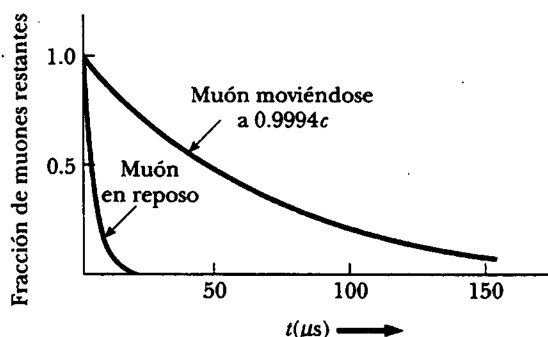


Figura 39.11 Curvas de decaimiento para muones en reposo y para muones que viajan a una rapidez de 0.9994*c*.

canzaron magnitudes de velocidad de aproximadamente 0.9994*c*. Los electrones producidos por los muones en decaimiento fueron detectados mediante contadores alrededor del anillo, lo que permitió a los científicos medir la rapidez de decaimiento y, por consiguiente, el tiempo de vida del muón. Se midió el tiempo de vida de los muones en movimiento y se obtuvo un valor casi 30 veces mayor que el de un muón estacionario (Fig. 39.11), de acuerdo con la predicción de la relatividad dentro de dos partes en mil.

EJEMPLO 39.1 ¿Cuál es el periodo del péndulo?

El periodo medido de un péndulo es de 3.0 s en el marco de referencia del péndulo. ¿Cuál es el periodo cuando lo mide un observador que se mueve a una rapidez de 0.95*c* respecto del péndulo?

Solución En lugar del observador moviéndose a 0.95*c*, se considera el punto de vista equivalente de que el observador está en reposo y que el péndulo se mueve a 0.95*c* con respecto al observador estacionario. Por tanto, el péndulo es un ejemplo de un reloj en movimiento.

El tiempo propio es $\Delta t_p = 3.0$ s. Puesto que un reloj en movimiento funciona más lentamente que uno estacionario por un factor γ, la ecuación 39.7 produce

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_p = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(0.95c)^2}{c^2}}}\,\Delta t_p = \frac{1}{\sqrt{1-0.902}}\,\Delta t_p$$

$$= (3.2)(3.0\text{ s}) = 9.6\text{ s}$$

Es decir, un péndulo en movimiento tarda más en completar un periodo que un péndulo en reposo.

EJEMPLO 39.2 ¿Cuán largo fue su viaje?

Suponga que usted está manejando su carro en un viaje de negocios y se está desplazando a 30 m/s. Su jefe, quien lo espera en su destino, espera que el viaje tarde 5.0 h. Cuando llega tarde, su excusa es que el reloj de su carro registró el paso de las 5.0 h pero que usted estaba viajando más rápido, de modo que su reloj funcionó más lentamente que el reloj de su jefe. Si el reloj de su carro en realidad indicó un viaje de 5.0 h, ¿cuánto tiempo pasó en el reloj de su jefe, que estaba en reposo sobre la Tierra?

Solución Comience por calcular γ a partir de la ecuación 39.8:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(3\times10^1\text{ m/s})^2}{(3\times10^8\text{ m/s})^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-10^{-14}}}$$

Si usted intenta determinar este valor en su calculadora, probablemente obtendrá $\gamma = 1$. Sin embargo, si desarrolla una expansión binomial, puede determinar con mayor precisión el valor como

$$\gamma = (1-10^{-14})^{-1/2} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(10^{-14}) = 1 + 5.0\times10^{-15}$$

Dicho resultado indica que a magnitudes de velocidad típicas en un automóvil, γ no es muy diferente de 1.

Al aplicar la ecuación 39.7 se encuentra Δt, el intervalo de tiempo medido por su jefe, como

$$\Delta t = \gamma\Delta t_p = (1 + 5.0\times10^{-15})(5.0\text{ h})$$

$$= 5.0\text{ h} + 2.5\times10^{-14}\text{ h} = 5.0\text{ h} + 0.09\text{ ns}$$

El reloj de su jefe estaría sólo 0.09 ns adelantado del reloj de su carro. ¡Usted debe intentar otra excusa!

La paradoja de los gemelos

Una fascinante consecuencia de la dilatación del tiempo es la llamada *paradoja de los gemelos* (Fig. 39.12). Considere un experimento con dos hermanos gemelos llamados Acelerado y Lentonio. Cuando tienen 20 años de edad, Acelerado, el más aventurero de los dos, emprende un épico viaje al planeta X, localizado a 20 años luz de la Tierra. Además, su nave espacial es capaz de alcanzar una rapidez de 0.95c en relación con el marco inercial de su hermano gemelo en la Tierra. Después de llegar al planeta X, Acelerado se pone nostálgico y de inmediato regresa a la Tierra a la misma rapidez de 0.95c. Una vez de regreso, Acelerado se impresiona al descubrir que Lentonio ha envejecido 42 años y ahora tiene 62. Acelerado, en cambio, sólo ha envejecido 13 años.

Aquí es necesario plantear la siguiente pregunta: ¿cuál de los gemelos es el que viaja y cuál es en realidad el más joven como resultado de este experimento? Desde el marco de referencia de Lentonio, él estaba en reposo mientras su hermano viajó rápido. Pero desde la perspectiva de Acelerado, él era quien se encontraba en reposo mientras Lentonio efectuaba un recorrido espacial rápido. Según Acelerado, él mismo permanecía estacionario mientras Lentonio y la Tierra fueron los que se embarcaron en un viaje de 6.5 años y después volvieron en otros 6.5 años. Esto conduce a una aparente contradicción. ¿Cuál de los gemelos ha desarrollado señales de envejecimiento excesivo?

Para resolver esta aparente paradoja, recuerde que la teoría especial de la relatividad trata con marcos de referencia inerciales que se mueven unos respecto de otros a rapidez uniforme. Sin embargo, el viaje en este problema no es simétrico. Acelerado, el viajero espacial, debe sufrir una serie de aceleraciones durante su trayecto, de modo que su rapidez no siempre es uniforme y, por tanto, no está en un marco inercial. Él no puede considerarse como si siempre estuviera en reposo mientras Lentonio está en movimiento uniforme, ya que hacerlo así sería una aplicación incorrecta de la teoría especial de la relatividad. Por tanto, no hay paradoja. Durante cada año transcurrido percibido por Lentonio, ligeramente menos de 4 meses pasaban para Acelerado.

La conclusión de que Acelerado está en un marco no inercial es ineludible. Cada gemelo observa al otro como si acelerara, pero es Acelerado quien experimenta en realidad aceleración dinámica debido a las fuerzas reales que actúan sobre él. El tiempo requerido para acelerar y desacelerar la nave de Acelerado puede hacerse muy pequeño empleando grandes cohetes, por lo que Acelerado puede afirmar que gastó más tiempo viajando al planeta X a 0.95c en un marco inercial. Sin embargo, Acelerado debe frenar, invertir su movimiento y regresar a la Tierra en un marco inercial por completo diferente. En el mejor de los casos Acelerado se encuentra en

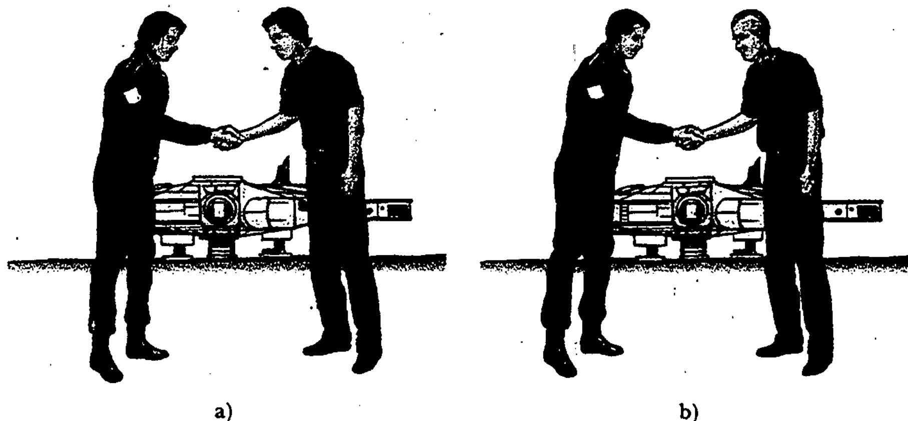


Figura 39.12 a) Cuando uno de los gemelos deja a su hermano en la Tierra, ambos tienen la misma edad. b) Cuando Acelerado regresa de su viaje al planeta X, él es más joven que su gemelo Lentonio.

dos marcos inerciales diferentes durante su viaje. Únicamente Lentonio, quien está en un solo marco inercial, puede aplicar la fórmula simple de la dilatación del tiempo al recorrido de Acelerado. Así, Lentonio descubre que en vez de envejecer 42 años, Acelerado envejece sólo $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$(42 años) = 13 años. Por otra parte, Acelerado tarda 6.5 años en viajar al planeta X y 6.5 años en regresar, para un tiempo de viaje total de 13 años, lo cual concuerda con el primer enunciado.

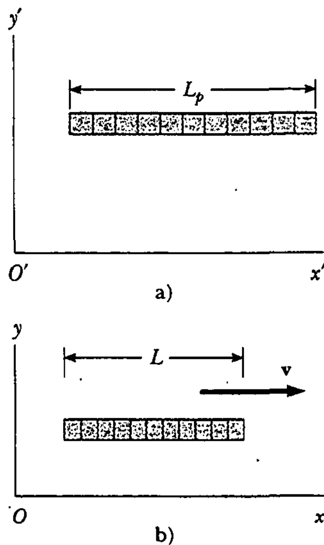


Figura 39.13 a) Una regleta medida por un observador en un marco unido a la misma (lo cual significa que ambos tienen la misma velocidad) posee su longitud propia L_p. b) La regleta medida por un observador en un marco en el cual la regleta tiene una velocidad **v** relativa al marco es más corta que su longitud propia L_p por un factor $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

Pregunta sorpresa 39.5

Suponga que a los astronautas se les paga de acuerdo con la cantidad de tiempo que pasan viajando en el espacio. Después de un largo viaje a una rapidez cercana a *c*, ¿a una tripulación se le debería pagar de acuerdo con un reloj con base en la Tierra o con el reloj de su nave espacial?

Contracción de la longitud

La distancia medida entre dos puntos depende también del marco de referencia. **La longitud propia L_p de un objeto es la longitud medida por alguien que está en reposo respecto del objeto.** La longitud de un objeto medida por alguien en un marco de referencia que se mueve respecto del objeto siempre es menor que la longitud propia. Este efecto se conoce como **contracción de la longitud**.

Considere una nave espacial que viaja a una rapidez v de una estrella a otra. Hay dos observadores: uno en la Tierra y el otro en la nave espacial. El observador en reposo en la Tierra (y que también se supone está en reposo respecto de las dos estrellas) mide la distancia entre las estrellas como la longitud propia L_p. De acuerdo con este observador, el tiempo que tarda la nave espacial en completar el viaje es $\Delta t = L_p/v$. Debido a la dilatación del tiempo, el viajero espacial mide un tiempo de viaje más pequeño mediante el reloj de la nave espacial: $\Delta t_p = \Delta t/\gamma$. El viajero espacial afirma que está en reposo y ve la estrella de destino moviéndose hacia la nave espacial a rapidez v. Como el viajero espacial alcanza la estrella en un tiempo Δt_p, concluye que la distancia L entre las estrellas es más corta que L_p. La distancia medida por el viajero espacial es

$$L = v\Delta t_p = v\frac{\Delta t}{\gamma}$$

Puesto que $L_p = v\,\Delta t$, se ve que

Contracción de la longitud

$$L = \frac{L_p}{\gamma} = L_p\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \tag{39.9}$$

donde $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ es un factor menor que uno. El resultado puede interpretarse como sigue:

> **Si un objeto tiene una longitud propia L_p cuando está en reposo, entonces cuando se mueve a rapidez v en una dirección paralela a su longitud, se contrae hasta la longitud $L = L_p(1 - v^2/c^2)^{1/2} = L_p/\gamma$.**

Por ejemplo, suponga que una regleta pasa a rapidez v al lado de un observador estacionario en la Tierra, como se muestra en la figura 39.13. La longitud de la regleta según la mide un observador en un marco unido a la misma es la longitud propia L_p mostrada en la figura 39.13a. La longitud de la regleta L medida por el observador terrestre es más corta que L_p por un factor $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Además, la contracción de la longitud es un efecto simétrico: Si la regleta está en reposo sobre la Tierra, un observador en un marco móvil mediría también una longitud más corta por el mismo factor $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Advierta que **la contracción de la longitud tiene lugar sólo a lo largo de la dirección del movimiento.**

Es importante subrayar que la longitud propia y el tiempo propio se miden en diferentes marcos de referencia. Como un ejemplo de este punto, regrese a los muones en decaimiento que se mueven a magnitudes de velocidad próximas a la de la luz. Un observador en el marco de referencia del muón mediría el tiempo de vida propio (esto es, el intervalo de tiempo τ_p), en tanto que un observador con base en la Tierra mediría un tiempo de vida dilatado. Sin embargo, el observador basado en la Tierra mide la altura propia (la longitud L_p) de la montaña de la figura 39.10b. En el marco de referencia del muón, esta altura es menor que L_p, como muestra la figura. Por tanto, en el marco del muón ocurre la contracción de la longitud pero no la dilatación del tiempo. En el marco de referencia del observador terrestre hay dilatación del tiempo pero no contracción de la longitud. Por ende, cuando se efectúan los cálculos sobre el muón en ambos marcos, aparece el efecto de "castigo por fuera de lugar" y ¡el resultado del experimento en un marco es el mismo que el resultado en el otro marco!

EJEMPLO 39.3 La contracción de una nave espacial

Se mide una nave espacial y se encuentra que tiene 120 m de largo y 20.0 m de diámetro mientras está en reposo respecto de un observador. Si esta nave espacial después es tripulada por el observador a una rapidez de 0.99c, ¿qué longitud y diámetro mide el observador?

Solución De la ecuación 39.9, la longitud medida por el observador es

$$L = L_p\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = (120.0\text{ m})\sqrt{1-\frac{(0.99c)^2}{c^2}} = 17\text{ m}$$

El diámetro medido por el observador todavía es de 20.0 m porque el diámetro es una dimensión perpendicular al movimiento y la contracción de la longitud ocurre sólo a lo largo de la dirección del movimiento.

Ejercicio Si la nave pasa al lado del observador a una rapidez de 0.100 0c, ¿qué longitud mide el observador?

Respuesta 119.4 m.

EJEMPLO 39.4 ¿Qué tan largo es su carro?

En el ejemplo 39.2 usted estaba conduciendo a 30 m/s y afirmó que su reloj estaba funcionando más lentamente que el reloj estacionario de su jefe. Aunque su enunciado fuese cierto, la dilatación del tiempo es despreciable. Si su carro tiene 4.3 m de largo cuando está estacionado, ¿cuánto más corto le parecerá a un observador estacionario al lado del camino cuando usted maneja a 30 m/s?

Solución El observador ve la longitud horizontal del carro contraído a una longitud

$$L = L_p\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx L_p\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

donde de nuevo se ha usado la expansión binomial para el factor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. El observador al lado del camino ve que la longitud del carro ha cambiado por una cantidad $L_p - L$:

$$L_p - L \approx \frac{L_p}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = \left(\frac{4.3\text{ m}}{2}\right)\left(\frac{3.0\times10^1\text{ m/s}}{3.0\times10^8\text{ m/s}}\right)$$
$$= 2.2\times10^{-14}\text{ m}$$

¡Esto es mucho más pequeño que el diámetro de un átomo!

EJEMPLO 39.5 Un viaje a Sirio

Una astronauta viaja a Sirio, que está localizado a una distancia de 8 años luz de la Tierra. (Note que un año luz (ly, por sus siglas en inglés) es la distancia que viaja la luz a través del espacio libre en un año [yr].) La astronauta calcula que el viaje de ida durará 6 años. Si la nave espacial se desplaza a una rapidez constante de 0.8c, ¿cómo puede la distancia de 8 años luz concordar con el tiempo de 6 años medido por la astronauta?

Solución Los 8 años luz representan la longitud propia de la Tierra a Sirio medida por un observador que ve a ambos cuerpos casi en reposo. La astronauta ve a Sirio acercándose a ella a 0.8c, aunque también observa que la distancia se contrae a

$$\frac{8\text{ ly}}{\gamma} = (8\text{ ly})\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = (8\text{ ly})\sqrt{1-\frac{(0.8c)^2}{c^2}} = 5\text{ ly}$$

Así, el tiempo de viaje medido en su reloj es

$$t = \frac{d}{v} = \frac{5\text{ ly}}{0.8c} = 6\text{ yr}$$

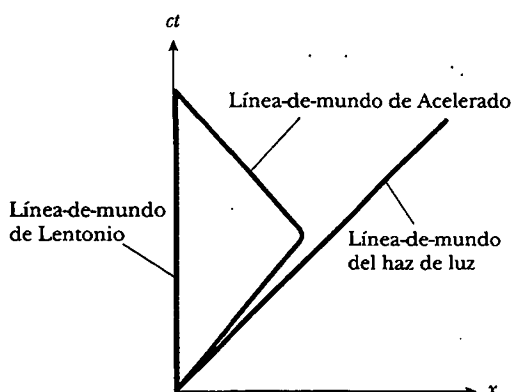


Figura 39.14 La paradoja de los gemelos en una gráfica espacio-tiempo. El gemelo que permanece en la Tierra tiene una línea-de-mundo a lo largo del eje t. La trayectoria del gemelo viajero a través del espacio-tiempo está representada por una línea-de-mundo que cambia de dirección.

Gráficas espacio-tiempo

En ocasiones es útil hacer *gráficas espacio-tiempo*, en las cuales el tiempo es la ordenada y el desplazamiento es la abscisa. La paradoja de los [illegible]tra en una gráfica de este tipo en la figura 39.14. Una trayectoria a tra[illegible]empo se llama **línea-de-mundo**. En el origen, las líneas-de-mundo de Acelerado y Lentonio coinciden porque los gemelos están en la misma ubicación en el mismo tiempo. Después de que Acelerado inicia su viaje, su línea-de-mundo diverge de la de su hermano. Al momento de reunirse las dos líneas-de-mundo de nuevo se juntan. Advierta que la línea-de-mundo de Lentonio es vertical, lo cual indica que no hay desplazamiento de su ubicación original. También note que sería imposible para Acelerado tener una línea-de-mundo que cruce la trayectoria de un haz de luz que deje la Tierra cuando él lo haga. Para que esto sucediera se requeriría que él viajara a rapidez más grande que c.

Las líneas-de-mundo para haces de luz son líneas diagonales en las gráficas espacio-tiempo, que por lo común se dibujan a 45° hacia la derecha o izquierda de la vertical, dependiendo de si el haz de luz está viajando en la dirección de aumento o disminución de x. Las dos líneas-de-mundo significan que todos los posibles eventos futuros para Lentonio y Acelerado caen entre dos líneas de 45° que se extienden desde el origen. La presencia de cualquiera de los gemelos en un evento afuera de este "cono de luz" requeriría que el gemelo se moviera a una rapidez mayor que c, lo cual, como se verá en la sección 39.5, no es posible. Además, los únicos eventos pasados que Lentonio y Acelerado podrían haber experimentado ocurrieron dentro de dos líneas-de-mundo similares de 45° que se acercan al origen desde abajo del eje x.

Pregunta sorpresa 39.6

¿Cómo está indicada la aceleración en una gráfica espacio-tiempo?

El efecto Doppler relativista

Otra importante consecuencia de la dilatación del tiempo es el corrimiento en la frecuencia encontrada para la luz emitida por átomos en movimiento conforme se oponen a la luz emitida por átomos en reposo. Dicho fenómeno, conocido como el efecto Doppler, se introdujo en el capítulo 17 como se aprecia en las ondas sonoras. En el caso del sonido, el movimiento de la fuente respecto al medio de propagación se puede distinguir del movimiento del observador respecto al medio. Sin embargo, las ondas luminosas se deben analizar de manera diferente, ya que no requieren medio de propagación, y no existe método para distinguir el movimiento de una fuente de luz del movimiento del observador.

Si una fuente de luz y un observador se aproximan entre ellos a una rapidez relativa v, la frecuencia f_{obs} medida por el observador es

$$f_{obs} = \frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}} f_{fuente} \tag{39.10}$$

donde f_{fuente} es la frecuencia de la fuente medida en su marco en reposo. Advierta que esta fórmula de corrimiento Doppler relativista, a diferencia de la fórmula de corrimiento Doppler para el sonido, sólo depende de la rapidez relativa v de la fuente y el observador, y se mantiene para magnitudes de velocidad relativas tan grandes como c. Como usted podría esperar, la fórmula predice que $f_{obs} > f_{fuente}$ cuando la fuente y el observador se aproximan entre sí. La expresión para el caso en el que la fuente y el observador se alejan uno de otro, se obtiene al sustituir v con $-v$ en la ecuación 39.10.

El uso más espectacular y dramático del efecto Doppler relativista es la medición de los corrimientos en la frecuencia de la luz emitida por un objeto astronómico en movimiento, como una galaxia. Las líneas espectrales por lo general se encuentran en la región extrema del violeta para las galaxias en reposo respecto a la Tierra, y se corren en casi 100 nm hacia el extremo rojo del espectro para galaxias distantes —esto indica que dichas galaxias se están *alejando* de la Tierra—. El astrónomo estadounidense Edwin Hubble (1889-1953) realizó medidas extensas de este *corrimiento hacia el rojo* para confirmar que la mayor parte de las galaxias se están alejando de la Tierra, lo cual indica que el universo está en expansión.

39.5 LAS ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

Se ha visto que las ecuaciones de transformación galileana no son válidas cuando v se aproxima a la rapidez de la luz. En esta sección se establecen las ecuaciones de transformación correctas que se aplican a todas las magnitudes de velocidad en el intervalo $0 \leq v < c$.

Suponga que un evento que ocurre en algún punto P es boletinado por dos observadores, uno en reposo en el marco S y otro en el marco S′ que se mueve hacia la derecha a rapidez v, como en la figura 39.15. El observador en S reporta el evento con coordenadas espacio-tiempo (x, y, z, t), mientras el observador en S′ informa el mismo evento empleando las coordenadas (x', y', z', t'). Se requiere encontrar una relación entre estas coordenadas que sea válida para todas las magnitudes de velocidad.

Las ecuaciones que son válidas de $v = 0$ a $v = c$ y permiten transformar las coordenadas de S a S′ son las **ecuaciones de transformación de Lorentz**:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned} \tag{39.11}$$

Ecuaciones de transformación de Lorentz para S → S′

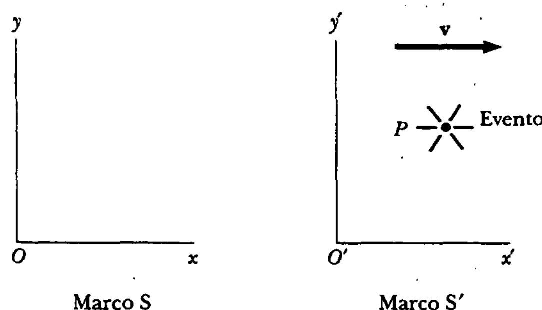


Figura 39.15 Un evento que ocurre en algún punto P es observado por dos personas, una en reposo en el marco S y la otra en el marco S′, el cual se mueve hacia la derecha a rapidez v.

Tales ecuaciones de transformación fueron desarrolladas por Hendrik A. Lorentz (1853-1928) en 1890 en conexión con el electromagnetismo. Sin embargo, fue Einstein quien reconoció su significado físico y dio el audaz paso de interpretarlas dentro del marco conceptual de la teoría especial de la relatividad.

Note la diferencia entre las ecuaciones de tiempo galileanas y las de Lorentz. En el caso galileano, $t = t'$, pero en el caso de Lorentz el valor de t' asignado a un evento por un observador O' que permanece en el origen del marco S′ en la figura 39.15 depende tanto del tiempo t como de la coordenada x según los mide un observador O que permanece en el marco S. Lo anterior es consistente con la noción de que un evento está caracterizado por cuatro coordenadas espacio-tiempo (x, y, z, t). En otras palabras, en la relatividad, el espacio y el tiempo no son conceptos separados sino que están estrechamente vinculados uno con el otro.

Si desea transformar las coordenadas en el marco S′ a coordenadas en el marco S, sólo sustituya v por $-v$ e intercambie las coordenadas prima y no prima en las ecuaciones 39.11:

Ecuaciones de transformación inversa de Lorentz para S′ → S

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \end{aligned} \tag{39.12}$$

Cuando $v \ll c$, las ecuaciones de transformación de Lorentz deben reducirse a las ecuaciones galileanas. Para confirmar esto observe que cuando v tiende a cero, $v/c \ll 1$ y $v^2/c^2 \ll 1$; por lo que $\gamma = 1$, y las ecuaciones 39.11 se reducen a las ecuaciones de transformación espacio-tiempo galileanas:

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

En muchas situaciones se desearía conocer la diferencia en coordenadas entre dos eventos o el intervalo de tiempo entre dos eventos según los ven los observadores O y O', lo cual se consigue escribiendo las ecuaciones de Lorentz en una forma adecuada para describir pares de eventos. A partir de las ecuaciones 39.11 y 39.12 se pueden expresar las diferencias entre las cuatro variables x, x', t y t' en la forma

$$\left.\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\,\Delta t) \\ \Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) \end{aligned}\right\} \text{S} \rightarrow \text{S}' \tag{39.13}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= \gamma(\Delta x' + v\,\Delta t') \\ \Delta t &= \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'\right) \end{aligned}\right\} \text{S}' \rightarrow \text{S} \tag{39.14}$$

donde $\Delta x' = x_2 - x_1$ y $\Delta t' = t_2 - t_1$ son las diferencias medidas por el observador O', y $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta t = t_2 - t_1$ son las diferencias medidas por el observador O. (No se han incluido las expresiones para relacionar las coordenadas y y z debido a que no son afectadas por el movimiento a lo largo de la dirección x.[5])

[5] Aunque el movimiento relativo de los dos marcos a lo largo de x no cambia las coordenadas y y z de un objeto, sí cambia las componentes y y z de la velocidad de un objeto que se mueve en cualquier marco, como se verá pronto.

EJEMPLO 39.6 **Repaso de la simultaneidad y de la dilatación del tiempo**

Emplee las ecuaciones de transformación de Lorentz en forma de diferencia para mostrar que a) la simultaneidad no es un concepto absoluto y b) los relojes en movimiento funcionan más lentamente que los relojes estacionarios.

Solución a) Suponga que dos eventos son simultáneos de acuerdo con un observador en movimiento O', de modo que $\Delta t' = 0$. A partir de las expresiones para Δt dadas en la ecuación 39.14 se ve que en este caso el intervalo de tiempo Δt medido por un observador estacionario O es $\Delta t = \gamma v\, \Delta x'/c^2$. Es decir, el intervalo de tiempo para los mismos dos eventos según mide O no es cero, así que los eventos no parecen ser simultáneos a O.

b) Suponga que un observador O' encuentra que dos eventos ocurren en el mismo lugar ($\Delta x' = 0$) pero en tiempos diferentes ($\Delta t' \neq 0$). Aquí la expresión para Δt dada en la ecuación 39.14 se convierte en $\Delta t = \gamma\, \Delta t'$. Se trata de la ecuación para la dilatación del tiempo encontrada antes (Ec. 39.7), donde $\Delta t' = \Delta t_p$ es el tiempo propio medido por un reloj localizado en el marco en movimiento del observador O'.

Ejercicio Emplee las ecuaciones de transformación de Lorentz en forma de diferencia para confirmar que $L = L_p/\gamma$ (Ec. 39.9).

Derivación de la ecuación de transformación de velocidad de Lorentz

Una vez más S es nuestro marco de referencia estacionario, y S′ nuestro marco de referencia que se mueve a una rapidez v en relación con S. Suponga que un objeto tiene una rapidez u_x medida en el marco S′, donde

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} \qquad \textbf{(39.15)}$$

Empleando la ecuación 39.11 se obtiene

$$dx' = \gamma(dx - v\,dt)$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

Al sustituir estos valores en la ecuación 39.15 se tiene

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v\,dt}{dt - \dfrac{v}{c^2}dx} = \frac{\dfrac{dx}{dt} - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{dx}{dt}}$$

Pero dx/dt es justo la componente de velocidad u_x del objeto medida por un observador en S, así que esta expresión se convierte en

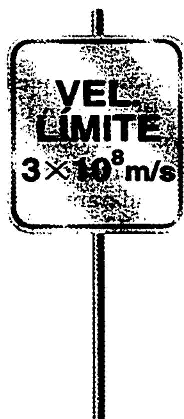
$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} \qquad \textbf{(39.16)}$$

Ecuación de transformación de velocidad de Lorentz para S → S′

Si el objeto tiene componentes de velocidad a lo largo de los ejes y y z, las componentes medidas por un observador en S′ son

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)} \quad \text{y} \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)} \qquad \textbf{(39.17)}$$

Observe que u_y y u_z no contienen al parámetro v en el numerador porque la velocidad relativa está a lo largo del eje x.



La rapidez de la luz es la rapidez límite del universo. Es la máxima rapidez posible para la transferencia de energía y para la transmisión de información. Cualquier objeto con masa debe moverse a una rapidez menor.

Cuando u_x y u son mucho más pequeñas que c (el caso no relativista), el denominador de la ecuación 39.16 se aproxima a la unidad, así que $u_x \approx u_x - v$, la cual es la ecuación de transformación de velocidad galileana. En el otro extremo, cuando $u_x = c$, la ecuación 39.16 se vuelve

$$u_x' = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = \frac{c\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{1 - \frac{v}{c}} = c$$

A partir del resultado se ve que un objeto que se mueve a una rapidez c relativa a un observador en S tiene también una rapidez c relativa a un observador en S′ —independientemente del movimiento relativo de S y S′—. Advierta que esta conclusión es consistente con el segundo postulado de Einstein —de que la rapidez de la luz debe ser c relativa a todos los marcos de referencia inerciales—. Además, la rapidez de un objeto nunca puede ser mayor que c. Esto significa que la rapidez de la luz es la rapidez límite. Después se regresará a este punto, cuando se considere la energía de una partícula.

Para obtener u_x en función de u_x' sustituya v por $-v$ en la ecuación 39.16 e intercambie los papeles de u_x y u_x':

Ecuación de transformación de velocidad de Lorentz para S′ → S

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}} \qquad \textbf{(39.18)}$$

EJEMPLO 39 Velocidad relativa de naves espaciales

Dos naves espaciales A y B se mueven en direcciones opuestas, como se muestra en la figura 39.16. Un observador en la Tierra mide $0.750c$ como la rapidez de la nave A, y $0.850c$ como la rapidez de la nave B. Determine la velocidad de la nave B según la observa la tripulación de la nave A.

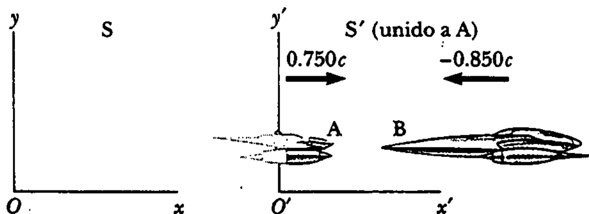


Figura 39.16 Dos naves espaciales A y B se mueven en direcciones opuestas. La rapidez de B relativa a A es *menor* que c y se obtiene a partir de la ecuación de transformación de velocidad relativista.

Solución El problema se resuelve considerando el marco S′ como si estuviera unido a la nave A, de modo que $v = 0.750c$ relativa al observador en la Tierra (el marco S). Se considera que la nave B se mueve a una velocidad $u_x = -0.850c$ relativa a la Tierra. Por tanto, la velocidad de la nave B respecto de la nave A puede obtenerse empleando la ecuación 39.16:

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{-0.850c - 0.750c}{1 - \frac{(-0.850c)(0.750c)}{c^2}} = -0.977c$$

El signo negativo indica que la nave B se mueve en la dirección x negativa, según observa la tripulación de la nave A. Observe que la rapidez es menor que c. Ello significa que un cuerpo cuya rapidez es menor que c en un marco de referencia, debe tener una rapidez menor que c en cualquier otro marco. (Si la ecuación de transformación de velocidad galileana se usara en este ejemplo, se encontraría que $u_x' = u_x - v = -0.850c - 0.750c = -1.60c$, lo cual es imposible. La ecuación de transformación galileana no funciona en situaciones relativistas.)

EJEMPLO 39 El motociclista veloz

Suponga un motociclista que se mueve a una rapidez de $0.80c$ con respecto a un observador estacionario, como se muestra en la figura 39.17. Si el motociclista lanza una pelota hacia adelante a una rapidez de $0.70c$ relativa a sí mismo, ¿cuál es la rapidez de la pelota según el observador estacionario?

Solución La rapidez del motociclista respecto del observador estacionario es $v = 0.80c$. La rapidez de la pelota en el marco de referencia del motociclista es $u_x = 0.70c$. Por tanto, la rapidez u_x de la pelota en relación con el observador estacionario es

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}} = \frac{0.70c + 0.80c}{1 + \frac{(0.70c)(0.80c)}{c^2}} = 0.96c$$

Ejercicio Suponga que el motociclista activa un haz de luz de modo que se aleja de él hacia adelante a una rapidez c. ¿Cuál es la rapidez de la luz que mide el observador estacionario?

Respuesta c.

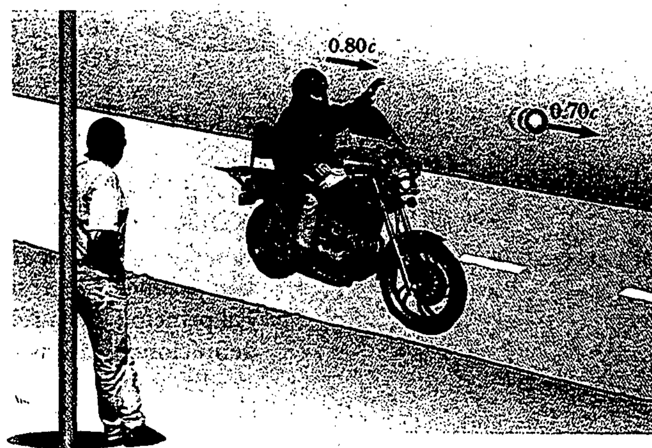


Figura 39.17 Un motociclista pasa junto a un observador estacionario a una rapidez de $0.80c$ y lanza una pelota en la dirección del movimiento a una rapidez de $0.70c$ en relación con él mismo.

EJEMPLO 39.9 Mensajeros relativistas

Dos motociclistas mensajeros llamados David y Emilia corren a magnitudes de velocidad relativistas a lo largo de trayectorias perpendiculares, como se muestra en la figura 39.18. ¿Qué tan rápido se aleja Emilia del hombro derecho de David según este último?

Solución La figura 39.18 representa la situación como la ve un oficial de policía que se encuentra en reposo en el marco S, quien observa lo siguiente:

David: $u_x = 0.75c$ $u_y = 0$

Emilia: $u_x = 0$ $u_y = -0.90c$

Para calcular la rapidez de alejamiento de Emilia según David, considere S' como si se moviera junto con David y luego calcule u_x y u_y para Emilia empleando las ecuaciones 39.16 y 39.17:

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{0 - 0.75c}{1 - \frac{(0)(0.75c)}{c^2}} = -0.75c$$

$$u_y' = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{(0.75c)^2}{c^2}}(-0.90c)}{\left(1 - \frac{(0)(0.75c)}{c^2}\right)} = -0.60c$$

De este modo, la velocidad de Emilia según observa David es

$$u' = \sqrt{(u_x')^2 + (u_y')^2} = \sqrt{(-0.75c)^2 + (-0.60c)^2} = 0.96c$$

Advierta que esta rapidez es menor que c, tal como la requiere la teoría especial de la relatividad.

Ejercicio Use la ecuación de transformación de velocidad galileana para calcular la rapidez de retroceso clásica para Emilia según observa David.

Respuesta $1.2c$.

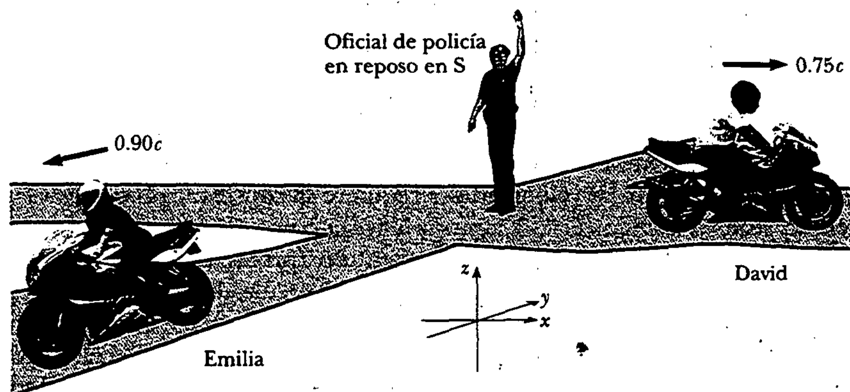


Figura 39.18 David se mueve hacia el este a una rapidez de $0.75c$ respecto al oficial de policía, y Emilia viaja hacia el sur a una rapidez de $0.90c$ relativa al oficial.



MOMENTUM LINEAL RELATIVISTA Y FORMA RELATIVISTA DE LAS LEYES DE NEWTON

Se ha visto que para describir de manera apropiada el movimiento de partículas dentro del esquema de la teoría especial de la relatividad, las ecuaciones de transformación galileanas deben sustituirse por las ecuaciones de transformación de Lorentz. Debido a que las leyes de la física deben permanecer inalterables bajo la transformación de Lorentz, se deben generalizar las leyes de Newton y las definiciones de *momentum* lineal y energía para ajustarlas a las ecuaciones de transformación de Lorentz y al principio de la relatividad. Tales definiciones generalizadas deben reducirse a las definiciones clásicas (no relativistas) para $v \ll c$.

En primer lugar, recuerde que la ley de la conservación del *momentum* lineal establece que cuando dos objetos aislados chocan, su *momentum* total combinado permanece constante. Suponga que el choque se describe en un marco de referencia S en el cual se conserva el *momentum* lineal. Si las velocidades se calculan en un segundo marco de referencia S′ empleando la ecuación de transformación de velocidad de Lorentz y la definición clásica de *momentum* lineal, $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ (donde $\mathbf{u}$ es la velocidad de cualquier objeto), se encuentra que el *momentum* lineal *no* se conserva en S′. Sin embargo, como las leyes de la física son las mismas en todos los marcos inerciales, el *momentum* lineal debe conservarse en todos los marcos. En vista de esta condición, y suponiendo que la ecuación de transformación de velocidad de Lorentz es correcta, se debe modificar la definición de *momentum* lineal para satisfacer las siguientes condiciones:

- El *momentum* lineal $\mathbf{p}$ debe conservarse en todas las colisiones.
- El valor relativista calculado para $\mathbf{p}$ debe aproximarse al valor clásico $m\mathbf{u}$ a medida que $\mathbf{u}$ tiende a cero.

Para cualquier partícula, la ecuación relativista correcta para el *momentum* lineal que satisface estas condiciones es

Definición de *momentum* lineal relativista

$$\mathbf{p} \equiv \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} = \gamma m\mathbf{u} \qquad \textbf{(39.19)}$$

donde $\mathbf{u}$ es la velocidad de la partícula y m es la masa de la partícula. Cuando u es mucho menor que c, $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ tiende a la unidad, y $\mathbf{p}$ se acerca a $m\mathbf{u}$. Por consiguiente, la ecuación relativista para $\mathbf{p}$ de hecho se reduce a la expresión clásica cuando u es mucho más pequeña comparada con c.

La fuerza relativista $\mathbf{F}$ que actúa sobre una partícula cuyo *momentum* lineal es $\mathbf{p}$ se define como

$$\mathbf{F} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad \textbf{(39.20)}$$

donde $\mathbf{p}$ está dada por la ecuación 39.19. Esta expresión, que es la forma relativista de la segunda ley de Newton, es razonable debido a que mantiene la mecánica clásica en el límite de las bajas velocidades y requiere la conservación del *momentum* lineal en un sistema aislado ($\mathbf{F} = 0$) tanto relativista como clásicamente.

Se deja como un problema de fin de capítulo (problema 63) mostrar que, en condiciones relativistas, la aceleración $\mathbf{a}$ de una partícula disminuye bajo la acción de una fuerza constante, en cuyo caso $a \propto (1 - u^2/c^2)^{3/2}$. A partir de esta fórmula advierta que conforme la rapidez de la partícula se aproxima a c, la aceleración causada por una fuerza finita tiende a cero. En consecuencia, es imposible acelerar una partícula desde el reposo hasta una rapidez $u \geq c$.

EJEMPLO 39.10 ***Momentum*** **lineal de un electrón**

Un electrón, que tiene una masa de 9.11×10^{-31} kg, se mueve a una rapidez de $0.750c$. Encuentre su *momentum* relativista y compárelo con el *momentum* calculado a partir de la expresión clásica.

Solución Empleando la ecuación 39.19, con $u = 0.750c$, se tiene

$$p = \frac{m_e u}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(0.750 \times 3.00 \times 10^8\,\text{m/s})}{\sqrt{1 - \dfrac{(0.750c)^2}{c^2}}}$$

$$= 3.10 \times 10^{-22}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

La expresión clásica (incorrecta) da

$$p_{\text{clásica}} = m_e u = 2.05 \times 10^{-22}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Por tanto, ¡el resultado relativista correcto es 50% mayor que el resultado clásico!

39.7 ENERGÍA RELATIVISTA

Se ha visto que la definición de *momentum* lineal y las leyes de movimiento requieren de una generalización para hacerlas compatibles con el principio de la relatividad, lo que implica que la definición de energía cinética también debe modificarse.

Para obtener la forma relativista del teorema del trabajo-energía cinética, primero use la definición de fuerza relativista, ecuación 39.20, para determinar el trabajo realizado sobre una partícula por una fuerza F:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt}\,dx \qquad \textbf{(39.21)}$$

para la fuerza y el movimiento, ambos a lo largo del eje x. Con el fin de efectuar esta integración, y encontrar el trabajo hecho sobre una partícula, así como la energía cinética relativista como una función de u, primero evalúe dp/dt:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mu}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} = \frac{m(du/dt)}{\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Sustituyendo esta expresión para dp/dt y $dx = u\,dt$ en la ecuación 39.21 se obtiene

$$W = \int_0^t \frac{m(du/dt)u\,dt}{\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} = m\int_0^u \frac{u}{\left(1 - \dfrac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,du$$

donde se usan los límites 0 y u en la integral del extremo derecho porque se ha supuesto que la partícula se acelera desde el reposo hasta cierta rapidez final u. Al evaluar la integral se encuentra que

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} - mc^2 \qquad \textbf{(39.22)}$$

Recuerde del capítulo 7 que el trabajo hecho por una fuerza que actúa sobre una partícula es igual al cambio en la energía cinética de la misma. Debido a la suposición de que la rapidez inicial de la partícula es cero, se sabe que la energía cinética

inicial es cero. Por tanto, se concluye que el trabajo W es equivalente a la energía cinética relativista K:

Energía cinética relativista

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 \quad \textbf{(39.23)}$$

Dicha ecuación por lo regular se confirma mediante experimentos que emplean aceleradores de partículas de alta energía.

A bajas magnitudes de velocidad, donde $u/c \ll 1$, la ecuación 39.23 debe reducirse a la expresión clásica $K = \frac{1}{2}mu^2$. Se verifica empleando la expansión del binomio $(1 - x^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 + \ldots$ para $x \ll 1$, donde las potencias de orden más alto de x se desprecian en la expansión. En el presente caso $x = u/c$, de modo que

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$$

La sustitución de esto en la ecuación 39.23 produce

$$K \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) - mc^2 = \frac{1}{2}mu^2$$

que es la expresión clásica para la energía cinética. Una gráfica que compara las expresiones relativista y no relativista se proporciona en la figura 39.19. En el caso relativista, la rapidez de la partícula nunca es mayor que c, independientemente de la energía cinética. Las dos curvas concuerdan bien cuando $u \ll c$.

El término constante mc^2 en la ecuación 39.23, el cual es independiente de la rapidez de la partícula, se denomina **energía en reposo** E_R de la partícula (véase la sección 8.9). El término γmc^2, que sí depende de la rapidez de la partícula es, por tanto, la suma de las energías cinética y en reposo. Se define γmc^2 como la **energía total** E:

Definición de energía total

Energía total = energía cinética + energía en reposo

$$E = \gamma mc^2 = K + mc^2 \quad \textbf{(39.24)}$$

o

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \textbf{(39.25)}$$

Es la famosa ecuación respecto de la equivalencia masa-energía de Einstein.

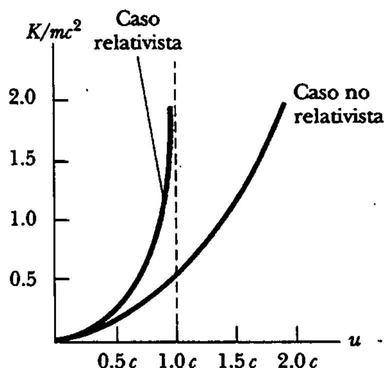


Figura 39.19 Una gráfica donde se comparan las energías cinéticas relativista y no relativista. Las energías están trazadas como función de la rapidez. En el caso relativista u siempre es menor que c.

La relación $E = K + mc^2$ muestra que **la masa es una forma de energía**, donde c^2 en el término de la energía en reposo es sólo un factor de conversión constante. Dicha expresión también demuestra que una masa pequeña corresponde a una cantidad enorme de energía, un concepto fundamental para las físicas nuclear y de partículas elementales.

En muchas situaciones el *momentum* lineal o la energía de una partícula se mide en lugar de su rapidez. Por consiguiente, es útil tener una expresión que relacione la energía total E con el *momentum* lineal relativista p. Lo anterior se logra empleando las expresiones $E = \gamma mc^2$ y $p = \gamma mu$. Al elevar al cuadrado estas ecuaciones y restar, se puede eliminar u (problema 39). El resultado, después de un poco de álgebra, es[6]

$$E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2 \quad \textbf{(39.26)}$$

Relación energía-*momentum*

Cuando la partícula está en reposo, $p = 0$, así que $E = E_R = mc^2$. Para partículas que tienen masa cero, como los fotones, se establece $m = 0$ en la ecuación 39.26, y se ve que

$$E = pc \quad \textbf{(39.27)}$$

La ecuación es una expresión exacta que relaciona la energía total y el *momentum* lineal para fotones, los cuales viajan siempre a la rapidez de la luz.

Por último, advierta que en vista de que la masa m de una partícula es independiente de su movimiento, m debe tener el mismo valor en todos los marcos de referencia. Por esta razón, m se conoce con frecuencia como **masa invariante**. Por otra parte, puesto que la energía total y el *momentum* lineal de una partícula dependen de la velocidad, estas cantidades dependen del marco de referencia en el cual se miden.

Puesto que m es una constante, se concluye a partir de la ecuación 39.26 que la cantidad $E^2 - p^2c^2$ debe tener el mismo valor en todos los marcos de referencia. Es decir, $E^2 - p^2c^2$ es invariante bajo una transformación de Lorentz. (Las ecuaciones 39.26 y 39.27 aún no toman en cuenta la energía potencial.)

Cuando se trabaja con partículas subatómicas, es conveniente expresar su energía en electronvolts porque a las partículas por lo común se les da esta energía mediante aceleración a través de una diferencia de potencial. El factor de conversión, como usted recordará de la ecuación 25.5, es

$$1.00 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Por ejemplo, la masa de un electrón es 9.109×10^{-31} kg. Por tanto, la energía en reposo del electrón es

$$m_ec^2 = (9.109 \times 10^{-31} \text{ kg})(2.9979 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 8.187 \times 10^{-14} \text{ J}$$
$$= (8.187 \times 10^{-14} \text{ J})(1 \text{ eV}/1.602 \times 10^{-19} \text{ J}) = 0.511 \text{ MeV}$$

EJEMPLO 39.9 La energía de un electrón rápido

Un electrón en un cinescopio de televisión típico se mueve a una rapidez $u = 0.250c$. Encuentre sus energías total y cinética en electronvolts.

Solución Empleando el hecho de que la energía en reposo del electrón es 0.511 MeV junto con la ecuación 39.25, se tiene

$$E = \frac{m_ec^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{0.511 \text{MeV}}{\sqrt{1 - \frac{(0.250c)^2}{c^2}}}$$

$$= 1.03(0.511 \text{ MeV}) = 0.528 \text{ MeV}$$

Esto es 3% mayor que la energía en reposo.

La energía cinética se obtiene sustrayendo la energía en reposo de la energía total:

$$K = E - m_ec^2 = 0.528 \text{ MeV} - 0.511 \text{ MeV} = 0.017 \text{ MeV}$$

[6] Una forma de recordar esta relación es dibujar un triángulo rectángulo que tenga una hipotenusa de longitud E y catetos de longitudes pc y mc^2.

EJEMPLO 39 La energía de un protón rápido

a) Encuentre la energía en reposo de un protón en electron-volts.

Solución

$$E_R = m_pc^2 = (1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})^2$$
$$= (1.50 \times 10^{-10}\ \text{J})(1.00\ \text{eV}/1.60 \times 10^{-19}\ \text{J})$$
$$= 938\ \text{MeV}$$

b) Si la energía total de un protón es tres veces su energía en reposo, ¿a qué rapidez se mueve el protón?

Solución La ecuación 39.25 produce

$$E = 3m_pc^2 = \frac{m_pc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Resolviendo para u se obtiene

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{8}{9}$$

$$u = \frac{\sqrt{8}}{3}c = 2.83 \times 10^8\ \text{m/s}$$

c) Determine la energía cinética del protón en electron-volts.

Solución A partir de la ecuación 39.24,

$$K = E - m_pc^2 = 3m_pc^2 - m_pc^2 = 2m_pc^2$$

Puesto que $m_pc^2 = 938$ MeV, $K = 1\,880$ MeV

d) ¿Cuál es el *momentum* del protón?

Solución Se puede usar la ecuación 39.26 para calcular el *momentum* con $E = 3m_pc^2$:

$$E^2 = p^2c^2 + (m_pc^2)^2 = (3m_pc^2)^2$$

$$p^2c^2 = 9(m_pc^2)^2 - (m_pc^2)^2 = 8(m_pc^2)^2$$

$$p = \sqrt{8}\,\frac{m_pc^2}{c} = \sqrt{8}\,\frac{(938\ \text{MeV})}{c} = 2\,650\ \text{MeV}/c$$

Por conveniencia, la unidad de *momentum* se escribe MeV/c.



39.8 EQUIVALENCIA DE LA MASA Y LA ENERGÍA

Para entender la equivalencia de la masa y la energía, considere el siguiente experimento mental propuesto por Einstein al desarrollar su famosa ecuación $E = mc^2$. Suponga una caja aislada de masa M_{caja} y longitud L inicialmente en reposo, como se muestra en la figura 39.20a. Suponga que un pulso de luz se emite desde el lado izquierdo de la caja, como se muestra en la figura 39.20b. A partir de la ecuación 39.27 se sabe que luz de energía E transporta un *momentum* lineal $p = E/c$. Por tanto, para conservar el *momentum*, la caja debe retroceder hacia la izquierda a una rapidez v. Suponiendo que la masa de la caja es muy grande, la rapidez de retroceso es muy pequeña comparada con la rapidez de la luz, y la conservación del *momentum* produce $M_{\text{caja}}v = E/c$, o

$$v = \frac{E}{M_{\text{caja}}c}$$

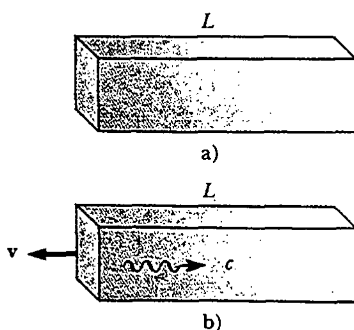


Figura 39.20 a) Una caja de longitud L en reposo. b) Cuando un pulso luminoso dirigido hacia la derecha es emitido en el extremo izquierdo de la caja, ésta retrocede hacia la izquierda hasta que el pulso golpea el extremo derecho.

El tiempo que tarda el pulso de luz en recorrer la longitud de la caja es aproximadamente $\Delta t = L/c$. En este intervalo de tiempo la caja se mueve una pequeña distancia Δx hacia la izquierda, donde

$$\Delta x = v\,\Delta t = \frac{EL}{M_{\text{caja}}c^2}$$

Luego la luz golpea el extremo derecho de la caja y le transfiere su *momentum* a la misma, lo que hace que la caja se detenga. Con la caja en su nueva posición, su centro de masa parece haberse movido a la izquierda. Sin embargo, su centro de masa no puede haberse movido, puesto que la caja es un sistema aislado. Einstein resolvió esta situación desconcertante suponiendo que además de la energía y el *momentum*, la luz también conduce masa. Si M_{pulso} es la masa efectiva conducida por el pulso luminoso, y si el centro de masa del sistema (caja más pulso luminoso) se mantiene fijo, entonces

$$M_{\text{pulso}}L = M_{\text{caja}}\Delta x$$

Resolviendo para M_{pulso}, y empleando la expresión anterior para Δx, se obtiene

$$M_{\text{pulso}} = \frac{M_{\text{caja}}\Delta x}{L} = \frac{M_{\text{caja}}}{L}\frac{EL}{M_{\text{caja}}c^2} = \frac{E}{c^2}$$

o

$$E = M_{\text{pulso}}c^2$$

Así Einstein llegó a la profunda conclusión de que "si un cuerpo proporciona la energía E en la forma de radiación, su masa disminuye en E/c^2,..."

Aunque la relación $E = mc^2$ se dedujo para la energía luminosa, la equivalencia de la masa y la energía es universal. La ecuación 39.24, $E = \gamma mc^2$, la cual representa la energía total de cualquier partícula, sugiere que aun cuando una partícula está en reposo ($\gamma = 1$), ésta todavía posee una energía enorme debido a su masa. Probablemente la prueba experimental más clara de la equivalencia de la masa y la energía ocurre en interacciones nucleares y de partículas elementales, donde se liberan grandes cantidades de energía, acompañadas por una disminución de masa. Ya que la energía y la masa están relacionadas, se ve que las leyes de la conservación de la energía y de la conservación de la masa son una y la misma. En términos sencillos, esta ley establece que

la energía de un sistema de partículas antes de la interacción debe ser igual a la energía del sistema después de la interacción, donde la energía de la *i*ésima partícula está dada por la expresión

$$E_i = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_i^2}{c^2}}} = \gamma m_i c^2$$

Conversión de masa-energía

La liberación de enormes cantidades de energía de las partículas subatómicas, acompañada por cambio en sus masas, es la base de todas las reacciones nucleares. En un reactor nuclear convencional, el núcleo de uranio experimenta *fisión*, una reacción que da lugar a varios fragmentos más ligeros que tienen energía cinética considerable. La masa combinada de todos los fragmentos es menor que la masa de los núcleos de uranio padres en una cantidad Δm. La energía correspondiente Δmc^2 asociada con esta diferencia de masa es exactamente igual a la energía cinética total de los fragmentos. Tal energía cinética eleva la temperatura del agua en el reactor, convirtiéndola en vapor para la generación de energía eléctrica.

En la reacción nuclear llamada *fusión*, dos núcleos atómicos se combinan para formar un núcleo individual. La reacción de fusión en la cual dos núcleos de deuterio se combinan para formar un núcleo de helio es de gran importancia en la investigación y desarrollo actuales de los reactores de fusión controlada. La reducción de la masa que resulta de la creación de un núcleo de helio a partir de dos núcleos de deuterio es $\Delta m = 4.25 \times 10^{-29}$ kg. Por tanto, el correspondiente exceso de energía que se origina de una reacción de fusión es $\Delta mc^2 = 3.83 \times 10^{-12}$ J = 23.9 MeV. Pa-

ra apreciar la magnitud de este resultado, observe que si 1 g de deuterio se convierte en helio, ¡la energía liberada es casi de 10^{12} J! A los costos actuales de la energía eléctrica (en Estados Unidos), esta cantidad de energía tendría un costo de casi 70 000 dólares.

EJEMPLO CONCEPTUAL

Como la masa es una medida de energía, ¿puede concluirse que la masa de un resorte comprimido es mayor que la masa del mismo resorte cuando no está comprimido?

Solución Recuerde que cuando un resorte con constante de fuerza k se comprime (o alarga) una distancia x a partir de su posición de equilibrio, almacena energía potencial elástica $U = kx^2/2$. De acuerdo con la teoría especial de la relatividad, cualquier cambio en la energía total de un sistema es equivalente a un cambio en la masa del sistema. Por tanto, la masa de un resorte comprimido (o alargado) es mayor que la masa del resorte en su posición de equilibrio en una cantidad U/c^2.

EJEMPLO 39. **Energía de enlace del deuterón**

Un deuterón, el cual es el núcleo de un átomo de deuterio, contiene un protón y un neutrón, y tiene una masa de 2.013 553 u. La masa total del deuterón no es igual a la suma de las masas del protón y el neutrón. Calcule la diferencia de masa y determine su equivalencia de energía, la cual se conoce como *energía de enlace* del núcleo.

Solución Empleando unidades de masa atómica (u), se tiene

$$m_p = \text{masa del protón} = 1.007\ 276\ \text{u}$$

$$m_n = \text{masa del neutrón} = 1.008\ 665\ \text{u}$$

$$m_p + m_n = 2.015\ 941\ \text{u}$$

La diferencia de masa Δm es, por tanto, 0.002 388 u. Por definición, 1 u = 1.66×10^{-27} kg, y, en consecuencia,

$$\Delta m = 0.002\ 388\ \text{u} = 3.96 \times 10^{-30}\ \text{kg}$$

Al emplear $E = \Delta mc^2$ se encuentra que la energía de enlace es

$$E = \Delta mc^2 = (3.96 \times 10^{-30}\ \text{kg})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})^2$$

$$= 3.56 \times 10^{-13}\ \text{J} = 2.23\ \text{MeV}$$

En consecuencia, la mínima energía requerida para separar el protón del neutrón en el núcleo de deuterio (la energía de enlace) es 2.23 MeV.

RELATIVIDAD Y ELECTROMAGNETISMO

Considere dos marcos de referencia S y S′ que están en movimiento relativo, y suponga que una carga individual q está en reposo en el marco de referencia S′. De acuerdo con un observador en este marco, un campo eléctrico rodea a la carga. Sin embargo, un observador en el marco S dice que la carga está en movimiento y, en consecuencia, mide tanto un campo eléctrico como un campo magnético. El campo magnético medido por el observador en el marco S es creado por la carga en movimiento, lo cual constituye una corriente eléctrica. En otras palabras, los campos eléctrico y magnético son visualizados de manera diferente en marcos de referencia que están en movimiento relativo uno con respecto del otro. En seguida se describe una situación que muestra cómo un campo eléctrico en un marco de referencia se ve como un campo magnético en otro marco de referencia.

Una carga de prueba positiva q se mueve paralela a un alambre que conduce corriente con velocidad **v** relativa al alambre en el marco S, como se muestra en la figura 39.21a. Suponga que la carga neta en el alambre es cero y que los electrones en el alambre también se mueven a velocidad **v** en una línea recta. La corriente hacia la izquierda en el alambre produce un campo magnético que forma círculos alrededor del alambre y se dirige hacia adentro de la página en la ubicación de la car-

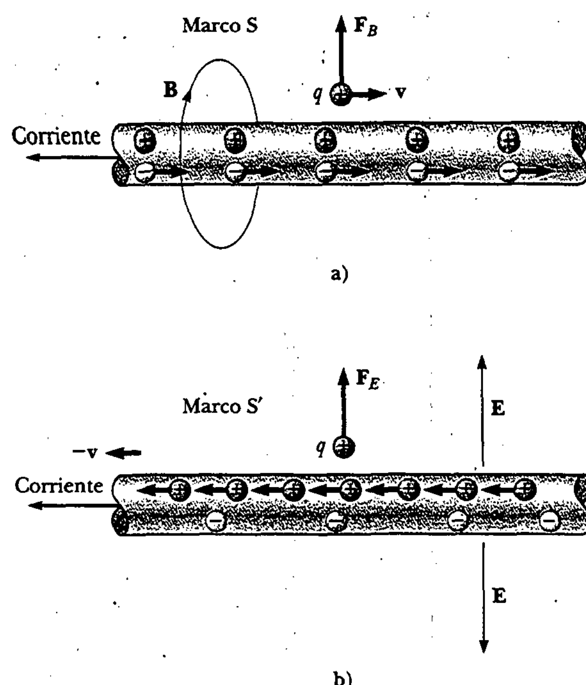


Figura 39.21 a) En un marco S, la carga positiva q se mueve hacia la derecha con una velocidad **v**, y el alambre conductor de corriente está estacionario. Un campo magnético **B** rodea al alambre, y la carga experimenta una fuerza *magnética* dirigida alejándose del alambre. b) En el marco S′ el alambre se mueve hacia la izquierda a una velocidad −**v**, y la carga q está estacionaria. El alambre crea un campo eléctrico **E**, y la carga experimenta una fuerza *eléctrica* dirigida alejándose del alambre.

ga de prueba móvil. Por tanto, una fuerza magnética $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que se aleja del alambre actúa sobre la carga de prueba. Sin embargo, ninguna fuerza eléctrica actúa sobre la carga de prueba debido a que la carga neta sobre el alambre es cero cuando se observa en este marco.

Ahora considere la misma situación vista desde el marco S′, donde la carga de prueba está en reposo (figura 39.21b). En tal marco las cargas positivas en el alambre se mueven hacia la izquierda, los electrones en el alambre están en reposo, y el alambre aún conduce una corriente. Puesto que la carga de prueba no se está moviendo en el marco, $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$; no hay fuerza magnética ejercida sobre la carga de prueba cuando se visualiza en este marco. Sin embargo, si una fuerza es ejercida sobre la carga de prueba en el marco S′, el marco del alambre, como antes se describió, una fuerza debe ser ejercida sobre ella en cualquier otro marco. ¿Cuál es el origen de esta fuerza en el marco S, el marco de la carga de prueba?

La respuesta a esta pregunta la proporciona la teoría especial de la relatividad. Cuando la situación se visualiza en el marco S, como en la figura 39.21a, las cargas positivas están en reposo y los electrones en el alambre se mueven hacia la derecha a una velocidad **v**. Debido a la contracción de la longitud, los electrones parecen estar más cercanos que su separación propia. Como no existe carga neta en el alambre, esta separación contraída debe ser igual a la separación entre las cargas positivas estacionarias. La situación es muy diferente cuando se visualiza en el marco S′ mostrado en la figura 39.21b. En este marco las cargas positivas aparecen más cercanas debido a la contracción de la longitud, y los electrones en el alambre están en reposo con una separación que es mayor a la percibida en el marco S. Por tanto, existe una carga positiva neta sobre el alambre cuando se visualiza en el marco S′. La carga neta positiva produce que un campo eléctrico apunte alejándose del alam-

bre hacia la carga de prueba, y de este modo la carga de prueba experimenta una fuerza eléctrica que se aleja del alambre. En consecuencia, lo que se percibe como un campo magnético (y una fuerza magnética correspondiente) en el marco del alambre, se transforma en un campo eléctrico (y una fuerza eléctrica correspondiente) en el marco de la carga de prueba.

Sección opcional



39.10 LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD

Hasta aquí se ha evadido un curioso acertijo. La masa tiene dos propiedades aparentemente diferentes: una *atracción gravitacional* con otras masas, y una propiedad *inercial* que se opone a la aceleración. Para designar estos dos atributos se emplean los subíndices g e i y se escribe

$$\text{Propiedad gravitacional} \qquad F_g = m_g g$$

$$\text{Propiedad inercial} \qquad \sum F = m_i a$$

El valor para la constante gravitacional G fue elegido para hacer numéricamente iguales las magnitudes de m_g y m_i. Sin embargo, de manera independiente a cómo se elija G, la proporcionalidad estricta de m_g y m_i se ha establecido de manera experimental hasta un grado muy alto: unas cuantas partes en 10^{12}. Así, parece que la masa gravitacional y la masa inercial pueden en efecto ser exactamente iguales.

¿Pero por qué? Ellos parecen involucrar dos conceptos diferentes por completo: una fuerza de atracción gravitacional mutua entre dos masas, y la resistencia de una sola masa a ser acelerada. La pregunta, que intrigó a Newton y a muchos otros físicos durante años, fue contestada cuando Einstein publicó en 1916 su teoría de la gravitación, conocida como *teoría general de la relatividad*. Como ésta es una teoría matemáticamente compleja, sólo se ofrece una muestra de su elegancia y profundidad.

Desde el punto de vista de Einstein, la notable coincidencia de que m_g y m_i parecen ser proporcionales entre sí fue una señal de la muy íntima y básica conexión entre los dos conceptos. Einstein señaló que ningún experimento mecánico (como dejar caer una masa) podría distinguir entre las dos situaciones ilustradas en las figuras 39.22a y b. En cada caso la maleta que cae se somete a una aceleración g hacia abajo respecto al piso.

Einstein llevó esta idea más allá y propuso que *ningún* experimento, mecánico o de otra índole, podría distinguir entre los dos casos. La extensión para incluir todos los fenómenos (no sólo los mecánicos) tiene interesantes consecuencias. Por ejemplo, suponga que un pulso luminoso se envía horizontalmente a través del elevador, como se bosqueja en la figura 39.22c. Durante el tiempo que tarda la luz en efectuar el viaje, la pared derecha del elevador ha acelerado hacia arriba. Lo anterior provoca que la luz llegue a una ubicación más baja sobre la pared de lo que el punto habría golpeado si el elevador no estuviese acelerado. Por ende, en el marco del elevador, la trayectoria del pulso de luz se desvía hacia abajo cuando el elevador acelera hacia arriba para encontrarlo. Como el elevador acelerado no se puede distinguir de uno no acelerado ubicado en un campo gravitacional, Einstein propuso que un haz de luz *también debe desviarse hacia abajo por efecto de un campo gravitacional.* Los experimentos han verificado el efecto, aunque la desviación es pequeña. Un láser disparado al horizonte cae menos de un cm después de viajar 6 000 km. (Ninguna desviación así se predice en la teoría de la gravitación de Newton.)

Los dos postulados de la **teoría general de la relatividad** de Einstein son:

- Todas las leyes de la naturaleza tienen la misma forma para observadores en cualquier marco de referencia, esté o no acelerado.

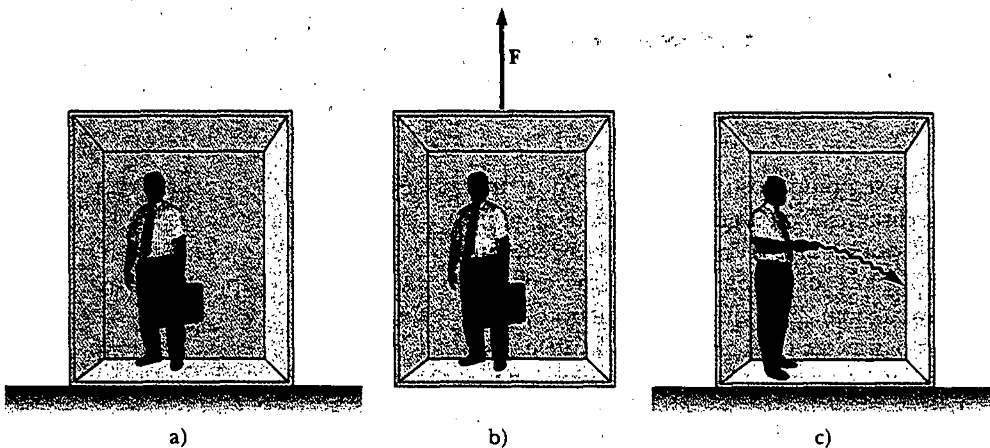
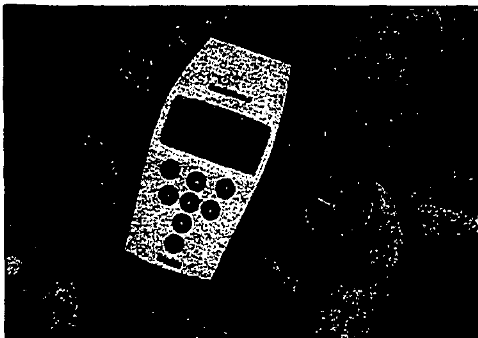


Figura 39.22 a) El observador está en reposo en un campo gravitacional uniforme **g**. b) El observador está en una región donde la gravedad es despreciable, pero el marco de referencia es acelerado por una fuerza externa **F** que produce una aceleración **g**. De acuerdo con Einstein, los marcos de referencia en las partes a) y b) son equivalentes en todos sentidos. Ningún experimento local puede distinguir diferencia alguna entre los dos marcos. c) Si las partes a) y b) en verdad son equivalentes, como Einstein propuso, entonces un rayo de luz debería doblarse en un campo gravitacional.

- En los alrededores de cualquier punto, un campo gravitacional es equivalente a un marco de referencia acelerado en ausencia de efectos gravitacionales. (Éste es el *principio de equivalencia.*)

El segundo postulado implica que la masa gravitacional y la masa inercial son completamente equivalentes, no sólo proporcionales. Lo que se pensaba que eran dos tipos diferentes de masa en realidad son masas idénticas.

Un efecto interesante predicho por la teoría general es que las escalas de tiempo son alteradas por la gravedad. Un reloj en presencia de la gravedad funciona más lentamente que uno donde la gravedad es despreciable. En consecuencia, las frecuencias de la radiación emitida por átomos en presencia de un intenso campo gravitacional están *corridas al rojo* hacia frecuencias menores cuando se comparan con las mismas emisiones en presencia de un campo débil. Este corrimiento gravitacional hacia el rojo se ha detectado en líneas espectrales emitidas por átomos en estrellas de gran masa. También se ha verificado sobre la Tierra comparando las frecuencias de rayos gamma (una forma de radiación electromagnética de alta energía) emitidos por núcleos separados verticalmente casi 20 m.



Esta unidad del Sistema Global de Posicionamiento (GPS, por sus siglas en inglés) incorpora, en los análisis de las señales que recibe de los satélites en órbita, cálculos de tiempo corregidos de manera relativista. Estas correcciones permiten a la unidad determinar su posición sobre la superficie de la Tierra hasta unos cuantos metros. Si las correcciones no se hubiesen realizado, el error de ubicación sería de casi un km. *(Cortesía de Trimble Navigation Limited)*

Pregunta sorpresa 39.7

Dos relojes idénticos están en la misma casa, uno en la planta alta, en una recámara, y el otro en la planta baja, en la cocina. ¿Cuál reloj funciona más lentamente?

El segundo postulado sugiere que un campo gravitacional puede "transformarse a distancia" en algún punto si se elige un marco de referencia acelerado apropiado —por ejemplo, uno cayendo libremente—. Einstein desarrolló un ingenioso método para describir la aceleración necesaria para "desaparecer" el campo gravitacional. Especificó un concepto, la *curvatura del espacio-tiempo*, que describe el efecto gravitacional en cada punto. De hecho, la curvatura del espacio-tiempo reemplaza por completo la teoría gravitacional de Newton. De acuerdo con Einstein, no hay una cosa como una fuerza gravitacional. En lugar de eso la presencia de una masa ocasiona una curvatura del espacio-tiempo en la vecindad de la masa, y esta curvatura dicta la trayectoria del espacio-tiempo que todos los objetos que se mueven libremente deben seguir. En 1979 John Wheeler resumió la teoría general de la relatividad de Einstein en una simple oración: "El espacio le dice a la materia cómo moverse y la materia le dice al espacio cómo curvarse."

Considere dos viajeros sobre la superficie de la Tierra que caminan directamente hacia el Polo Norte pero parten de diferentes puntos. Aun cuando ambos digan que están caminando hacia el norte y, en consecuencia, deberían seguir trayectorias paralelas, se ven acercándose cada vez más, como si fuesen atraídos de algún modo uno respecto del otro. La curvatura de la Tierra provoca este efecto. En una forma similar, lo que se suele considerar como la atracción gravitacional entre dos masas son, desde el punto de vista de Einstein, dos masas curvando el espacio-tiempo y atrayéndose una hacia la otra como resultado, en forma muy parecida a dos bolas de boliche rodando juntas sobre una mesa.

Una predicción de la teoría general de la relatividad es que un rayo de luz que pase cerca del Sol deberá desviarse en el espacio-tiempo curvo creado por la masa del Sol. Tal predicción fue confirmada cuando los astrónomos detectaron el curvado de la luz estelar cerca del Sol durante un eclipse solar total que sucedió poco después de la Primera Guerra Mundial (Fig. 39.23). Cuando se anunció el descubrimiento, Einstein se convirtió en una celebridad internacional.

Si la concentración de la masa se vuelve muy grande, como se cree que ocurre cuando una gran estrella agota su combustible nuclear y se colapsa hasta un volumen muy pequeño, es posible que se forme un **agujero negro**. Aquí, la curvatura del espacio-tiempo es tan extrema que, dentro de cierta distancia desde el centro del agujero negro, toda la materia y la luz quedan atrapadas.

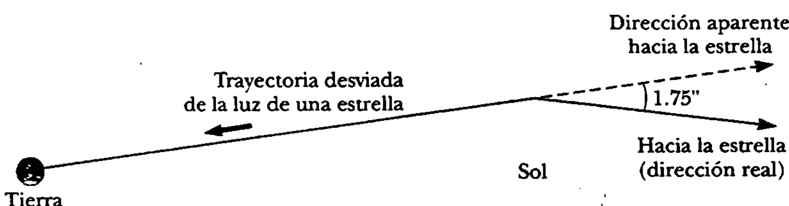
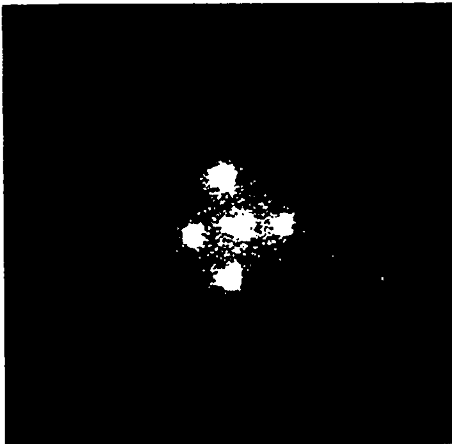


Figura 39.23 Desviación de luz estelar que pasa cerca del Sol. Debido a este efecto, el Sol o algún otro objeto remoto puede actuar como una *lente gravitacional*. En su teoría general de la relatividad, Einstein calculó que la luz estelar que apenas roza la superficie del Sol deberá desviarse un ángulo de 1.75".



Cruz de Einstein. Los cuatro puntos brillantes son imágenes de la misma galaxia que se doblaron alrededor de un objeto masivo ubicado entre la galaxia y la Tierra. El objeto actúa como una lente, provocando que los rayos de luz que fueron desviados de la galaxia distante converjan en la Tierra. (Si el objeto interventor tuviera una distribución de masa uniforme, se vería un anillo brillante en lugar de cuatro puntos.) *(Cortesía de la NASA)*

RESUMEN

Los dos postulados básicos de la teoría especial de la relatividad son

- Las leyes de la física deben ser las mismas en todos los marcos de referencia inerciales.
- La rapidez de la luz en el vacío tiene el mismo valor, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, en todos los marcos inerciales, independientemente de la velocidad del observador o de la velocidad de la fuente que emite la luz.

Tres consecuencias de la teoría especial de la relatividad son:

- Los eventos que son simultáneos para un observador no son simultáneos para otro observador que se encuentre en movimiento relativo respecto del primero.
- Los relojes en movimiento relativo a un observador parecen retardarse por un factor $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Este fenómeno se conoce como **dilatación del tiempo**.
- Las longitudes de los objetos en movimiento parecen contraerse en la dirección de movimiento por un factor $1/\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Este fenómeno se conoce como **contracción de la longitud**.

Para satisfacer los postulados de la relatividad especial, las ecuaciones de transformación galileanas deben sustituirse por las **ecuaciones de transformación de Lorentz:**

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z \qquad \textbf{(39.11)}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

La forma relativista de la **ecuación de transformación de la velocidad** es

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad \textbf{(39.16)}$$

donde u_x es la rapidez de un objeto como se mide en el marco S y u'_xes su rapidez medida en el marco S'.

La expresión relativista para el ***momentum* lineal** de una partícula que se mueve a una velocidad **u** es

$$\mathbf{p} \equiv \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma m\mathbf{u} \quad \textbf{(39.19)}$$

La expresión relativista para la **energía cinética** de una partícula es

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 \quad \textbf{(39.23)}$$

donde mc^2 se denomina **energía en reposo** de la partícula.

La energía total E de una partícula se relaciona con la masa m de la partícula mediante la famosa expresión de la equivalencia **masa-energía**:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad \textbf{(39.25)}$$

El *momentum* lineal relativista se relaciona con la energía total por medio de la ecuación

$$E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2 \quad \textbf{(39.26)}$$

PREGUNTAS

1. ¿Cuáles dos mediciones de rapidez que hacen dos observadores en movimiento relativo concuerdan siempre?
2. Una nave espacial en forma de esfera con respecto a un observador sobre la Tierra pasa a una rapidez de $0.5c$. ¿Qué forma ve el observador cuando la nave espacial pasa junto a él?
3. Un astronauta se aleja de la Tierra a una rapidez cercana a la de la luz. Si un observador sobre la Tierra mide el tamaño y el pulso del astronauta, ¿qué cambios (si los hay) mediría el observador? ¿El astronauta mediría algunos cambios sobre sí mismo?
4. Dos relojes idénticos están sincronizados. Uno se pone en órbita dirigido hacia el este alrededor de la Tierra, mientras el otro permanece en la misma. ¿Cuál reloj funciona más lentamente? Cuando el reloj en movimiento regresa a la Tierra, ¿los dos siguen sincronizados?
5. Dos láseres situados sobre una nave espacial en movimiento se disparan simultáneamente. Un observador sobre la nave espacial afirma que vio los pulsos de luz de manera simultánea. ¿Qué condición es necesaria de manera que concuerde un segundo observador?
6. Cuando se dice que un reloj en movimiento funciona más despacio que uno estacionario, ¿significa que hay algo físicamente inusual relacionado con el reloj en movimiento?
7. Liste algunas maneras en las que la vida cotidiana cambiaría si la rapidez de la luz fuera de sólo 50 m/s.
8. Proporcione un argumento físico que muestre que es imposible acelerar un objeto de masa m a la rapidez de la luz, incluso con una fuerza continua que actúe sobre él.
9. Se dice que Einstein, en sus años de adolescente, planteó la pregunta: "¿Qué vería en un espejo si lo llevara en mis manos y corriera a la rapidez de la luz?" ¿Cómo respondería usted a esta pregunta?
10. Algunos objetos estelares distantes, llamados *quasares*, se alejan de la Tierra a la mitad (o más) de la rapidez de la luz. ¿Cuál es la rapidez de la luz que se recibe de estos quasares?
11. ¿Cómo es posible que los fotones de luz, los cuales tienen masa cero, tengan *momentum*?
12. Respecto de marcos de referencia, ¿cómo difiere la relatividad general de la relatividad especial?
13. Describa cómo cambiarían los resultados del ejemplo 39.7 si, en lugar de naves espaciales rápidas, dos carros ordinarios estuviesen acercándose entre sí a magnitudes de velocidad de carretera.
14. Dos objetos son idénticos, sólo que uno está más caliente que el otro. Compare cómo responden a fuerzas idénticas.

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante · ☐ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** ☐ = use computadora para resolver el problema ☐ = Física interactiva ☐ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 39.1 El principio de la relatividad galileana

1. Un carro de 2 000 kg que se desplaza a 20.0 m/s choca y se queda pegado a un carro de 1 500 kg en reposo en un semáforo. Demuestre que el *momentum* se conserva en un marco de referencia que se mueve a 10.0 m/s en la dirección del carro en movimiento.
2. Una bola se lanza a 20.0 m/s dentro de un vagón que se mueve sobre las vías a 40.0 m/s. ¿Cuál es la rapidez de la bola relativa al suelo si ésta se lanza a) hacia adelante, b) hacia atrás y c) fuera de la puerta lateral?
3. En un marco de referencia de un laboratorio, un observador nota que la segunda ley de Newton es válida. Muestre que ésta también es válida para un observador que se mueve a una rapidez constante, pequeña en comparación con la rapidez de la luz, relativa al marco de laboratorio.
4. Muestre que la segunda ley de Newton *no* es válida en un marco de referencia que se mueve respecto del marco del laboratorio del problema 3 con una aceleración constante.

Sección 39.2 El experimento de Michelson-Morley
Sección 39.3 Principio de la relatividad de Einstein
Sección 39.4 Consecuencias de la teoría especial de la relatividad

5. ¿Qué tan rápido debe moverse una cinta métrica si se observa que su longitud se contrae a 0.500 m?
6. ¿A qué rapidez tiene que moverse un reloj para funcionar a un ritmo igual a la mitad del correspondiente a un reloj en reposo?
7. Un astronauta está viajando en un vehículo espacial que tiene una rapidez de $0.500c$ respecto a la Tierra. El astronauta mide su pulso en 75.0 latidos por minuto. Señales generadas por el pulso del astronauta son radiadas a la Tierra cuando el vehículo se mueve en una dirección perpendicular a una línea que enlaza al vehículo con un observador sobre la Tierra. ¿Qué pulso mide el observador terrestre? ¿Cuál sería el pulso si la rapidez del vehículo espacial se incrementara a $0.990c$?
8. La longitud propia de una nave espacial es tres veces la de otra. Las dos naves espaciales viajan en la misma dirección y, mientras ambas pasan arriba, un observador en la Tierra las mide y obtiene la misma longitud. Si la nave más lenta se desplaza a una rapidez de $0.350c$, determine la rapidez de la más rápida.
9. Un reloj atómico se mueve a 1 000 km/h durante una hora mientras es medido por un reloj idéntico sobre la Tierra. ¿Cuántos nanosegundos se retrasará el reloj en movimiento al final del intervalo de una hora?
10. Si unos astronautas pudieran viajar a $v = 0.950c$, en la Tierra se afirmaría que tardan (4.20/0.950) = 4.42 años para llegar a Alfa Centauri, a 4.20 años luz de distancia. Los astronautas no estarían de acuerdo. a) ¿Cuánto tiempo pasa en los relojes de los astronautas? b) ¿Qué distancia a Alfa Centauri miden los astronautas?
11. WEB Una nave espacial con una longitud propia de 300 m tarda 0.750 μs en pasar a un observador terrestre. Determine la rapidez de esta nave espacial de acuerdo a como la mide el observador en la Tierra.
12. A una nave espacial con una longitud propia L_p le toma t tiempo pasar a un observador terrestre. Determine la rapidez de esta nave espacial de acuerdo con la manera en que la mide el observador en la Tierra.
13. Un muón formado a gran altura en la atmósfera de la Tierra viaja a una rapidez $v = 0.990c$ a lo largo de una distancia de 4.60 km antes de decaer en un electrón, un neutrino y un antineutrino ($\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$). a) ¿Cuánto vive el muón, según se mide en su marco de referencia? b) ¿Qué tan lejos viaja el muón, según se mide en su marco de referencia?
14. **Problema de repaso.** En 1962, cuando el astronauta del Mercury, Scott Carpenter, orbitó la Tierra 22 veces, la prensa señaló que por cada órbita que recorría envejecía 2 millonésimas de segundo menos de los que hubiera envejecido al permanecer en la Tierra. a) Suponiendo que él estaba a 160 km sobre la Tierra en una órbita circular, determine la diferencia de tiempo entre alguien en la Tierra y Carpenter para las 22 órbitas. Necesitará usar la aproximación $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$ para x pequeñas. b) ¿La información de la prensa es exacta? Explique.
15. El pión tiene una vida promedio de 26.0 ns cuando está en reposo. Para que recorra 10.0 m, ¿con qué rapidez debe moverse?
16. ¿Para qué valores de v, $\gamma = 1.01$? Observe que para magnitudes de velocidad menores que este valor, la dilatación del tiempo y la contracción de la longitud son efectos menores al uno por ciento.
17. Uno de sus amigos pasa junto a usted en una nave espacial que viaja a alta rapidez. Él le dice que su nave mide 20.0 m de largo y que la nave en la que usted está sentado, construida de manera idéntica, mide 19.0 m de largo. De acuerdo con sus observaciones, a) ¿cuánto mide su nave? b) ¿cuánto mide la nave de su amigo? y c) ¿cuál es la rapidez de la nave de su amigo?
18. Desde la Tierra se lanza una sonda espacial interestelar. Después de un breve periodo de aceleración la sonda se mueve a una velocidad constante, 70.0% de la rapidez de la luz. Sus baterías nucleares le proporcionan la energía para mantener continuamente activo su transmisor de datos. Las baterías tienen un tiempo de vida de 15.0 años, medidos en un marco en reposo. a) ¿Cuánto duran las baterías en la sonda espacial, medidas en el Control de la Misión en la Tierra? b) ¿A qué distancia de la Tierra está la sonda cuando se agotan sus baterías, según mide el Control de la Misión? c) ¿Qué tan lejos está la sonda de la Tie-

rra cuando sus baterías se agotan, según mide su propio odómetro de viaje? d) ¿Durante cuánto tiempo total después del lanzamiento se reciben datos desde la sonda en el Control de la Misión? Advierta que las ondas de radio viajan a la rapidez de la luz y llenan el espacio entre la sonda y la Tierra en el momento en que se agota la batería.

19. **Problema de repaso.** Una civilización extraterrestre ocupa una enana café, casi estacionaria en relación con el Sol, a muchos años luz de distancia. Los extraterrestres han llegado a amar las transmisiones originales del *The Ed Sullivan Show*, en el canal 2 de televisión, a una frecuencia de 57.0 MHz. Su línea de visión hacia la Tierra está en el plano de la órbita terrestre. Encuentre la diferencia entre las frecuencias mayor y menor que ellos reciben debido al movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol.

20. El radar de policía detecta la rapidez de un auto (Fig. P39.20) del modo siguiente: se transmiten hacia el auto microondas de una frecuencia conocida con precisión. El auto en movimiento refleja las microondas con un corrimiento Doppler. Las ondas reflejadas se reciben y combinan con una versión atenuada de la onda transmitida. Entre las dos señales de microondas ocurren golpeteos rítmicos. Se mide la frecuencia del golpeteo. a) Para una onda electromagnética reflejada de regreso a su fuente desde un espejo acercándose a rapidez v, demuestre que la onda reflejada tiene frecuencia

$$f = f_{\text{fuente}} \frac{c+v}{c-v}$$

donde f_{fuente} es la frecuencia de la fuente. b) Cuando v es mucho menor que c, la frecuencia del golpeteo es mucho menor que la frecuencia transmitida. En este caso use la aproximación $f + f_{\text{fuente}} \cong 2f_{\text{fuente}}$ y muestre que la frecuencia del golpeteo se puede escribir como $f_b = 2v/\lambda$. c) ¿Qué frecuencia de golpeteo se mide para una rapidez de auto de 30.0 m/s si las microondas tienen frecuencia de 10.0 GHz? d) Si la medida de la frecuencia del golpeteo es precisa a ± 5 Hz, ¿qué tan precisa es la medición de velocidad?

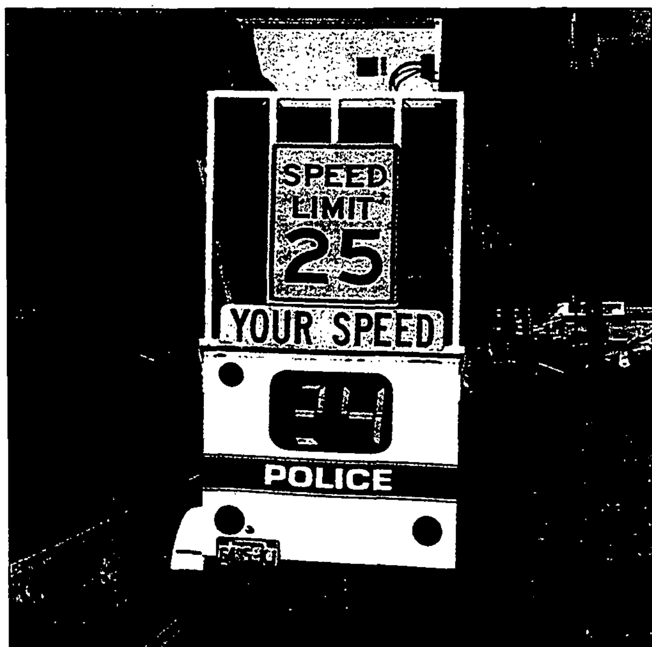


Figura P39.20 *(Trent Steffler/David R. Frazier Photolibrary)*

21. *El corrimiento hacia el rojo.* Una fuente luminosa se aleja de un observador a rapidez v_{fuente}, la cual es pequeña comparada con c. a) Muestre que el corrimiento fraccionario en la longitud de onda medida está dado por la expresión aproximada

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v_{\text{fuente}}}{c}$$

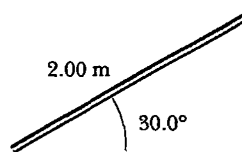
Este fenómeno se conoce como el corrimiento hacia el rojo debido a que la luz visible se desplaza hacia el rojo. b) Las mediciones espectroscópicas de luz a λ = 397 nm provenientes de una galaxia en la Osa Mayor revelan un corrimiento hacia el rojo de 20 nm. ¿Cuál es la rapidez de retroceso de la galaxia?

Sección 39.5 Las ecuaciones de transformación de Lorentz

22. Una nave espacial viaja a 0.750c respecto de la Tierra. Si la nave espacial dispara un pequeño cohete hacia adelante, ¿con qué rapidez (en relación con la nave) se debe disparar el cohete para que viaje a 0.950c respecto de la Tierra?

WEB 23. Dos chorros de material provenientes del centro de una radiogalaxia vuelan alejándose en direcciones opuestas. Ambos chorros se mueven a 0.750c respecto de la galaxia. Determine la rapidez de un chorro en relación con el otro.

24. Una barra en movimiento tiene una longitud de 2.00 m, y está orientada a un ángulo de 30.0° respecto a la dirección del movimiento (Fig. P39.24). La barra tiene una rapidez de 0.995c. a) ¿Cuál es la longitud propia de la barra? b) ¿Cuál es el ángulo de orientación en el marco propio?



Dirección del movimiento ***Figura P39.24***

25. Una nave espacial Klingon se mueve alejándose de la Tierra a una rapidez de 0.800c (Fig. P39.25). La nave estelar *Enterprise* la persigue a una rapidez de 0.900c respecto de la Tierra. Los observadores en la Tierra ven que la *Enterprise* alcanza a la nave Klingon a una rapidez relativa de 0.100c. ¿A qué rapidez la *Enterprise* alcanza a la nave Klingon según observa la tripulación del *Enterprise*?

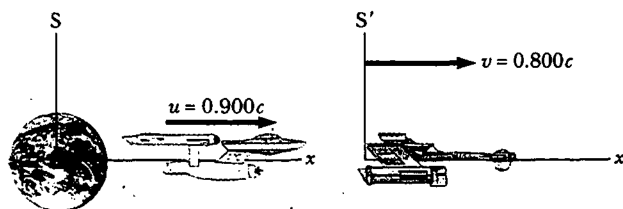


Figura P39.25

26. Una luz roja destella en la posición $x_R = 3.00$ m y el tiempo $t_R = 1.00 \times 10^{-9}$ s, y una luz azul destella en $x_B = 5.00$ m y $t_B = 9.00 \times 10^{-9}$ s (todos los valores están medidos en el marco de referencia S). El marco de referencia S' tiene su origen en el mismo punto que S en $t = t' = 0$; el marco S' se mueve de manera constante hacia la derecha. Se observa que ambos destellos ocurren en el mismo lugar en S'. a) Encuentre la velocidad relativa entre S y S'. b) Encuentre la ubicación de los dos destellos en el marco S'. c) ¿En qué tiempo ocurre el destello rojo en el marco S'?

Sección 39.6 Momentum lineal relativista y forma relativista de las leyes de Newton

27. Calcule el *momentum* de un electrón que se mueve a a) 0.010 0c, b) 0.500c, c) 0.900c.
28. La expresión no relativista para el *momentum* de una partícula, $p = mu$, se puede usar si $u \ll c$. ¿Para qué rapidez el uso de esta fórmula registra un error en el *momentum* de a) 1.00 por ciento y b) 10.0 por ciento?
29. Una pelota de golf viaja a una rapidez de 90.0 m/s. ¿En qué fracción su *momentum* relativista p difiere de su valor clásico mu? Esto es, encuentre la proporción $(p - mu)/mu$.
30. Muestre que la rapidez de un objeto que tiene un *momentum* p y masa m es

$$u = \frac{c}{\sqrt{1 + (mc/p)^2}}$$

WEB 31. Una partícula inestable en reposo se rompe en dos fragmentos de masas *distintas*. La masa del fragmento más ligero es 2.50×10^{-28} kg, y la del fragmento más pesado es 1.67×10^{-27} kg. Si el fragmento más ligero tiene una rapidez de 0.893c después del rompimiento, ¿cuál es la rapidez del fragmento más pesado?

Sección 39.7 Energía relativista

32. Determine la energía requerida para acelerar un electrón a) desde 0.500c a 0.900c, y b) desde 0.900c a 0.990c.
33. Encuentre el *momentum* de un protón en unidades de MeV/c, si su energía total es el doble de su energía en reposo.
34. Demuestre que, para cualquier objeto que se mueve a menos de un décimo de la rapidez de la luz, la energía cinética relativista concuerda con el resultado de la ecuación clásica $K = mu^2/2$ a una precisión menor de 1%. Por tanto, para la mayor parte de los propósitos, la ecuación clásica es lo suficientemente buena para describir estos objetos, cuyo movimiento se denomina *no relativista*.

WEB 35. Un protón se mueve a 0.950c. Calcule a) su energía en reposo, b) su energía total y c) su energía cinética.

36. Un electrón tiene una energía cinética cinco veces mayor que su energía en reposo. Encuentre a) su energía total y b) su rapidez.
37. Un cubo de acero tiene un volumen de 1.00 cm³ y una masa de 8.00 g cuando está en reposo en la Tierra. Si a este cubo ahora se le da una rapidez $u = 0.900c$, ¿cuál es su densidad cuando es medida por un observador estacionario? Advierta que la densidad relativista es $E_R/c^2 V$.
38. Una partícula inestable con una masa de 3.34×10^{-27} kg está inicialmente en reposo. La partícula decae en dos fragmentos que vuelan alejándose a velocidades de 0.987c y −0.868c. Encuentre las masas de los fragmentos. (*Sugerencia:* se conserva tanto la masa-energía como el *momentum*.)
39. Muestre que la relación energía-*momentum* $E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$ se deriva de las expresiones $E = \gamma mc^2$ y $p = \gamma mu$.
40. Un protón en un acelerador de alta energía adquiere una energía cinética de 50.0 GeV. Determine a) su *momentum* y b) su rapidez.
41. En un cinescopio de televisión a color ordinario, los electrones se aceleran a través de una diferencia de potencial de 25 000 V. a) ¿Qué rapidez tienen los electrones cuando golpean sobre la pantalla? b) ¿Cuál es su energía cinética en joules?
42. Se aceleran electrones hasta una energía de 20.0 GeV en el acelerador lineal de Stanford de 3.00 km de largo. a) ¿Cuál es el factor γ para los electrones? b) ¿Cuál es su rapidez? c) ¿Qué tan largo parece el acelerador para ellos?
43. Un pión en reposo ($m_\pi = 270m_e$) decae en un muón ($m_\mu = 206m_e$) y un antineutrino ($m_{\bar{\nu}} \approx 0$). La reacción se escribe $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}$. Encuentre la energía cinética del muón y del antineutrino en electronvolts. (*Sugerencia:* el *momentum* relativista se conserva.)

Sección 39.8 Equivalencia de la masa y la energía

44. Realice una estimación del orden de magnitud de la proporción del aumento de masa a la masa original de una bandera conforme usted la sube por el asta-bandera. En su solución explique qué cantidades tomó como datos y los valores que estimó o midió para ellos.
45. Cuando 1.00 g de hidrógeno se combina con 8.00 g de oxígeno, se forman 9.00 g de agua. Durante esta reacción química se liberan 2.86×10^5 J de energía. ¿Cuánta masa pierden los constituyentes de esta reacción? ¿Es posible detectar la pérdida de masa?
46. Una nave espacial de 1.00×10^6 kg de masa se va a acelerar hasta 0.600c. a) ¿Cuánta energía requiere lo anterior? b) ¿Cuántos kilogramos de materia tomaría proporcionar toda esta energía?
47. En una planta nucleoeléctrica las barras de combustible duran tres años antes de ser reemplazadas. Si una planta con potencia térmica nominal de 1.00 GW opera a 80.0% de capacidad durante los tres años, ¿cuál es la pérdida de masa del combustible?
48. Un núcleo de ^{57}Fe en reposo emite un fotón de 14.0 keV. Emplee la conservación de la energía y el *momentum* para deducir la energía cinética del núcleo que retrocede en electronvolts. (Emplee $Mc^2 = 8.60 \times 10^{-9}$ J para el estado final del núcleo de ^{57}Fe.)
49. La salida de potencia del Sol es de 3.77×10^{26} W. ¿Cuánta masa se convierte en energía en el Sol cada segundo?
50. Un rayo gamma (un fotón de luz de alta energía) puede producir un electrón (e^-) y un positrón (e^+) cuando entra en el campo eléctrico de un núcleo pesado: ($\gamma \rightarrow e^+ + e^-$). ¿Qué energía de rayo gamma mínima se requie-

re para llevar a cabo esta tarea? (*Sugerencia:* las masas del electrón y el positrón son iguales.)

Sección 39.9 Relatividad y electromagnetismo

51. Según miden observadores en un marco de referencia S, una partícula que tiene carga q se mueve a velocidad **v** en un campo magnético **B** y un campo eléctrico **E**. Luego se mide que la fuerza resultante sobre la partícula es $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Otro observador se mueve junto con la partícula cargada y también mide su carga como q pero mide un campo eléctrico $\mathbf{E}'$. Si ambos observadores van a medir la misma fuerza **F**, muestre que $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

PROBLEMAS ADICIONALES

52. Un electrón tiene una rapidez de $0.750c$. Encuentre la rapidez de un protón que tiene a) la misma energía cinética que el electrón; b) el mismo *momentum* que el electrón.

WEB 53. Los rayos cósmicos de energía más alta son protones que tienen una energía cinética del orden de 10^{13} MeV. a) ¿Cuánto tardaría un protón de esta energía en viajar a través de la galaxia Vía Láctea, la cual tiene un diámetro de $\sim 10^5$ años luz, de acuerdo a como se mediría en el marco del protón? b) Desde el punto de vista del protón, ¿cuántos kilómetros tiene de largo la galaxia?

54. Una nave espacial se aleja de la Tierra a $0.500c$ y dispara una nave transbordadora que viaja hacia adelante a $0.500c$ relativa a la nave espacial. El piloto del transbordador dispara una sonda hacia adelante a una rapidez de $0.500c$ relativa al transbordador. Determine a) la rapidez del transbordador relativa a la Tierra y b) la rapidez de la sonda relativa a la Tierra.

55. La reacción de fusión nuclear neta dentro del Sol puede escribirse como $4\,^1\text{H} \rightarrow \,^4\text{He} + \Delta E$. Si la energía en reposo de cada átomo de hidrógeno es de 938.78 MeV, y la energía en reposo del átomo de helio-4 es de 3 728.4 MeV, ¿cuál es el porcentaje de la masa inicial que se libera como energía?

56. Un astronauta desea visitar la galaxia Andrómeda (a 2.00 millones de años luz de distancia), en un viaje de ida que tardará 30.0 años en el marco de referencia de la nave espacial. Si su rapidez es constante, ¿qué tan rápido debe viajar respecto de la Tierra?

57. Una nave espacial extraterrestre que viaja a $0.600c$ hacia la Tierra lanza una cápsula de aterrizaje con una vanguardia de agentes de conquista. La nave de aterrizaje viaja en la misma dirección a una velocidad de $0.800c$ relativa a la nave espacial. Según se observa desde la Tierra, la nave espacial está a 0.200 años luz de la Tierra cuando se lanza la cápsula de aterrizaje. a) ¿A qué velocidad observan en la Tierra que ésta se acerca? b) ¿Cuál es la distancia a la Tierra en el momento en que se lanza la cápsula de aterrizaje, según observan los extraterrestres? c) ¿Cuánto tarda la cápsula en alcanzar la Tierra, según observan los extraterrestres en la nave madre? d) Si la cápsula tiene una masa de 4.00×10^5 kg, ¿cuál es su energía cinética, según se observa en el marco de referencia de la Tierra?

58. Una profesora de física en la Tierra aplica un examen a sus estudiantes, quienes se encuentran en un cohete espacial que viaja a una rapidez v respecto de la Tierra. En el momento en que el cohete pasa sobre la profesora, ésta da la señal para iniciar el examen. Ella desea que sus estudiantes tengan el tiempo T_0 (tiempo del cohete) para completar el examen. Muestre que ella debe esperar un tiempo (terrestre) de

$$T = T_0\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

antes de enviar una señal luminosa que les indique que terminen. (*Sugerencia:* recuerde que transcurre cierto tiempo para que la segunda señal luminosa viaje desde la profesora hasta los estudiantes.)

59. La nave espacial I, la cual contiene estudiantes que realizan un examen de física, se acerca a la Tierra a una rapidez de $0.600c$ (respecto de la Tierra), mientras que la nave espacial II, la cual contiene a los profesores que vigilan el examen, se mueve a $0.280c$ (en relación con la Tierra) directamente hacia los estudiantes. Si los profesores detienen el examen después de que han pasado 50.0 min en sus relojes, ¿cuánto dura el examen según miden a) los estudiantes y b) un observador en la Tierra?

60. La energía desde el Sol alcanza los estratos superiores de la atmósfera de la Tierra a una proporción de 1.79×10^{17} W. Si toda esta energía fuese absorbida por la Tierra y no se volviese a emitir, ¿cuánto aumentaría la masa de la Tierra en un año?

61. Un supertrén (longitud propia, 100 m) viaja a una rapidez de $0.950c$ mientras pasa por un túnel (longitud propia, 50.0 m). Según observa una persona al lado de la vía, ¿en algún momento el tren está por completo dentro del túnel? Si es así, ¿de cuánto espacio dispone?

62. Imagine que el Sol entero colapsa hacia una esfera de radio R_g tal que el trabajo requerido para remover una pequeña masa m de su superficie sería igual a su energía en reposo mc^2. Este radio se llama *radio gravitacional* para el Sol. Encuentre R_g. (Se cree que el último destino de las estrellas es colapsar más allá de sus radios gravitacionales en agujeros negros.)

63. Una partícula cargada se mueve a rapidez u a lo largo de una línea recta en un campo eléctrico uniforme **E**. Si el movimiento y el campo eléctrico están en la dirección x, a) muestre que la aceleración de la carga q en la dirección x está dada por

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{qE}{m}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

b) Analice la importancia del hecho de que la aceleración depende de la rapidez. c) Si la partícula parte desde el reposo en $x = 0$ en $t = 0$, ¿cómo procedería para encontrar la rapidez de la partícula y su posición después de que ha transcurrido un tiempo t?

64. a) Muestre que el corrimiento Doppler $\Delta\lambda$ en la longitud de onda de la luz es descrito por la expresión

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} + 1 = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

donde λ es la longitud de onda fuente, y v es la rapidez del acercamiento relativo entre la fuente y el observador. b) ¿Qué tan rápido tendría que ir un motociclista para que una luz roja parezca verde? Tome 650 nm como la longitud de onda típica de la luz roja, y 550 nm como la longitud de onda típica de la luz verde.

65. Un cohete se mueve hacia un espejo a $0.800c$ en relación con el marco de referencia S en la figura P39.65. El espejo está estacionario respecto de S. Un pulso de luz emitido por el cohete viaja hacia el espejo y se refleja de regreso al cohete. El frente del cohete está a 1.80×10^{12} m del espejo (según miden los observadores en S) en el momento en que el pulso luminoso sale del cohete. ¿Cuál es el tiempo total de viaje del pulso según miden los observadores en a) el marco S y b) el frente del cohete?

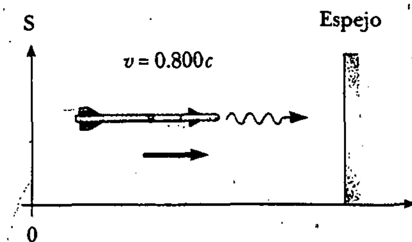


Figura P39.65 Problemas 65 y 66.

66. Un observador en un cohete se mueve hacia un espejo a una rapidez v respecto al marco de referencia S en la figura P39.65. El espejo está estacionario respecto a S. Un pulso luminoso emitido por el cohete viaja hacia el espejo y se refleja de regreso al cohete. El frente del cohete está a una distancia d del espejo (según miden los observadores en S) en el momento en que el pulso luminoso sale del cohete. ¿Cuál es el tiempo total de viaje del pulso según miden los observadores en a) el marco S y b) el frente del cohete?

67. Teodoro y Mari están jugando a atrapar una pelota en el marco S′, el cual se mueve a $0.600c$, mientras Jaime observa la acción en el marco S (Fig. P39.67). Teodoro lanza la pelota a Mari a $0.800c$ (según Teodoro) y su separación (medida en S′) es 1.80×10^{12} m. a) De acuerdo con Mari, ¿qué tan rápido se mueve la pelota? b) De acuerdo con Mari, ¿cuánto tarda la pelota en llegar a ella? c) De acuerdo con Jaime, ¿qué distancia están separados Teodoro y Mari y qué tan rápido se mueve la pelota? d) De acuerdo con Jaime, ¿cuánto tarda la pelota en llegar a Mari?

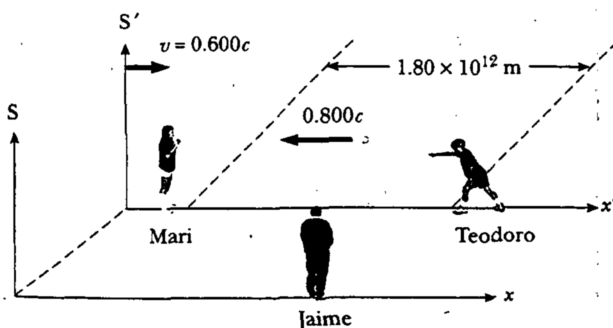


Figura P39.67

68. Una barra de longitud L_0 que se mueve a una rapidez v a lo largo de la dirección horizontal forma un ángulo θ_0 respecto del eje x'. a) Muestre que la longitud de la barra medida por un observador estacionario es $L = L_0[1 - (v^2/c^2)\cos^2\theta_0]^{1/2}$. b) Muestre que el ángulo que la barra forma con el eje x está dado por $\tan\theta = \gamma\tan\theta_0$. Estos resultados demuestran que la barra se contrae y gira. (Considere que el extremo inferior de la barra está en el origen del sistema de coordenadas primario.)

69. Considere dos marcos de referencia inerciales S y S′, donde S′ se mueve hacia la derecha a una rapidez constante de $0.600c$ según mide un observador en S. Una regleta de 1.00 m de longitud propia se mueve desde la izquierda hacia los orígenes de S y S′, y la longitud de la misma es de 50.0 cm cuando la mide un observador en S′. a) Determine la rapidez de la regleta de acuerdo con la manera en que la miden observadores en S y S′. b) ¿Cuál es la longitud de la regleta cuando la mide un observador en S?

70. Suponga que el Sol está a punto de explotar. Tratando de escapar sale en una nave espacial a $v = 0.800c$ y se dirige hacia la estrella Tau Ceti, a 12.0 años luz de distancia. Cuando alcanza el punto medio de su viaje desde la Tierra, se ve que el Sol estalla y, desafortunadamente, al mismo tiempo observa que Tau Ceti explota también. a) En el marco de referencia de la nave espacial, ¿debe concluir que las dos explosiones ocurren de manera simultánea? Si no, ¿cuál ocurre primero? b) En un marco de referencia en el cual el Sol y Tau Ceti están en reposo, ¿ambos explotan simultáneamente? Si no, ¿cuál explota primero?

71. La luz emitida por una galaxia muestra una distribución continua de longitudes de onda porque la galaxia está compuesta de miles de millones de estrellas diferentes y otros emisores térmicos. No obstante, se presentan algunas estrechas aberturas en el espectro continuo donde la luz ha sido absorbida por los gases más fríos en la fotosfera exterior de las estrellas normales. En particular, los átomos de calcio ionizados en reposo producen una fuerte absorción a una longitud de onda de 394 nm. Para una galaxia en la constelación Hydra, a 2 mil millones de años luz de distancia, esta línea de absorción se corre a 475 nm. ¿Qué tan rápido se está alejando la galaxia de la Tierra? (*Nota:* la suposición de que la rapidez de retroceso es pequeña comparada con c, como se hizo en el problema 21, no es una buena aproximación aquí.)

72. Prepare una gráfica de la energía cinética relativista y la energía cinética clásica, ambas como una función de la rapidez, para un objeto con una masa de su elección. ¿A qué rapidez la energía cinética clásica subestima el valor relativista en uno por ciento? ¿En 5 por ciento? ¿En 50 por ciento?

73. El volumen total del agua en los océanos es aproximadamente 1.40×10^9 km^3. La densidad del agua de mar es 1 030 kg/m^3 y su calor específico es de 4 186 J/(kg · °C). Encuentre el aumento en la masa de los océanos producida por un aumento en la temperatura de 10.0°C.

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

39.1 Son los dos, porque ellos pueden reportar sólo lo que ven. Asimismo, concuerdan en que la persona en el camión lanza la bola hacia arriba y luego la atrapa un poco después.

39.2 Depende de la dirección del lanzamiento. Considerando la dirección en la cual el tren está viajando como la dirección x positiva, use los valores $u_x' = +90$ mi/h y $v = +110$ mi/h, con u_x en la ecuación 39.2 como el valor que está buscando. Si el lanzador arroja la bola en la misma dirección que el tren, una persona en reposo sobre la Tierra ve que la bola se mueve a 110 mi/h + 90 mi/h = 200 mi/h. Si el lanzador la arroja en la dirección opuesta, la persona sobre la Tierra ve que la bola se mueve en la misma dirección que el tren, pero sólo a 110 mi/h − 90 mi/h = 20 mi/h.

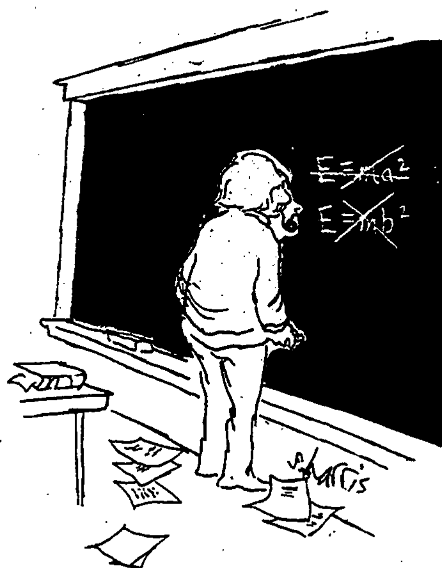
39.3 Ambos son correctos. Aunque los dos observadores alcanzan conclusiones diferentes, cada uno es correcto en su propio marco de referencia porque el concepto de simultaneidad no es absoluto.

39.4 Alrededor de 2.9×10^8 m/s, porque ésta es la rapidez a la cual $\gamma = 5$. Por cada 5 s de tictac en el reloj del Control de la Misión, el observador fijo en la Tierra (¡con un poderoso telescopio!) ve que el reloj del cohete emite tictacs cada segundo. La astronauta ve su propio reloj operando a una rapidez normal. Para ella el Control de la Misión se está alejando a una rapidez de 2.9×10^8 m/s, y ve que el reloj del Control de la Misión marcha más lento. ¡Extraña cosa esta relatividad!

39.5 Si su tiempo de trabajo está basado en relojes que permanecen en la Tierra, tendrán unos cheques de pago más jugosos. Habrá pasado menos tiempo para los astronautas en sus marcos de referencia que para sus empleadores en la Tierra.

39.6 Por una línea curva. Esto se puede ver en la mitad de la línea-de-mundo de Acelerado en la figura 39.14, donde él da vuelta y comienza su viaje a casa.

39.7 El reloj de la planta baja funciona más lentamente porque está más cerca de la Tierra y, por tanto, experimenta un campo gravitacional más intenso que el reloj de la planta alta.



ACERTIJO

Las calles en Las Vegas están llenas de luces de "neón" de varios brillantes colores. ¿Cómo funcionan estas luces y qué determina el color de un tubo de luz particular? *(Dembinsky Photo Associates)*

capítulo

40

Introducción a la física cuántica

Líneas generales del capítulo

En el capítulo anterior se analizó el hecho de que la mecánica newtoniana debe ser reemplazada por la teoría especial de la relatividad de Einstein cuando se trabaja con magnitudes de velocidad de partícula comparables con la rapidez de la luz. Conforme avanzaba el siglo XX, muchos problemas experimentales y teóricos fueron resueltos por la teoría especial. Sin embargo, la física clásica no pudo proporcionar una respuesta teórica para muchos otros problemas. Los intentos por aplicar las leyes de la física clásica para explicar el comportamiento de la materia en la escala atómica fueron consistentemente infructuosos. Por ejemplo, la radiación de cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico y la emisión de líneas espectrales bien definidas de los átomos no se podían explicar dentro del marco conceptual de la física clásica.

Cuando los físicos buscaron nuevas formas de resolver dichos acertijos, otra revolución se desarrolló en la física entre 1900 y 1930. Una nueva teoría denominada *mecánica cuántica* tuvo mucho éxito al explicar el comportamiento de átomos, moléculas y núcleos. Al igual que la teoría especial de la relatividad, la teoría cuántica requiere una modificación de las ideas respecto del mundo físico.

Las ideas básicas de la teoría cuántica fueron introducidas por Max Planck, pero la mayor parte de los desarrollos e interpretaciones matemáticas subsecuentes fueron hechos por varios físicos distinguidos, entre los que sobresalen Einstein, Bohr, Schrödinger, De Broglie, Heisenberg, Born y Dirac. A pesar del gran éxito de la teoría cuántica, Einstein con frecuencia desempeñó el papel de crítico, especialmente en relación con la manera en la cual se interpretó la teoría. En particular, Einstein no aceptó la interpretación de Heisenberg del principio de incertidumbre, según el cual es imposible obtener una medición simultánea precisa de la posición y la velocidad de una partícula. De acuerdo con este principio, lo mejor que se puede hacer es predecir la *probabilidad* del futuro de un sistema, lo que se opone a la visión determinista sostenida por Einstein.[1]

Ya que un extenso estudio de la teoría cuántica está más allá del alcance de este libro, el presente capítulo sólo es una introducción a sus ideas fundamentales.



RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO E HIPÓTESIS DE PLANCK

Un objeto a cualquier temperatura emite una radiación a la que algunas veces se hace referencia como **radiación térmica**, la cual fue estudiada en la sección 20.7. Las características de dicha radiación dependen de la temperatura y las propiedades del objeto. A bajas temperaturas las longitudes de onda de la radiación térmica están principalmente en la región infrarroja del espectro electromagnético y, en consecuencia, la radiación no es observada por el ojo. A medida que la temperatura del objeto aumenta, éste comienza a emitir un brillo rojo —en otras palabras, emite suficiente radiación visible de manera que el objeto parece brillar—. A temperaturas suficientemente altas, el objeto parece ser blanco, como el brillo del filamento caliente de tungsteno en un foco eléctrico. Un estudio cuidadoso muestra que, conforme la temperatura del objeto aumenta, la radiación térmica que emite se compone de una distribución continua de longitudes de onda de las porciones infrarroja, visible y ultravioleta del espectro.

Desde el punto de vista clásico, la radiación térmica se origina de partículas cargadas aceleradas cerca de la superficie del objeto; dichas partículas cargadas emiten una radiación tan pequeña como la emitida por muchas antenas. Las partículas agitadas térmicamente pueden tener una distribución de aceleraciones, lo cual explica

[1] Los puntos de vista de Einstein acerca de la naturaleza probabilística de la teoría cuántica se plasman en su enunciado: "Dios no juega a los dados con el universo."

de área dada por $\int_0^\infty I(\lambda, T)\, d\lambda$ permanece finita aun cuando la ley de Rayleigh-Jeans (Ec. 40.2) dice que debería divergir al infinito.

En 1900 Planck descubrió una fórmula para la radiación de cuerpo negro que concordaba por completo con los experimentos en todas las longitudes de onda. El análisis de Planck llevó a la curva roja mostrada en la figura 40.4. La función propuesta por Planck es

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)} \tag{40.3}$$

Es una función que incluye un parámetro h, la cual Planck ajustó de modo que su curva concordara con los datos experimentales en todas las longitudes de onda. Se encontró que el valor de este parámetro es independiente del material del que está hecho el cuerpo negro e independiente de la temperatura. Más que un parámetro variable, se trata de una constante fundamental de la naturaleza. El valor de h, la constante de Planck, la cual se vio por primera vez en el capítulo 11 y de nuevo en el capítulo 35, es

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s} \tag{40.4}$$



Max Planck (1858-1947) Planck introdujo el concepto de "cuanto de acción" (constante de Planck, h) en un intento por explicar la distribución espectral de la radiación de cuerpo negro, la cual establece los fundamentos de la teoría cuántica. En 1918 fue galardonado con el premio Nobel por su descubrimiento de la naturaleza cuantizada de la energía. *(Fotografía cortesía de AIP Niels Bohr Library, W. F. Meggers Collection)*

A longitudes de onda largas la ecuación 40.3 se reduce a la expresión de Rayleigh-Jeans, ecuación 40.2, y a longitudes de onda cortas predice una reducción exponencial en $I(\lambda, T)$ con las longitudes de onda decrecientes, en concordancia con los resultados experimentales.

En su teoría, Planck hizo dos osadas y controversiales suposiciones respecto de la naturaleza de las moléculas oscilantes en la superficie del cuerpo negro:

1. Las moléculas sólo pueden tener valores *discretos* de energía E_n, dados por

$$E_n = nhf \tag{40.5}$$

Cuantización de la energía

   donde n es un entero positivo denominado **número cuántico** y f es la frecuencia natural de oscilación de las moléculas. Esto es muy diferente del modelo clásico del oscilador armónico, en el cual la energía de osciladores idénticos se relaciona con la amplitud del movimiento y no se relaciona con la frecuencia. Ya que la energía de una molécula sólo puede tener valores discretos dados por la ecuación 40.5, se dice que la energía está *cuantizada*. Cada valor de energía discreto representa un *estado cuántico* diferente para la molécula, con cada valor de n representando un estado cuántico específico. Cuando la molécula está en el estado cuántico $n = 1$, su energía es hf; cuando está en el estado cuántico $n = 2$, su energía es $2hf$, y así sucesivamente.
2. Las moléculas emiten o absorben energía en paquetes discretos que después se llaman **fotones**. Las moléculas emiten o absorben estos fotones "saltando" de un estado cuántico a otro. Si el salto es hacia abajo de un estado a un estado adyacente inferior, la ecuación 40.5 muestra que la cantidad de energía radiada por la

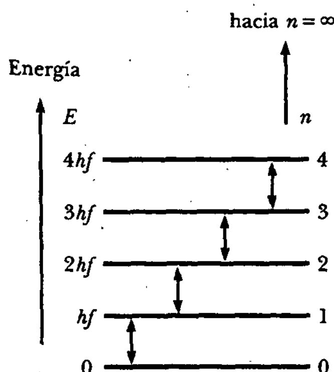


Figura 40.5 Niveles de energía permitidos para una molécula que oscila a su frecuencia natural f. Las transiciones permitidas están indicadas mediante las flechas con doble punta.

molécula en un fotón individual es igual a hf. Por tanto, la energía de un fotón correspondiente a la diferencia de energía entre dos estados cuánticos adyacentes es

Energía de un fotón

$$E = hf \tag{40.6}$$

Una molécula emite o absorbe energía sólo cuando cambia de estados cuánticos. Si permanece en un estado cuántico, no se emite o absorbe energía. La figura 40.5 muestra los niveles de energía cuantizados y las transiciones entre estados adyacentes.

El punto clave de la teoría de Planck es la suposición radical de los estados de energía cuantizados. Dicho desarrollo marcó el nacimiento de la teoría cuántica. Cuando Planck presentó su teoría, la mayoría de los científicos (¡incluso Planck!) no consideraron realista el concepto cuántico. En consecuencia, Planck y otros continuaron buscando una explicación más racional de la radiación de cuerpo negro. Sin embargo, los avances subsecuentes demostraron que una teoría basada en el concepto cuántico (más que en los conceptos clásicos) tenía que emplearse para explicar muchos otros fenómenos a nivel atómico.

Pregunta sorpresa 40.1

¿Cuál es más probable que cause una quemadura solar (porque se absorbe más energía por las células de la piel): a) la luz infrarroja, b) la luz visible o c) la luz ultravioleta?

EJEMPLO 40.1 Radiación térmica de diferentes objetos

Encuentre la longitud de onda pico de la radiación emitida por cada uno de lo siguiente: a) el cuerpo humano cuando la temperatura de la piel es de 35°C.

Solución De acuerdo con la ley de desplazamiento de Wien (Ec. 40.1), se tiene $\lambda_{\text{máx}}T = 2.898 \times 10^{-3}$ m·K. Resolviendo para $\lambda_{\text{máx}}$ y al observar que 35°C corresponden a una temperatura absoluta de 308 K, entonces

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2.898 \times 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{K}}{308\,\text{K}} = 9.4\,\mu\text{m}$$

Esta radiación está en la región infrarroja del espectro y es invisible para el ojo humano. Algunos animales (las serpientes, por ejemplo) pueden detectar radiación de esta longitud de onda y, en consecuencia, pueden localizar presas de sangre caliente incluso en la oscuridad.

b) El filamento de tungsteno de un foco, que funciona a 2 000 K.

Solución Siguiendo el mismo procedimiento que en la parte a), se encuentra

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2.898 \times 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{K}}{2\,000\,\text{K}} = 1.4\,\mu\text{m}$$

Ésta también está en la región infrarroja, lo cual significa que la mayor parte de la energía emitida por un foco no es visible para los humanos.

c) El Sol, el cual tiene una temperatura superficial de alrededor de 5 800 K.

Solución Siguiendo de nuevo el mismo procedimiento se tiene

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2.898 \times 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{K}}{5\,800\,\text{K}} = 0.50\,\mu\text{m}$$

Ello está casi en el centro del espectro visible, más o menos el color de una pelota de tenis amarillo verdoso. Como éste es el color prevaleciente en la luz solar, los ojos humanos han evolucionado para ser más sensibles a la luz de aproximadamente esta longitud de onda.

EJEMPLO 40.2 El oscilador cuantizado

Un bloque de 2.0 kg se une a un resorte de masa despreciable que tiene una constante de fuerza $k = 25$ N/m. El resorte se alarga 0.40 m desde su posición de equilibrio y se suelta. a) Encuentre la energía total del sistema y la frecuencia de oscilación de acuerdo con los cálculos clásicos.

Solución La energía total de un oscilador armónico simple que tiene una amplitud A es $\frac{1}{2}kA^2$ (Ec. 13.22). Por tanto,

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}(25\ \text{N/m})(0.40\ \text{m})^2 = 2.0\ \text{J}$$

La frecuencia de oscilación es (Ec. 13.19)

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{25\ \text{N/m}}{2.0\ \text{kg}}} = 0.56\ \text{Hz}$$

b) Suponiendo que la energía está cuantizada, encuentre el número cuántico n para el sistema.

Solución Si la energía está cuantizada se tiene

$$E_n = nhf = n(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(0.56\ \text{Hz}) = 2.0\ \text{J}$$

$$n = 5.4 \times 10^{33}$$

c) ¿Cuánta energía se lleva en el cambio de un cuanto?

Solución De la ecuación 40.6

$$E = hf = (6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(0.56\ \text{Hz}) = 3.7 \times 10^{-34}\ \text{J}$$

La energía que se lleva en un cambio de un cuanto es una fracción tan pequeña de la energía total del oscilador que no se puede detectar. De este modo, aun cuando la energía de un sistema bloque-resorte está cuantizada, y efectivamente se reduce por medio de pequeños saltos cuánticos, los sentidos perciben la disminución como continua. Los efectos cuánticos se vuelven importantes y mensurables sólo al nivel submicroscópico de átomos y moléculas.

40.2 EL EFECTO FOTOELÉCTRICO

A finales del siglo XIX los experimentos mostraron que la luz incidente sobre ciertas superficies metálicas ocasionaba que se emitieran electrones desde ellas. Este fenómeno, el cual se encontró primero en la sección 35.1, se conoce como **efecto fotoeléctrico**, y los electrones emitidos reciben el nombre de **fotoelectrones**.

La figura 40.6 es el diagrama de un aparato en el cual puede ocurrir el efecto fotoeléctrico. Un tubo de vidrio o cuarzo donde se ha hecho vacío contiene una placa metálica E unida a la terminal negativa de una batería y otra placa metálica C unida a la terminal positiva de la batería. Cuando el tubo se mantiene en la oscuridad, el amperímetro registra cero, lo que indica que no hay corriente en el circuito. Sin embargo, cuando la placa E se ilumina con luz que tiene longitud de onda más corta comparada con alguna longitud de onda particular que depende del metal usado para hacer la placa E, el amperímetro detecta una corriente, lo que es indicio de un flujo de cargas a través del espacio entre las placas E y C. Esta corriente surge de los fotoelectrones emitidos desde la placa negativa (el emisor) y colectados en la placa positiva (el colector).

La figura 40.7 es una gráfica de la corriente fotoeléctrica *versus* la diferencia de potencial ΔV entre las placas E y C para dos intensidades luminosas. Para grandes valores de ΔV, la corriente alcanza un valor máximo. Además, la corriente aumenta cuando aumenta la intensidad de la luz incidente, como usted tal vez esperaría. Por último, cuando ΔV es negativo —es decir, cuando la batería en el circuito se invierte para hacer positiva la placa E y negativa la placa C— la corriente cae a un valor muy bajo debido a que la mayor parte de los fotoelectrones emitidos son repelidos ahora por la placa negativa C. En esta situación sólo aquellos fotoelectrones que tienen una energía cinética mayor que la magnitud de $e\Delta V$ llegarán a la placa C, donde e es la carga en el electrón.

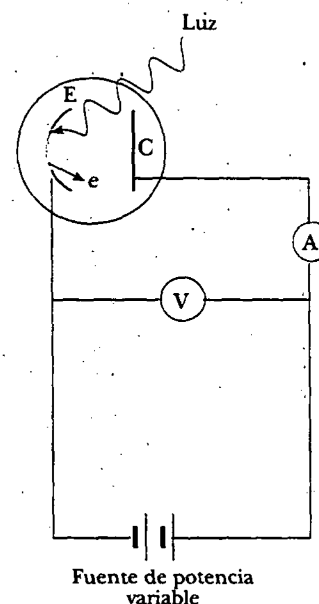


Figura 40.6 Diagrama de circuito para observar el efecto fotoeléctrico. Cuando la luz golpea la placa E (el emisor), se emiten fotoelectrones desde la placa. Los electrones que se mueven desde la placa E hacia la placa C (el colector) constituyen una corriente en el circuito.

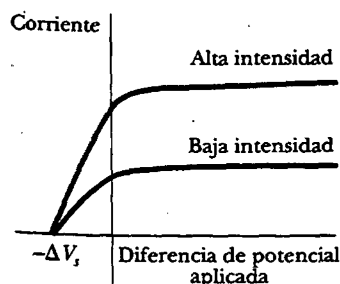


Figura 40.7 Corriente fotoeléctrica *versus* diferencia de potencial aplicada para dos intensidades luminosas. La corriente aumenta con la intensidad pero alcanza un nivel de saturación para grandes valores de ΔV. A voltajes iguales a o más negativos que $-\Delta V_s$, el potencial de frenado, la corriente es cero.

Cuando ΔV es igual a o más negativo que $-\Delta V_s$, el **potencial de frenado**, ningún fotoelectrón llega a C y la corriente es cero. El potencial de frenado es independiente de la intensidad de la radiación. La energía cinética máxima de los fotoelectrones se relaciona con el potencial de frenado por medio de la relación

$$K_{\text{máx}} = e\,\Delta V_s \qquad \textbf{(40.7)}$$

Varias características del efecto fotoeléctrico no podrían explicarse con la física clásica o con la teoría ondulatoria de la luz:

- No se emiten fotoelectrones si la frecuencia de la luz incidente cae por debajo de cierta **frecuencia de corte** f_c, la cual es característica del material que se está iluminando. Ello es inconsistente con la teoría ondulatoria, que predice que el efecto fotoeléctrico debe ocurrir a cualquier frecuencia, siempre que la intensidad de la luz sea suficientemente alta.
- La energía cinética máxima de los fotoelectrones es independiente de la intensidad luminosa. De acuerdo con la teoría ondulatoria, la luz de mayor intensidad debería conducir más energía al metal por unidad de tiempo y, por tanto, emitir fotoelectrones que tengan mayores energías cinéticas.
- La energía cinética máxima de los fotoelectrones aumenta con el incremento de la frecuencia de la luz. La teoría ondulatoria no predice relación entre la energía de los fotoelectrones y la frecuencia de luz incidente.
- Los fotoelectrones se emiten desde la superficie en forma casi instantánea (menos de 10^{-9} s después de que se ilumina la superficie), incluso a bajas intensidades luminosas. Desde el punto de vista clásico, se esperaría que los fotoelectrones requirieran algún tiempo para absorber la radiación incidente antes de adquirir la suficiente energía cinética para escapar del metal.

Una explicación exitosa del efecto fotoeléctrico fue dada por Einstein en 1905, el mismo año en que publicó su teoría especial de la relatividad. Como parte de un artículo general sobre radiación electromagnética, por el cual recibió el premio Nobel en 1921, Einstein extendió el concepto de Planck de la cuantización a las ondas electromagnéticas. Supuso que la luz (o cualquier otra onda electromagnética) de frecuencia f puede considerarse como una corriente de fotones. Cada fotón tiene una energía E, dada por la ecuación 40.6, $E = hf$. Una sugestiva imagen de varios fotones, que no debe tomarse de manera muy literal, se muestra en la figura 40.8.

En el modelo de Einstein, un fotón estaba localizado de tal modo que daba *toda* su energía hf a un solo electrón en el metal. De acuerdo con Einstein, la energía cinética máxima para estos fotoelectrones liberados es

Ecuación del efecto fotoeléctrico

$$K_{\text{máx}} = hf - \phi \qquad \textbf{(40.8)}$$

donde ϕ se llama **función de trabajo** del metal. La función de trabajo representa la energía mínima con la cual un electrón está ligado al metal, y es del orden de unos cuantos electronvolts. La tabla 40.1 registra las funciones de trabajo para diferentes metales.

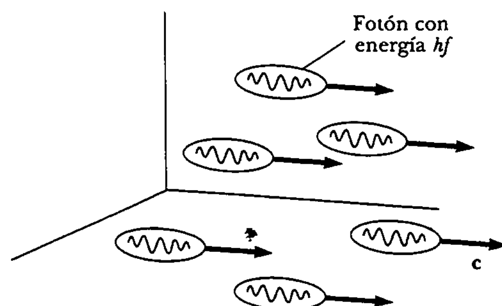


Figura 40.8 Representación de fotones. Cada fotón tiene una energía discreta hf.

Con la teoría fotónica de la luz se pueden explicar las características antes mencionadas del efecto fotoeléctrico que no es posible entender utilizando conceptos de la física clásica:

- Que el efecto no se observe debajo de cierta frecuencia de corte es una consecuencia del hecho de que la energía del fotón debe ser mayor o igual que ϕ. Si la energía del fotón que llega no satisface esta condición, los electrones nunca serán liberados desde la superficie, independientemente de la intensidad de la luz.
- El que $K_{\text{máx}}$ sea independiente de la intensidad de la luz puede comprenderse con el siguiente argumento: Si la intensidad de la luz se duplica, el número de fotones se duplica, lo cual duplica el número de fotoelectrones emitidos. Sin embargo, su energía cinética máxima, que es igual a $hf - \phi$, depende sólo de la frecuencia de la luz y de la función de trabajo, no de la intensidad luminosa.
- El que $K_{\text{máx}}$ aumente con las frecuencias crecientes se entiende fácilmente con la ecuación 40.8.
- El que los fotoelectrones sean emitidos casi instantáneamente concuerda con la teoría corpuscular de la luz, en la cual la energía incidente llega a la superficie en pequeños paquetes y hay una interacción uno a uno entre los fotones y los fotoelectrones. En dicha interacción la energía de los fotones es impartida a un electrón que luego tiene suficiente energía para dejar al metal. Esto contrasta con la teoría ondulatoria, en la cual la energía incidente se distribuye de manera uniforme sobre una gran área de la superficie del metal.

TABLA 40.1 Funciones de trabajo de metales seleccionados

Metal	ϕ (eV)
Na	2.46
Al	4.08
Cu	4.70
Zn	4.31
Ag	4.73
Pt	6.35
Pb	4.14
Fe	4.50

La observación experimental de una relación lineal entre f y $K_{\text{máx}}$ sería una confirmación final de la teoría de Einstein. De hecho, tal relación lineal se observa según se ilustra en la figura 40.9. La intersección en el eje horizontal da la frecuencia de corte debajo de la cual no se emiten fotoelectrones, sin importar la intensidad de la luz. La frecuencia se relaciona con la función de trabajo por medio de la relación $f_c = \phi/h$. La frecuencia de corte corresponde a una **longitud de onda de corte** de

$$\lambda_c = \frac{c}{f_c} = \frac{c}{\phi/h} = \frac{hc}{\phi} \tag{40.9}$$

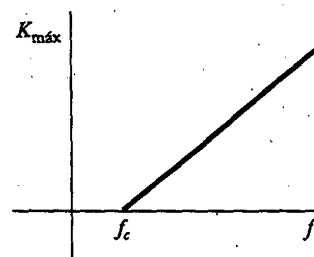


Figura 40.9 Gráfica de $K_{\text{máx}}$ de los fotoelectrones como función de la frecuencia de luz incidente en un experimento de efecto fotoeléctrico típico. Los fotones que tienen una frecuencia menor que f_c no tienen suficiente energía para emitir un electrón del metal.

donde se usó la ecuación 16.14 y c es la rapidez de la luz. Longitudes de onda más grandes que λ_c incidentes sobre un material que tiene una función de trabajo ϕ no originan la emisión de fotoelectrones.

Uno de los primeros usos prácticos del efecto fotoeléctrico fue el detector en el medidor de luz de una cámara fotográfica. La luz reflejada desde el objeto que se va a fotografiar incide sobre una superficie fotoeléctrica en el medidor, y hace que ésta emita fotoelectrones que luego pasan por un amperímetro sensible. La magnitud de la corriente en el amperímetro depende de la intensidad luminosa.

El fototubo,* otra aplicación anticipada del efecto fotoeléctrico, actúa de manera muy parecida a un interruptor en un circuito eléctrico. Se produce una corriente en el circuito cuando la luz de frecuencia suficientemente alta cae sobre una placa metálica en el fototubo, pero no produce corriente en la oscuridad. Los fototubos se usaron en alarmas antiasalto y en la detección de la pista sonora en las cintas cinematográficas. Ahora los modernos dispositivos semiconductores reemplazaron a los que se basaban en el efecto fotoeléctrico.

Pregunta sorpresa 40.2

¿Qué representa la pendiente de la línea en la figura 40.9? ¿Qué representa la intersección en y? ¿Cómo compararía entre sí una serie de estas gráficas para diferentes metales?

* Al fototubo también se le conoce como "celda fotoeléctrica" y, de manera más popular, como "ojo eléctrico". (*N. del T.*)

Pregunta sorpresa 40.3

Realice un bosquejo de cómo los físicos clásicos esperaban que se viera la figura 40.9.

EJEMPLO 40.3 **El efecto fotoeléctrico para el sodio**

Una superficie de sodio se ilumina con luz de 300 nm de longitud de onda. La función de trabajo para el metal de sodio es 2.46 eV. Encuentre a) la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos y b) la longitud de onda de corte para el sodio.

Solución a) La energía de cada fotón del haz de luz incidente es

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{300 \times 10^{-9}\,\text{m}}$$

$$= 6.63 \times 10^{-19}\,\text{J} = \frac{6.63 \times 10^{-19}\,\text{J}}{1.60 \times 10^{-19}\,\text{J/eV}} = 4.14\,\text{eV}$$

El empleo de la ecuación 40.8 produce

$$K_{\text{máx}} = hf - \phi = 4.14\text{ eV} - 2.46\text{ eV} = 1.68\text{ eV}$$

b) La longitud de onda de corte puede calcularse a partir de la ecuación 40.9, después de convertir ϕ de electronvolts a joules:

$$\phi = (2.46\,\text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\,\text{J/eV}) = 3.94 \times 10^{-19}\,\text{J}$$

$$\lambda_c = \frac{hc}{\phi} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{3.94 \times 10^{-19}\,\text{J}}$$

$$= 5.05 \times 10^{-7}\,\text{m} = 505\,\text{nm}$$

Esta longitud de onda está en la región amarillo-verde del espectro visible.

Ejercicio Calcule la rapidez máxima del efecto fotoeléctrico en las condiciones descritas en este ejemplo.

Respuesta 7.68×10^{5} m/s.



40.3 EL EFECTO COMPTON

En 1919 Einstein concluyó que un fotón de energía E viaja en una sola dirección (a diferencia de una onda esférica) y lleva un *momentum* igual a $E/c = hf/c$. En sus propias palabras, "si un haz de radiación origina que una molécula emita o absorba un paquete de energía hf, entonces se transfiere a la molécula un *momentum* de cantidad hf/c, dirigida a lo largo de la línea del haz en la absorción y opuesta al haz en la emisión". En 1923 Arthur Holly Compton (1892-1962) y Peter Debye (1884-1966) ampliaron, por separado, la idea del *momentum* del fotón de Einstein.

Antes de 1922 Compton y sus colaboradores habían acumulado evidencias de que la teoría ondulatoria clásica de la luz fracasaba al tratar de explicar la dispersión de rayos X a partir de electrones. De acuerdo con la teoría clásica, las ondas electromagnéticas de frecuencia f_0 que inciden sobre los electrones deberían tener dos efectos, como se muestra en la figura 40.10a: 1) la presión de radiación (véase la sección 34.4) debería provocar que los electrones aceleraran en la dirección de propagación de las ondas, y 2) el campo eléctrico oscilatorio de la radiación incidente debería poner a los electrones en oscilación en la frecuencia aparente f', donde f' es la frecuencia en el marco de los electrones en movimiento. La frecuencia aparente f' es diferente de la frecuencia f_0 de la radiación incidente debido al efecto Doppler (véase la sección 17.5): Cada electrón primero absorbe como una partícula en movimiento y luego rerradia como partícula en movimiento, por lo que exhibe dos corrimientos Doppler en la frecuencia de radiación.

Como diferentes electrones se moverán a diferentes magnitudes de velocidad después de la interacción, dependiendo de la cantidad de energía absorbida de las ondas electromagnéticas, la frecuencia de la onda dispersada a un ángulo dado deberá mostrar una distribución de valores de corrimiento Doppler. Contrario a tal predicción, los experimentos de Compton mostraron que, a un ángulo dado, sólo fue absorbida *una* frecuencia de radiación. Compton y sus colegas se dieron cuenta de que podrían explicar estos experimentos si trataban a los fotones no como ondas

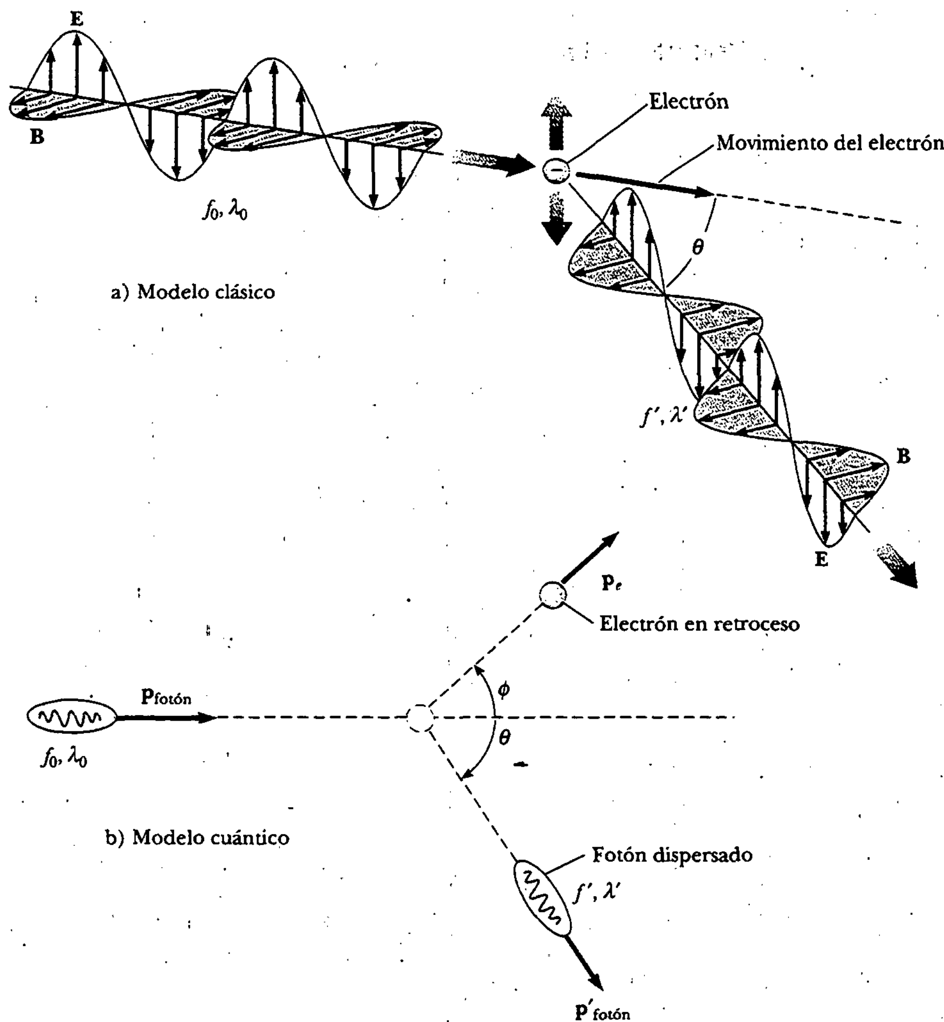


Figura 40.10 Dispersión de rayos X a partir de un electrón: a) el modelo clásico; b) el modelo cuántico.

sino como partículas puntuales que tienen energía hf y *momentum* hf/c, y suponiendo que se conservan la energía y el *momentum* de cualquier par fotón-electrón en colisión. Compton estaba adoptando un modelo de partícula para algo que era bien conocido como onda, y hoy este fenómeno de dispersión se conoce como **efecto Compton**. La figura 40.10b presenta el dibujo cuántico del intercambio de *momentum* y energía entre un fotón de rayos X individual y un electrón.



La segunda diferencia entre los modelos clásico y cuántico también se muestra en la figura 40.10b. En el modelo clásico el electrón es empujado a lo largo de la dirección de propagación del rayo X incidente mediante presión de radiación. En el modelo cuántico el electrón se dispersa a través de un ángulo ϕ respecto a su dirección, como si esto fuese una colisión del tipo bolas de billar. (El símbolo ϕ usado aquí no debe ser confundido con la función de trabajo, la cual fue estudiada en la sección anterior.)

La figura 40.11a es un diagrama esquemático del aparato utilizado por Compton. Los rayos X, dispersados en un blanco de grafito, fueron analizados con un espectrómetro de cristal giratorio, y la intensidad se midió con una cámara de ionización que generaba una corriente proporcional a la intensidad. El haz incidente consistía en rayos X monocromáticos de longitud de onda $\lambda_0 = 0.071$ nm. Las gráficas de in-

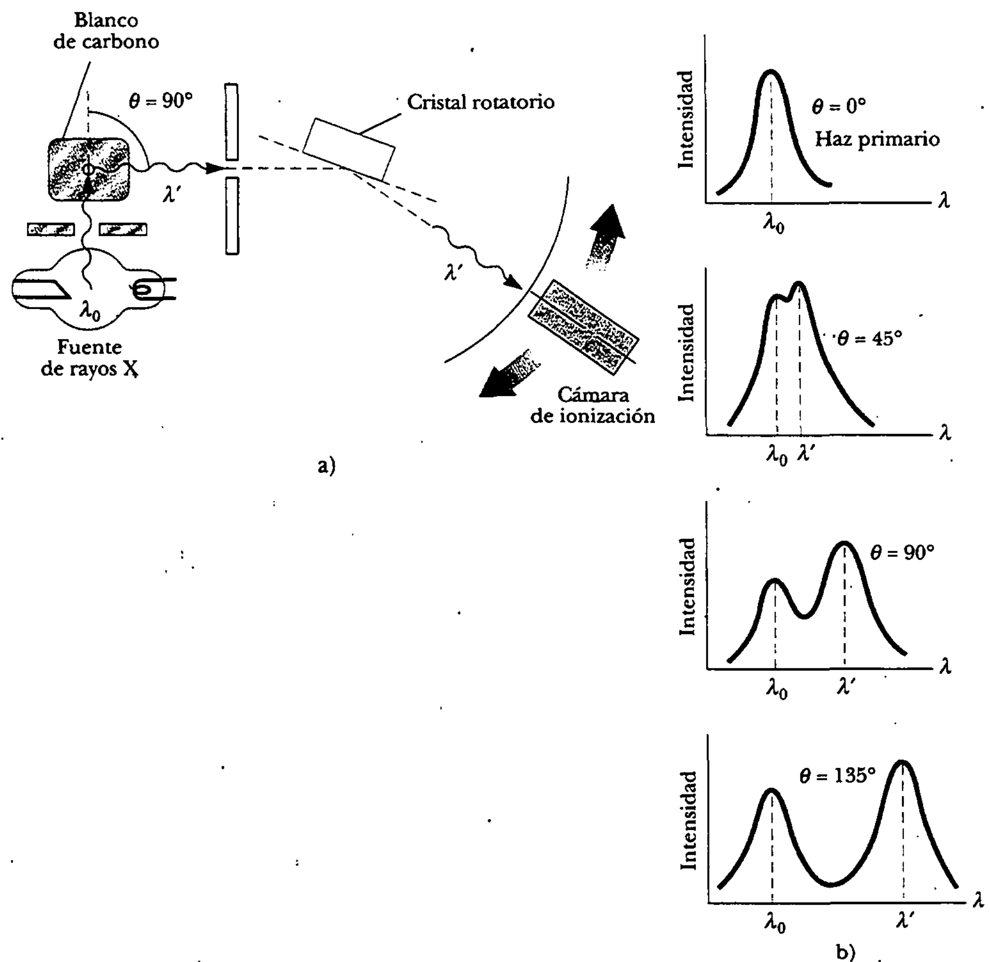


Figura 40.11 a) Diagrama esquemático del aparato de Compton. La longitud de onda fue medida con un espectrómetro de cristal rotatorio usando grafito (carbono) como el blanco. b) La intensidad de los rayos X dispersados contra la longitud de onda para la dispersión Compton a $\theta = 0°$, 45°, 90° y 135°.

tensidad experimental *versus* longitud de onda observadas por Compton para cuatro ángulos de dispersión (correspondientes a θ en la figura 40.10) se observan en la figura 40.11b. Las gráficas para los tres ángulos diferentes de cero presentan dos picos, uno en λ_0 y uno en $\lambda' > \lambda_0$. El pico corrido en λ' es provocado por la dispersión de rayos X a partir de electrones libres, y Compton predijo que dependería del ángulo de dispersión como

Ecuación de corrimiento Compton

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \qquad \textbf{(40.10)}$$

donde m_e es la masa del electrón. Esta expresión se conoce como la **ecuación de corrimiento Compton**, y el factor $h/m_e c$ recibe el nombre de **longitud de onda Compton** λ_C del electrón. Ésta tiene un valor actualmente aceptado de

Longitud de onda Compton

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 0.002\,43\,\text{nm}$$

El pico no corrido en λ_0 de la figura 40.11b es ocasionado por los rayos X dispersados por electrones estrechamente ligados a los átomos del blanco. El pico sin corrimiento también es predicho por la ecuación 40.10 si la masa del electrón se sustituye por la masa de un átomo de carbono, la cual es casi 23 000 veces la masa del electrón. En consecuencia, existe un corrimiento de longitud de onda de un electrón ligado a un átomo, pero es tan pequeño que no fue detectado en el experimento de Compton.

Las mediciones de Compton concordaron de manera excelente con las predicciones de la ecuación 40.10. Es justo decir que estos resultados ¡fueron los primeros que realmente convencieron a la mayoría de los físicos de la validez fundamental de la teoría cuántica!

Pregunta sorpresa 40.4

Observe que para cualquier ángulo de dispersión θ dado, la ecuación 40.10 proporciona el mismo valor para el corrimiento de la longitud de onda Compton para cualquier longitud de onda. Con esto en mente, explique por qué el experimento se realiza por lo común con rayos X en lugar de luz visible.

Deducción de la ecuación de corrimiento Compton

Es posible deducir la ecuación de corrimiento Compton suponiendo que el fotón se comporta como una partícula y choca de manera elástica con un electrón libre inicialmente en reposo, como se muestra en la figura 40.12a. En este modelo el fotón se considera como una partícula con energía $E = hf = hc/\lambda$ y masa cero. En el proceso de dispersión la energía y el *momentum* lineal totales del sistema deben conservarse. La aplicación del principio de la conservación de la energía a este proceso produce

$$\frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda'} + K_e$$

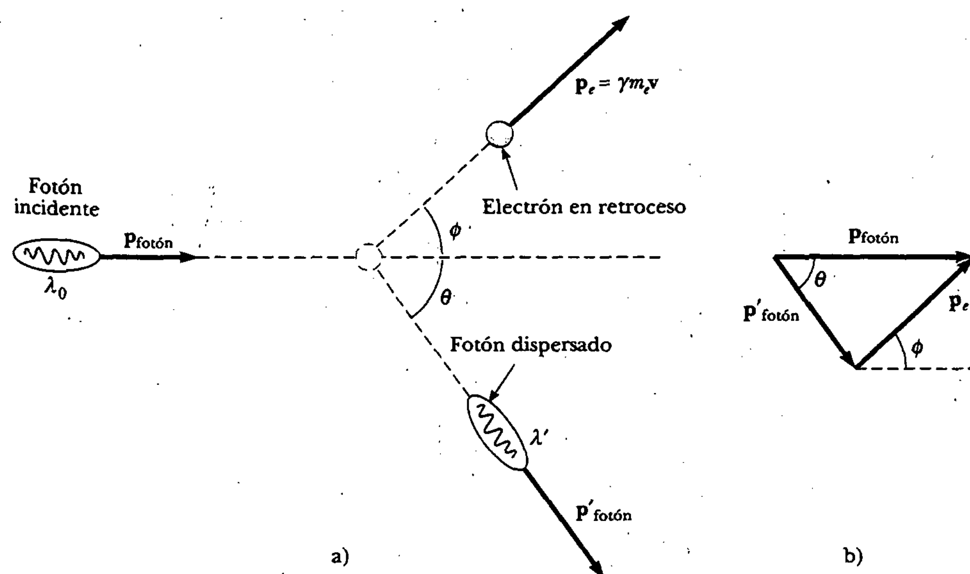


Figura 40.12 a) Dispersión Compton de un fotón por un electrón. El fotón dispersado tiene menos energía (longitud de onda más larga) que el fotón incidente. b) Vectores de *momentum* para dispersión Compton.

donde hc/λ_0 es la energía del fotón incidente, hc/λ' es la energía del fotón dispersado y K_e es la energía cinética del electrón que retrocede. Ya que el electrón puede retroceder a magnitudes de velocidad comparables con la de la luz, se debe emplear la expresión relativista $K_e = \gamma m_e c^2 - m_e c^2$ (Ec. 39.23). Por consiguiente,

$$\frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda'} + \gamma m_e c^2 - m_e c^2 \quad \textbf{(40.11)}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Luego, aplique la ley de la conservación del *momentum* a este choque, pero observando que se conservan las componentes de *momentum* en x y y. La ecuación 39.27 indica que el *momentum* de un fotón tiene magnitud $p = E/c$, y se sabe de la ecuación 40.6 que $E = hf$. Por tanto, $p = hf/c$. Sustituyendo λf para c (Ec. 16.14) en esta expresión se obtiene $p = h/\lambda$. Como la expresión relativista para el *momentum* del electrón que retrocede es $p_e = \gamma m_e v$ (Ec. 39.19), se obtienen las siguientes expresiones para las componentes x y y del *momentum* lineal, donde los ángulos son como se describen en la figura 40.12b:

$$\text{componente } x\text{:} \quad \frac{h}{\lambda_0} = \frac{h}{\lambda'}\cos\theta + \gamma m_e v\cos\phi \quad \textbf{(40.12)}$$

$$\text{componente } y\text{:} \quad 0 = \frac{h}{\lambda'}\,\text{sen}\,\theta - \gamma m_e v\,\text{sen}\,\phi \quad \textbf{(40.13)}$$

Al eliminar v y ϕ de las ecuaciones 40.11 a 40.13 se obtiene una sola expresión que relaciona las tres variables restantes (λ', λ_0 y θ). Después de un poco de álgebra (véase el problema 68) se obtiene la ecuación de corrimiento Compton:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

EJEMPLO 40.4 Dispersión Compton a 45°

Se dispersan rayos X de longitud de onda $\lambda_0 = 0.200$ nm de un bloque de material. Los rayos X dispersados se observan a un ángulo de 45.0° en relación con el haz incidente. Calcule su longitud de onda.

Solución El corrimiento en la longitud de onda de los rayos X dispersados está dado por la ecuación 40.10:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

$$= \frac{6.626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(3.00 \times 10^{8}\,\text{m/s})}(1 - \cos 45.0°)$$

$$= 7.10 \times 10^{-13}\,\text{m} = 0.000\,710\,\text{nm}$$

Por tanto, la longitud de onda de los rayos X dispersados a este ángulo es

$$\lambda' = \Delta\lambda + \lambda_0 = 0.200\,710\ \text{nm}$$

Ejercicio Encuentre la fracción de energía perdida por el fotón en este choque.

Respuesta $\Delta E/E = 0.003\,54$.

40.4 ESPECTROS ATÓMICOS

Como se señaló en la sección 40.1, todos los objetos emiten radiación térmica caracterizada por una distribución continua de longitudes de onda. En nítido contraste con este espectro de distribución continua está el **espectro de líneas** discreto emitido por un gas a baja presión sujeto a una descarga eléctrica. (La descarga eléctrica ocurre cuando el gas es sujeto a una diferencia de potencial que crea un campo eléc-

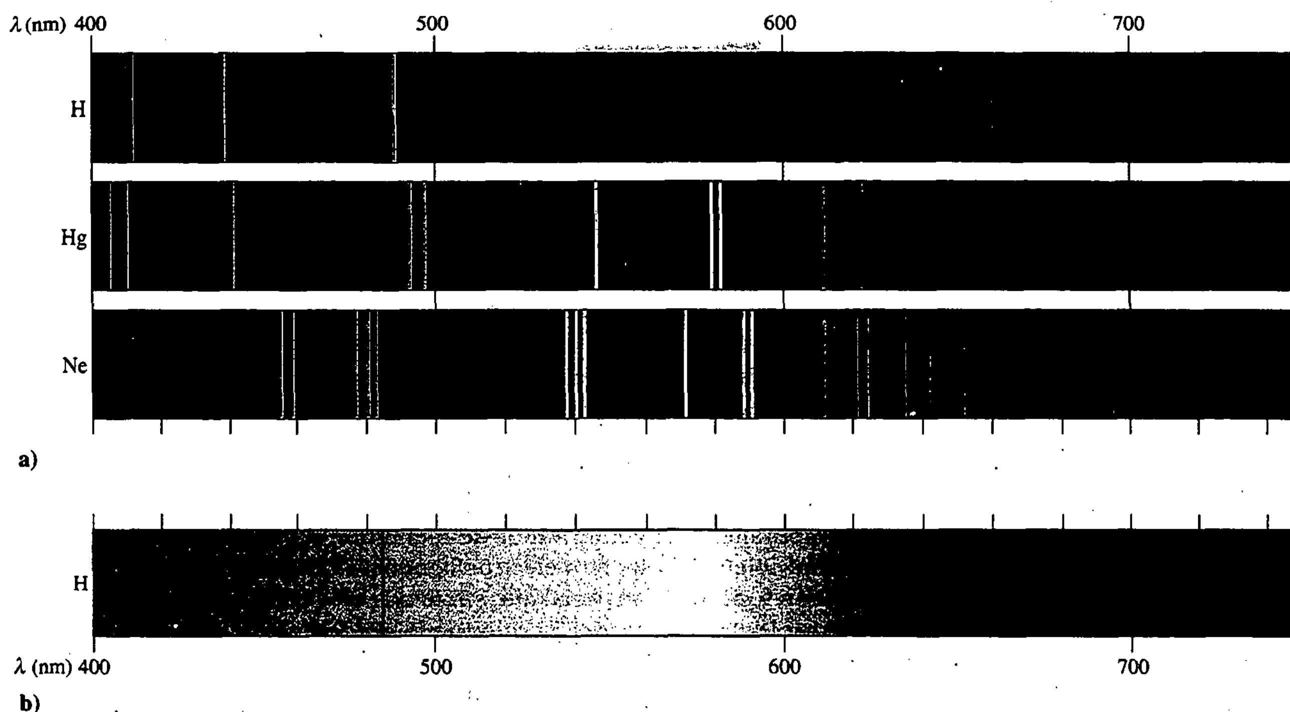


Figura 40.13 a) Emisión de espectros de líneas para el hidrógeno, el mercurio y el neón. b) Espectro de absorción para el hidrógeno. Advierta que las líneas de absorción oscuras ocurren a las mismas longitudes de onda que las líneas de emisión del hidrógeno para la parte a). *(K. W. Whitten, R. E. Davis y M. L. Peck,* General Chemistry, 6a. ed., *Philadelphia, Saunders College Publishing, 2000.)*

trico más grande que la resistencia dieléctrica del gas.) La observación y el análisis de esta luz emitida se denomina **emisión espectroscópica**.

Cuando la luz de dicha descarga de gas se examina con el espectroscopio, se descubre que se compone de unas cuantas líneas brillantes de color sobre un fondo que por lo general es oscuro. (Las *líneas* se deben a la colimación de la luz a través de una rendija.) Tal espectro de líneas discreto contrasta en forma marcada con el arco iris continuo de colores que se ve cuando un sólido que brilla se mira a través de un espectroscopio. Además, como usted percibe en la figura 40.13a, las longitudes de onda contenidas en un espectro de líneas determinado son características del elemento que emite la luz. El espectro de líneas más simple es el del hidrógeno atómico, el cual se describe en detalle. Otros átomos exhiben espectros de líneas por completo diferentes. Puesto que no hay dos elementos que tengan el mismo espectro de líneas, este fenómeno representa una técnica práctica y sensible para identificar los elementos presentes en muestras desconocidas.

Otra forma de espectroscopia muy útil en el análisis de sustancias es la **espectroscopia por absorción**. Un espectro de absorción se obtiene pasando luz de una fuente continua por un gas o solución diluida del elemento que será analizado. El espectro de absorción se compone de una serie de líneas oscuras sobreimpuestas en el espectro continuo de la fuente de luz, como se ilustra en la figura 40.13b para el hidrógeno atómico. En general, no todas las líneas presentes en el espectro de emisión de un elemento están presentes en el espectro de absorción del elemento.

El espectro de absorción de un elemento tiene muchas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, el espectro continuo de la radiación emitida por el Sol debe atravesar los gases más fríos de la atmósfera solar y la atmósfera de la Tierra. Las diversas líneas de absorción observadas en el espectro solar se han empleado para identificar elementos en la atmósfera del Sol. En los primeros estudios del espectro solar los experimentadores descubrieron algunas líneas que no correspondían a ningún ele-

mento conocido. ¡Se había descubierto un nuevo elemento! El nuevo elemento recibió el nombre de helio, por la palabra griega correspondiente al Sol, *helios*. Posteriormente el helio fue aislado de gas subterráneo en la Tierra.

Los científicos podían examinar en esta forma la luz de otras estrellas, además del Sol, pero los elementos no presentes en la Tierra nunca se habían detectado. La espectroscopia por absorción también ha sido una útil técnica para analizar contaminación por metales pesados en la cadena alimenticia. Por ejemplo, la primera determinación de altos niveles de mercurio en atún se realizó con el uso de espectroscopia por absorción atómica.

Las emisiones discretas de luz de las descargas de gas se usan en las señales de "neón", como se ve en la fotografía de apertura de este capítulo. El neón, el primer gas que se usó en este tipo de señales, y del cual toman su nombre, emite intensamente en la región roja. Como resultado, un tubo de vidrio lleno con gas neón emite luz roja brillante cuando la aplicación de un voltaje causa una descarga continua. Los primeros signos usaban gases diferentes para proporcionar diferentes colores, aunque la brillantez de estas señales por lo general era muy baja. Muchas señales de "neón" contemporáneas contienen vapor de mercurio, el cual emite intensamente en el rango ultravioleta del espectro electromagnético. El interior del tubo de vidrio está revestido con fósforo, un material que emite un color particular cuando absorbe radiación ultravioleta del mercurio. El color de la luz del tubo se debe a la elección del tipo particular de fósforo. Una luz fluorescente opera en la misma forma, con un fósforo de emisión blanca revistiendo el interior del tubo de vidrio.

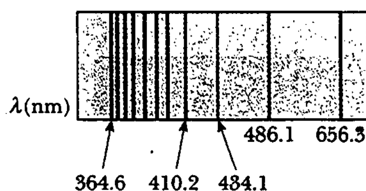


Figura 40.14 La serie de Balmer de líneas espectrales para el hidrógeno atómico. La línea etiquetada 364.6 es la longitud de onda más corta y está en la región ultravioleta del espectro electromagnético. Las otras líneas etiquetadas están en la región visible.

De 1860 a 1885 los científicos acumularon una gran cantidad de datos sobre emisiones atómicas utilizando mediciones espectroscópicas. En 1885, un profesor suizo, Johann Jacob Balmer (1825-1898) encontró una ecuación empírica que predecía correctamente las longitudes de onda de cuatro líneas de emisión visibles del hidrógeno: H_α(roja), H_β(verde), H_γ(azul) y H_δ(violeta). La figura 40.14 muestra éstas y otras líneas (en el ultravioleta) en el espectro de emisión del hidrógeno. El conjunto completo de líneas se llama **serie de Balmer**. Las cuatro líneas visibles ocurren en las longitudes de onda de 656.3 nm, 486.1 nm, 434.1 nm y 410.2 nm. Las longitudes de onda de estas líneas pueden describirse por medio de la siguiente ecuación, la cual es una modificación de la ecuación original de Balmer hecha por Johannes Rydberg (1854-1919):

Serie de Balmer

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad \textbf{(40.14)}$$

Constante de Rydberg

donde n puede tener valores enteros de 3, 4, 5,... y R_H es una constante que ahora recibe el nombre de **constante de Rydberg**. Si la longitud de onda está en metros, R_H tiene el valor $1.097\ 373\ 2 \times 10^7\ m^{-1}$. La línea en la serie de Balmer en 656.3 nm corresponde a $n = 3$ en la ecuación 40.14; la línea en 486.1 nm corresponde a $n = 4$, y así sucesivamente. Las líneas espectrales medidas concuerdan con esta fórmula empírica hasta en 0.1%.

Otras líneas en el espectro del hidrógeno se encontraron siguiendo el descubrimiento de Balmer. Dichos espectros recibieron el nombre de series de Lyman, Paschen y Brackett, en honor a sus descubridores. Las longitudes de onda de las líneas en estas series se calculan usando las siguientes fórmulas empíricas:

Serie de Lyman

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 2, 3, 4, \ldots \quad \textbf{(40.15)}$$

Serie de Paschen

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 4, 5, 6, \ldots \quad \textbf{(40.16)}$$

Serie de Brackett

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 5, 6, 7, \ldots \quad \textbf{(40.17)}$$

Todas estas ecuaciones fueron puramente empíricas, lo cual significa que no existieron bases teóricas para las mismas, sólo funcionaron. En la siguiente sección se analizará el importantísimo logro de una teoría para el átomo de hidrógeno que proporcionó una base teórica para estas ecuaciones.

40.5 MODELO CUÁNTICO DEL ÁTOMO DE BOHR

A principios del siglo XX, los científicos estaban perplejos por el fracaso de la física clásica al explicar las características de los espectros atómicos. ¿Por qué los átomos de un elemento determinado exhiben sólo ciertas líneas espectrales? Además, ¿por qué los átomos absorben sólo aquellas longitudes de onda que ellos emiten? En 1913 Niels Bohr proporcionó una explicación de los espectros atómicos que incluye algunos aspectos de la teoría aceptada en la actualidad. La teoría de Bohr contenía una combinación de ideas de la teoría cuántica original de Planck, la teoría fotónica de la luz de Einstein, los modelos iniciales del átomo y la mecánica newtoniana. Empleando el átomo más simple, el hidrógeno, Bohr describió un modelo de lo que él pensaba debía ser la estructura del átomo. Su modelo del átomo de hidrógeno contenía algunas características clásicas, así como algunos postulados revolucionarios que no podían justificarse dentro del marco de la física clásica.

Las ideas básicas de la teoría de Bohr cuando se aplican al átomo de hidrógeno son como siguen:

Suposiciones de la teoría de Bohr

1. El electrón se mueve en órbitas circulares alrededor del protón bajo la influencia de la fuerza de atracción de Coulomb, como se muestra en la figura 40.15.
2. Sólo ciertas órbitas electrónicas son estables. Tales órbitas estables son unas en las cuales el electrón no emite energía en forma de radiación. Por tanto, la energía total del átomo permanece constante, y la mecánica clásica puede usarse para describir el movimiento del electrón. Advierta que esta representación es por completo diferente del modelo clásico de un electrón en una órbita circular. De acuerdo con la física clásica, el electrón acelerado de manera centrípeta debería emitir radiación continuamente, perdiendo energía y eventualmente cayendo en espiral hacia el núcleo.
3. La radiación es emitida por el átomo cuando el electrón "salta" de una órbita inicial más energética a una órbita de energía inferior. Este salto no puede visualizarse o tratarse en la forma clásica. En particular, la frecuencia f del fotón emitido en el salto se relaciona con el cambio en la energía del átomo y *es independiente de la frecuencia del movimiento orbital del electrón.* La frecuencia de la radiación emitida se encuentra a partir de la expresión de conservación de la energía

$$E_i - E_f = hf \qquad \textbf{(40.18)}$$

donde E_i es la energía del estado inicial, E_f es la energía del estado final y $E_i > E_f$.
4. El tamaño de las órbitas permitidas al electrón se determina por una condición impuesta sobre el *momentum* angular orbital del electrón: las órbitas permitidas son aquellas para las cuales el *momentum* angular orbital del electrón alrededor del núcleo es un múltiplo entero de $\hbar = h/2\pi$:

$$m_e vr = n\hbar \qquad n = 1, 2, 3,... \qquad \textbf{(40.19)}$$

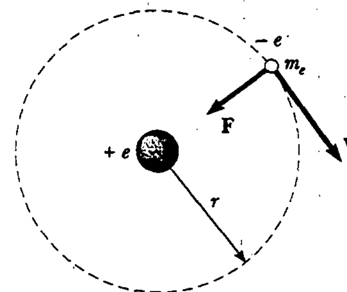


Figura 40.15 Diagrama que representa el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, en el cual al electrón en órbita se le permite estar sólo en órbitas específicas de radios discretos.

Empleando estas cuatro suposiciones se pueden calcular los niveles de energía permitidos y las longitudes de onda de emisión del átomo de hidrógeno. Es posible encontrar la energía potencial eléctrica del sistema mostrado en la figura 40.15 a partir de la ecuación 25.13, $U = k_e q_1 q_2/r = -k_e e^2/r$, donde k_e es la constante de Coulomb, y el signo negativo surge de la carga $-e$ en el electrón. De este modo, la



Niels Bohr [illegible] participante en el desarrollo temprano de la mecánica cuántica y proporcionó mucho de su marco filosófico. Durante 1920 y 1930 encabezó el Instituto para Estudios Avanzados de Copenhague. El instituto fue un imán para muchos de los mejores físicos del mundo y proporcionó un foro para el intercambio de ideas. Cuando Bohr visitó Estados Unidos en 1939 para asistir a una conferencia científica, trajo noticias de que la fisión del uranio había sido observada por Hahn y Strassman en Berlín. Los resultados fueron el fundamento de la bomba atómica desarrollada en Estados Unidos durante la Segunda Guerra Mundial. Bohr recibió el premio Nobel en 1922 por su investigación de la estructura de los átomos y la radiación que emana de ellos. *(Fotografía cortesía de AIP Niels Bohr Library, Margarethe Bohr Collection)*

energía total del átomo, la cual incluye tanto el término de la energía cinética como el de la potencial, es

$$E = K + U = \tfrac{1}{2} m_e v^2 - k_e \frac{e^2}{r} \qquad \textbf{(40.20)}$$

Al aplicar la segunda ley de Newton a este sistema se ve que la fuerza atractiva de Coulomb sobre el electrón, $k_e e^2/r^2$, debe ser igual a la masa por la aceleración centrípeta ($a = v^2/r$) del electrón:

$$\frac{k_e e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$$

A partir de esta expresión se observa que la energía cinética del electrón es

$$K = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{k_e e^2}{2r} \qquad \textbf{(40.21)}$$

Al sustituir dicho valor de K en la ecuación 40.20 se encuentra que la energía total del átomo es

$$E = -\frac{k_e e^2}{2r} \qquad \textbf{(40.22)}$$

Observe que la energía total es negativa, lo que indica un sistema ligado electrón-protón. Lo anterior significa que se debe sumar al átomo energía en la cantidad de $k_e e^2/2r$ para eliminar el electrón e igualar la energía total del sistema a cero.

Una expresión para r, el radio de las órbitas permitidas, puede obtenerse despejando v de las ecuaciones 40.19 y 40.21 e igualando los resultados:

$$v^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e^2 r^2} = \frac{k_e e^2}{m_e r}$$

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e k_e e^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(40.23)}$$

Esta ecuación muestra que los radios tienen valores discretos —están cuantizados—. El resultado se basa en la *suposición* de que el electrón sólo puede existir en ciertas órbitas permitidas determinadas por el entero n.

La órbita con el radio más pequeño, llamado **radio de Bohr** a_0, corresponde a $n = 1$ y tiene el valor

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k_e e^2} = 0.0529 \text{ nm} \qquad \textbf{(40.24)}$$

Una expresión general para el radio de cualquier órbita en el átomo de hidrógeno se obtiene sustituyendo la ecuación 40.24 en la ecuación 40.23:

Órbitas con radios de Bohr en el hidrógeno

$$r_n = n^2 a_0 = n^2 (0.052\,9 \text{ nm}) \qquad \textbf{(40.25)}$$

La teoría de Bohr proporcionó un valor de orden de magnitud exacto para el radio del átomo de hidrógeno a partir de principios básicos en lugar de cualquier suposición empírica acerca del tamaño de la órbita. Este resultado se consideró un triunfo contundente de la teoría de Bohr. Las primeras tres órbitas de Bohr se muestran a escala en la figura 40.16.

La cuantización de los radios de la órbita llevó de inmediato a la cuantización de la energía, lo que se observa sustituyendo $r_n = n^2 a_0$ en la ecuación 40.22, lo cual produce para los niveles de energía permitidos

Energías permitidas del átomo de hidrógeno

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{(40.26)}$$

La inserción de valores numéricos en esta expresión resulta en

$$E_n = -\frac{13.606}{n^2}\text{eV} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{40.27}$$

Sólo son permitidas las energías que satisfacen esta ecuación (llamada **niveles de energía**). El nivel de energía más bajo permitido, denominado **estado base**, tiene $n = 1$ y energía $E_1 = -13.606$ eV. El siguiente nivel de energía, el **primer estado excitado**, tiene $n = 2$ y energía $E_2 = E_1/2^2 = -3.401$ eV. La figura 40.17 es un diagrama de niveles de energía que muestra las energías de estos estados de energía discretos y los correspondientes números cuánticos n. El nivel más alto, correspondiente a $n = \infty$ (o $r = \infty$) y $E = 0$, representa el estado para el cual el electrón se separa del átomo. La energía mínima requerida para ionizar al átomo (esto es, para liberar completamente un electrón en el estado base de la influencia del protón) recibe el nombre de **energía de ionización**. Como puede verse en la figura 40.17, la energía de ionización para el hidrógeno en el estado base, de acuerdo con el cálculo de Bohr, es 13.6 eV. Ello constituyó otro logro fundamental de la teoría de Bohr porque la energía de ionización para el hidrógeno ya se había determinado que era 13.6 eV.

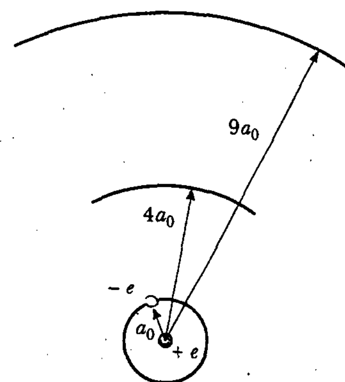


Figura 40.16 Las primeras tres órbitas circulares predichas por el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno.

Las ecuaciones 40.18 y 40.26 sirven para calcular la frecuencia del fotón emitido cuando el electrón salta de una órbita exterior a una interior:

Frecuencia de un fotón emitido del hidrógeno

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{k_e e^2}{2a_0 h}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \tag{40.28}$$

Puesto que la cantidad medida en forma experimental es la longitud de onda, es conveniente usar $c = f\lambda$ para convertir la frecuencia a longitud de onda:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{k_e e^2}{2a_0 hc}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \tag{40.29}$$

El hecho sobresaliente es que esta expresión, la cual es puramente teórica, es idéntica a una forma generalizada de las relaciones empíricas descubiertas por Balmer y Rydberg y dadas por las ecuaciones de la 40.14 a la 40.17,

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \tag{40.30}$$

siempre que la constante $k_e e^2/2a_0 hc$ sea igual a la constante de Rydberg determinada en forma experimental, $R_H = 1.097\ 373\ 2 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$. Después de que Bohr demostró la concordancia entre estas dos cantidades hasta una precisión de aproximadamente 1%, este trabajo se reconoció de inmediato como el logro que coronaba su nueva teoría de la mecánica cuántica. Además, Bohr demostró que todas las series espectrales para el hidrógeno tenían una interpretación natural en su teoría. La figura 40.17 muestra estas series espectrales como transiciones entre niveles de energía.

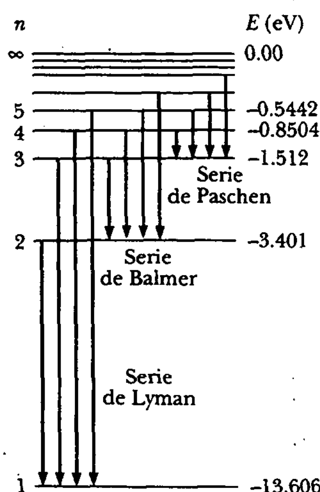


Figura 40.17 Diagrama de niveles de energía para el hidrógeno. Las energías discretas permitidas se grafican sobre el eje vertical. Nada está graficado sobre el eje horizontal, pero la extensión horizontal del diagrama está hecha lo suficientemente grande para mostrar las transiciones permitidas. Los números cuánticos están dados a la izquierda y las energías (en electronvolts) a la derecha.

Bohr de inmediato extendió su modelo para el hidrógeno a otros elementos en los cuales todos menos un electrón se habían eliminado. Se sospechaba que elementos ionizados, como He^+, Li^{2+} y Be^{3+}, existían en atmósferas estelares calientes, donde los choques atómicos con frecuencia tienen la suficiente energía para remover por completo uno o más electrones atómicos. Bohr demostró que muchas misteriosas líneas observadas en el espectro del Sol y varias estrellas más podrían no deberse al hidrógeno pero fue correctamente predicha por su teoría si se atribuían sólo a helio ionizado. En general, para describir un solo electrón que orbita a un

núcleo fijo de carga $+Ze$, donde Z es el número atómico del elemento (véase la sección 1.2), la teoría de Bohr produce

$$r_n = (n^2)\frac{a_0}{Z} \quad \textbf{(40.31)}$$

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0}\left(\frac{Z^2}{n^2}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \textbf{(40.32)}$$

EJEMPLO 40.5 Líneas espectrales de la estrella ξ-Puppis

Algunas misteriosas líneas observadas en 1896 en el espectro de emisión de la estrella ξ-Puppis corresponden con la fórmula empírica

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{(n_f/2)^2} - \frac{1}{(n_i/2)^2}\right)$$

Muestre que estas líneas pueden explicarse mediante la teoría de Bohr cuando se originan del He^+.

Solución El ion He^+ tiene $Z = 2$. Por tanto, los niveles de energía permitidos están dados por la ecuación 40.32 como

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0}\left(\frac{4}{n^2}\right)$$

Empleando la ecuación 40.28 se tiene

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{k_e e^2}{2a_0 h}\left(\frac{4}{n_f^2} - \frac{4}{n_i^2}\right)$$

$$= \frac{k_e e^2}{2a_0 h}\left(\frac{1}{(n_f/2)^2} - \frac{1}{(n_i/2)^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{k_e e^2}{2a_0 hc}\left(\frac{1}{(n_f/2)^2} - \frac{1}{(n_i/2)^2}\right)$$

Ésta es la solución deseada cuando se reconoce que $R_H \equiv k_e e^2/2a_0 hc$ (véase el texto de análisis que sigue inmediatamente a la Ec. 40.30).

EJEMPLO 40.6 Transiciones electrónicas en el hidrógeno

a) El electrón en un átomo de hidrógeno realiza una transición del estado de energía $n = 2$ al estado base ($n = 1$). Encuentre la longitud de onda y frecuencia del fotón emitido.

Solución Se puede emplear la ecuación 40.30 en forma directa para obtener λ, con $n_i = 2$ y $n_f = 1$:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

$$= R_H\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3R_H}{4}$$

$$\lambda = \frac{4}{3R_H} = \frac{4}{3(1.097 \times 10^7\,\text{m}^{-1})}$$

$$= 1.215 \times 10^{-7}\,\text{m} = 121.5\text{ nm} \qquad \text{(ultravioleta)}$$

Puesto que $c = f\lambda$, la frecuencia del fotón es

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^8\,\text{m/s}}{1.215 \times 10^{-7}\,\text{m}} = 2.47 \times 10^{15}\,\text{Hz}$$

b) En el espacio interestelar se han observado átomos de hidrógeno altamente excitados, llamados átomos Rydberg. Encuentre la longitud de onda a la cual los radioastrónomos deben sintonizar para detectar señales de electrones decayendo del nivel $n = 273$ a $n = 272$.

Solución De nuevo se puede usar la ecuación 40.30, esta vez con $n_i = 273$ y $n_f = 272$:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

$$\lambda = 0.922\,\text{m}$$

c) ¿Cuál es el radio de la órbita del electrón en el caso de un átomo Rydberg para el cual $n = 272$?

Solución Usando la ecuación 40.25 se encuentra

$$r_{272} = (272)^2(0.052\,9\text{ nm}) = 3.91\ \mu\text{m}$$

¡Esto es tan grande que el átomo está en el límite de volverse macroscópico!

EJEMPLO 40.7 La serie de Balmer para el hidrógeno

La serie de Balmer para el átomo de hidrógeno corresponde a las transiciones electrónicas que terminan en el estado $n = 2$, como se muestra en la figura 40.18. a) Encuentre el fotón de longitud de onda más larga emitido en esta serie y determine su energía.

Solución El fotón con la longitud de onda más larga (menor energía) en la serie de Balmer es producto de la transición de $n = 3$ a $n = 2$. Se trata del fotón con la menor energía en esta serie porque involucra el cambio de energía más pequeño posible. La ecuación 40.30 da

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_{\text{máx}}} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36}R_H$$

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{36}{5R_H} = \frac{36}{5(1.097 \times 10^7\,\text{m}^{-1})}$$

$$= 656.3\,\text{nm} \qquad \text{(rojo)}$$

La energía de este fotón es

$$E_{\text{fotón}} = hf = \frac{hc}{\lambda_{\text{máx}}}$$

$$= \frac{(6.626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^8\,\text{m/s})}{656.3 \times 10^{-9}\,\text{m}}$$

$$= 3.03 \times 10^{-19}\,\text{J} = 1.89\,\text{eV}$$

También se podría obtener la energía utilizando la expresión $hf = E_3 - E_2$, donde E_2 y E_3 se calculan a partir de la ecuación 40.26.

b) Encuentre el fotón con la longitud de onda más corta emitido en la serie de Balmer.

Solución El fotón con la longitud de onda más corta en la serie de Balmer se emite cuando el electrón realiza una transición de $n = \infty$ a $n = 2$. Por consiguiente,

$$\frac{1}{\lambda_{\text{mín}}} = R_H\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{R_H}{4}$$

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{4}{R_H} = \frac{4}{1.097 \times 10^7\,\text{m}^{-1}} = 364.6\,\text{nm}$$

Esta longitud de onda está en la región ultravioleta y corresponde al límite de la serie.

Ejercicio Encuentre la energía del fotón de longitud de onda más corta.

Respuesta 3.40 eV.

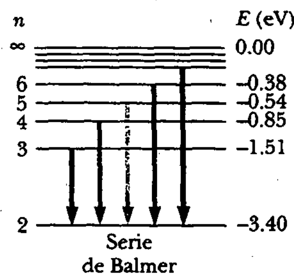


Figura 40.18 Transiciones responsables de la serie de Balmer para el átomo de hidrógeno. Todas las transiciones terminan en el nivel de energía $n = 2$. Los niveles de energía no están dibujados a escala.

Principio de correspondencia de Bohr

En el estudio de la relatividad se encontró que la mecánica newtoniana es un caso especial de la mecánica relativista y es utilizable sólo cuando v es mucho menor que c. De manera similar, **la física cuántica concuerda con la física clásica donde la diferencia entre los niveles cuantizados desaparece.** Este principio, expuesto por primera vez por Bohr, recibe el nombre de **principio de correspondencia.**

Por ejemplo, considere un electrón dando vueltas alrededor del átomo de hidrógeno con $n > 10\,000$. Para valores tan grandes de n, las diferencias de energía entre niveles adyacentes tienden a cero y, en consecuencia, los niveles son casi continuos. En consecuencia, el modelo clásico es razonablemente preciso al describir el sistema para grandes valores de n. De acuerdo con la imagen clásica, la frecuencia de la luz emitida por el átomo es igual a la frecuencia de revolución del electrón en su órbita alrededor del núcleo. Los cálculos muestran que para $n > 10\,000$, esta frecuencia es diferente de la predicha por la mecánica cuántica en menos de 0.015%.



FOTONES Y ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Fenómenos como el efecto fotoeléctrico y el efecto Compton ofrecen una rigurosa evidencia de que cuando la luz (u otras formas de radiación electromagnética) y la materia interactúan, la luz se comporta como si estuviera compuesta de partículas con energía hf y *momentum* h/λ. Una pregunta obvia en este punto es: "¿cómo puede considerarse a la luz como un fotón (en otras palabras, una partícula) cuando se sabe que es una onda?" Por una parte, se describe a la luz en términos de fotones que tienen energía y *momentum*. Por otra parte, se reconoce que la luz y otras ondas electromagnéticas muestran efectos de interferencia y difracción, los cuales sólo son consistentes con una interpretación ondulatoria.

¿Cuál modelo es el correcto? ¿La luz es una onda o una partícula? La respuesta depende del fenómeno que se observa. Algunos experimentos pueden explicarse mejor o únicamente con el concepto de fotón, en tanto que otros se describen de modo más adecuado, o sólo se pueden describir con un modelo ondulatorio. El resultado final es que **se deben aceptar ambos modelos y admitir que la verdadera naturaleza de la luz no puede describirse en términos de alguna imagen clásica simple.** Sin embargo, usted debe darse cuenta de que el mismo haz que puede eliminar fotoelectrones de un metal (que significa que el haz está compuesto por fotones) puede también difractarse por medio de una rejilla (que significa que el haz es una onda). En otras palabras, **el modelo corpuscular y el modelo ondulatorio de la luz se complementan.**

El éxito del modelo corpuscular de la luz en la explicación del efecto fotoeléctrico y del efecto Compton da lugar a muchas otras preguntas. Si la luz es una partícula, ¿cuál es el significado de su "frecuencia" y "longitud de onda", y cuál de estas dos propiedades determina su energía y *momentum*? ¿La luz es *simultáneamente* una onda y una partícula? Aunque los fotones no tienen energía en reposo (¡una cantidad no observable porque un fotón no puede estar en reposo!), ¿hay una expresión simple para la *masa efectiva* de un fotón en movimiento? Si los fotones tienen masa efectiva, ¿experimentan atracción gravitacional? ¿Cuál es la extensión espacial de un fotón, y cómo un electrón absorbe o dispersa a un fotón? Si bien algunas de estas cuestiones quizá tengan respuesta, otras son difíciles de contestar porque la experiencia del mundo macroscópico cotidiano es muy diferente del comportamiento de las partículas microscópicas. Muchas de estas preguntas surgen de analogías clásicas, como los choques de las bolas de billar y las ondas en el agua que rompen en una playa. La mecánica cuántica da luz a una naturaleza más fluida y flexible al incorporar tanto el modelo corpuscular como el modelo ondulatorio cuando sea necesario y complementario. Por consiguiente,

la luz tiene una naturaleza dual: muestra características tanto de onda como de partícula.

Para entender por qué los fotones son compatibles con ondas electromagnéticas, considere como un ejemplo ondas de radio de 2.5 MHz. La energía de un fotón que tiene esta frecuencia es sólo de aproximadamente 10^{-8} eV, demasiado pequeña para permitir que se detecte el fotón. Un receptor de radio sensible podría requerir casi 10^{10} de estos fotones para producir una señal detectable. Un número tan grande de fotones aparecería, en promedio, como una onda continua. Con tantos fotones llegando al detector cada segundo, es improbable que alguna disposición apareciera en la señal detectada. Es decir, con ondas de 2.5 MHz, uno no podría detectar los fotones individuales que golpean en la antena.

Considere a continuación lo que ocurre cuando se pasa a frecuencias más altas. En la región visible es posible observar tanto las características corpusculares como ondulatorias de la luz. Como se mencionó antes, un haz de luz visible muestra fenómenos de interferencia (así que es una onda) y al mismo tiempo puede producir fo-

toelectrones (por consiguiente, es una partícula). En frecuencias incluso más altas el *momentum* y la energía del fotón aumentan. En consecuencia, la naturaleza corpuscular de la luz se vuelve más evidente que su naturaleza ondulatoria. Por ejemplo, la absorción de un fotón de rayos X se detecta con facilidad como un evento aislado, pero los efectos ondulatorios son muy difíciles de observar.



LAS PROPIEDADES ONDULATORIAS DE LAS PARTÍCULAS

A los estudiantes que se les presenta la naturaleza dual de la luz a menudo les parece difícil aceptar el concepto. En el mundo circundante uno está acostumbrado a considerar cosas como pelotas de beisbol exclusivamente como partículas, y cosas como las ondas sonoras sólo como formas de movimiento ondulatorio. Cada observación a gran escala puede interpretarse considerando una explicación ondulatoria o una explicación corpuscular, pero en el mundo de los fotones y los electrones estas distinciones no están claramente definidas. Es incluso más desconcertante el hecho de que, en ciertas condiciones, las cosas que sin ambigüedad se denominan "partículas", ¡muestran características de onda!

En 1923 Louis de Broglie postuló en su disertación doctoral que **como los fotones tienen características de onda y de partícula, quizá todas las formas de la materia tienen ambas propiedades.** Fue una idea muy revolucionaria sin confirmación experimental en esa época. De acuerdo con De Broglie, los electrones, como la luz, tienen una naturaleza dual partícula-onda. Acompañando a cada electrón está una onda (¡no una onda electromagnética!). De Broglie explicó la fuente de esta afirmación en su discurso de aceptación del premio Nobel en 1929:


Louis de Broglie (1892-1987) Físico francés. De Broglie recibió el premio Nobel en 1929 por su predicción de la naturaleza ondulatoria de los electrones. *(AIP Niels Bohr Library)*

> Por un lado la teoría cuántica de la luz no puede considerarse satisfactoria, puesto que define la energía de un corpúsculo luminoso por medio de la ecuación $E = hf$ que contiene la frecuencia f. Ahora bien, una teoría sólo corpuscular no contiene nada que permita definir una frecuencia; por esta sola razón, en consecuencia, se está obligado, en el caso de la luz, a introducir la idea de un corpúsculo y la de la periodicidad en forma simultánea. Por otro lado, la determinación del movimiento estable de electrones en el átomo introduce enteros, y hasta este punto los únicos fenómenos que implican enteros en la física fueron los de la interferencia y los de los modos normales de vibración. Tal hecho me sugirió la idea de que los electrones también podrían considerarse no sólo como corpúsculos, sino que también debía asignárseles periodicidad.

En la sección 39.7 se encontró que la relación entre la energía y el *momentum* lineal de un fotón, el cual tiene una energía en reposo cero, es $p = E/c$. También se sabe que la energía de un fotón es $E = hf = hc/\lambda$. De este modo, el *momentum* de un fotón puede expresarse como

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hc}{c\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

A partir de esta ecuación se ve que la longitud de onda del fotón se puede especificar por su *momentum*: $\lambda = h/p$. De Broglie sugirió que las partículas materiales de *momentum* p tienen una longitud de onda característica $\lambda = h/p$. Ya que el *momentum* de una partícula de masa m y rapidez v es $p = mv$, la **longitud de onda de De Broglie** de esa partícula es[2]

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \qquad \textbf{(40.33)}$$

---

[2] La longitud de onda de De Broglie para una partícula en movimiento con *cualquier* rapidez v es $\lambda = h/\gamma mv$, donde $\gamma = (1 + v^2/c^2)^{-1/2}$.

Además, de manera similar a los fotones, De Broglie postuló que la frecuencia de las **ondas materiales** (es decir, ondas asociadas con partículas que tienen energía en reposo diferente de cero) obedecen la relación de Einstein $E = hf$, donde E es la energía total de la partícula, por lo que

$$f = \frac{E}{h} \tag{40.34}$$

La naturaleza dual de la materia es aparente en estas dos ecuaciones debido a que cada una contiene tanto los conceptos de partícula (mv y E) como los conceptos de onda (λ y f). El hecho de que estas relaciones se establezcan experimentalmente para fotones hace a la hipótesis de De Broglie mucho más fácil de aceptar.

El experimento de Davisson-Germer

La propuesta de De Broglie en 1923 de que la materia muestra tanto propiedades de onda como de partícula se consideró como pura especulación. Si partículas como los electrones tuvieran propiedades ondulatorias, entonces en condiciones adecuadas deberían mostrar efectos de difracción. Sólo tres años después, C. J. Davisson (1881-1958) y L. H. Germer (1896-1971) de Estados Unidos, tuvieron éxito en la medición de la longitud de onda de los electrones. Su importante descubrimiento proporcionó la primera confirmación experimental de las ondas de materia propuesta por De Broglie.

Curiosamente, el intento del experimento inicial de Davisson-Germer no fue confirmar la hipótesis de De Broglie. De hecho, su descubrimiento fue hecho por accidente (como a menudo es el caso). El experimento implicaba la dispersión de electrones de baja energía (alrededor de 54 eV) desde un blanco de níquel en el vacío. Durante un experimento, la superficie de níquel se oxidó de manera incorrecta debido a una ruptura accidental en el sistema de vacío. Después de que el blanco se calentó en una corriente de hidrógeno que circulaba para remover el revestimiento de óxido, los electrones que dispersó exhibieron intensidades máxima y mínima a ángulos específicos. Los experimentadores se dieron cuenta finalmente de que el níquel había formado grandes regiones cristalinas después del calentamiento y que los planos espaciados en forma regular de los átomos en esas regiones servían como una rejilla de difracción para las ondas de materia del electrón.

Poco después Davisson y Germer efectuaron mediciones de difracción más amplias en electrones dispersados a partir de blancos de un solo cristal. Sus resultados mostraron de manera definitiva la naturaleza ondulatoria de los electrones y confirmaron la relación de De Broglie $p = h/\lambda$. En el mismo año el escocés G. P. Thomson (1892-1975) también observó patrones de difracción de electrones al hacer pasar electrones a través de hojas de oro muy delgadas. Desde entonces se han observado patrones de difracción para átomos de helio, átomos de hidrógeno y neutrones. En consecuencia, la naturaleza universal de las ondas de materia se ha establecido de diversas maneras.

El problema de comprender la naturaleza dual de la materia y la radiación es conceptualmente difícil debido a que los dos modelos parecen contradecirse entre sí. Este problema, aplicado a la luz, se estudió antes. Bohr ayudó a resolverlo con su **principio de complementariedad**, el cual establece que **los modelos de onda y partícula, ya sea de la materia o de la radiación, se complementan entre sí.** Ningún modelo puede usarse sólo para describir de manera adecuada la materia o la radiación. Como los humanos sólo pueden generar imágenes mentales basadas en sus experiencias del mundo cotidiano (pelotas de beisbol, ondas de agua y cosas por el estilo), se usan ambas descripciones en una forma complementaria para explicar cualquier conjunto de datos a partir del mundo cuántico.

EJEMPLO 40.8 **La longitud de onda de un electrón**

Calcule la longitud de onda de De Broglie para un electrón ($m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg) que se mueve a 1.00×10^7 m/s.

Solución La ecuación 40.33 produce

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(1.00 \times 10^7\,\text{m/s})}$$

$$= 7.28 \times 10^{-11}\,\text{m}$$

Ejercicio Encuentre la longitud de onda de De Broglie de una piedra de 50 g de masa lanzada a una rapidez de 40 m/s.

Respuesta 3.3×10^{-34} m.

EJEMPLO 40.9 **Una partícula cargada acelerada**

Una partícula de carga q y masa m se aceleró desde el reposo a través de una diferencia de potencial ΔV. Encuentre una expresión para su longitud de onda de De Broglie.

Solución Cuando una partícula cargada se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial ΔV, su ganancia en energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ debe ser igual a su pérdida de energía potencial $q\,\Delta V$:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = q\,\Delta V$$

Puesto que $p = mv$, esta ecuación se puede expresar en la forma

$$\frac{p^2}{2m} = q\,\Delta V$$

$$p = \sqrt{2mq\,\Delta V}$$

Sustituyendo esta expresión para p en la ecuación 40.33 se obtiene

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mq\,\Delta V}}$$

Ejercicio Calcule la longitud de onda de De Broglie de un electrón acelerado a través de una diferencia de potencial de 50 V.

Respuesta 0.174 nm.

RESUMEN

Las características de la radiación de cuerpo negro no pueden explicarse con los conceptos clásicos. Planck introdujo el concepto cuántico cuando supuso que los osciladores atómicos responsables de esta radiación existían sólo en estados discretos de energía. La radiación se emite en paquetes cuantizados individuales siempre que un oscilador realice una transición entre estados discretos de energía.

El **efecto fotoeléctrico** es un proceso por medio del cual los electrones se expulsan de una superficie metálica cuando la luz incide sobre dicha superficie. Einstein proporcionó una explicación útil de este efecto extendiendo la hipótesis cuántica de Planck a la radiación electromagnética. En tal modelo la luz se considera como una corriente de partículas de luz, o **fotones**, cada uno con energía $E = hf$, donde f es la frecuencia y h es la constante de Planck. La energía cinética máxima del fotoelectrón expulsado es

$$K_{\text{máx}} = hf - \phi \qquad \textbf{(40.8)}$$

donde ϕ es la **función de trabajo** del metal.

Los rayos X son dispersados a diversos ángulos por los electrones en el blanco. En dicha dispersión se observa un corrimiento de la longitud de onda de los rayos X desviados, y el fenómeno se conoce como el **efecto Compton**. La física clásica no

explica este efecto. Si el rayo X se trata como un fotón, la conservación de la energía y el *momentum* lineal aplicados a los choques fotón-electrón dan lugar para el corrimiento Compton:

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \tag{40.10}$$

donde m_e es la masa del electrón, c es la rapidez de la luz y θ es el ángulo de dispersión.

El modelo de Bohr del átomo describe con éxito los espectros del hidrógeno atómico y de iones similares a él. Una de las suposiciones básicas del modelo es que el electrón puede existir sólo en órbitas discretas, de modo que el *momentum* angular mvr sea un múltiplo entero de $h/2\pi = \hbar$. Cuando se suponen órbitas circulares y una simple atracción de Coulomb entre el electrón y el protón, se calcula que las energías de los estados cuánticos para el hidrógeno son

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{40.26}$$

donde k_e es la constante de Coulomb, e es la carga del electrón, n es un entero llamado **número cuántico** y $a_0 = 0.052\,9$ nm es el **radio de Bohr**.

Si el electrón en un átomo de hidrógeno realiza una transición de una órbita cuyo número cuántico es n_i a una cuyo número cuántico es n_f, donde $n_f < n_i$, el átomo emite un fotón y la frecuencia de éste es

$$f = \frac{k_e e^2}{2a_0 h}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \tag{40.28}$$

La luz tiene una naturaleza dual en tanto que presenta características de onda y de partícula. Algunos experimentos se pueden explicar mejor o únicamente mediante el modelo corpuscular, mientras que otros pueden explicarse mejor o sólo mediante el modelo ondulatorio.

Cada objeto de masa m y *momentum* $p = mv$ tiene propiedades ondulatorias, con una longitud de onda dada por la relación de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \tag{40.33}$$

PREGUNTAS

1. ¿Qué suposiciones fueron hechas por Planck al abordar el problema de radiación de cuerpo negro? Analice las consecuencias de estas suposiciones.
2. El modelo clásico de la radiación de cuerpo negro dado por la ley de Rayleigh-Jeans tuvo dos defectos principales. Identifíquelos y explique cómo los trató la ley de Planck.
3. Si el efecto fotoeléctrico se observa para un metal, ¿puede usted concluir que el efecto también será observado para otro metal en las mismas condiciones? Explique.
4. En el efecto fotoeléctrico explique por qué el potencial de frenado depende de la frecuencia de la luz pero no de la intensidad.
5. Suponga que el efecto fotoeléctrico ocurre en un blanco gaseoso y no en una placa sólida. ¿Se producirán fotoelectrones a todas las frecuencias del fotón incidente? Explique.
6. ¿En qué difiere el efecto Compton del efecto fotoeléctrico?
7. ¿Qué suposiciones hizo Compton al trabajar con la dispersión de un fotón a partir de un electrón?
8. La teoría de Bohr del átomo de hidrógeno se basa en varias suposiciones. Analice estas suposiciones y su significado. ¿Alguna de ellas contradice la física clásica?
9. Suponga que el electrón en el átomo de hidrógeno obedece la mecánica clásica en vez de la mecánica cuántica. ¿Por qué debe tal átomo "hipotético" emitir un espectro continuo en lugar del espectro de líneas observado?
10. ¿Puede el electrón en el estado base del hidrógeno absorber un fotón de energía a) menor que 13.6 eV y b) mayor que 13.6 eV?
11. ¿Por qué las líneas espectrales del hidrógeno diatómico serían diferentes a las del hidrógeno monoatómico?

12. Explique por qué, en el modelo de Bohr, la energía total del átomo es negativa.
13. Un fotón de rayos X es dispersado por un electrón. ¿Qué pasa con la frecuencia del fotón dispersado relativa a la del fotón incidente?
14. ¿Por qué la existencia de una frecuencia de corte en el efecto fotoeléctrico favorece una teoría corpuscular para la luz en vez de una teoría ondulatoria?
15. Un estudiante afirma que desprenderá electrones de una pieza de metal mediante la colocación de una antena transmisora de radio junto al metal y enviando una intensa señal de radio AM hacia la antena. La función de trabajo de un metal por lo común es de unos cuantos electronvolts. ¿Funcionará esto?
16. Todos los objetos radian energía. ¿Por qué, entonces, los humanos no pueden ver todos los objetos en un cuarto oscuro?
17. ¿Qué tiene más energía, un fotón de radiación ultravioleta o un fotón de luz amarilla?
18. ¿Por qué fue tan importante el experimento de Davisson-Germer que involucró la difracción de electrones?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** = use computadora para resolver el problema = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 40.1 Radiación de cuerpo negro e hipótesis de Planck

1. El ojo humano es más sensible a la luz de 560 nm. ¿Cuál es la temperatura de un cuerpo negro que radiaría más intensamente a esta longitud de onda?
2. a) Los relámpagos producen una máxima temperatura del aire del orden de 10^4 K, mientras b) una explosión nuclear produce una temperatura del orden de 10^7 K. Use la ley de desplazamiento de Wien para encontrar el orden de magnitud de la longitud de onda de los fotones radiados con la mayor intensidad, producidos térmicamente por cada una de estas fuentes. Nombre la parte del espectro electromagnético donde usted esperaría que cada uno radiara con más intensidad.
3. a) Suponiendo que el filamento de tungsteno de un foco eléctrico es un cuerpo negro, determine su longitud de onda pico si su temperatura es de 2 900 K. b) ¿Por qué su respuesta al inciso a) sugiere que más energía de un foco se convierte en radiación infrarroja que en luz visible?
4. Un cuerpo negro a 7 500 K tiene una abertura de 0.050 0 mm de diámetro, considerando dentro de un horno. Estime el número de fotones por segundo que salen por el agujero con longitudes de onda de entre 500 nm y 501 nm.
5. Considere un cuerpo negro de 20.0 cm² de área y 5 000 K de temperatura. a) ¿Cuánta potencia radia? b) ¿A qué longitud de onda radia con más intensidad? Encuentre la potencia espectral por longitud de onda en c) esta longitud de onda y en longitudes de onda de d) 1.00 nm (un rayo X o γ), e) 5.00 nm (luz ultravioleta o un rayo X), f) 400 nm (en la frontera entre UV y la luz visible), g) 700 nm (en la frontera entre la luz visible y la infrarroja), h) 1.00 mm (luz infrarroja o una microonda) e i) 10.0 cm (una microonda u onda de radio). j) ¿Cerca de cuánta potencia radia el objeto como luz visible?
6. El radio del Sol es 6.96×10^8 m, y su salida de potencia total corresponde a 3.77×10^{26} W. a) Suponiendo que la superficie solar emite como un cuerpo negro calcule su temperatura superficial. b) Empleando el resultado del inciso a) encuentre $\lambda_{\text{máx}}$ del Sol.
7. WEB Calcule la energía, en electronvolts, de un fotón cuya frecuencia es a) 620 THz, b) 3.10 GHz, c) 46.0 MHz. d) Determine las longitudes de onda correspondientes a esos fotones y establezca la clasificación de cada uno sobre el espectro electromagnético.
8. Una lámpara de vapor de sodio tiene una salida de potencia de 10.0 W. Empleando 589.3 nm como la longitud de onda promedio de esta fuente calcule el número de fotones emitidos por segundo.
9. Un transmisor de radio de FM tiene una salida de potencia de 150 kW y funciona a una frecuencia de 99.7 MHz. ¿Cuántos fotones por segundo emite el transmisor?
10. El umbral promedio de la visión adaptada a la oscuridad (escotópica) es de 4.00×10^{-11} W/m² a una longitud de onda central de 500 nm. Si la luz que tiene esta intensidad y longitud de onda entra al ojo y la pupila está abierta a su máximo diámetro de 8.50 mm, ¿cuántos fotones por segundo entran al ojo?
11. Un péndulo simple tiene una longitud de 1.00 m y una masa de 1.00 kg. Si la amplitud de oscilaciones del péndulo es de 3.00 cm, estime el número cuántico para el péndulo.
12. **Problema de repaso.** Una estrella que se aleja de la Tierra a $0.280c$ emite radiación que tiene una intensidad máxima a una longitud de onda de 500 nm. Determine la temperatura superficial de esta estrella.
13. Muestre que a cortas longitudes de onda o bajas temperaturas la ley de radiación de Planck (Ec. 40.3) predice una reducción exponencial en $I(\lambda, T)$ dada por la *ley de radiación de Wien*:

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda k_B T}$$

14. Demuestre que a grandes longitudes de onda la ley de radiación de Planck (Ec. 40.3) se reduce a la ley de Rayleigh-Jeans (Ec. 40.2).

Sección 40.2 El efecto fotoeléctrico

15. El molibdeno tiene una función de trabajo de 4.20 eV. a) Encuentre la longitud de onda de corte y la frecuen-

cia de corte para el efecto fotoeléctrico. b) Calcule el potencial de frenado si la luz incidente tiene una longitud de onda de 180 nm.

16. De una superficie metálica se liberan electrones con rangos de rapidez de hasta 4.60×10^5 m/s cuando se usa luz con longitud de onda $\lambda = 625$ nm. a) ¿Cuál es la función de trabajo de la superficie? b) ¿Cuál es la frecuencia de corte de esta superficie?

17. El litio, el berilio y el mercurio tienen funciones de trabajo de 2.30 eV, 3.90 eV y 4.50 eV, respectivamente. Si luz de 400 nm incide sobre cada uno de estos metales, determine a) cuál de ellos exhibe el efecto fotoeléctrico y b) la energía cinética máxima para los fotoelectrones en cada caso.

18. Un estudiante que analiza el efecto fotoeléctrico de dos metales diferentes registra la siguiente información: i) el potencial de frenado para los fotoelectrones liberados en el metal 1 es 1.48 V mayor que para el metal 2, y ii) la frecuencia de corte para el metal 1 es 40.0% más pequeña que para el metal 2. Determine la función de trabajo para cada metal.

19. Dos fuentes luminosas se utilizan en un experimento fotoeléctrico para determinar la función de trabajo para una superficie metálica particular. Cuando se emplea luz verde de una lámpara de mercurio ($\lambda = 546.1$ nm), un potencial de frenado de 0.376 V reduce la fotocorriente a cero. a) Con base en esta medición, ¿cuál es la función de trabajo para este metal? b) ¿Qué potencial de frenado se observaría al usar la luz amarilla de un tubo de descarga de helio ($\lambda = 587.5$ nm)?

20. Cuando luz de 445 nm incide sobre cierta superficie metálica, el potencial de frenado es 70.0% del que resulta cuando luz de 410 nm incide sobre la misma superficie metálica. Con base en esta información, y la siguiente tabla de funciones de trabajo, identifique el metal implicado en el experimento.

Metal	Función de trabajo (eV)
Cesio	1.90
Potasio	2.23
Plata	4.73
Tungsteno	4.58

21. A partir de la dispersión de la luz solar Thomson calculó el radio clásico del electrón que tiene un valor de 2.82×10^{-15} m. Si luz del Sol con una intensidad de 500 W/m^2 cae sobre un disco con este radio, calcule el tiempo requerido para acumular 1.00 eV de energía. Suponga que la luz es una onda clásica y que la luz que golpea al disco es absorbida por completo. ¿Cómo se compara su resultado con la observación de que los fotoelectrones son emitidos con rapidez (dentro de 10^{-9} s)?

22. **Problema de repaso.** Una esfera de cobre aislada de 5.00 cm de radio, inicialmente sin carga, se ilumina con luz ultravioleta de longitud de onda de 200 nm. ¿Qué carga inducirá el efecto fotoeléctrico sobre la esfera? La función de trabajo para el cobre es 4.70 eV.

23. **Problema de repaso.** Una fuente luminosa que emite radiación a 7.00×10^{14} Hz es incapaz de liberar fotoelectrones de cierto metal. Con la intención de utilizar esta fuente para extraer fotoelectrones del metal, a la fuente se le da una velocidad hacia el metal. a) Explique cómo este procedimiento produce fotoelectrones. b) Cuando la rapidez de la fuente luminosa es igual a $0.280c$, los fotoelectrones empiezan a ser expulsados del metal. ¿Cuál es la función de trabajo del metal? c) Cuando la rapidez de la fuente luminosa se incrementa a $0.900c$, determine la máxima energía cinética de los fotoelectrones.

Sección 40.3 El efecto Compton

24. Calcule la energía y *momentum* de un fotón de 700 nm de longitud de onda.

25. Rayos X que tienen una energía de 300 keV experimentan dispersión Compton desde un blanco. Si los rayos dispersados se detectan a 37.0° respecto de los rayos incidentes, encuentre a) el corrimiento Compton a este ángulo, b) la energía de los rayos X dispersados y c) la energía del electrón de retroceso.

26. Un fotón de 0.110 nm choca con un electrón estacionario. Después del choque el electrón se mueve hacia adelante y el fotón retrocede. Encuentre el *momentum* y la energía cinética del electrón.

WEB 27. Un fotón de 0.001 60 nm se dispersa a partir de un electrón libre. ¿Para qué ángulo de dispersión (fotón) el electrón de retroceso tiene la misma energía cinética que la energía del fotón dispersado?

28. En un experimento de dispersión Compton un fotón se desvía un ángulo de 90.0° y el electrón se desvía un ángulo de 20.0°. Determine la longitud de onda del fotón dispersado.

29. Un fotón de 0.880 MeV es dispersado por un electrón libre inicialmente en reposo de tal manera que el ángulo de dispersión del electrón dispersado es igual al del fotón dispersado ($\theta = \phi$ en la figura 40.10b). a) Determine los ángulos θ y ϕ, b) la energía y *momentum* del fotón dispersado y c) la energía cinética y el *momentum* del electrón dispersado.

30. Un fotón que tiene energía E_0 es dispersado por un electrón libre inicialmente en reposo, de tal manera que el ángulo de dispersión del electrón dispersado es igual al del fotón dispersado ($\theta = \phi$ en la figura 40.10b). a) Determine los ángulos θ y ϕ, b) la energía y *momentum* del fotón dispersado y c) la energía cinética y el *momentum* del fotón dispersado.

31. Un fotón de 0.700 MeV dispersa a un electrón libre de modo que el ángulo de dispersión del fotón es el doble del ángulo de dispersión del electrón (Fig. P40.31). Determine a) el ángulo de dispersión para el electrón y b) la rapidez final del electrón.

32. Un fotón que tiene una longitud de onda λ dispersa a un electrón libre en A (Fig. P40.32) produciendo un segundo fotón que tiene longitud de onda λ'. Este fotón dispersa después otro electrón libre en B produciendo un tercer fotón con longitud de onda λ'' que se mueve directamente

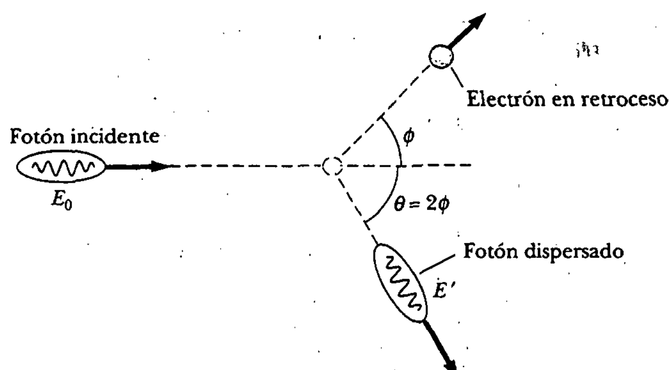


Figura P40.31

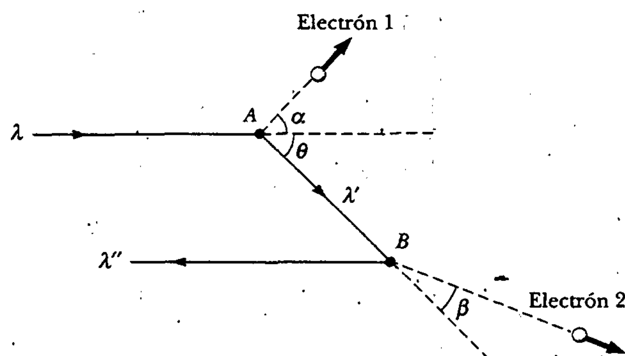


Figura P40.32

opuesta al fotón original, como se muestra en la figura P40.32. Determine el valor numérico de $\Delta\lambda = \lambda'' - \lambda$.

33. Después de que un fotón de rayos X de 0.800 nm se dispersa a partir de un electrón libre, el electrón retrocede a 1.40×10^6 m/s. a) ¿Cuál fue el corrimiento Compton en la longitud de onda del fotón? b) ¿Qué ángulo se dispersó el fotón?

34. Encuentre la pérdida de energía fraccionaria máxima para un rayo gamma de 0.511 MeV que tiene dispersión Compton a partir de a) un electrón libre y b) un protón libre.

Sección 40.4 Espectros atómicos

35. Muestre que las longitudes de onda para la serie de Balmer satisfacen la ecuación

$$\lambda = \frac{364.5\, n^2}{n^2 - 4}\text{ nm} \qquad \text{donde } n = 3, 4, 5, \ldots$$

36. a) Suponga que la constante de Rydberg estuvo dada por $R_H = 2.00 \times 10^7$ m^{-1}. ¿En qué parte del espectro electromagnético se encontraría la serie de Balmer? b) Repita para $R_H = 0.500 \times 10^7$ m^{-1}.

37. a) ¿Qué valor de n se asocia con la línea de 94.96 nm en la serie de hidrógeno de Lyman? b) ¿Esta longitud de onda podría estar asociada con las series de Paschen o Brackett?

38. a) Calcule la longitud de onda más corta en cada una de estas series espectrales del hidrógeno: Lyman, Balmer, Paschen y Brackett. b) Calcule la energía (en electronvolts) del fotón de más alta energía producido en cada serie.

39. El oxígeno líquido tiene un color azulado, lo que significa que absorbe en forma preferente luz hacia el extremo rojo del espectro visible. Aunque la molécula de oxígeno (O_2) no absorbe intensamente radiación visible, lo hace en esa forma a 1 269 nm, que es la región infrarroja del espectro. Las investigaciones han mostrado que es posible que dos moléculas de O_2 que choquen absorban un solo fotón, compartiendo de manera equitativa su energía. La transición que ambas moléculas experimentan es la misma que la producida cuando absorben radiación de 1 269 nm. ¿Cuál es la longitud de onda del fotón aislado que ocasiona esta doble transición? ¿Cuál es el color de esta radiación?

Sección 40.5 Modelo cuántico del átomo de Bohr

40. Para el átomo de hidrógeno en el estado base utilice el modelo de Bohr para calcular a) la rapidez orbital del electrón, b) su energía cinética y c) la energía potencial eléctrica del átomo.

WEB 41. Un átomo de hidrógeno está en su primer estado excitado ($n = 2$). Empleando la teoría del átomo de Bohr calcule a) el radio de la órbita, b) el *momentum* lineal del electrón, c) el *momentum* angular del electrón, d) la energía cinética, e) la energía potencial y f) la energía total.

42. A continuación se proporcionan cuatro transiciones posibles para el átomo de hidrógeno:

A) $n_i = 2$; $n_f = 5$ B) $n_i = 5$; $n_f = 3$

C) $n_i = 7$; $n_f = 4$ D) $n_i = 4$; $n_f = 7$

a) ¿Cuál de las transiciones emite los fotones que tienen la longitud de onda más corta? b) ¿En cuál transición el átomo gana mayor cantidad de energía? c) ¿Para cuál(es) transición(es) el átomo pierde energía?

43. Un fotón se emite cuando un átomo de hidrógeno experimenta una transición del estado $n = 6$ al estado $n = 2$. Calcule a) la energía, b) la longitud de onda y c) la frecuencia del fotón emitido.

44. Cuánta energía se requiere para ionizar hidrógeno a) ¿cuando está en el estado base? b) ¿cuando está en el estado para el cual $n = 3$?

45. Demuestre que la rapidez del electrón en la n-ésima órbita de Bohr en el hidrógeno está dada por

$$v_n = \frac{k_e e^2}{n\hbar}$$

46. a) Calcule el *momentum* angular de la Luna debido a su movimiento orbital alrededor de la Tierra. En su cálculo use 3.84×10^8 m como el promedio de la distancia Tierra-Luna, y 2.36×10^6 s como el periodo de la Luna en su órbita. b) Determine el número cuántico correspondiente si el *momentum* angular de la Luna está dado

por la suposición de Bohr $mvr = n\hbar$. c) ¿En qué fracción la distancia Tierra-Luna debería incrementarse al aumentar el número cuántico en 1?

47. Un haz de luz monocromática es absorbido por una acumulación de átomos de hidrógeno en estado base, de modo que es posible observar seis diferentes longitudes de onda cuando el hidrógeno regresa de nuevo al estado base. ¿Cuál es la longitud de onda del haz incidente?
48. Dos átomos de hidrógeno chocan frontalmente y terminan con energía cinética cero. Cada uno emite después un fotón de 121.6 nm (una transición de $n = 2$ a $n = 1$). ¿A qué rapidez se movían los átomos antes del choque?
49. a) Construya un diagrama de niveles de energía para el ion He^+, para el cual $Z = 2$. b) ¿Cuál es la energía de ionización para el He^+?
50. ¿Cuál es el radio de la primera órbita de Bohr en a) He^+, b) Li^{2+} y c) Be^{3+}?
51. Una partícula de carga q y masa m, que se mueve a rapidez constante v perpendicular a un campo magnético constante B, sigue una trayectoria circular. Si el *momentum* angular alrededor del centro de este círculo está cuantizado de manera que $mvr = n\hbar$, muestre que los radios permitidos para la partícula son

$$r_n = \sqrt{\frac{n\hbar}{qB}}$$

donde $n = 1, 2, 3,...$

52. Un electrón está en la *n*ésima órbita de Bohr del átomo de hidrógeno. a) Muestre que el periodo del electrón es $T = t_0 n^3$ y determine el valor numérico de t_0. b) En promedio, un electrón permanece en la órbita $n = 2$ por aproximadamente 10 μs antes de saltar a la órbita $n = 1$ (estado base). ¿Cuántas revoluciones efectúa el electrón antes de saltar al estado base? c) Si una revolución del electrón se define como un "año electrón" (de la misma forma en que un año terrestre es una revolución de la Tierra alrededor del Sol), ¿el electrón en la órbita $n = 2$ "vive" mucho? Explique.

Sección 40.6 Fotones y ondas electromagnéticas
Sección 40.7 Las propiedades ondulatorias de las partículas

53. Calcule la longitud de onda de De Broglie para un protón que se mueve a una rapidez de 1.00×10^6 m/s.
54. Calcule la longitud de onda de De Broglie para un electrón que tiene energía cinética de a) 50.0 eV y b) 50.0 keV.
55. a) Un electrón tiene 3.00 eV de energía cinética. Encuentre su longitud de onda. b) Un fotón tiene 3.00 eV de energía. Encuentre su longitud de onda.
56. En el experimento Davisson-Germer, 54.0 eV electrones fueron difractados de una rejilla de níquel. Si el primer máximo en el patrón de difracción se observó en $\phi = 50.0°$ (Fig. P40.56), ¿cuál fue el espaciamiento a de la rejilla?
57. El núcleo de un átomo está en el orden de 10^{-14} m de diámetro. Para que un electrón esté confinado a un núcleo, su longitud de onda de De Broglie debería ser de este orden de magnitud o más pequeña. a) ¿Cuál sería

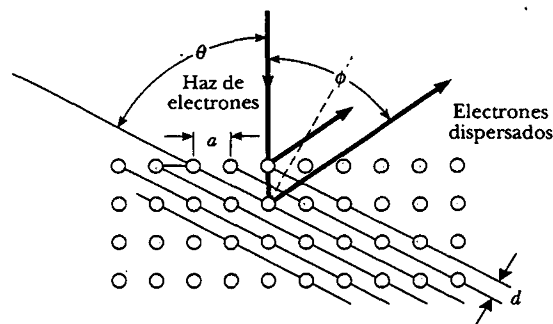


Figura P40.56

la energía cinética de un electrón confinado a esta región? b) Sobre la base de este resultado, ¿usted esperaría encontrar un electrón en un núcleo? Explique.

58. Robert Hofstadter ganó el premio Nobel de física en 1961 por su trabajo pionero en dispersar electrones de 20 GeV de núcleos. a) ¿Cuál es el factor γ para un electrón de 20.0 GeV, donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$? b) ¿Cuál es el *momentum* del electrón en kg·m/s? c) ¿Cuál es la longitud de onda de un electrón de 20.0 GeV y cómo se le compara con el tamaño de un núcleo?
59. a) Muestre que la frecuencia f y la longitud de onda λ de una partícula que se mueve con libertad están relacionadas por medio de la expresión

$$\left(\frac{f}{c}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda_C^2}$$

donde $\lambda_C = h/mc$ es la longitud de onda Com[illegible] la partícula. b) ¿Es posible alguna vez que [illegible] con una masa diferente de cero tenga la misma longitud de onda y frecuencia que un fotón? Explique.

60. Después de aprender acerca de la hipótesis de De Broglie de que las partículas de *momentum* p tienen características de onda con longitud de onda $\lambda = h/p$, un estudiante de 80.0 kg se preocupó acerca de ser difractado cuando pasara por una puerta de 75.0 cm de ancho. Suponga que una difracción significativa ocurre cuando el ancho de la apertura de difracción es menor en 10.0 veces la longitud de onda de la onda que se difracta. a) Determine la rapidez máxima a la cual el estudiante puede pasar por la puerta para tener una difracción significativa. b) Con dicha rapidez, ¿cuánto tardaría el estudiante en pasar por la puerta si ésta mide 15.0 cm de ancho? Compare su resultado con la edad del universo actualmente aceptada, la cual es de 4×10^{17} s. c) ¿Se justifica la preocupación del estudiante respecto de ser difractado?
61. ¿Cuál es la rapidez de un electrón si su longitud de onda de De Broglie es igual a su longitud de onda de Compton? (*Sugerencia:* Si usted obtiene una respuesta de c, vea el problema 71.)

PROBLEMAS ADICIONALES

62. La figura P40.62 muestra el potencial de frenado *versus* la frecuencia de los fotones incidentes en el efecto fotoeléctrico para el sodio. Use la gráfica para encontrar

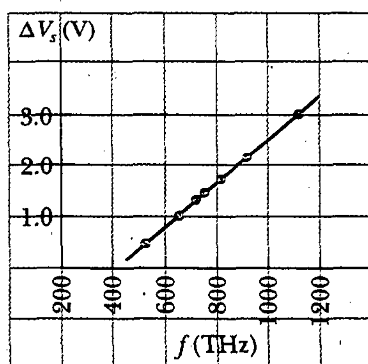


Figura P40.62

a) la función de trabajo, b) la relación h/e y c) la longitud de onda de corte. (Datos tomados de R. A. Millikan, *Phys. Rev.* 7:362, 1916.)

63. Fotones de 450 nm de longitud de onda inciden sobre un metal. Los electrones más energéticos expulsados del metal se desvían en un arco circular de 20.0 cm de radio por medio de un campo magnético con una magnitud de 2.00×10^{-5} T. ¿Cuál es la función de trabajo del metal?

64. Fotones de longitud de onda λ inciden sobre un metal. Los electrones más energéticos expulsados del metal se desvían en un arco circular de radio R por medio de un campo magnético cuya magnitud es B. ¿Cuál es la función de trabajo del metal?

WEB 65. La tabla siguiente muestra datos obtenidos en un experimento fotoeléctrico. a) Utilizando estos datos haga una gráfica similar a la de la figura 40.9 que se trace como una línea recta. A partir de esta gráfica determine b) un valor experimental para la constante de Planck (en joule-segundos), y c) la función de trabajo (en electronvolts) para la superficie. (Dos cifras significativas para cada respuesta son suficientes.)

Longitud de onda (nm)	**Energía cinética máxima de los fotoelectrones (eV)**
588	0.67
505	0.98
445	1.35
399	1.63

66. Un fotón de 200 MeV es dispersado a 40.0° por un protón libre inicialmente en reposo. a) Encuentre la energía (en MeV) del fotón dispersado. b) ¿Qué energía cinética (en MeV) adquiere el protón?

67. El positronio es un átomo similar al hidrógeno compuesto por un positrón (un electrón cargado positivamente) y un electrón que giran uno alrededor del otro. Empleando el modelo de Bohr determine los radios permitidos (relativos a los centros de masa de las dos partículas) y las energías permitidas del sistema.

68. Deduzca la fórmula para el corrimiento Compton (Ec. 40.10) a partir de las ecuaciones 40.11, 40.12 y 40.13.

69. *Un ejemplo del principio de correspondencia.* Emplee el modelo del átomo de hidrógeno de Bohr para mostrar que cuando el electrón se mueve del estado n al estado $n - 1$, la frecuencia de la luz emitida es

$$f = \frac{2\pi^2 m_e k_e^2 e^4}{h^3}\left[\frac{2n-1}{(n-1)^2 n^2}\right]$$

Muestre que cuando $n \to \infty$, esta expresión varía como $1/n^3$ y se reduce a la frecuencia clásica que se espera que emita el átomo. (*Sugerencia:* para calcular la frecuencia clásica advierta que la frecuencia de revolución es $v/2\pi r$, donde r está dada por la Ec. 40.25.)

70. Muestre que un fotón no puede transferir toda su energía a un electrón libre. (*Sugerencia:* recuerde que la energía y el *momentum* deben conservarse.)

71. Demuestre que la rapidez de una partícula que tiene longitud de onda de De Broglie λ y longitud de onda Compton $\lambda_C = h/(mc)$ es

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + (\lambda/\lambda_C)^2}}$$

72. La serie de Lyman para un (¿nuevo?) átomo de un electrón se observa en la luz de una galaxia distante. Las longitudes de onda de las primeras cuatro líneas y el límite de la longitud de onda corta de esta serie están dadas por el diagrama de niveles de energía en la figura P40.72. Con base en esta información calcule a) las energías del estado base y de los primeros cuatro estados excitados para este átomo de un electrón y b) las longitudes de onda de las primeras tres líneas y el límite de la longitud de onda corta en la serie de Balmer correspondiente a este átomo. c) Muestre que las longitudes de onda de las primeras cuatro líneas y el límite de la longitud de onda corta de la serie de Lyman para el átomo de hidrógeno son todas 60.0% de las longitudes de onda para la serie

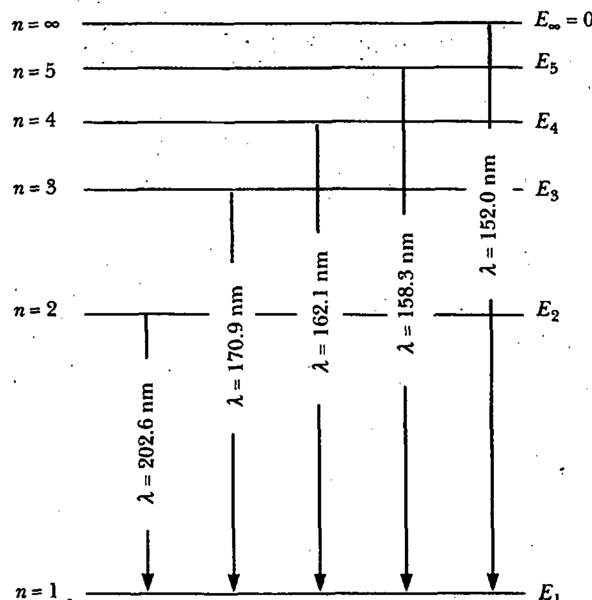


Figura P40.72

de Lyman en el átomo de un electrón descrito en el inciso b). d) Con base en esta observación explique por qué este átomo podría ser hidrógeno.

73. La potencia total por unidad de área radiada por un cuerpo negro a una temperatura T es el área bajo la curva $I(\lambda, T)$ *versus* la curva λ, como se muestra en la figura 40.3. a) Muestre que esta potencia por unidad de área es

$$\int_0^{\infty} I(\lambda, T)\, d\lambda = \sigma T^4$$

donde $I(\lambda, T)$ está dada por la ley de radiación de Planck, y σ *es* una constante independiente de T. Este resultado se conoce como ley de Stefan-Boltzmann (véase la sección 20.7). Para efectuar la integración usted debe hacer el cambio de variable $x = hc/\lambda k_B T$ y aprovechar el hecho de que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

b) Muestre que la constante de Stefan-Boltzmann σ tiene el valor

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3} = 5.67 \times 10^{-8}\, \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

74. Deduzca la ley de desplazamiento de Wien a partir de la ley de Planck. Proceda como se indica a continuación: En la figura 40.3 observe que la longitud de onda a la cual un cuerpo negro radia con mayor intensidad es la longitud de onda para la cual la gráfica de $I(\lambda, T)$ *versus* λ tiene una tangente horizontal. A partir de la ecuación 40.3 evalúe la derivada $dI/d\lambda$. Establézcala igual a cero. Resuelva numéricamente la ecuación trascendental resultante para probar $hc/\lambda_{\text{máx}}k_B T = 4.965...$ o $\lambda_{\text{máx}}T = hc/4.965k_B$. Evalúe la constante de manera tan precisa como sea posible y compárela con el valor experimental de Wien.

75. Un fotón de energía inicial E_0 sufre una dispersión Compton a un ángulo θ a partir de un electrón libre (masa m_e) inicialmente en reposo. Utilizando las ecuaciones relativistas para la conservación de la energía y el *momentum*, obtenga la siguiente relación para la energía final E' del fotón dispersado:

$$E' = E_0[1 + (E_0/m_ec^2)(1 - \cos\theta)]^{-1}$$

76. Como aprendió en la sección 39.4, un muón tiene una carga de $-e$ y una masa igual a 207 veces la masa de un electrón. Plomo muónico se forma cuando un núcleo de plomo captura un muón. De acuerdo con la teoría de Bohr, ¿cuáles son el radio y la energía del estado base del plomo muónico?

77. Un electrón inicialmente en reposo retrocede en un choque frontal con un fotón. Demuestre que la energía cinética adquirida por el electrón es $2hfa/(1 + 2a)$, donde a es la proporción de la energía inicial del fotón a la energía en reposo del electrón.

78. La función de distribución espectral $I(\lambda, T)$ para un cuerpo negro ideal a temperatura absoluta T se muestra en la figura P40.78. a) Muestre que el porcentaje de la potencia total radiada por unidad de área en el intervalo $0 \le \lambda \le \lambda_{\text{máx}}$ es independiente del valor de T. b) Usando

$$\frac{A}{A+B} = 1 - \frac{15}{\pi^4}\int_0^{4.965} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx$$

integración numérica muestre que esta proporción es aproximadamente 1/4.

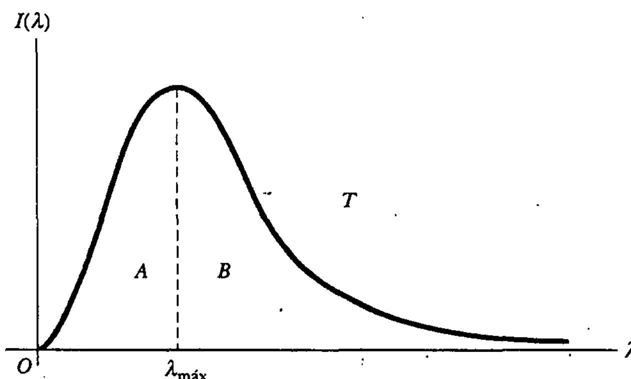


Figura P40.78

79. Muestre que la proporción entre la longitud de onda Compton λ_C y la longitud de onda de De Broglie $\lambda = h/p$ para un electrón relativista es

$$\frac{\lambda_C}{\lambda} = \left[\left(\frac{E}{m_ec^2}\right)^2 - 1\right]^{1/2}$$

donde E es la energía total del electrón y m_e es su masa.

80. El neutrón tiene una masa de 1.67×10^{-27} kg. Los neutrones emitidos en las reacciones nucleares pueden frenarse mediante colisiones con la materia. Se hace referencia a ellos como neutrones térmicos una vez que han llegado al equilibrio térmico con su entorno. La energía cinética promedio $(3k_BT/2)$ de un neutrón térmico es aproximadamente 0.04 eV. Calcule la longitud de onda de De Broglie de un neutrón con una energía cinética de 0.040 0 eV. ¿Cómo se le compara con el espaciamiento atómico característico en un cristal? ¿Usted esperaría que los neutrones térmicos exhibieran efectos de difracción cuando son desviados por un cristal?

81. Un fotón con longitud de onda λ_0 se mueve hacia un electrón libre que se desplaza a rapidez u en la misma

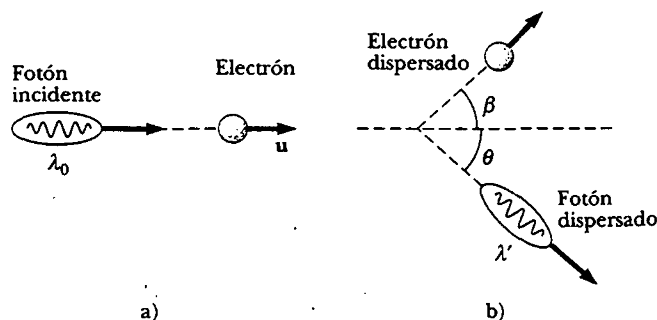


Figura P40.81

dirección que el fotón (Fig. P40.81a). Si el fotón se dispersa a un ángulo θ (Fig. P40.81b), muestre que la longitud de onda del fotón dispersado es

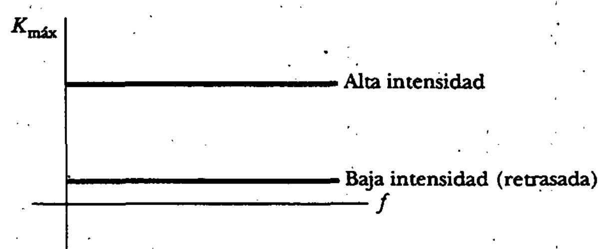
$$\lambda' = \lambda_0\left(\frac{1-(u/c)\cos\theta}{1-u/c}\right) + \frac{h}{m_ec}\sqrt{\frac{1+u/c}{1-u/c}}(1-\cos\theta)$$

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

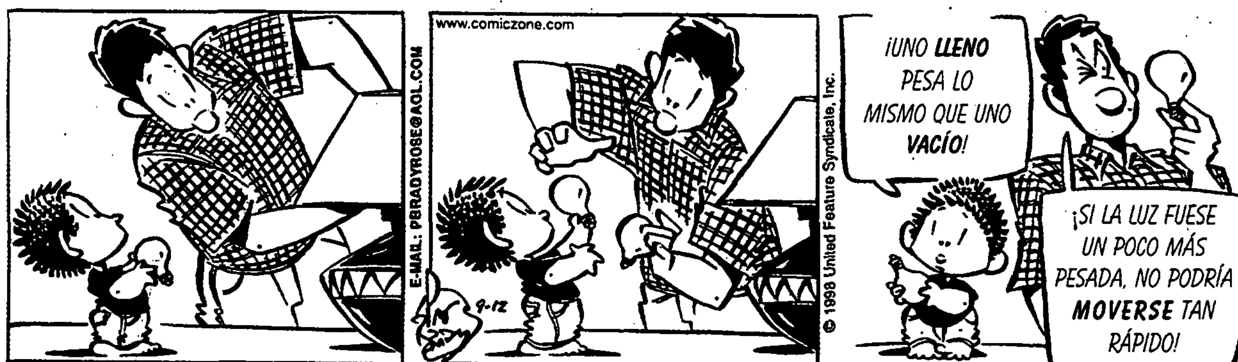
40.1 c). La luz ultravioleta tiene las frecuencias más altas de los tres, y, por ende, cada fotón entrega más energía a una célula de la piel. (Esto explica por qué usted puede broncearse en un día nublado: las nubes bloquean la luz visible pero no mucha luz ultravioleta. Usted usualmente no se broncea a través del vidrio de una ventana, aunque sienta el calor debido a los rayos infrarrojos del Sol, porque el vidrio bloquea la luz ultravioleta.)

40.2 Comparando la ecuación 40.8 con la forma de intersección de la pendiente de la ecuación para una línea recta, $y = mx + b$, se ve que la pendiente en la figura 40.9 es la constante de Planck h y que la intersección y es $-\phi$, el negativo de la función de trabajo. Si se hubiese usado un metal diferente, la pendiente permanecería igual pero la función de trabajo sería diferente. En consecuencia, los datos para los distintos metales aparecen como líneas paralelas sobre la gráfica.

40.3 La física clásica predice que la luz de intensidad suficiente provoca la emisión de fotoelectrones, de manera independiente de la frecuencia y sin duda sin una frecuencia de corte. Además, cuanto mayor sea la intensidad, mayor será la energía cinética máxima, con algún retraso en el tiempo de emisión a bajas intensidades. Por tanto, la expectativa clásica (la cual no equipara al experimento) produce una gráfica que se parece a ésta:



40.4 El cambio fraccionario en la longitud de onda $\Delta\lambda/\lambda_0$ es más grande (y, por tanto, más fácil de medir) para longitudes de onda pequeñas, y los rayos X tienen longitudes de onda mucho más pequeñas que la luz visible.



ROSE IS ROSE reimpreso con permiso de United Feature Syndicate, Inc.

ACERTIJO

Este encantador amiguito y cientos de miles como él viven en su almohada, recolectando pequeños pedazos de piel muerta. El *ácaro de la almohada* es tan pequeño que los microscopios ordinarios no revelan sus detalles anatómicos. Por otra parte, ¡esta fotografía tomada con un microscopio electrónico muestra quizá más de lo que se quisiera ver! ¿Por qué un microscopio electrónico puede ver objetos mucho más pequeños de los que pueden ser vistos a través de un microscopio óptico? *(Oliver Meckes/Photo Researchers, Inc.)*



capítulo

41 Mecánica cuántica

Líneas generales del capítulo

El modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el cual se presentó en el capítulo 40, tiene serias limitaciones. Presenta al electrón en movimiento en torno a la circunferencia de un círculo plano, pero los experimentos de dispersión muestran que el electrón llena una esfera alrededor del núcleo, con una probabilidad que disminuye exponencialmente ya que se encuentra a mayores y mayores distancias a partir del núcleo. El modelo de Bohr no considera el movimiento ondulatorio del electrón. Bohr supuso que el *momentum* angular mínimo del electrón era $\hbar$; de hecho, es cero. Además, el modelo no se puede extender para explicar los espectros de absorción y emisión de átomos complejos, ni predice detalles como las variaciones en las intensidades de las líneas espectrales y los desdoblamientos observados en ciertas líneas espectrales en condiciones de laboratorio controladas. Por último, no permite entender cómo interactúan entre sí los átomos y cómo dichas interacciones afectan las propiedades físicas y químicas observadas de la materia.

En el presente capítulo se estudia la *mecánica cuántica*, una teoría que explica con éxito la estructura atómica. Tal teoría, desarrollada de 1925 a 1926 por Erwin Shrödinger, Werner Heisenberg y otros, se enfoca en las limitaciones del modelo de Bohr y permite comprender una gran cantidad de fenómenos que involucran átomos, moléculas, núcleos y sólidos. Básicamente se estudiará la ecuación de movimiento de ondas materiales, así como algunas de las características principales de la mecánica cuántica y su aplicación a sistemas sencillos unidimensionales. Por ejemplo, se tratará el problema de una partícula confinada a un potencial de pozo que tiene barreras infinitamente altas.

41.1 REGRESO AL EXPERIMENTO DE DOBLE RENDIJA

Como se expuso en el capítulo 40, el concepto de dualidad onda-partícula en la física moderna es muy difícil de comprender. Una manera de cristalizar las ideas acerca de esta dualidad es considerar la difracción de electrones que pasan a través de una doble rendija. El experimento muestra la imposibilidad de medir *de manera simultánea* las propiedades ondulatorias y corpusculares e incorpora todas las extrañas consecuencias de la mecánica cuántica.

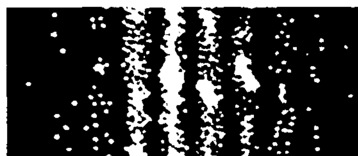
Considere un haz de electrones que tienen la misma energía e inciden sobre una barrera de doble rendija, como se muestra en la figura 41.1, donde el ancho de las rendijas es mucho menor que la separación D entre las mismas. Un detector de electrones se coloca alejado de las rendijas a una distancia mucho mayor que D. **Si el detector registra electrones en diferentes posiciones por un tiempo suficientemente largo, se encuentra un patrón de interferencia que representa el número de electrones que llegan en cualquier posición a lo largo de la línea del detector.** Tal patrón de interferencia no ocurre si los electrones se comportan como partículas clásicas y, por ende, se debe inferir que los electrones se comportan como ondas. Si el experimento se efectúa a intensidades más bajas del haz durante un periodo bastante largo, el patrón de interferencia continúa observándose. En primer lugar, uno sólo observa puntos de luz que son como "balas" fotónicas que golpean en una forma aparentemente aleatoria, pero después de una larga exposición se observa un patrón de puntos luminosos. Esto se ilustra en los patrones simulados por computadora en la figura 41.2. Advierta que el patrón de interferencia se vuelve más claro conforme aumenta el número de electrones que alcanzan al detector.

Si un solo electrón produce ondas en fase cuando llega a una de las rendijas, la teoría ondulatoria estándar puede emplearse para determinar la separación angular θ entre el máximo de probabilidad central y su mínimo vecino. El mínimo ocurre cuando la diferencia de longitud de la trayectoria entre A y B en la figura 41.1 es la mitad de una longitud de onda, o

$$D \operatorname{sen} \theta = \frac{\lambda}{2}$$



a) Después de 28 electrones



b) Después de 1 000 electrones



c) Después de 10 000 electrones



d) Patrón de electrones en doble rendija

Figura 41.2 a), b), c) Patrones de interferencia simulados por computadora para un haz de electrones que inciden sobre una doble rendija. *(Tomado de E. R. Huggins,* Physics I, *New York, W. A. Benjamin, 1968)* d) Fotografía de un patrón de interferencia de doble rendija producido por electrones. *(Tomado de C. Jönsson,* Zeitschrift für Physik *161:454, 1961; usado con permiso.)*

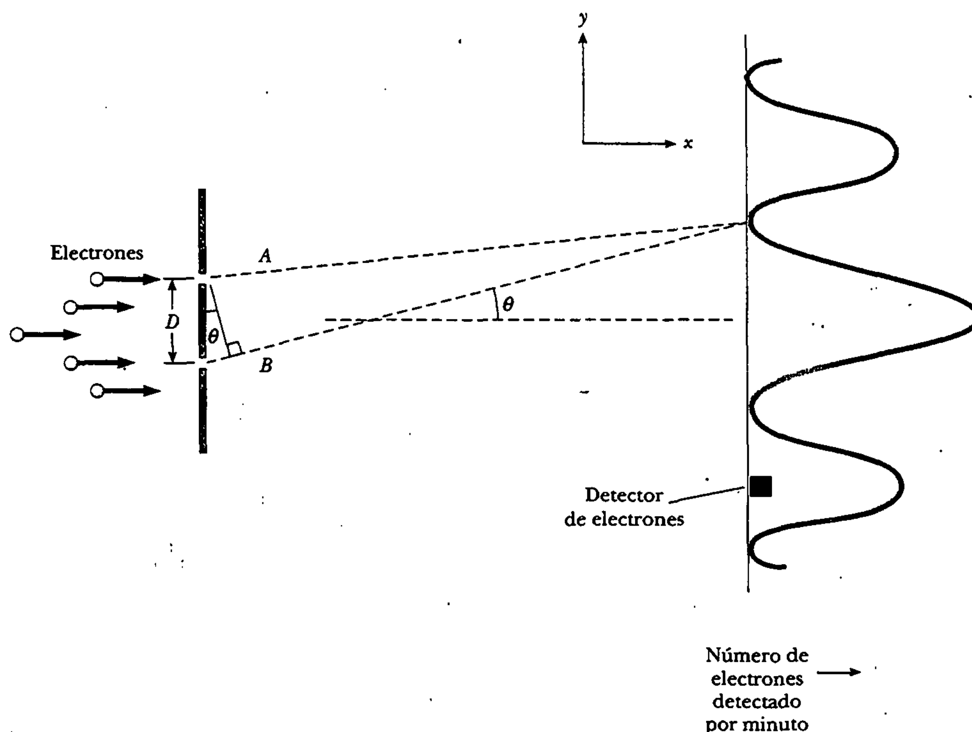


Figura 41.1 Difracción de electrones. La separación entre rendijas D es mucho mayor que el ancho de cada rendija y mucho menor que la distancia entre las rendijas y el detector.

Puesto que la longitud de onda de De Broglie del electrón está dada por $\lambda = h/p_x$ se ve que, para θ pequeña,

$$\text{sen}\,\theta \approx \theta = \frac{h}{2p_xD}$$

De este modo, la naturaleza dual del electrón se muestra claramente en el experimento: **Aunque los electrones se detectan como partículas en un punto localizado en algún instante de tiempo, la probabilidad de llegada en ese punto se determina por la intensidad de dos ondas de materia que interfieren.**

Función de onda ψ

En la mecánica cuántica las ondas materiales son descritas mediante la **función de onda** ψ con valor complejo. El cuadrado absoluto $|\psi|^2 = \psi^*\psi$, donde ψ^* es la conjugada compleja de ψ, da la probabilidad de encontrar una partícula en un punto dado en algún instante. La función de onda contiene toda la información que puede conocerse acerca de la partícula.

Ahora se usará la noción de la función de onda para investigar algunos otros resultados inusuales del experimento de doble rendija. Si una rendija se cubre durante el experimento, se obtiene una curva simétrica con un pico alrededor del centro de la rendija abierta, muy similar al patrón formado por las balas disparadas a través de un agujero en una placa blindada. Las dos curvas azules traslapadas en el centro de la figura 41.3 son gráficas de electrones detectados por minuto, con sólo una rendija abierta. Estas curvas se expresan como $|\psi_1|^2 = \psi_1{}^*\psi_1$ y $|\psi_2|^2 = \psi_2{}^*\psi_2$, donde ψ_1 y ψ_2 representan al electrón que pasa por las rendijas 1 y 2, respectivamente.

Si un experimento se lleva a cabo con la rendija 2 bloqueada durante la primera mitad del experimento y luego la rendija 1 se bloquea durante el tiempo restante, el patrón acumulado de electrones detectados por minuto, mostrado por la curva azul sobre el lado derecho de la figura 41.3, es por completo diferente del patrón obtenido con ambas rendijas abiertas (curva roja). En la curva de la rendija sola ya

no hay una probabilidad máxima de llegada en $\theta = 0$. De hecho, **se ha perdido el patrón de interferencia y el resultado acumulado es simplemente la suma de los resultados individuales.** Ya que el electrón debe pasar por la rendija 1 o por la 2, está tan localizado e indivisible en las rendijas como cuando se mide en el detector. De este modo, el patrón azul a la derecha en la figura 41.3 debe representar la suma de aquellos electrones que provienen de la rendija 1, $|\psi_1|^2$, y aquellos que provienen de la rendija 2, $|\psi_2|^2$.

Cuando ambas rendijas están abiertas es tentador suponer que el electrón pasa a través de la rendija 1 o de la 2, y que los conteos por minuto están dados de nuevo por $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$. Sin embargo, los resultados experimentales, indicados por el patrón de interferencia rojo en la figura 41.3, contradice esta suposición. Así, la creencia de que el electrón se localiza y atraviesa sólo una rendija cuando ambas están abiertas es errónea (¡una conclusión dolorosa!) De alguna manera la propiedad ondulatoria del electrón está presente en ambas rendijas.

Para encontrar la probabilidad de detectar al electrón en un punto particular en el detector cuando ambas rendijas están abiertas, se puede decir que el electrón está en un *estado de superposición* dado por

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

De esta manera, la probabilidad de hallar al electrón con el detector es $|\psi_1 + \psi_2|^2$ y no $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$. Ya que en general las ondas de materia que parten en fase en las rendijas recorren diferentes distancias hasta el detector, ψ_1 y ψ_2 poseen una diferencia de fase relativa ϕ en el detector. Empleando un diagrama de fasores (Fig. 41.4) para encontrar $|\psi_1 + \psi_2|^2$, se obtiene de inmediato

$$|\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2|\psi_1||\psi_2| \cos \phi$$

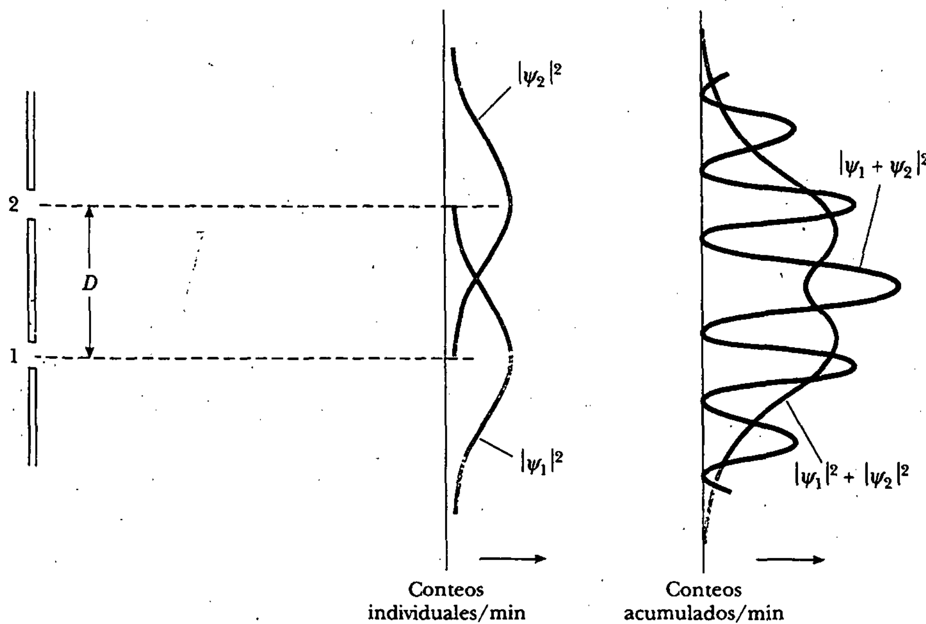


Figura 41.3 Las dos curvas azules en la mitad representan los patrones de rendijas individuales con la rendija superior o inferior cerrada. La curva azul sola en la gráfica de la derecha representa el patrón acumulado de conteos por minuto cuando cada rendija se cierra la mitad del tiempo. La curva roja representa el patrón de difracción con ambas rendijas abiertas al mismo tiempo.

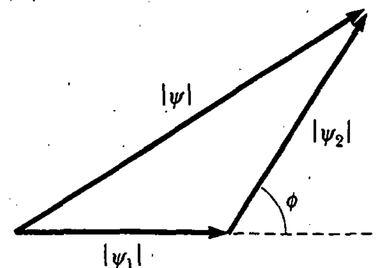


Figura 41.4 Diagrama de fasores para representar la adición de dos cantidades complejas ψ_1 y ψ_2.

donde $|\psi_1|^2$ es la probabilidad de detección si la rendija 1 está abierta y la 2 cerrada, y $|\psi_2|^2$ es la probabilidad de detección si la rendija 2 está abierta y la 1 cerrada. El término $2|\psi_1||\psi_2| \cos \phi$ en dicha expresión es el término de interferencia, el cual surge de la fase relativa ϕ de las ondas, en analogía con la suma de fasores usada en óptica ondulatoria (véase el capítulo 37).

Para interpretar tales resultados se tiene que concluir que *la propiedad ondulatoria de un electrón interactúa con ambas rendijas en forma simultánea.* Si intenta determinar por medios experimentales cuál rendija atraviesa el electrón, el simple hecho de medir destruye el patrón de interferencia. Por tanto, es imposible realizar tal determinación. En efecto, sólo se puede decir que **¡el electrón pasa a través de ambas rendijas!** Los mismos argumentos se aplican a los fotones.

Pregunta sorpresa 41.1

Describa la señal de un detector de electrones conforme se aleja de manera lateral frente a tres rendijas donde se están difractando electrones con la misma energía.

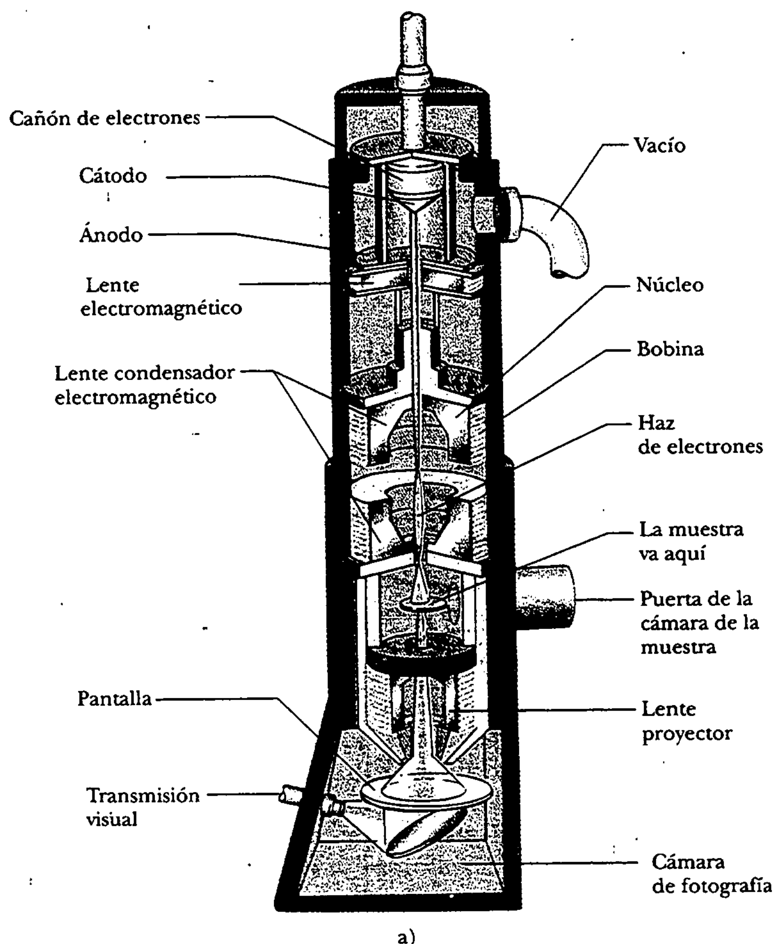




Figura 41.5 a) Diagrama de un microscopio electrónico de transmisión para visualizar una muestra finamente seccionada. Las "lentes" que controlan el haz de electrones son bobinas de deflexión magnética. b) Un microscopio electrónico. *(W. Ormerod/Visuals Unlimited)*

El microscopio electrónico

Un práctico dispositivo que se basa en las características ondulatorias de los electrones es el **microscopio electrónico**. En la figura 41.5 se presenta un microscopio electrónico *de transmisión*, usado para visualizar muestras planas muy delgadas. En muchos aspectos es similar a un microscopio óptico, pero el microscopio electrónico tiene una potencia de resolución mucho mayor debido a que los electrones pueden acelerarse hasta energías cinéticas muy altas, proporcionándoles longitudes de onda muy cortas. Ningún microscopio puede detectar detalles que son significativamente menores que la longitud de onda de la radiación utilizada para iluminar el objeto. Por lo común, las longitudes de onda de los electrones son casi 100 veces más cortas que las de la luz visible empleada en microscopios ópticos. Como resultado, los microscopios electrónicos con lentes ideales podrían distinguir detalles casi 100 veces menores que aquellos distinguidos mediante un microscopio óptico. (Radiación de la misma longitud de onda que los electrones en un microscopio electrónico se encuentra en la región de rayos X del espectro.)

El haz de electrones en un microscopio electrónico se controla mediante desviación electrostática o magnética, la cual actúa sobre los electrones para enfocar el haz en una imagen. En vez de examinar la imagen a través de un ocular, como en un microscopio ordinario, el observador mira una imagen formada sobre una pantalla fluorescente. (La pantalla de observación debe ser fluorescente porque de otro modo la imagen producida no sería visible.)

Al principio del capítulo se muestra una fotografía tomada con un microscopio electrónico *exploratorio*, el cual opera de una manera algo diferente para revelar detalles superficiales de una muestra tridimensional.

EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

Si usted fuera a medir la posición y rapidez de una partícula en cualquier instante, siempre se enfrentaría con incertidumbres experimentales en sus mediciones. De acuerdo con la mecánica clásica, no hay una barrera fundamental para un mejoramiento final de los aparatos o procedimientos experimentales existentes. En otras palabras es posible, en principio, hacer estas mediciones con una incertidumbre arbitrariamente pequeña. La teoría cuántica predice, sin embargo, que tal barrera existe. En 1927 Werner Heisenberg (1901-1976) introdujo esta noción, la cual ahora se conoce como **principio de incertidumbre de Heisenberg**:

> Si una medición de la posición se hace con precisión Δx y una medición simultánea de *momentum* lineal se lleva a cabo con precisión Δp_x, entonces el producto de las dos incertidumbres nunca puede ser más pequeño que $\hbar/2$:

$$\Delta x\, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \textbf{(41.1)}$$

Principio de incertidumbre de Heisenberg

donde $\hbar = h/2\pi$. En otras palabras, **es físicamente imposible medir en forma simultánea la posición exacta y el *momentum* lineal exacto de una partícula.** Si Δx es muy pequeña, entonces Δp_x es grande, y viceversa. Heisenberg tuvo cuidado en señalar que las inevitables incertidumbres Δx y Δp_x no surgen de imperfecciones en los instrumentos de medida. Más bien, provienen de la estructura cuántica de la materia —de efectos como el retroceso impredecible de un electrón cuando choca contra él un fotón, o la difracción de la luz o electrones pasando por una pequeña abertura—.

Para comprender el principio de incertidumbre, considere el siguiente experimento mental introducido por Heisenberg. Suponga que usted desea medir la po-

sición y el *momentum* lineal de un electrón de la manera más exacta posible. Usted podría efectuar lo anterior viendo el electrón con un potente microscopio óptico. Con el fin de ver el electrón, y de esa manera determinar su posición, al menos un fotón de luz debe rebotar en el electrón, como se muestra en la figura 41.6a, y después pasar a través del microscopio hasta su ojo, como se muestra en la figura 41.6b. Sin embargo, cuando choca con el electrón, el fotón transfiere cierta cantidad desconocida de su *momentum* al electrón. Por tanto, en el proceso de localizar el electrón con mucha exactitud —es decir, haciendo Δx muy pequeña mediante el uso de luz con una longitud de onda corta (y en consecuencia un *momentum* elevado)— la misma luz que le permite a usted conseguir su propósito cambia el *momentum* del electrón hasta un grado indeterminado (haciendo Δp_x muy grande).

Analice el choque advirtiendo primero que el fotón incidente tiene *momentum* h/λ. Como resultado del choque, el fotón transfiere parte o todo su *momentum* a lo largo del eje x al electrón. En consecuencia, la *incertidumbre* en el *momentum* del electrón después del choque es tan grande como el *momentum* del fotón incidente: $\Delta p_x = h/\lambda$. Asimismo, puesto que el fotón posee también propiedades ondulatorias, se esperaría determinar la posición del electrón hasta dentro de una longitud de onda de la luz que se está usando para verlo, de modo que $\Delta x = \lambda$. La multiplicación de estas dos incertidumbres produce

$$\Delta x\, \Delta p_x = \lambda\left(\frac{h}{\lambda}\right) = h$$

El valor h representa el mínimo en los productos de las incertidumbres. Puesto que tal incertidumbre siempre puede ser más grande que este mínimo, se tiene

$$\Delta x\, \Delta p_x \geq h$$

Aparte del factor numérico de $1/4\pi$ introducido por el análisis más preciso de Heisenberg, el resultado concuerda con la ecuación 41.1.

Pregunta sorpresa 41.2

Para determinar el emplazamiento de un electrón se envía a través de una rendija estrecha. Cuanto más estrecha sea la rendija, se conocerá de manera más precisa la ubicación del electrón. ¿Por qué lo anterior no proporciona un escape de las limitaciones del principio de incertidumbre de Heisenberg?



Werner Heisenberg [illegible] ciones significativas a la física, incluyendo su famoso principio de incertidumbre, por el cual recibió el premio Nobel en 1932; el desarrollo de un modelo abstracto de mecánica cuántica denominado mecánica de matriz; la predicción de dos formas de hidrógeno molecular; y modelos teóricos del núcleo. *(Cortesía de la Universidad de Hamburgo)*

El principio de incertidumbre de Heisenberg permite entender mejor la naturaleza dual onda-partícula de la luz y la materia. Se ha visto que la descripción ondulatoria de cualquier entidad que se esté estudiando es bastante diferente de la descripción corpuscular. Por tanto, si un experimento (como el efecto fotoeléctrico) se diseña para revelar el carácter de partícula de, por ejemplo, un electrón, su carácter de onda se vuelve menos aparente. Si un experimento (como la difracción por medio de un cristal) se diseña para medir las propiedades de onda del electrón, su carácter de partícula se vuelve menos aparente.

Otra relación de incertidumbre impone un límite en la exactitud con la cual la energía de un sistema ΔE puede medirse en un intervalo de tiempo finito Δt:

$$\Delta E\, \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \textbf{(41.2)}$$

Tal relación es plausible si se considera una medición de frecuencia de cualquier onda. Por ejemplo, considere medir la frecuencia de una onda electromagnética de 1 000 Hz. Si su dispositivo de medición de frecuencia tiene una sensibilidad fija de $\pm$ 1 ciclo, en 1 s se mide una frecuencia de (1 000 $\pm$ 1) ciclos/1 s, pero en 2 s se mide una frecuencia de (2 000 $\pm$ 1) ciclos/2 s. Así, la incertidumbre en la frecuen-

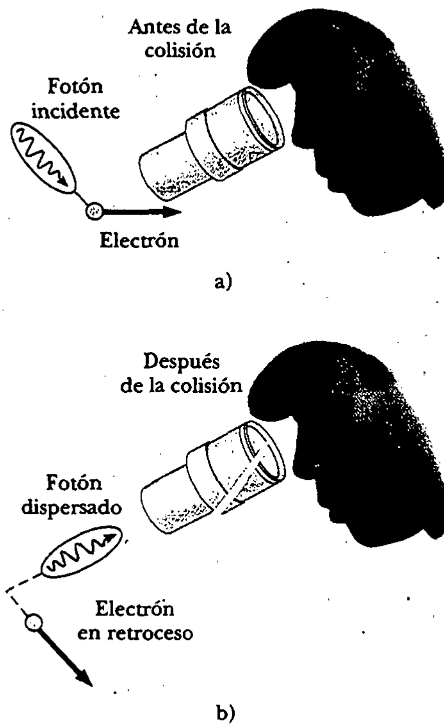


Figura 41.6 Un experimento mental para visualizar un electrón con un poderoso microscopio óptico. a) El electrón se mueve hacia la derecha antes de chocar con el fotón. b) El electrón retrocede (su *momentum* cambia) como resultado de la colisión con el fotón.

cia Δf es inversamente proporcional a Δt, el intervalo de tiempo durante el cual se efectúa la medición. La relación se establece como

$$\Delta f \, \Delta t \approx 1$$

Puesto que todos los sistemas cuánticos son similares a las ondas y pueden describirse por medio de la relación $E = hf$, se sustituye $\Delta f = \Delta E/h$ en la expresión anterior para obtener

$$\Delta E \, \Delta t \approx h$$

en concordancia básica con la ecuación 41.2, aparte del factor de $1/4\pi$.

La presente sección concluye con ejemplos de los tipos de cálculos que pueden hacerse con el principio de incertidumbre. Tales "cálculos de atrás hacia adelante" son sorprendentes por su simplicidad y por su descripción esencial de sistemas cuánticos, de los cuales se desconocen los detalles.

EJEMPLO CONCEPTUAL **¿El modelo de Bohr es realista?**

De acuerdo con el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón en el estado base se mueve en una órbita circular de 0.529×10^{-10} m de radio. En vista del principio de incertidumbre de Heisenberg, ¿es realista este modelo?

Solución Según el principio de incertidumbre, el producto $\Delta p_r \Delta r \geq \hbar/2$, donde Δp_r es la incertidumbre en el *momentum* lineal del electrón en la dirección radial. Calcule ahora dicha incertidumbre. El modelo especifica el radio de la órbita circular de manera muy precisa. Cuando se señala el radio a tres dígitos significativos, se implica que la incertidumbre en la posición radial es a lo sumo $\Delta r \approx 0.000\,5 \times 10^{-10}$ m. La incertidumbre correspondiente en el *momentum* del electrón en la dirección radial es al menos

$$\Delta p_r \approx \frac{\hbar}{2\Delta r} = \frac{1.05 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{2(0.000\,5 \times 10^{-10}\,\text{m})} \approx 1 \times 10^{-21}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

La incertidumbre correspondiente en la rapidez radial del electrón (haciendo uso de cálculos no relativistas) es

$$\Delta v_r \approx \frac{\Delta p_r}{m_e} = \frac{1 \times 10^{-21}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}}{9.1 \times 10^{-31}\,\text{kg}} \approx 1 \times 10^{9}\,\text{m/s}$$

Un cálculo relativista también daría una mayor incertidumbre en la rapidez. Como la incertidumbre de la rapidez radial es del orden de diez veces la velocidad de la luz, se debe concluir que ¡el modelo de Bohr no es una descripción razonable del átomo de hidrógeno!

EJEMPLO **Localización de un electrón**

Se mide un valor de 5.00×10^3 m/s para la rapidez de un electrón, hasta una precisión de 0.003 00%. Encuentre la incertidumbre mínima al determinar la posición del electrón.

Solución El *momentum* del electrón es

$$p_x = mv = (9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(5.00 \times 10^3\ \text{m/s})$$

$$= 4.56 \times 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

La incertidumbre en p_x es 0.003 00% de tal valor:

$$\Delta p_x = (0.000\,030\,0)(4.56 \times 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\text{m/s})$$
$$= 1.37 \times 10^{-31}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Ahora puede calcularse la incertidumbre mínima en la posición empleando este valor de Δp_x y la ecuación 41.1:

$$\Delta x\,\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} = \frac{1.05 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{2(1.37 \times 10^{-31}\ \text{kg}\cdot\text{m/s})} = 0.383\ \text{mm}$$

EJEMPLO **El ancho de líneas espectrales**

A pesar de que un átomo excitado puede radiar en cualquier tiempo desde $t = 0$ a $t = \infty$, el tiempo promedio después de la excitación a la cual un grupo de átomos radia se llama **tiempo de vida** τ. a) Si $\tau = 1.0 \times 10^{-8}$ s, utilice el principio de incertidumbre para calcular el ancho de línea Δf producido por dicho tiempo de vida finito.

b) Si la longitud de onda de la línea espectral involucrada en el proceso es 500 nm, ¿cuál es la fracción de ensanchamiento $\Delta f/f$?

Solución Utilice $\Delta E\,\Delta t \geq \hbar/2$, donde $\Delta E = h\Delta f$ y $\Delta t = 1.0 \times 10^{-8}$ s es el tiempo promedio disponible para medir el estado excitado. Así, el valor mínimo de Δf es

$$\Delta f = \frac{1}{4\pi(1.0 \times 10^{-8}\ \text{s})} = 8.0 \times 10^6\ \text{Hz}$$

Observe que ΔE es la incertidumbre en la energía del átomo excitado. Es también la incertidumbre en la energía del fotón emitido por un átomo en este estado. (Advierta que en la teoría de Bohr las líneas espectrales tendrían anchos de línea infinitamente pequeños pues los niveles de energía son precisos.)

Solución Primero encuentre la frecuencia f de esta línea:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}}{500 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 6.00 \times 10^{14}\ \text{Hz}$$

Por consiguiente,

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{8.0 \times 10^6\ \text{Hz}}{6.00 \times 10^{14}\ \text{Hz}} = 1.3 \times 10^{-8}$$

Tal estrechez de línea natural podría verse con un interferómetro sensible. Sin embargo, por lo general los efectos de presión y temperatura suelen oscurecer el ancho de la línea natural y ensanchar la línea por medio de mecanismos asociados con el efecto Doppler y colisiones.

DENSIDAD DE PROBABILIDAD

En los capítulos 34, 37 y 40 se revelaron varios aspectos de la luz, por tanto, se puede proporcionar un resumen detallado de la naturaleza de la luz del modo siguiente: Un fotón es una partícula cuántica que tiene masa cero y transporta energía y *momentum* conforme se mueve como una onda de campos eléctrico y magnético. Su ecuación de movimiento es la ecuación de onda para las ondas electromagnéticas:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

para el campo eléctrico, y una ecuación similar para el campo magnético. La intensidad de la onda es proporcional al cuadrado del campo eléctrico y se mide como la rapidez de bombardeo de fotones sobre un detector.

El propósito en el presente capítulo es proporcionar una visión análoga de cualquier partícula material (una que tenga masa distinta de cero). Como se advirtió en la sección 41.1, la probabilidad de encontrar una partícula material en un punto dado en algún instante está dada por $|\psi|^2$, el cuadrado absoluto de una función de onda de valor complejo ψ. Una función de onda de este tipo contiene toda la información que se puede conocer acerca de la partícula. Tal interpretación de ondas materiales fue sugerida por primera vez por Max Born (1882-1970) en 1928. En 1926

Erwin Schrödinger (1887-1961) propuso una ecuación de onda que describe cómo las ondas de materia cambian en el espacio y en el tiempo. (La propagación análoga de las ondas electromagnéticas está gobernada por las ecuaciones de Maxwell.) La *ecuación de Schrödinger* representa un elemento clave en la teoría de la mecánica cuántica.

Una pregunta surge de manera bastante natural a partir del enunciado de que la materia tiene tanto una naturaleza ondulatoria como una naturaleza corpuscular: si se está describiendo una partícula, ¿cómo se observa que está ondulando? En los casos de ondas en cuerdas, en el agua y sonoras, la onda se representa por medio de alguna cantidad que varía con el tiempo y la posición. De manera similar, la función de onda ψ para ondas materiales depende tanto de la posición de todas las partículas en un sistema como del tiempo, por lo que suele escribirse $\psi(x, y, z, t)$. Si ψ se conoce para una partícula, entonces es posible describir las propiedades corpusculares de la partícula. De hecho, el problema fundamental de la mecánica cuántica es éste: dada la función de onda en algún instante, encuentre la función de onda en algún tiempo ulterior t.

En la sección 40.7 se encontró que la ecuación de De Broglie relaciona el *momentum* de una partícula con su longitud de onda por medio de la relación $p = h/\lambda$. Si una partícula libre tiene un *momentum* conocido con precisión, su función de onda es una onda sinusoidal de longitud de onda $\lambda = h/p$, y la partícula tiene igual probabilidad de estar en algún punto a lo largo del eje x. La función de onda para esta partícula libre que se mueve a lo largo del eje x puede escribirse como

$$\psi(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A \operatorname{sen}(kx) \qquad \textbf{(41.3)}$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda angular y A es una amplitud constante. Como se mencionó antes, la función de onda es generalmente una función tanto de la posición como del tiempo. La ecuación 41.3 representa la parte de la función de onda que depende sólo de la posición. Por tal razón se puede ver $\psi(x)$ como una "instantánea" de la función de onda en un instante dado, como se muestra en la figura 41.7a. La función de onda para una partícula cuya longitud de onda no se define de manera precisa se muestra en la figura 41.7b. Puesto que la longitud de onda no se define precisamente, se deduce que el *momentum* lineal se conoce sólo de manera aproximada. Esto es, si se midiera el *momentum* de la partícula, el resultado tendría cualquier valor en algún intervalo, determinado por la dispersión de la longitud de onda. Cuanto más grande sea la incertidumbre en el *momentum*, mayor será la ubicación de la partícula, lo cual se refleja en una densidad de probabilidad incrementada en la posición de la partícula.

Aunque no se puede medir ψ, en la sección 41.1 se vio que sí se puede medir $|\psi|^2$, una cantidad que describe la probabilidad de encontrar la partícula en una posición particular y en cierto momento. Para ser más específica, si ψ representa a una sola partícula, entonces $|\psi(x)|^2$ —llamada **densidad de probabilidad**— es la probabilidad por unidad de volumen de que una partícula se encontrará dentro de un volumen infinitesimal que contenga al punto x. Esta interpretación, sugerida por primera vez por Born en 1928, también puede establecerse de la siguiente manera: Si dV es un pequeño elemento de volumen que rodea a algún punto, la probabilidad de encontrar la partícula en ese elemento de volumen es $|\psi|^2\,dV$. En el presente capítulo se trata sólo con sistemas unidimensionales, en los que la partícula debe localizarse a lo largo del eje x; por ello, se sustituye dV por dx. En tal caso la probabilidad, $P(x)\,dx$, de que la partícula se encontrará en el intervalo infinitesimal dx alrededor del punto x es

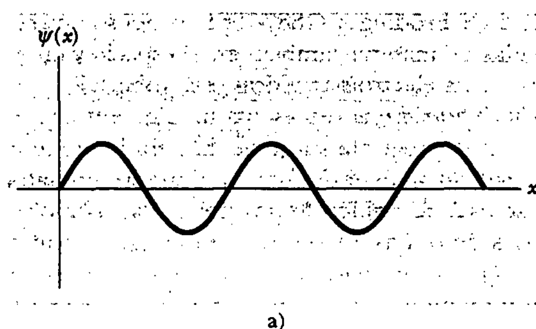
Densidad de probabilidad $|\psi|^2$

$$P(x)\,dx = |\psi|^2\,dx$$

Ya que la partícula debe estar en algún lugar a lo largo del eje x, la suma de las probabilidades sobre todos los valores de x debe ser 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2\,dx = 1 \qquad \textbf{(41.4)}$$

Condición de normalización sobre ψ



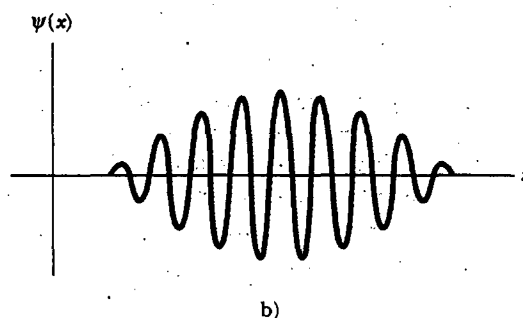


Figura 41.7 a) Función de onda para una partícula cuya longitud de onda es conocida con precisión. b) Función de onda para una partícula cuya longitud de onda no se conoce con precisión y, por tanto, su *momentum* se conoce sólo sobre cierto intervalo de valores.

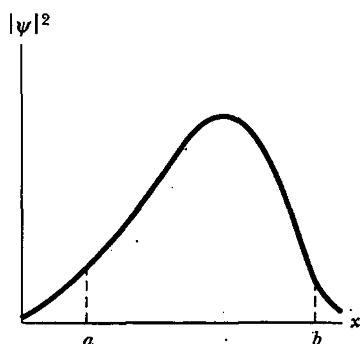


Figura 41.8. La probabilidad de que una partícula se encuentre en el intervalo $a \leq x \leq b$ es el área bajo la curva desde a hasta b.

Cualquier función de onda que satisfaga la ecuación 41.4 se dice que está normalizada y cumple la **condición de normalización**. La normalización es simplemente un enunciado de que la partícula existe en algún punto todo el tiempo. Por consiguiente, aunque no es posible especificar la posición de una partícula con completa certidumbre, es posible, por medio de $|\psi|^2$, especificar la probabilidad de observarla en una posición dada. Además, *la probabilidad de encontrar la partícula en el intervalo* $a \leq x \leq b$ *es*

$$P_{ab} = \int_a^b |\psi|^2 \, dx \qquad \textbf{(41.5)}$$

La probabilidad P_{ab} es el área bajo la curva de densidad de probabilidad *versus* x entre $x = a$ y $x = b$, como en la figura 41.8.

Experimentalmente, siempre existe una probabilidad finita de encontrar una partícula en algún punto y en cierto instante, por lo que el valor de la probabilidad debe estar entre los límites 0 y 1. Por ejemplo, si la densidad de probabilidad es 0.3 m^{-1} en algún punto, la probabilidad de encontrar la partícula en algún pequeño intervalo Δx centrado en dicho punto es 0.3 Δx.

La función de onda ψ satisface una ecuación de onda, del mismo modo que el campo eléctrico asociado con una onda electromagnética satisface una ecuación de onda que se obtiene de las ecuaciones de Maxwell. La ecuación de onda satisfecha por ψ, que es la ecuación de Schrödinger, no se puede derivar a partir de cualesquiera leyes fundamentales, pero ψ se puede calcular a partir de ella. Aunque ψ no es una cantidad mensurable, todas las cantidades mensurables de una partícula, como su energía y *momentum* lineal, pueden derivarse a partir del conocimiento de ψ. Por ejemplo, una vez que se conoce la función de onda para una partícula, es posible calcular la posición promedio x de la partícula, después de muchos ensayos experimentales. Esta posición promedio recibe el nombre de **valor de esperanza** de x y está definida por la ecuación

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 \, dx \qquad \textbf{(41.6)}$$

Valor de esperanza de x

(Los paréntesis angulares ⟨ ⟩ denotan valores de esperanza.) Esta expresión implica que la partícula se encuentra en un estado definido, de manera que la densidad de probabilidad es independiente del tiempo. Advierta que el valor de esperanza es equivalente al valor promedio de x que se obtendría al tratar con un gran número de partículas en el mismo estado. Además, el valor de esperanza de cualquier función $f(x)$ se encuentra empleando la ecuación 41.6 con x sustituida por $f(x)$.

UNA PARTÍCULA EN UNA CAJA

Desde un punto de vista clásico, si una partícula está confinada moviéndose paralela a un eje x y a rebotar atrás y adelante entre dos paredes impenetrables (Fig. 41.9), es fácil describir su movimiento. Si la rapidez de la partícula es v, entonces la magnitud de su *momentum* lineal (mv) permanece constante, como sucede con su energía cinética. Además, la física clásica no impone restricciones en los valores de su *momentum* y energía. El enfoque de la mecánica cuántica de este problema es muy diferente y requiere que se encuentre la función de onda apropiada acorde con las condiciones de la situación.

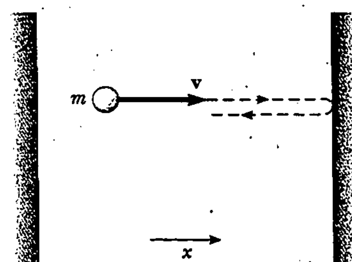


Figura 41.9 Una partícula de masa m y velocidad $\mathbf{v}$ confinada a moverse paralela al eje x y que rebota entre dos paredes impenetrables.

Antes de abordar el problema anterior resulta instructivo repasar la situación clásica de ondas estacionarias en una cuerda alargada (véanse las secciones 18.2 y 18.3). Si una cuerda de longitud L se fija en cada extremo, las ondas estacionarias establecidas en la cuerda deben tener nodos en los extremos, como se indica en la figura 41.10, debido a que la función de onda debe desaparecer en las fronteras. Las ondas estacionarias existen sólo cuando la longitud L de la cuerda es algún múltiplo entero de medias longitudes de onda. Es decir, se requiere que

$$L = n\frac{\lambda}{2}$$

o

$$\lambda = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Este resultado muestra que *la longitud de onda de una onda estacionaria en una cuerda está cuantizada.*

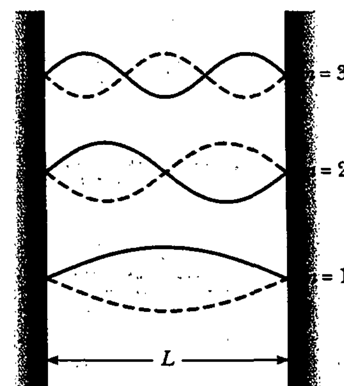


Figura 41.10 Ondas estacionarias establecidas en una cuerda de longitud L, estirada.

Como se expuso en la sección 18.2, cada punto sobre una onda estacionaria oscila con movimiento armónico simple. Además, todos los puntos oscilan con la misma frecuencia, pero la amplitud y del movimiento armónico simple de cualquier partícula en el medio difiere de un punto al siguiente y depende de qué tan lejos está un punto dado de un extremo. Se encuentra que la parte dependiente de la posición de la función de onda para una onda estacionaria es

$$y(x) = A \operatorname{sen}(kx) \qquad \textbf{(41.7)}$$

donde A es la amplitud máxima de la onda y $k = 2\pi/\lambda$. Puesto que $\lambda = 2L/n$, se ve que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2L/n} = n\frac{\pi}{L}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 41.7 se obtiene

$$y(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

De acuerdo con tal expresión, se ve que la función de onda para una onda estacionaria en una cuerda cumple con las condiciones de frontera requeridas —a saber, que para todos los valores de n, $y = 0$ en $x = 0$ y en $x = L$—. Las funciones de onda para $n = 1$, 2 y 3 se grafican en la figura 41.10.

Regrese ahora a la descripción mecánico-cuántica de una partícula en una caja. Ya que las paredes son impenetrables, la función de onda $\psi(x) = 0$ para $x \leq 0$ y para $x \geq L$, donde L es ahora la distancia entre las dos paredes, lo cual significa que la partícula nunca puede encontrarse afuera de la caja. Más aún, puesto que la función de onda debe ser continua en todas partes, se requiere que $\psi(0) = \psi(L) = 0$. Sólo son permitidas aquellas funciones de onda que satisfagan esta condición. En analogía con las ondas estacionarias sobre una cuerda, las funciones de onda permitidas para la partícula en la caja son sinusoidales y están dadas por

Funciones de onda permitidas para una partícula en una caja

$$\psi(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{41.8}$$

donde A es el valor máximo de la función de onda. Esta expresión muestra que, para una partícula confinada en una caja y que tiene una longitud de onda de De Broglie bien definida, ψ se representa por medio de una onda sinusoidal. Las longitudes de onda permitidas son aquellas para las cuales $L = n\lambda/2$. Tales estados permitidos del sistema se denominan **estados estacionarios** debido a que son ondas estacionarias.

La figura 41.11 presenta gráficas de ψ *versus* x y $|\psi$ [illegible] Como pronto se verá, dichos estados corresponden a las [illegible] más bajas de la partícula. Para $n = 1$, la probabilidad de enc[illegible] yor en $x = L/2$ —tal *posición es la más probable* para una partícula en es[illegible] Para $n = 2$, $|\psi|^2$ es un máximo en $x = L/4$ y de nuevo en $x = 3L/4$; lo anterior significa que ambos puntos son lugares igualmente probables para encontrar una partícula en este estado.

También existen puntos dentro de la caja en los cuales es imposible encontrar la partícula. Para $n = 2$, $|\psi|^2$ es cero en el punto medio, $x = L/2$; para $n = 3$, $|\psi|^2 = 0$ en $x = L/3$ y $x = 2L/3$; etcétera. Pero, ¿cómo la partícula va de un lugar a otro cuando no hay probabilidad de que exista en puntos intermedios? Se trata de una extra-

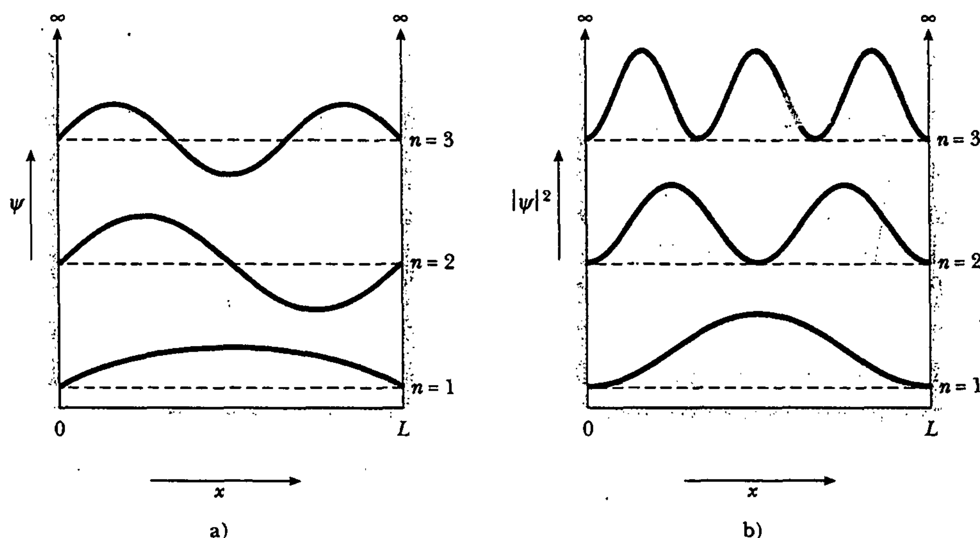


Figura 41.11 Los primeros tres estados estacionarios permitidos para una partícula confinada en una caja unidimensional. a) Las funciones de onda ψ para $n = 1$, 2 y 3. b) Las densidades de probabilidad $|\psi|^2$ para $n = 1$, 2 y 3.

ña consecuencia de la mecánica cuántica —se debe hacer a un lado la noción de que una partícula se mueve de un punto a otro mediante la ocupación de todas las posiciones involucradas—. En la mecánica cuántica los objetos no se visualizan como partículas sino como objetos más complicados que tienen atributos de partícula *y* de onda.

Pregunta sorpresa 41.3

Dibuje de nuevo la figura 41.11b, la probabilidad de encontrar una partícula en cierta posición en una caja, sobre la base de la mecánica clásica en lugar de la mecánica cuántica.

Pregunta sorpresa 41.4

a) Realice un bosquejo como la figura 41.11b para $n = 20$. Suponga que coloca en los confines de la caja un detector que muestrea la probabilidad de encontrar una partícula dentro de algunos estrechos límites Δx. ¿Qué mediría el detector conforme n tiende al infinito?

Ya que las longitudes de onda de la partícula están restringidas por la condición $\lambda = 2L/n$ la magnitud del *momentum* lineal se restringe a los valores

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2L/n} = \frac{nh}{2L}$$

La energía potencial dentro de la caja es constante, y es conveniente establecerla en $U = 0$. Por tanto, la energía total de la partícula es igual a su energía cinética. Empleando $p = mv$ se encuentra que los valores permitidos de la energía son

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{(nh/2L)^2}{2m}$$

Energías permitidas para una partícula en una caja

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{41.9}$$

Como se ve a partir de esta expresión, *la energía de la partícula está cuantizada,* como se esperaba. La energía permitida más baja corresponde a $n = 1$, para la cual $E_1 = h^2/8mL^2$. Puesto que $E_n = n^2E_1$, los estados excitados correspondientes a $n = 2, 3, 4,\ldots$ tienen energías dadas por $4E_1$, $9E_1$, $16E_1$,... La figura 41.12 es un diagrama de niveles de energía que describe las posiciones de los estados permitidos. Observe que el estado $n = 0$ no está permitido, lo cual significa que, de acuerdo con la mecánica cuántica, la partícula nunca puede estar en reposo; la menor energía que ella puede tener, correspondiente a $n = 1$, se denomina **energía del punto cero**. Este resultado es claramente contradictorio con el punto de vista clásico, en el cual $E = 0$ es un estado aceptable. En el análisis de la mecánica cuántica, sólo los valores positivos diferentes de cero de E son considerados, ya que la energía total E es igual a la energía cinética y la energía potencial es cero.

Los niveles de energía son de especial importancia por la siguiente razón. Si la partícula se carga eléctricamente, puede emitir un fotón cuando desciende de un estado excitado, como E_3, a uno inferior, como E_2. También puede absorber un fotón cuya energía iguala la diferencia de energía entre dos estados permitidos. Por ejemplo, si la frecuencia del fotón es f, la partícula salta del estado E_1 al E_2 si $hf = E_2 - E_1$. Como se hizo notar en el capítulo 40, la emisión y absorción de fotones puede observarse por medio de espectroscopia, en la cual las longitudes de onda espectrales son una medida directa de estas diferencias de energía.

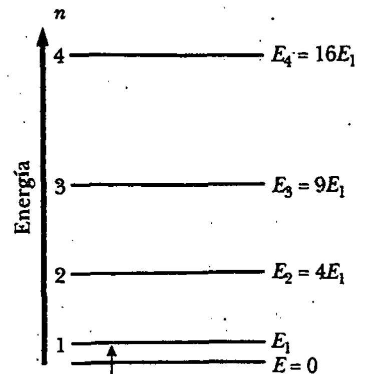


Figura 41.12 Diagrama de niveles de energía para una partícula confinada a una caja unidimensional de ancho L. La energía más baja permitida es $E_1 = h^2/8mL^2$.

EJEMPLO Un electrón ligado

Un electrón está confinado entre dos paredes impenetrables separadas por 0.200 nm. Determine los niveles de energía para los estados $n = 1$, 2 y 3.

Solución Para el estado $n = 1$ la ecuación 41.9 produce

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{8(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2.00 \times 10^{-10}\ \text{m})^2}$$

$$= 1.51 \times 10^{-18}\ \text{J} = 9.42\ \text{eV}$$

Para $n = 2$ y $n = 3$, $E_2 = 4E_1 = 37.7$ eV y $E_3 = 9E_1 = 84.8$ eV. Aunque éste es un modelo algo primitivo, puede usarse para describir un electrón atrapado en un sitio vacío de un cristal.

EJEMPLO Cuantización de energía de un objeto macroscópico

Un objeto de 1.00 mg está confinado a moverse entre dos paredes rígidas separadas por 1.00 cm. Calcule la rapidez mínima del objeto.

Solución La rapidez mínima corresponde al estado para el cual $n = 1$. Empleando la ecuación 41.9 con $n = 1$, se obtiene la energía del punto cero:

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{8(1.00 \times 10^{-6}\ \text{kg})(1.00 \times 10^{-2}\ \text{m})^2}$$

$$= 5.49 \times 10^{-58}\ \text{J}$$

Puesto que $E = K = \frac{1}{2}mv^2$, se tiene

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = 5.49 \times 10^{-58}\ \text{J}$$

$$v = \left[\frac{2(5.49 \times 10^{-58}\ \text{J})}{1.00 \times 10^{-6}\ \text{kg}}\right]^{1/2} = 3.31 \times 10^{-26}\ \text{m/s}$$

Tal rapidez es tan pequeña que el objeto se considera como si estuviera en reposo, que es lo que uno esperaría para la rapidez mínima de un objeto macroscópico.

Ejercicio Si la rapidez de la partícula es 3.00 cm/s, encuentre su energía y el valor de n que corresponde a dicha energía.

Respuesta 4.50×10^{-10} J; $n = 9.05 \times 10^{23}$. (Advierta que, para valores n tan grandes, nunca sería posible distinguir la naturaleza cuantizada de los niveles de energía, pues la diferencia entre los niveles $n = 9.05 \times 10^{23}$ y $n + 1 = 9.05 \times 10^{23} + 1$ es demasiado pequeña.)

EJEMPLO Modelo de un átomo

Un átomo puede verse como varios electrones en movimiento alrededor de un núcleo con carga positiva, donde los electrones están sujetos principalmente a la atracción eléctrica del núcleo. (Esta atracción está "oculta" en parte por los electrones del núcleo interno y, por tanto, está disminuida.) La figura 41.13 representa la energía potencial del electrón como una función de r. a) Emplee el modelo simple de una partícula en una caja para *estimar* la energía (en electronvolts) requerida para llevar a un electrón del estado $n = 1$ al $n = 2$, suponiendo que el átomo tiene un radio de 0.100 nm.

Solución Empleando la ecuación 41.9 y considerando la longitud L de la caja igual a 0.200 nm (el diámetro del átomo) y $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg, se encuentra que, como en el ejemplo 41.4,

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2$$

$$= \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{8(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2.00 \times 10^{-10}\ \text{m})^2}n^2$$

$$= (1.51 \times 10^{-18})n^2\ \text{J} = 9.42n^2\ \text{eV}$$

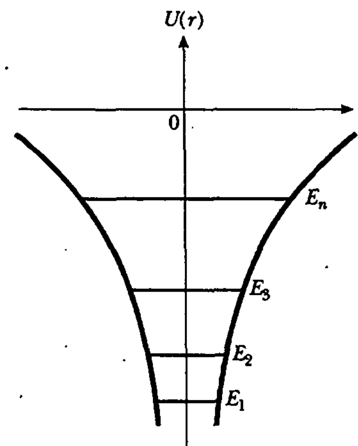


Figura 41.13 Modelo de energía potencial *versus* r para un átomo.

Por tanto, la diferencia de energía entre los estados $n = 1$ y $n = 2$ es

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 9.42(2)^2\ \text{eV} - 9.42(1)^2\ \text{eV} = 28.3\ \text{eV}$$

b) Calcule la longitud de onda del fotón que causaría esta transición.

Solución Empleando el hecho de que $\Delta E = hc/\lambda$ se obtiene

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{(28.3\ \text{eV} \times 1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}$$

$$= 4.39 \times 10^{-8}\ \text{m} = 43.9\ \text{nm}$$

Esta longitud de onda se encuentra en la región del ultravioleta lejano, y es interesante notar que el resultado es más o menos correcto. A pesar de que el modelo sobresimplificado da una buena estimación para las transiciones entre los niveles inferiores del átomo, la estimación se vuelve progresivamente errónea para transiciones de mayor energía.

LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER

Como se mencionó antes, la función de onda para las ondas de De Broglie debe satisfacer una ecuación desarrollada por Schrödinger. Uno de los métodos de la mecánica cuántica es determinar una solución a esta ecuación, la cual produce a su vez las funciones de onda permitidas y los niveles de energía del sistema en consideración. Las manipulaciones apropiadas de las funciones de onda permiten el cálculo de todas las características mensurables del sistema.

En la sección 16.9 se dedujo la ecuación 16.26, la forma general de la ecuación de onda para ondas que viajan a lo largo del eje x.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \textbf{(41.10)}$$

donde v es la rapidez de la onda y la variable y depende de x y t. Las ondas materiales son más complicadas y no obedecen esta ecuación de onda.

La función de onda para una partícula confinada a una dimensión es

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t} \qquad \textbf{(41.11)}$$

donde ω es la frecuencia angular de la onda material y $\Psi(x, t)$ representa la función de onda dependiente del tiempo completo y el espacio. En la investigación se necesitará enfocar la atención sólo en $\psi(x)$, la parte espacial de la función de onda. Lo anterior satisface la ecuación

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi \qquad \textbf{(41.12)}$$

Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

Se trata de la famosa **ecuación de Schrödinger** aplicada a una partícula confinada a moverse a lo largo del eje x. Debido a que dicha ecuación es independiente del tiempo, se conoce comúnmente como *ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.* (No se estudiará la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en este texto.)

En un principio, si se conoce la energía potencial $U(x)$ del sistema, se puede resolver la ecuación 41.12 y obtener las funciones de onda y energías para los estados permitidos. Puesto que U puede variar con la posición, tal vez sea necesario resolver la ecuación en partes. En el proceso las funciones de onda para las diferentes regiones deben unirse uniformemente en las fronteras. En el lenguaje de las matemáticas se requiere que $\psi(x)$ sea *continua.* Además, para que $\psi(x)$ obedezca la condición de normalización (véase el texto que sigue a la ecuación 41.4), es necesario que $\psi(x)$

Condiciones requeridas para $\psi(x)$



Erwin Schrödinger, [illegible] Schrödinger es [illegible] como el creador de la mecánica cuántica. También produjo importantes ensayos en los campos de la mecánica estadística, la visión a color y la relatividad general. Schrödinger hizo mucho para acelerar la aceptación universal de la teoría cuántica mediante la demostración de la equivalencia matemática entre su mecánica cuántica y la más abstracta mecánica matricial desarrollada por Heisenberg.

se aproxime a cero conforme x tiende a $\pm\infty$. Por último, $\psi(x)$ debe ser *univaluada* y $d\psi/dx$ también debe ser continua para valores finitos de $U(x)$.

La tarea de resolver la ecuación de Schrödinger puede ser muy difícil, dependiendo de la forma de la función de energía potencial. Como se ha indicado, la ecuación de Schrödinger ha sido en extremo útil al explicar el comportamiento de los sistemas atómicos y nucleares, en tanto que la física clásica ha fracasado al intentarlo. Además, cuando la mecánica cuántica se aplica a objetos macroscópicos, los resultados concuerdan con la física clásica, como requiere el principio de correspondencia.

Regreso a la partícula en una caja

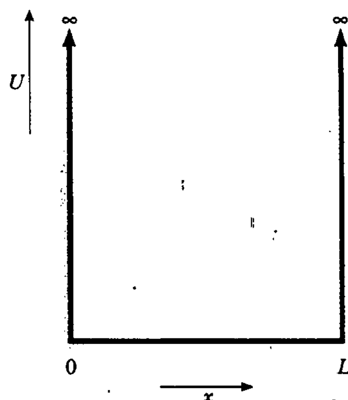


Figura 41.14 Una caja unidimensional de ancho L y paredes de altura infinita.

Ahora se resolverá la ecuación de Schrödinger para la partícula en una caja unidimensional de ancho L (Fig. 41.14). Las paredes son infinitamente altas, lo que corresponde a $U(x)=\infty$ para $x=0$ y $x=L$. La energía potencial es constante dentro de la caja, y de nuevo es conveniente elegir $U=0$ como su valor. Por tanto, en la región $0<x<L$ la ecuación de Schrödinger se puede expresar en la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = -k^2\psi \qquad \textbf{(41.13)}$$

donde

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Puesto que las paredes son infinitamente altas, la partícula no puede existir afuera de la caja. La partícula está confinada en forma permanente en la caja y no se puede encontrar afuera del intervalo $0<x<L$. En consecuencia, $\psi(x)$ debe ser cero afuera de la caja y en las paredes. La solución de la ecuación 41.13 que satisface las condiciones de frontera $\psi(x)=0$ en $x=0$ y $x=L$ es

$$\psi(x) = A\,\text{sen}(kx) \qquad \textbf{(41.14)}$$

Esto puede verificarse sin dificultades por medio de la sustitución en la ecuación 41.13. Advierta que la primera condición de frontera, $\psi(0)=0$, se satisface por la ecuación 41.14, pues sen $0=0$. La segunda condición de frontera, $\psi(L)=0$, se satisface sólo si kL es un múltiplo entero de π —esto es, si $kL=n\pi$, donde n es un entero—. Puesto que $k=\sqrt{2mE}/\hbar$, se ve que

$$kL = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}L = n\pi$$

La solución para las energías permitidas E produce

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2$$

Del mismo modo, las funciones de onda permitidas están dadas por

$$\psi_n(x) = A\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Estos resultados concuerdan con los obtenidos en la sección anterior (ecuaciones 41.8 y 41.9). Se deja como tarea (problema 25) demostrar que la constante de normalización A de esta solución es igual a $(2/L)^{1/2}$.

Sección opcional

UNA PARTÍCULA EN UN POZO DE ALTURA FINITA

Considere una partícula cuya energía potencial es cero en la región $0 < x < L$ —la cual se puede llamar *potencial de pozo*— y tiene un valor finito U afuera de esta región, como en la figura 41.15. Si la energía total E de la partícula es menor que U, clásicamente la partícula está confinada en forma permanente en el potencial de pozo. Sin embargo, de acuerdo con la mecánica cuántica hay una probabilidad finita de que la partícula pueda encontrarse afuera del pozo, aun si $E < U$. Esto es, la función de onda ψ por lo general no es cero afuera del pozo —en las regiones I y III en la figura 41.15— y por ello la densidad de probabilidad $|\psi|^2$ también es diferente de cero en estas regiones.

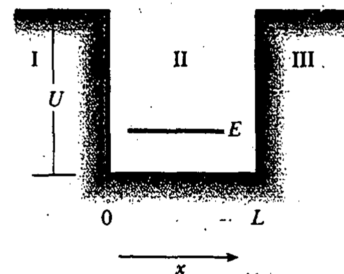


Figura 41.15 Diagrama de energía potencial de un pozo de altura finita U y ancho L. La energía total E de la partícula es menor que U.

En la región II, donde $U = 0$, las funciones de onda permitidas son de nuevo sinusoidales porque representan soluciones de la ecuación 41.13. Sin embargo, las condiciones de frontera no requieren ya que ψ sea cero en las paredes, como fue el caso con paredes infinitamente altas.

La ecuación de Schrödinger para las regiones I y III puede escribirse

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m(U - E)}{\hbar^2}\psi \quad (41.15)$$

Como $U > E$, el coeficiente del lado derecho es por fuerza positivo. Por tanto, se puede expresar la ecuación 41.15 en la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = C^2\psi \quad (41.16)$$

donde $C^2 = 2m(U - E)/\hbar^2$ es una constante positiva en las regiones I y III. Como usted puede verificar por medio de sustitución, la solución general de la ecuación 41.16 es

$$\psi = Ae^{Cx} + Be^{-Cx}$$

donde A y B son constantes.

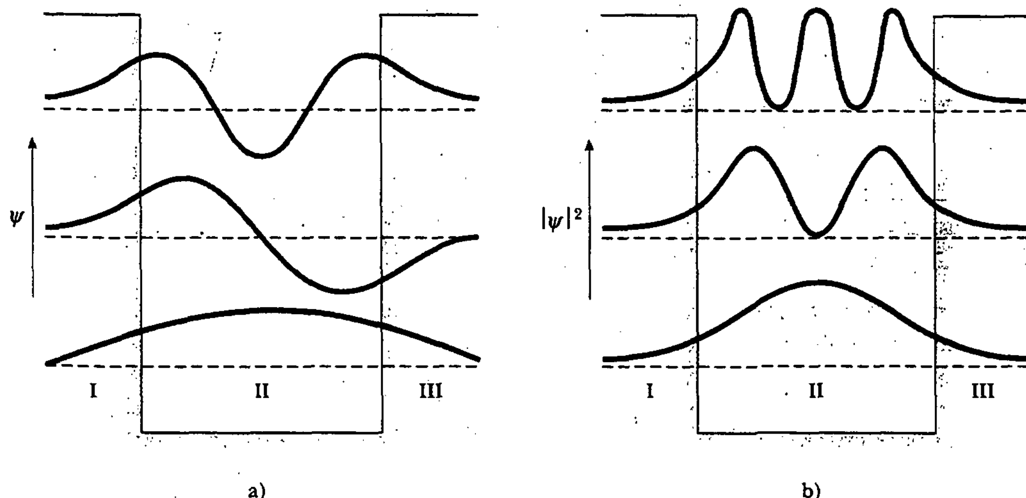


Figura 41.16 a) Funciones de onda ψ y b) densidades de probabilidad $|\psi|^2$ para los tres estados de energía más bajos para una partícula en un potencial de pozo de altura finita.

Se puede emplear esta solución general como un punto de partida para determinar la solución apropiada en el caso de las regiones I y III. La función que se elija para la solución debe permanecer finita sobre toda la región que se considera. En la región I, donde $x < 0$, se debe eliminar el término Be^{-Cx}. En otras palabras, se requiere que $B = 0$ en la región I para evitar un valor infinito de ψ correspondiente a grandes valores negativos de x. Del mismo modo, en la región III, donde $x > L$, debe eliminar el término Ae^{Cx}; esto se consigue haciendo que $A = 0$ en esta región; con ello evita un valor infinito de ψ para grandes valores positivos de x. Por tanto, las soluciones en las regiones I y III son

$$\psi_{\text{I}} = Ae^{Cx} \qquad \text{para } x < 0$$

$$\psi_{\text{III}} = Be^{-Cx} \qquad \text{para } x > L$$

En la región II la función de onda es sinusoidal y tiene la forma general

$$\psi_{\text{II}}(x) = F\,\text{sen}(kx) + G\cos(kx)$$

donde F y G son constantes.

Lo anterior muestra que las funciones de onda afuera del potencial de pozo (donde la física clásica prohíbe la presencia de la partícula) decaen en forma exponencial con la distancia. A grandes valores negativos de x, ψ_{I} se aproxima a cero en forma exponencial; a grandes valores positivos de x, ψ_{III} se acerca a cero en la misma forma. Estas funciones, junto con la solución sinusoidal en la región II, se muestran en la figura 41.16a para los primeros tres estados de energía. Al evaluar la función de onda completa se requiere que

$$\psi_{\text{I}} = \psi_{\text{II}} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\psi_{\text{I}}}{dx} = \frac{d\psi_{\text{II}}}{dx} \qquad \text{en } x = 0$$

$$\psi_{\text{II}} = \psi_{\text{III}} \qquad \text{y} \qquad \frac{d\psi_{\text{II}}}{dx} = \frac{d\psi_{\text{III}}}{dx} \qquad \text{en } x = L$$

La figura 41.16b ilustra las densidades de probabilidad para los estados mencionados. Observe que en cada caso las funciones de onda interior y exterior se unen uniformemente en las fronteras del potencial de pozo. Estas condiciones de frontera y gráficas provienen de la ecuación de Schrödinger.

La figura 41.16a muestra que las funciones de onda ψ no son iguales a cero en las paredes del potencial de pozo y en las regiones exteriores. Por tanto, las densidades de probabilidad $|\psi|^2$ son diferentes de cero en estos puntos. El hecho de que ψ sea diferente de cero en las paredes aumenta la longitud de onda de De Broglie en la región II (compare el caso de una partícula en un potencial de pozo de profundidad infinita; véase la Fig. 41.11), lo cual, a su vez, disminuye la energía y el *momentum* lineal de la partícula.

Sección opcional

EFECTO TÚNEL A TRAVÉS DE UNA BARRERA

Un fenómeno muy interesante y peculiar ocurre cuando una partícula incide en una barrera de altura y ancho finitos. Considere una partícula de energía E incidente sobre una barrera rectangular de altura U y ancho L, donde $E < U$ (Fig. 41.17). Desde el punto de vista clásico, la partícula se refleja porque no tiene suficiente energía para cruzar o incluso penetrar la barrera. Por consiguiente, las regiones II y III están clásicamente *prohibidas* para la partícula.

Sin embargo, de acuerdo con la mecánica cuántica, **todas las regiones son accesibles a la partícula, sin importar su energía,** ya que la amplitud de la onda de materia de De Broglie asociada con la partícula es diferente de cero en todos lados. Una

forma de onda típica para este caso, ilustrada en la figura 41.17, muestra a la onda penetrando en la barrera y más allá. Las funciones de onda son sinusoidales a la izquierda (región I) y a la derecha (región III) de la barrera, y se unen uniformemente con una función que decae en forma exponencial dentro de la barrera (región II).

Como la probabilidad de localizar a la partícula es proporcional a $|\psi|^2$, la cual no es cero dentro de la barrera y más allá, se concluye que la partícula se puede encontrar en la región III. Esta penetración de la barrera está en completo desacuerdo con la física clásica. La posibilidad de encontrar la partícula en el lado lejano de la barrera se denomina **efecto túnel** o **penetración de barrera**. Un análisis detallado muestra que si el efecto túnel tiene lugar, la barrera debe ser lo suficientemente estrecha para que el tiempo de paso Δt sea muy corto. Entonces la incertidumbre en la energía $\Delta E \leq \hbar/2\Delta t$ es tan grande que de hecho no se puede atribuir energía cinética negativa a la partícula en efecto túnel.

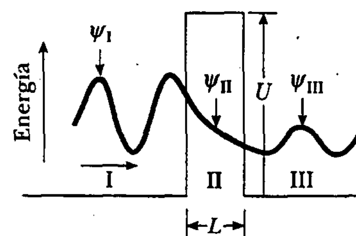


Figura 41.17 Función de onda ψ para una partícula incidente desde la izquierda sobre una barrera de altura U. La función de onda es sinusoidal en las regiones I y III pero decae exponencialmente en la región II.

¡Aunque sea difícil de creer, existe una posibilidad finita (aunque *muy* pequeña) de que una canica colocada dentro de una caja de zapatos de pronto aparecerá afuera de la caja (véase el problema 47)! Sin embargo, usted tendría que esperar durante varias vidas del universo para observar esto.

La probabilidad de efecto túnel puede describirse con un coeficiente de transmisión T y un coeficiente de reflexión R. El coeficiente de transmisión es la probabilidad de que la partícula pase a través de la barrera, y el coeficiente de reflexión es la probabilidad de que la partícula sea reflejada por la barrera. Porque la partícula incidente se refleja o se transmite, debe requerir que $T + R = 1$. Una expresión aproximada para T cuando $T \ll 1$ (una barrera muy alta o muy ancha) es

$$T \approx e^{-2CL} \qquad \textbf{(41.17)}$$

donde

$$C = \frac{\sqrt{2m(U - E)}}{\hbar} \qquad \textbf{(41.18)}$$

EJEMPLO 41. **Coeficiente de transmisión de un electrón**

Un electrón de 30 eV incide sobre una barrera cuya sección transversal es un cuadrado de 40 eV de altura. ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón realice efecto túnel a través de la barrera si el ancho de ésta es a) 1.0 nm y b) 0.10 nm?

Solución a) En esta situación la cantidad $U - E$ tiene el valor

$$U - E = (40 \text{ eV} - 30 \text{ eV}) = 10 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Empleando la ecuación 41.18 se encuentra que

$$2CL = 2\frac{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31} \text{kg})(1.6 \times 10^{-18} \text{J})}}{1.054 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}}$$

$$\times (1.0 \times 10^{-9} \text{m}) = 32.4$$

Así, la probabilidad de efecto túnel a través de la barrera es

$$T \approx e^{-2CL} = e^{-32.4} = 8.5 \times 10^{-15}$$

El electrón tiene sólo alrededor de una oportunidad en 10^{14} para realizar efecto túnel a través de la barrera de 1.0 nm de espesor.

b) Para $L = 0.10$ nm, $2CL = 3.24$ y

$$T \approx e^{-2CL} = e^{-3.24} = 0.039$$

El electrón tiene ahora una elevada probabilidad (4%) de penetrar la barrera. Así, la reducción del espesor de la barrera en sólo un orden de magnitud ¡ha aumentado la probabilidad de efecto túnel en casi 12 órdenes de magnitud!

Algunas aplicaciones del efecto túnel

Como se ha visto, el efecto túnel es un fenómeno cuántico, una manifestación de la naturaleza ondulatoria de la materia. Hay muchos ejemplos en la naturaleza para los cuales el efecto túnel es muy importante, en las escalas atómica y nuclear.

- **Diodo túnel** El diodo túnel es un dispositivo semiconductor que se compone de dos regiones cargadas de manera opuesta y separadas por una región eléctricamente neutra muy estrecha. La corriente eléctrica (en especial la rapidez de efecto túnel) puede controlarse sobre un amplio intervalo variando la diferencia de potencial a través de las regiones cargadas, lo cual es equivalente a cambiar la altura de la barrera.
- **Unión de Josephson** Una unión Josephson consta de dos superconductores separados por una delgada capa de óxido aislante, de 1 a 2 nm de espesor. En condiciones apropiadas, los electrones en el superconductor viajan como pares y realizan efecto túnel de un superconductor a otro a través de la capa de óxido. Se han observado varios efectos en este tipo de unión. Por ejemplo, una corriente directa se observa a través de la unión *en ausencia de campos eléctricos o magnéticos.* La corriente es proporcional a sen ϕ, donde ϕ es la diferencia de fase entre las funciones de onda en los dos superconductores. Cuando una diferencia de potencial ΔV se aplica a través de la unión, la corriente oscila con una frecuencia $f = 2e\Delta V/h$, donde e es la carga del electrón.
- **Decaimiento alfa** Una forma de decaimiento radiactivo es la emisión de partículas alfa (los núcleos de átomos de helio) por medio de núcleos pesados inestables. Para escapar del núcleo una partícula alfa debe penetrar una barrera que surge de la combinación de la fuerza nuclear atractiva y de la repulsión eléctrica entre la partícula alfa con carga positiva y el resto del núcleo (con carga positiva). En ocasiones una partícula alfa realiza efecto túnel a través de la barrera, lo cual explica el mecanismo básico de este tipo de decaimiento y las grandes variaciones en los tiempos de vida de diversos núcleos radiactivos.
- **Energía solar** De acuerdo con la física clásica, los iones de hidrógeno con carga positiva en el Sol no pueden superar su repulsión mutua y penetrar la barrera causada por la repulsión eléctrica. Sin embargo, desde la perspectiva mecánico-cuántica, los iones son capaces de realizar efecto túnel a través de la barrera y fundirse juntos para formar helio. Ésta es la reacción básica que da potencia al Sol e, indirectamente, a casi todo en el Sistema Solar.
- **Trampas cuánticas** Los científicos están comenzando a experimentar con *puntos cuánticos* que atrapan electrones individuales y *corrales cuánticos* hechos de un pe-



Figura 41.18 Un corral cuántico consiste de un anillo de 48 átomos de hierro sobre una superficie de cobre. El diámetro del anillo es de 143 nm, y la fotografía se obtuvo usando un microscopio de efecto túnel exploratorio de baja temperatura. Los corrales y otras estructuras pueden confinar ondas de electrones. El estudio de tales estructuras desempeñará un importante papel en la determinación del futuro de pequeños dispositivos electrónicos. *(IBM Corporation Research Division)*

queño número de átomos, como se muestra en la figura 41.18. Tales pequeñas trampas eventualmente pueden colocarse para su uso en dispositivos electrónicos.
- **Microscopios de efecto túnel exploratorio,** analizados en la sección 41.8.

Sección opcional

EL MICROSCOPIO DE EFECTO TÚNEL EXPLORATORIO[1]

Uno de los fenómenos básicos de la mecánica cuántica —el efecto túnel— es el corazón de un dispositivo muy práctico, el microscopio de efecto túnel exploratorio (MTE), el cual permite obtener imágenes muy detalladas de superficies con resoluciones comparables con el tamaño de un *solo átomo.* Las figuras 41.18 (átomos de hierro sobre cobre) y 41.19 (la superficie de un pedazo de grafito) muestran lo que el MTE puede hacer. Observe la alta calidad de las imágenes y los anillos reconocibles de los átomos de carbono en la figura 41.19. Lo que hace que esta imagen sea tan importante es que su resolución es de casi 0.2 nm. En un microscopio ordinario la resolución está limitada por la longitud de onda de la luz usada para hacer la imagen. Por consiguiente, un microscopio óptico tiene una resolución no mejor que 200 nm, casi la mitad de la longitud de onda de la luz visible, por lo que nunca podría mostrar el detalle exhibido en la figura 41.19. Un microscopio electrónico ideal (sección 41.1) puede tener una resolución de 0.2 nm empleando ondas electrónicas de esta longitud de onda, dada por la fórmula de De Broglie $\lambda = h/p$. El *momentum* lineal p de un electrón requerido para producir esta longitud de onda es 10 000 eV/c, lo que corresponde a una rapidez del electrón de 2% de la rapidez de la luz. Los electrones que viajan a esta rapidez penetrarían en el interior del grafito en la figura 41.19, por tanto, no podrían proporcionar información acerca de los átomos de la superficie individual.

El MTE alcanza su resolución muy fina empleando la idea básica ilustrada en la figura 41.20. Una sonda conductora de electricidad con una punta muy afilada se acerca a la superficie que se va a estudiar. El espacio vacío entre la punta y la superficie representa la "barrera" que se ha analizado, y la punta y la superficie son las dos paredes del "potencial de pozo". Ya que los electrones obedecen reglas de la mecánica cuántica en lugar de reglas newtonianas, pueden "tunelar" a través de la barrera del espacio vacío. Si se aplica un voltaje entre la superficie y la punta, puede hacerse que los electrones en los átomos de la superficie del material realicen el efecto túnel preferentemente desde la superficie hasta la punta para producir una corriente de efecto túnel. En consecuencia, la punta muestrea la distribución de electrones justo arriba de la superficie.

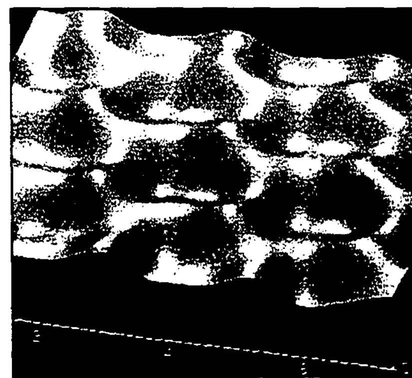


Figura 41.19 La superficie del grafito es "vista" con un microscopio de efecto túnel exploratorio. Este tipo de microscopio permite a los científicos observar detalles con una resolución lateral de aproximadamente 0.2 nm y una resolución vertical de 0.001 nm. El contorno visto aquí representa al arreglo con forma de anillo de átomos de carbono individuales sobre la superficie de cristal.

Debido a la naturaleza del efecto túnel, el MTE es muy sensible a la distancia z de la punta a la superficie —en otras palabras, al grosor de la barrera (véase el ejemplo 41.7)—. La razón es que en el espacio vacío entre la punta y la superficie, la función de onda del electrón disminuye en forma exponencial (véase la región II en la Fig. 41.17) con una longitud de decaimiento del orden de 0.1 nm; esto es, la función de onda disminuye $1/e$ a lo largo de esa distancia. Para distancias $z > 1$ nm (es decir, más allá de unos cuantos diámetros atómicos), en esencia no ocurre efecto túnel. Tal comportamiento exponencial ocasiona que la corriente de electrones que realizan efecto túnel de la superficie a la punta dependa fuertemente de z. Dicha sensibilidad es la base de la operación del MTE: monitoreando la corriente de efecto túnel cuando la punta explora la superficie, los científicos obtienen una medida sensible de la topografía de la distribución de electrones en la superficie. El resultado de la exploración se usa para hacer imágenes como la de la figura 41.19. Así, el MTE puede medir la altura de los rasgos de la superficie hasta adentro de 0.001 nm, ¡casi 1/100 de un diámetro atómico!

[1] Esta sección fue escrita por Roger A. Freedman y Paul K. Hansma, Universidad de California —Santa Bárbara—.

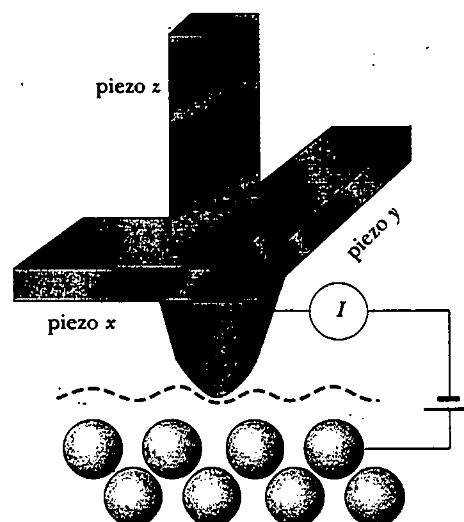


Figura 41.20 Vista esquemática de un MTE. La punta, mostrada como un cono redondeado, está montada sobre un explorador piezoeléctrico *xyz*. Una exploración de la punta sobre la muestra puede revelar contornos de la superficie debajo del nivel atómico. Una imagen de MTE se compone de una serie de exploraciones desplazadas en forma lateral una de otra. *(Con base en un dibujo de P. K. Hansma, V. B. Elings, O. Marti y C. Bracker,* Science 242:209, *1988. Copyright 1988 por AAAS.)*

Usted puede ver con exactitud cuán sensible es el MTE examinando la figura 41.19. De los seis átomos de carbono en cada anillo, tres aparecen más abajo que los otros tres. De hecho, los seis átomos se ubican al mismo nivel, pero todos tienen una distribución de electrones un poco diferente. Los tres átomos que aparecen inferiores están ligados a otros átomos de carbono directamente por debajo de ellos en la capa atómica subyacente; como resultado, sus distribuciones electrónicas, las cuales son responsables de los enlaces, se extienden hacia abajo de la superficie. Los átomos en la capa de la superficie que aparece superior no yacen en forma directa sobre los átomos de la superficie y, consecuentemente, no están ligados a los átomos subyacentes. Para estos átomos que aparecen superiores, la distribución de electrones se extiende hacia arriba en el espacio sobre la superficie. Esta densidad adicional de electrones es lo que hace que los electrones parezcan más altos en la figura 41.19, ya que lo que el MTE rastrea es la topografía de la distribución de electrones.

El MTE tiene, sin embargo, una seria limitación: depende de la conductividad eléctrica de la muestra y de la punta. Por desgracia, la mayor parte de los materiales no son eléctricamente conductivos en su superficie. Incluso los metales, que por lo general son excelentes conductores eléctricos, se cubren con óxidos no conductores. Un microscopio más reciente, el microscopio de fuerza atómica (MFA), supera esta limitación. Mide la fuerza eléctrica que actúa entre una punta y la muestra, en lugar de una corriente eléctrica. Dicha fuerza, la cual por lo general es un resultado del principio de exclusión, depende fuertemente de la distancia de separación punta-muestra, del mismo modo que la corriente de efecto túnel de los electrones lo hace para el MTE. De este modo, el MFA tiene una sensibilidad comparable para medir la topografía, y su uso se ha extendido con amplitud en aplicaciones tecnológicas.

Quizá el aspecto más sobresaliente acerca del MTE es que su operación se basa en un fenómeno de la mecánica cuántica —el efecto túnel— que se comprendió a la perfección en la década de 1920, aun cuando el primer MTE se construyó hasta la década de 1980. ¿Qué otras aplicaciones de la mecánica cuántica todavía esperan a ser descubiertas?

Sección opcional

EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

Finalmente, considere el problema de una partícula sujeta a una fuerza restauradora lineal $F = -kx$, donde x es la magnitud del desplazamiento de la partícula a partir

del equilibrio ($x = 0$) y k es la constante de fuerza. (Se trata de una situación importante para comprender, ya que las fuerzas entre átomos en un sólido se pueden aproximar mediante dicha interacción.) El movimiento clásico de una partícula sujeta a tal fuerza es el armónico simple, el cual se estudió en el capítulo 13. La energía potencial del sistema es, a partir de la ecuación 13.21,

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2$$

donde la frecuencia angular de vibración es $\omega = \sqrt{k/m}$. Desde el punto de vista clásico, si la partícula se desplaza desde su posición de equilibrio y se libera, oscila entre los puntos $x = -A$ y $x = A$, donde A es la amplitud del movimiento. Además, su energía total E es, a partir de la ecuación 13.22,

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2$$

En el modelo clásico cualquier valor de E es permitido, incluso $E = 0$, que es la energía total cuando la partícula está en reposo en $x = 0$.

La ecuación de Schrödinger para este problema se obtiene sustituyendo $U = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ en la ecuación 41.12:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\left[\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right) - \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2\right]\psi \qquad \textbf{(41.19)}$$

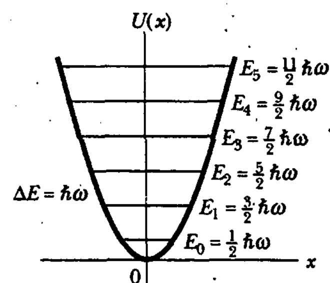


Figura 41.21 Diagrama de nivel de energía para un oscilador armónico simple. Los niveles están separados por los mismos espacios, con separación $\hbar\omega$. El punto cero de energía es $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

La técnica matemática para resolver esta ecuación rebasa el nivel del presente texto. Sin embargo, es instructivo predecir una solución. Considere como predicción la siguiente función de onda:

$$\psi = Be^{-Cx^2} \qquad \textbf{(41.20)}$$

Sustituyendo esta función en la ecuación 41.19 se encuentra que es una solución satisfactoria de la ecuación de Schrödinger, puesto que

$$C = \frac{m\omega}{2\hbar} \quad \text{y} \quad E\tfrac{1}{2}\hbar\,\omega$$

Esto rechaza que la solución supuesta corresponde al estado base del sistema, el cual tiene una energía $\frac{1}{2}\hbar\omega$, la energía del punto cero del sistema. Debido a que $C = m\omega/2\hbar$, se deduce de la ecuación 41.20 que la función de onda para este estado es

Función de onda para el estado base de un oscilador armónico simple

$$\psi = Be^{-(m\omega/2\hbar)x^2} \qquad \textbf{(41.21)}$$

La anterior es sólo una solución a la ecuación 41.19. Las soluciones restantes, las cuales describen los estados excitados, son más complicadas, pero todas las soluciones incluyen el factor exponencial e^{-Cx^2}.

Los niveles de energía de un oscilador armónico están cuantizados, como se esperaría al usar mecánica cuántica para analizar la situación. La energía del estado para el cual el número cuántico es n es

Energías permitidas para un oscilador armónico simple

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

El estado $n = 0$ corresponde al estado base, donde $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$; el estado $n = 1$ corresponde al primer estado excitado, donde $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ y así sucesivamente. El diagrama del nivel de energía para este sistema se muestra en la figura 41.21. Advierta que las separaciones entre niveles adyacentes son iguales y se proporcionan por

$$\Delta E = \hbar\omega \qquad \textbf{(41.22)}$$

Las curvas rojas en la figura 41.22 indican densidades de probabilidad $|\psi|^2$ para los primeros tres estados de un oscilador armónico simple. Las curvas azules representan las densidades de probabilidad clásica que corresponden a la misma energía,

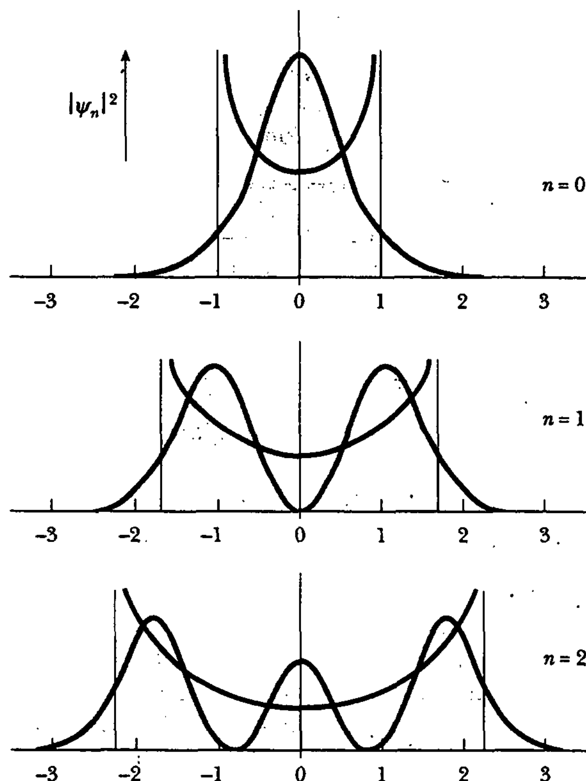


Figura 41.22 Las curvas rojas representan densidades de probabilidad $|\psi|^2$ para los tres primeros estados de un oscilador armónico simple. Las curvas azules representan densidades de probabilidad clásicas, correspondientes a las mismas energías. *(Tomado de C. W. Sherwin,* Introduction to Quantum Mechanics, *New York, Holt, Rinehart and Winston, 1959. Usado con permiso.)*

y se mencionan como comparación. Advierta que cuando n aumenta, la concordancia entre la mecánica clásica y la cuántica mejora, como se esperaba.

Pregunta sorpresa 41.5

a) ¿Por qué las curvas de densidad de probabilidad clásica en la figura 41.22 se doblan en los extremos? b) ¿Cómo esperaría usted ver las curvas de densidad de probabilidad mecánico-cuánticas a valores de n muy grandes?

RESUMEN

El **principio de incertidumbre de Heisenberg** establece que si una medida de la posición se hace con una precisión Δx y una medición simultánea del *momentum* lineal se realiza con una precisión Δp_x, el producto de las dos incertidumbres nunca puede ser más pequeño que $\hbar/2$.

$$\Delta x \, \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \textbf{(41.1)}$$

En la mecánica cuántica las ondas de materia de De Broglie se representan por medio de una función de onda $\psi(x, y, z, t)$. La probabilidad por unidad de volumen (o densidad de probabilidad) de que la partícula se encontrará en un punto es $|\psi|^2$. Si la partícula está restringida a moverse a lo largo del eje x, entonces la probabili-

dad de que se localizará en un intervalo dx es $|\psi|^2\,dx$. Además, la suma de todas estas probabilidades sobre los valores de x debe ser 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2\,dx = 1 \tag{41.4}$$

Ello recibe el nombre de **condición de normalización**. La posición medida x de la partícula, promediada a lo largo de muchos ensayos, se llama **valor de esperanza** de x y se define por medio de

$$\langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi|^2\,dx \tag{41.6}$$

Si una partícula de masa m se confina a moverse en una caja unidimensional de ancho L cuyas paredes son impenetrables, se requiere que ψ sea cero en las paredes y fuera de la caja. Las funciones de onda permitidas para la partícula están dadas por

$$\psi(x) = A \,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{41.8}$$

donde A es el valor máximo de ψ. La partícula tiene una longitud de onda bien definida λ con valores tales como $L = n\lambda/2$. Los estados permitidos se llaman **estados estacionarios** del sistema. Las energías de una partícula en la caja están cuantizadas y dadas por

$$E_n = \left(\frac{h^2}{8mL^2}\right)n^2 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{41.9}$$

La función de onda debe satisfacer la **ecuación de Schrödinger**. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para una partícula confinada a moverse a lo largo del eje x es

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi \tag{41.12}$$

donde E es la energía total del sistema y U la energía potencial.

El enfoque de la mecánica cuántica es resolver la ecuación 41.12 para ψ y E, dada la energía potencial $U(x)$ del sistema. Al hacerlo de ese modo debe poner restricciones sobre $\psi(x)$: 1) $\psi(x)$ debe ser continua, 2) $\psi(x)$ debe tender a cero cuando x tienda a $\pm\infty$, 3) $\psi(x)$ debe tener un solo valor, y 4) $d\psi/dx$ debe ser continua para todos los valores finitos de $U(x)$.

PREGUNTAS

1. ¿Un electrón es una partícula o una onda? Apoye su respuesta citando algunos resultados experimentales.
2. Un electrón y un protón se aceleran desde el reposo a través de la misma diferencia de potencial. ¿Cuál partícula tiene la longitud de onda más larga?
3. Si la materia tiene una naturaleza ondulatoria, ¿por qué esta característica similar a la de las ondas no se observa en las experiencias cotidianas?
4. ¿De qué forma el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno viola el principio de incertidumbre?
5. ¿Por qué es imposible medir en forma simultánea, con exactitud infinita, la posición y rapidez de una partícula?
6. Al describir el paso de electrones a través de una rendija y su arribo a una pantalla, el físico Richard Feynman dijo que "los electrones llegan en montones, como partículas, pero la probabilidad de arribo de estos montones se determina como la intensidad que las ondas tendrían. Es en este sentido que el electrón se comporta a veces como una partícula y a veces como una onda". Enuncie este punto en sus propias palabras. (Para un análisis más amplio respecto de este punto, véase R. Feynman, *The Character of Physical Law*, Cambridge, MA., MIT Press, 1980, capítulo 6.)
7. Para una partícula en una caja la densidad de probabilidad en ciertos puntos es cero, como se ve en la figura 41.11b. ¿Esto implica que la partícula no puede moverse a través de estos puntos? Explique.
8. Analice la relación entre el punto cero de energía y el principio de incertidumbre.

mo núcleo podría estarse moviendo de manera no relativista.

13. Una mujer sobre una escalera tira pequeños perdigones hacia un blanco sobre el piso. a) Muestre que, de acuerdo con el principio de incertidumbre, la distancia promedio errada debe ser al menos de

$$\Delta x_f = (2/\hbar m)^{1/2}(2/Hg)^{1/4}$$

donde H es la altura inicial de cada perdigón sobre el suelo y m es la masa de cada uno. Suponga que la dispersión en los puntos de impacto está dada por $\Delta x_f = \Delta x_i + (\Delta v_x)t$. b) Si $H = 2.00$ m y $m = 0.500$ g, ¿cuál es Δx_f?

Sección 41.3 Densidad de probabilidad

14. La función de onda para una partícula es

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}}$$

para a > 0 y $-\infty < x < +\infty$. Determine la probabilidad de que la partícula se localice en algún punto entre $x = -a$ y $x = +a$.

WEB 15. Un electrón libre tiene una función de onda

$$\psi(x) = A\,\text{sen}(5.00 \times 10^{10}\,x)$$

donde x se mide en metros. Encuentre a) la longitud de onda de De Broglie, b) el *momentum* lineal y c) la energía cinética en electronvolts.

Sección 41.4 Una partícula en una caja

16. Un electrón que tiene una energía de aproximadamente 6 eV se mueve entre paredes rígidas con 1.00 nm de separación. Encuentre a) el número cuántico n para el estado de energía que el electrón ocupa, y b) la energía precisa del electrón.

WEB 17. Un electrón está contenido en una caja unidimensional de 0.100 nm de ancho. a) Dibuje un diagrama de nivel de energía para el electrón en niveles hasta $n = 4$. b) Encuentre las longitudes de onda de todos los fotones que el electrón puede emitir al hacer transiciones del estado $n = 4$ al estado $n = 1$ (mediante todas las trayectorias espontáneas).

18. Un electrón está confinado en una región unidimensional en la cual su energía en el estado base ($n = 1$) es 2.00 eV. a) ¿Cuál es el ancho de la región? b) ¿Cuánta energía se requiere para promover al electrón a su primer estado excitado?

19. Un láser de rubí emite luz de 694.3 nm. Suponiendo que esta luz se debe a transiciones de un electrón en una caja del estado $n = 2$ al estado $n = 1$, encuentre el ancho de la caja.

20. Un láser de rubí emite luz de longitud de onda λ. Suponiendo que dicha luz se debe a transiciones de un electrón en una caja del estado $n = 2$ al estado $n = 1$, encuentre el ancho de la caja.

21. La energía potencial nuclear que liga a los protones y a los neutrones en un núcleo a menudo se considera de manera aproximada por medio de un pozo cuadrado. Suponga un protón confinado en un pozo cuadrado infinitamente alto de 10.0 fm de ancho, un diámetro nuclear común. Calcule la longitud de onda y la energía asociada con el fotón emitido cuando el protón se mueve del estado $n = 2$ al estado base. ¿A qué región del espectro electromagnético pertenece esta longitud de onda?

22. Una partícula alfa en un núcleo se puede considerar como una partícula que se mueve en una caja de 1.00×10^{-14} m de ancho (el diámetro aproximado del núcleo). Aplicando este modelo estime la energía y el *momentum* de una partícula alfa en su estado de energía más bajo ($m_\alpha = 6.64 \times 10^{-27}$ kg).

23. Emplee el modelo de la partícula en una caja para calcular los primeros tres niveles de energía de un neutrón atrapado en un núcleo de 20.0 fm de diámetro. ¿Las diferencias de los niveles de energía tienen un orden de magnitud realista?

24. Una partícula en un pozo cuadrado de profundidad infinita tiene una función de onda dada por

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

para $0 \le x \le L$ y cero en otro caso. Determine a) el valor de esperanza de x, b) la probabilidad de encontrar la partícula cerca de $L/2$, calculando la probabilidad de que la misma se encuentre en el intervalo $0.490L \le x \le 0.510L$ y c) la probabilidad de encontrar la partícula cerca de $L/4$, al calcular la probabilidad de que la misma esté en el intervalo $0.240L \le x \le 0.260L$. d) Argumente que no existe contradicción entre el resultado de la parte a) y los de las partes b) y c).

25. La función de onda para una partícula restringida a moverse en una caja unidimensional es

$$\psi(x) = A\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Emplee la condición de normalización en ψ para demostrar que

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Sugerencia: como el ancho de la caja es L, la función de onda es cero para $x < 0$ y para $x > L$, de modo que la condición de normalización (ecuación 41.4) se reduce a

$$\int_0^L |\psi|^2\,dx = 1$$

26. La función de onda de un electrón es

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

Calcule la probabilidad de encontrar al electrón entre $x = 0$ y $x = L/4$.

27. Un electrón en un pozo cuadrado de profundidad infinita tiene una función de onda dada por

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

mo núcleo podría estarse moviendo de manera no relativista.

13. Una mujer sobre una escalera tira pequeños perdigones hacia un blanco sobre el piso. a) Muestre que, de acuerdo con el principio de incertidumbre, la distancia promedio errada debe ser al menos de

$$\Delta x_f = (2/\hbar m)^{1/2}(2/Hg)^{1/4}$$

donde H es la altura inicial de cada perdigón sobre el suelo y m es la masa de cada uno. Suponga que la dispersión en los puntos de impacto está dada por $\Delta x_f = \Delta x_i + (\Delta v_x)t$. b) Si $H = 2.00$ m y $m = 0.500$ g, ¿cuál es Δx_f?

Sección 41.3 Densidad de probabilidad

14. La función de onda para una partícula es

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}}$$

para $a > 0$ y $-\infty < x < +\infty$. Determine la probabilidad de que la partícula se localice en algún punto entre $x = -a$ y $x = +a$.

WEB 15. Un electrón libre tiene una función de onda

$$\psi(x) = A\,\text{sen}(5.00 \times 10^{10}\, x)$$

donde x se mide en metros. Encuentre a) la longitud de onda de De Broglie, b) el *momentum* lineal y c) la energía cinética en electronvolts.

Sección 41.4 Una partícula en una caja

16. Un electrón que tiene una energía de aproximadamente 6 eV se mueve entre paredes rígidas con 1.00 nm de separación. Encuentre a) el número cuántico n para el estado de energía que el electrón ocupa, y b) la energía precisa del electrón.

WEB 17. Un electrón está contenido en una caja unidimensional de 0.100 nm de ancho. a) Dibuje un diagrama de nivel de energía para el electrón en niveles hasta $n = 4$. b) Encuentre las longitudes de onda de todos los fotones que el electrón puede emitir al hacer transiciones del estado $n = 4$ al estado $n = 1$ (mediante todas las trayectorias espontáneas).

18. Un electrón está confinado en una región unidimensional en la cual su energía en el estado base ($n = 1$) es 2.00 eV. a) ¿Cuál es el ancho de la región? b) ¿Cuánta energía se requiere para promover al electrón a su primer estado excitado?

19. Un láser de rubí emite luz de 694.3 nm. Suponiendo que esta luz se debe a transiciones de un electrón en una caja del estado $n = 2$ al estado $n = 1$, encuentre el ancho de la caja.

20. Un láser de rubí emite luz de longitud de onda λ. Suponiendo que dicha luz se debe a transiciones de un electrón en una caja del estado $n = 2$ al estado $n = 1$, encuentre el ancho de la caja.

21. La energía potencial nuclear que liga a los protones y a los neutrones en un núcleo a menudo se considera de manera aproximada por medio de un pozo cuadrado. Suponga un protón confinado en un pozo cuadrado infinitamente alto de 10.0 fm de ancho, un diámetro nuclear común. Calcule la longitud de onda y la energía asociada con el fotón emitido cuando el protón se mueve del estado $n = 2$ al estado base. ¿A qué región del espectro electromagnético pertenece esta longitud de onda?

22. Una partícula alfa en un núcleo se puede considerar como una partícula que se mueve en una caja de 1.00×10^{-14} m de ancho (el diámetro aproximado del núcleo). Aplicando este modelo estime la energía y el *momentum* de una partícula alfa en su estado de energía más bajo ($m_\alpha = 6.64 \times 10^{-27}$ kg).

23. Emplee el modelo de la partícula en una caja para calcular los primeros tres niveles de energía de un neutrón atrapado en un núcleo de 20.0 fm de diámetro. ¿Las diferencias de los niveles de energía tienen un orden de magnitud realista?

24. Una partícula en un pozo cuadrado de profundidad infinita tiene una función de onda dada por

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

para $0 \le x \le L$ y cero en otro caso. Determine a) el valor de esperanza de x, b) la probabilidad de encontrar la partícula cerca de $L/2$, calculando la probabilidad de que la misma se encuentre en el intervalo $0.490L \le x \le 0.510L$ y c) la probabilidad de encontrar la partícula cerca de $L/4$, al calcular la probabilidad de que la misma esté en el intervalo $0.240L \le x \le 0.260L$. d) Argumente que no existe contradicción entre el resultado de la parte a) y los de las partes b) y c).

25. La función de onda para una partícula restringida a moverse en una caja unidimensional es

$$\psi(x) = A\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Emplee la condición de normalización en ψ para demostrar que

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

Sugerencia: como el ancho de la caja es L, la función de onda es cero para $x < 0$ y para $x > L$, de modo que la condición de normalización (ecuación 41.4) se reduce a

$$\int_0^L |\psi|^2\,dx = 1$$

26. La función de onda de un electrón es

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

Calcule la probabilidad de encontrar al electrón entre $x = 0$ y $x = L/4$.

27. Un electrón en un pozo cuadrado de profundidad infinita tiene una función de onda dada por

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

para $0 \leq x \leq L$ y cero en cualquier otro caso. ¿Cuáles son las posiciones más probables de los electrones?

28. Una partícula en un pozo cuadrado infinito tiene una función de onda dada por

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

para $0 \leq x \leq L$ y cero en cualquier otro caso. a) Determine la probabilidad de encontrar la partícula entre $x = 0$ y $x = L/3$. b) Use el resultado de este cálculo y argumentos de simetría para encontrar la probabilidad de hallar la partícula entre $x = L/3$ y $x = 2L/3$. No reevalúe la integral. c) Compare el resultado de la parte a) con la probabilidad clásica.

29. Se limita a un protón a moverse en una caja unidimensional de 0.200 nm de ancho. a) Encuentre la energía más baja posible del protón. b) ¿Cuál es la energía más baja posible de un electrón confinado en la misma caja? c) ¿Cómo puede usted explicar la gran diferencia en sus resultados para a) y b)?

30. Considere una partícula que se mueve en una caja unidimensional para la cual las paredes están en $x = -L/2$ y $x = L/2$. a) Escriba las funciones de onda y las de densidad de probabilidad para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$. b) Dibuje las funciones de onda y las densidades de probabilidad. (*Sugerencia*: haga una analogía con el caso de una partícula en una caja para la cual las paredes están en $x = 0$ y $x = L$.)

Sección 41.5 La ecuación de Schrödinger

31. Muestre que la función de onda $\psi = Ae^{i(kx-\omega t)}$ es una solución de la ecuación de Schrödinger (Ec. 41.12) donde $k = 2\pi/\lambda$ y $U = 0$.

32. La función de onda de una partícula está dada por

$$\psi(x) = A\cos(kx) + B\,\text{sen}(kx)$$

donde A, B y k son constantes. Demuestre que ψ es una solución de la ecuación de Schrödinger (Ec. 41.12), suponiendo que la partícula está libre ($U = 0$), y encuentre la correspondiente energía E de la partícula.

33. Una partícula de masa m se mueve en un potencial de pozo de ancho $2L$. Su energía potencial es infinita para $x < -L$ y para $x > +L$. Dentro de la región $-L < x < +L$, su energía potencial está dada por

$$U(x) = \frac{-\hbar^2 x^2}{mL^2(L^2 - x^2)}$$

Además, la partícula se encuentra en un estado estacionario descrito por la función de onda, $\psi(x) = A(1 - x^2/L^2)$ para $-L < x < +L$, y $\psi(x) = 0$ en cualquier otro lado. a) Determine la energía de la partícula en términos de $\hbar$, m y L. (*Sugerencia*: emplee la ecuación de Schrödinger, ecuación 41.12.) b) Muestre que $A = (15/16L)^{1/2}$. c) Determine la probabilidad de que la partícula se localice entre $x = -L/3$ y $x = +L/3$.

34. En una región del espacio, una partícula con energía total cero tiene una función de onda

$$\psi(x) = Axe^{-x^2/L^2}$$

a) Encuentre la energía potencial U como una función de x. b) Elabore una gráfica de $U(x)$ *versus* x.

(Opcional)
Sección 41.6 Una partícula en un pozo de altura finita

35. Suponga que sea atrapada una partícula en su estado base en una caja que tiene paredes infinitamente altas (véase la Fig. 41.11). Suponga después que la pared de la izquierda se baja en forma repentina hasta una altura y ancho finitos. a) Dibuje cualitativamente la función de onda para la partícula poco después. b) Si la caja tiene un ancho L, ¿cuál es la longitud de onda de la onda que penetra la pared izquierda?

36. Dibuje la función de onda $\psi(x)$ y la densidad de probabilidad $|\psi(x)|^2$ para el estado $n = 4$ de una partícula en un potencial de pozo finito. (Véase la figura 41.16.)

(Opcional)
Sección 41.7 Efecto túnel a través de una barrera

37. Un electrón con energía cinética $E = 5.00$ eV incide sobre una barrera con grosor $L = 0.200$ nm y altura $U = 10.0$ eV (Fig. P41.37). ¿Cuál es la probabilidad de que el electrón a) realizará efecto túnel a través de la barrera y b) se reflejará?

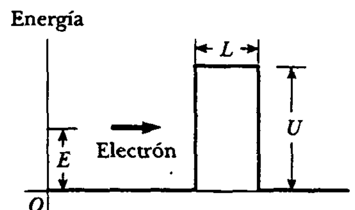


Figura P41.37 Problemas 37 y 38.

38. Un electrón con energía total $E = 4.50$ eV se acerca a una barrera rectangular de energía donde $U = 5.00$ eV y $L = 950$ pm, como en la figura P41.37. Desde el punto de vista clásico, el electrón no podría atravesar la barrera debido a que $E < U$. Sin embargo, de acuerdo con la mecánica cuántica, hay una probabilidad finita de efecto túnel. Calcule esta probabilidad, la cual es el coeficiente de transmisión.

39. En el problema 38, ¿en cuánto tendría que incrementarse el ancho L de la barrera de potencial para que la posibilidad de que un electrón incidente de 4.50 eV produzca efecto túnel a través de la barrera sea de uno en un millón?

(Opcional)
Sección 41.8 El microscopio de efecto túnel exploratorio

40. Un microscopio de efecto túnel exploratorio (MTE) puede determinar con precisión las profundidades de las superficies de las muestras porque la corriente a través de su punta es muy sensible a diferencias en el ancho del

espacio entre la punta y la superficie de la muestra. Suponga que en esta dirección la función de onda del electrón cae exponencialmente con una longitud de decaimiento de 0.100 nm —es decir, con $C = 10.0/\text{nm}$. Determine la relación de la corriente cuando la punta del MTE se encuentra a 0.500 nm sobre la característica superficial a la corriente cuando la punta está 0.515 nm sobre la superficie.

41. El criterio de diseño para un microscopio de efecto túnel exploratorio típico especifica que debe ser capaz de detectar, sobre la muestra bajo su punta, características superficiales que difieren en altura por sólo 0.002 00 nm. ¿Qué porcentaje de cambio en la transmisión electrónica debe ser capaz de detectar la electrónica del MTE para lograr esta resolución? Suponga que el coeficiente de transmisión electrónica es e^{-2CL}, con $C = 10.0/\text{nm}$.

(Opcional)

Sección 41.9 El oscilador armónico simple

42. Demuestre que la ecuación 41.21 es una solución de la ecuación 41.19, con energía $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

43. Una función de onda de un oscilador armónico unidimensional es

$$\psi = Axe^{-bx^2}$$

a) Muestre que ψ satisface la ecuación 41.19. b) Encuentre b y la energía total E. c) ¿Se trata de un estado base o un primer estado excitado?

44. Un oscilador armónico simple cuántico consta de un electrón enlazado mediante una fuerza restauradora proporcional a su desplazamiento a partir de cierto punto de equilibrio. La constante de proporcionalidad es 8.99 N/m. ¿Cuál es la longitud de onda de luz más larga que puede excitar al oscilador?

45. a) Normalice la función de onda para el estado base de un oscilador armónico simple. Esto es, aplique la ecuación 41.4 a la 41.21 y encuentre el valor requerido para el coeficiente B, en términos de m, ω y constantes. b) Determine la probabilidad de encontrar al oscilador en un intervalo estrecho $-\delta/2 < x < \delta/2$ alrededor de su posición de equilibrio.

46. La energía total de una partícula que se mueve con movimiento armónico simple a lo largo del eje x es

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

donde p_x es el *momentum* de la partícula y k es la constante de resorte. a) Empleando el principio de incertidumbre muestre que esta expresión puede escribirse también como

$$E \geq \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k\hbar^2}{8p_x^2}$$

b) Muestre que la energía mínima del oscilador armónico es

$$E_{\text{mín}} = K + U = \frac{1}{4}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

47. Manteniendo una rapidez constante de 0.8 m/s, una canica rueda atrás y adelante a través de una caja de zapatos. Realice una estimación del orden de magnitud de la probabilidad de que escape a través de la pared de la caja mediante efecto túnel cuántico. Establezca las cantidades que toma como datos y los valores que mida o estime para las mismas.

48. Una partícula de 2.00×10^{-28} kg de masa está confinada en una caja unidimensional de 1.00×10^{-10} m de ancho. Para $n = 1$, ¿cuáles son a) la longitud de onda de la partícula, b) su *momentum*, y c) su energía de estado base?

WEB 49. Se representa un electrón por medio de la función de onda independiente del tiempo

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{-\alpha x} & \text{para } x > 0 \\ Ae^{+\alpha x} & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

a) Dibuje la función de onda como una función de x. b) Dibuje la probabilidad de que el electrón se encuentre entre x y $x + dx$. c) Demuestre que ésta puede ser una función de onda físicamente razonable. d) Normalice la función de onda. e) Determine la probabilidad de encontrar al electrón en algún lugar en el intervalo

$$x_1 = -\frac{1}{2\alpha} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{1}{2\alpha}$$

50. Partículas que inciden a partir de la izquierda se enfrentan con un escalón de energía potencial como se muestra en la figura P41.50. El escalón tiene una altura U, y las partículas tienen energía $E > U$. Por lo común se esperaría que todas las partículas continuaran su camino, aunque a rapidez reducida. De acuerdo con la mecánica cuántica, una fracción de las partículas se refleja en la barrera. a) Pruebe que el coeficiente de reflexión R para este caso es

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

donde $k_1 = 2\pi/\lambda_1$ y $k_2 = 2\pi/\lambda_2$ son los números de onda angular de las partículas incidente y transmitida, respectivamente. Proceda del modo siguiente: demuestre que la función de onda $\psi_1 = A\cos k_1x + B\cos(-k_1x)$ satisface la ecuación de Schrödinger en la región 1, donde $x < 0$. Aquí, $A\cos k_1x$ representa al haz incidente, y $B\cos(-k_1x)$ representa a las partículas reflejadas. Demuestre que $\psi_2 = C\cos k_2x$ satisface la ecuación de Schrödinger en la región 2 para $x > 0$.

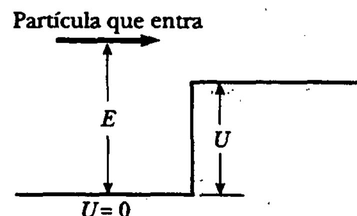


Figura P41.50 Problemas 50 y 51.

Imponga las condiciones de frontera $\psi_1 = \psi_2$ y $d\psi_1/dx = d\psi_2/dx$ en $x = 0$, para encontrar la relación entre B y A. Luego evalúe $R = B^2/A^2$. b) Una partícula que tiene energía cinética $E = 7.00$ eV incide desde una región donde la energía potencial es cero hasta una en la cual $U = 5.00$ eV. Encuentre su probabilidad de ser reflejada lo mismo que transmitida.

51. Partículas incidentes desde la izquierda se confrontan con un escalón de energía potencial como se muestra en la figura P41.50. El escalón tiene una altura U y las partículas tienen energía $E = 2U$. Según el punto de vista clásico, todas las partículas pasarían hacia la región de mayor energía potencial a la derecha. Sin embargo, de acuerdo con la mecánica cuántica, una fracción de las partículas se refleja en la barrera. Use el resultado del problema 50 para determinar la fracción de las partículas incidentes que se reflejan. (Esta situación es similar a la reflexión y transmisión parcial de la luz que golpea una interface entre dos medios diferentes.)

52. Un electrón está atrapado en un defecto de un cristal. (Un defecto es una imperfección de otra forma en el arreglo ordenado de átomos.) La deficiencia puede modelarse como una caja unidimensional de paredes rígidas de 1.00 nm de ancho. a) Dibuje las funciones de onda y las densidades de probabilidad para los estados $n = 1$ y $n = 2$. b) Para el estado $n = 1$ calcule la probabilidad de encontrar al electrón entre $x_1 = 0.150$ nm y $x_2 = 0.350$ nm, donde $x = 0$ es el lado izquierdo de la caja. c) Repita el inciso b) para el estado $n = 2$. d) Calcule las energías, en electronvolts, de los estados $n = 1$ y $n = 2$. *Sugerencia:* para los incisos b) y c), emplee la ecuación 41.5 y note que

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx = \tfrac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\operatorname{sen} 2ax$$

53. El truco favorito de Juan saltarín es brincar 50.0 m desde la ventana de un edificio de 16 pisos y caer en una alberca. Un reportero de prensa emplea un tiempo de exposición de 5.00 ms para tomar una foto de Juan (quien pesa 75.0 kg) justo antes de golpear el agua. Encuentre a) la longitud de onda de De Broglie de Juan en este momento, b) la incertidumbre de su medición de energía cinética durante tal intervalo de tiempo, y c) el error porcentual causado por dicha incertidumbre.

54. Un mesón π^0 es una partícula inestable producida en choques de partículas de alta energía. Su energía en reposo es de aproximadamente 135 MeV, y existe durante un tiempo de vida promedio de sólo 8.70×10^{-17} s antes de decaer en dos rayos gamma. Empleando el principio de incertidumbre estime la incertidumbre fraccionaria $\Delta m/m$ en su determinación de masa.

55. Un átomo en un estado excitado 1.80 eV arriba del estado base permanece en ese estado 2.00 μs antes de moverse hacia el estado base. Encuentre a) la frecuencia y b) la longitud de onda del fotón emitido. c) Determine la incertidumbre aproximada en energía del fotón.

56. Un átomo en un estado excitado E arriba del estado base permanece en ese estado por un tiempo T antes de moverse hacia el estado base. Encuentre a) la frecuencia y b) la longitud de onda del fotón emitido. c) Localice la incertidumbre aproximada en energía del fotón.

57. Para una partícula descrita por una función de onda $\psi(x)$, el valor esperado de una cantidad física $f(x)$ asociado con la partícula está definido por

$$\langle f(x)\rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)|\psi|^2\,dx.$$

Para una partícula en una caja unidimensional que se extiende de $x = 0$ a $x = L$, muestre que

$$\langle x^2\rangle = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2}$$

58. Una partícula se describe por medio de la función de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} A\cos\left(\dfrac{2\pi x}{L}\right) & \text{para } -\dfrac{L}{4} \le x \le \dfrac{L}{4} \\ 0 & \text{para otros valores de } x \end{cases}$$

a) Determine la constante de normalización A. b) ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encontrará entre $x = 0$ y $x = L/8$ si se mide su posición? (*Sugerencia:* emplee la ecuación 41.5.)

59. Una partícula tiene una función de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{a}}\,e^{-x/a} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

a) Encuentre y grafique la densidad de probabilidad. b) Localice la probabilidad de que la partícula estará en algún punto donde $x < 0$. c) Muestre que ψ está normalizada y luego señale la probabilidad de que la partícula se encontrará entre $x = 0$ y $x = a$.

60. Cierto microscopio electrónico acelera electrones hasta una energía de 65.0 keV. a) Encuentre la longitud de onda de estos electrones. b) Si pueden resolverse dos puntos separados por al menos 50.0 longitudes de onda, ¿cuál es la separación más pequeña (o tamaño mínimo del objeto) que puede definirse con este microscopio?

61. Un electrón de *momentum* p está a una distancia r de un protón estacionario. El electrón tiene energía cinética $K = p^2/2m_e$, energía potencial $U = -k_e e^2/r$, y energía total $E = K + U$. Si el electrón se enlaza a un protón para formar un átomo de hidrógeno, su posición promedio está en el protón, pero la incertidumbre en su posición es casi igual al radio r de su órbita. El vector de *momentum* promedio del electrón es cero, pero su *momentum* promedio al cuadrado es aproximadamente igual a la incertidumbre al cuadrado en su *momentum*, como está señalado por el principio de incertidumbre. Al tratar al átomo como un sistema unidimensional, a) estime la incertidumbre en el *momentum* del electrón en términos de r. b) Calcule las energías cinética, potencial y total del electrón considerando a r. c) El valor real de r es aquel que *minimiza la energía total,* lo que produce un átomo estable. Encuentre el valor de r y la energía total resultante. Compare su respuesta con las predicciones de la teoría de Bohr.

62. Una partícula de masa m se sitúa en una caja unidimensional de ancho L. Suponga que la caja es tan pequeña que el movimiento de la partícula es *relativista,* de modo

que $E = p^2/2m$ no es válida. a) Obtenga una expresión para los niveles de energía de la partícula. b) Si la partícula es un electrón en una caja de ancho $L = 1.00 \times 10^{-12}$ m, encuentre su energía cinética más baja posible. ¿En qué porcentaje está equivocada la fórmula no relativista? (*Sugerencia:* véase la ecuación 39.26.)

63. Considere un "cristal" consistente de dos núcleos y dos electrones, como se muestra en la figura P41.63. a) Tomando en cuenta todos los pares de interacciones, encuentre la energía potencial del sistema como una función de d. b) Suponiendo que los electrones van a estar restringidos en una caja unidimensional de ancho $3d$, localice la energía cinética mínima de los dos electrones. c) Determine el valor de d para el cual la energía total es un mínimo. d) Compare este valor de d con el espaciamiento de los átomos en litio, el cual tiene una densidad de 0.530 g/cm³ y una masa atómica de 7 u. (Este tipo de cálculo puede usarse para estimar las densidades de cristales y ciertas estrellas.)

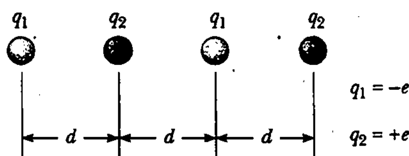


Figura P41.63

64. *El oscilador armónico simple en un estado excitado.* La función de onda

$$\psi(x) = Bxe^{-(m\omega/2\hbar)x^2}$$

también es una solución al problema del oscilador armónico simple. a) Encuentre la energía de este estado. b) ¿En qué posición es menos probable que usted halle la partícula? c) ¿En qué posiciones quizás usted ubique la partícula? d) Determine el valor de B requerido para normalizar la función de onda. e) Indique la probabilidad clásica de encontrar la partícula en un intervalo de ancho pequeño δ centrado en la posición $x = 2(\hbar/m\omega)^{1/2}$. f) ¿Cuál es la probabilidad real de encontrar la partícula en este intervalo?

65. *Normalización de funciones de onda:* a) Determine la constante de normalización A para una función de onda compuesta a partir de los dos estados más bajos de una partícula en una caja:

$$\psi(x) = A\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 4\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]$$

b) Una partícula se describe en el espacio $-a \le x \le a$ por medio de la función de onda

$$\psi(x) = A\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) + B\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Determine la relación entre los valores de A y B que se requieren para la normalización. (*Sugerencia:* emplee la identidad sen $2\theta = 2$ sen θ cos θ.)

66. Un experimento de difracción de electrones en doble rendija se realiza con rendijas de anchos *distintos.* El número de electrones que alcanzan la pantalla por segundo cuando sólo la rendija 1 está abierta es 25.0 veces el número de electrones que alcanzan la pantalla por segundo cuando la rendija 2 está abierta. Cuando ambas rendijas están abiertas, resulta un patrón de interferencia en el cual la interferencia destructiva no es completa. Encuentre la proporción entre la probabilidad de que un electrón llegará a una máxima interferencia y la posibilidad de que un electrón llegue a un mínimo de interferencia adyacente. (*Sugerencia:* use el principio de superposición.)

67. **Problema de repaso.** Considere una extensión del experimento de doble rendija de Young, realizado con fotones. Piense en la figura 41.3 como una vista superior, con el lector mirando hacia abajo por el aparato. La pantalla de visualización puede ser un gran arreglo plano de *detectores de carga acoplada.* Cada celda en el arreglo registra fotones individuales con alta eficiencia, de modo que se puede ver, en tiempo real, dónde golpean la pantalla los fotones individuales. Se cubre la rendija 1 con un polarizador con su eje de transmisión horizontal, y la rendija 2 con un polarizador con eje de transmisión vertical. Cualquier fotón puede absorberse por un filtro de polarización o dejarse pasar por él. Los fotones que vienen a través de un polarizador tienen su campo eléctrico oscilando en el plano definido por su dirección de movimiento y el filtro del eje. Ahora se coloca otra gran lámina cuadrada de material polarizante justo enfrente de la pantalla. Para la prueba experimental 1 se hace que el eje de transmisión de este tercer polarizador esté horizontal. Esta elección, en efecto, bloquea la rendija 2. Después de que se ha enviado muchos fotones a través del aparato, su distribución sobre la pantalla de visualización se muestra mediante la curva azul $|\psi_1|^2$ en la figura 41.3. Para la prueba 2 se voltea el polarizador en la pantalla para hacer su eje de transmisión vertical. Luego la pantalla recibe fotones sólo por la vía de la rendija 2, y su distribución se muestra como $|\psi_2|^2$. Para la prueba 3, temporalmente se remueve la tercera lámina de material polarizante. En seguida aparece el patrón de interferencia mostrado por la curva roja $|\psi_1 + \psi_2|^2$. a) ¿La luz que llega a la pantalla forma el patrón de interferencia polarizado? Explique su respuesta. b) A continuación, en la prueba 4 se gira el gran cuadrado de material polarizante enfrente de la pantalla y se establece su eje de transmisión en 45°, a la mitad entre la horizontal y la vertical. ¿Qué aparece sobre la pantalla? c) Suponga que se repiten todas las pruebas, de la 1 a la 4, con muy baja intensidad de luz, de modo que sólo un fotón a la vez está presente en el aparato. ¿Cuáles son ahora los resultados? d) Por conveniencia, regrese a las intensidades de luz altas, y en la prueba 5 haga que el gran cuadrado de polarización gire lenta y constantemente en torno a un eje de rotación que pasa por su centro, perpendicular a su área. ¿Qué aparece sobre la pantalla? e) Por último, regrese a la intensidad de luz muy baja y reemplace la gran lámina cuadrada de plástico polarizador con una capa plana de cristal líquido, al cual se le pueda aplicar un campo eléctrico en dirección horizontal o vertical. Con el campo aplicado se puede activar con rapidez el cristal líquido, de modo que transmita sólo fotones con campo eléctrico horizontal, actuar como un polarizador con un eje de transmisión

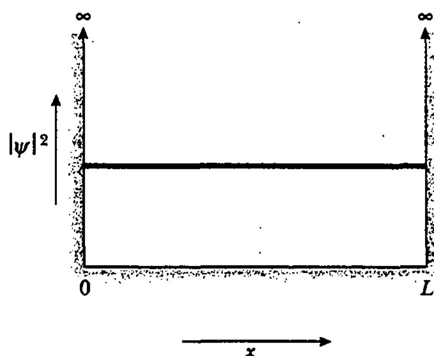
vertical o transmitir todos los fotones con alta eficiencia. Se conserva el trayecto de los fotones conforme son emitidos en forma individual por la fuente. Para cada fotón se espera hasta que éste haya pasado por el par de rendijas. Luego rápidamente se selecciona la configuración del cristal líquido, y se hace que el fotón arribe a un polarizador horizontal, a un polarizador vertical o a ningún polarizador antes de que llegue al arreglo de detectores. Es posible alternar entre las condiciones antes establecidas en las pruebas 1, 2 y 3. Se conserva el trayecto de las configuraciones del cristal líquido y se ordena cómo se comportan los fotones en las diferentes condiciones, para finalizar con un juego completo de datos para las tres pruebas. ¿Cuáles son los resultados?

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

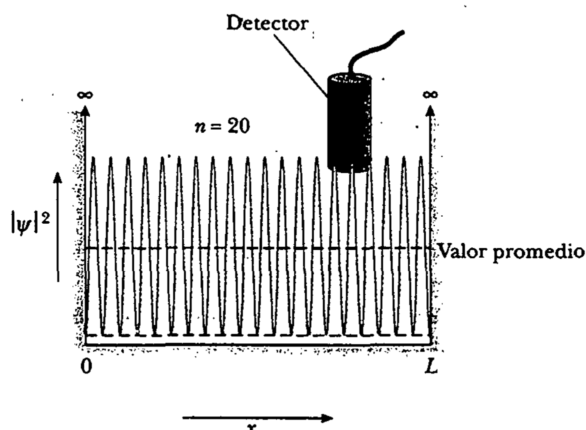
41.1 El patrón de difracción se parece al patrón para las ondas luminosas que pasan por tres rendijas, el cual se muestra en la figura 37.13.

41.2 Si la rendija es ancha, como en la parte a) de la figura en el fondo de la página, no se puede conocer con precisión la posición horizontal de un electrón particular dentro del haz de electrones. Si se comprime el haz a través de una rendija estrecha, como en la parte b) de la figura, disminuimos Δx, pero el efecto aumentado de difracción significa que se ha incrementado la incertidumbre en p_x. (Dependiendo de su *momentum*, un electrón puede aparecer en cualquier parte en una amplia área horizontal de la pantalla de visualización.)

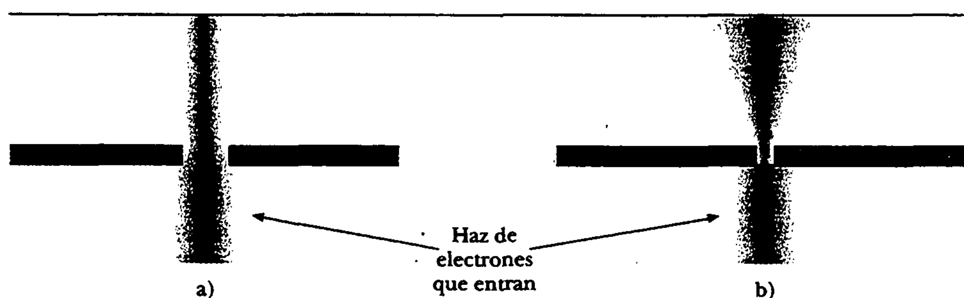
41.3 Por lo común, se espera que la partícula rebote atrás y adelante entre las dos paredes a rapidez constante. En consecuencia, es tan probable encontrarla en el lado izquierdo de la caja como en la mitad, el lado derecho o cualquier otra parte dentro de la caja. La gráfica de densidad de probabilidad *versus* x, por tanto, sería una línea horizontal con un área total bajo la línea de unidad.



41.4 La figura 41.11b dibujada para $n = 20$ tendría 20 picos muy juntos entre ellos. Conforme aumenta el valor de n, los picos se vuelven progresivamente más cercanos entre sí, y el detector tiene más probabilidad de señalar varios picos y valles al mismo tiempo. Conforme $n \to \infty$, el detector registra el valor promedio de muchos ciclos de la función de onda oscilatoria. Da el mismo valor promedio en cualquier parte dentro de la caja, igualando la respuesta clásica proporcionada en la pregunta sorpresa 41.3.



41.5 a) Las partes de las gráficas clásicas que se curvan hacia arriba representan valores mayores de densidad de probabilidad, lo cual significa que el oscilador armónico gasta más tiempo cerca de los puntos de máximo desplazamiento. Un bloque que oscila en el extremo de un resorte vertical, por ejemplo, se mueve con más lentitud cuando el resorte está cerca de sus posiciones de alargamiento completo o compresión completa. Por tanto, una persona que echa un vistazo rápido tiene [illegible] probabilidad de ver el bloque cerca de uno [illegible] puntos de máximo alejamiento del equi[illegible] Conforme n aumenta, si se promedia sobre los picos y valles no resueltos en la densidad de probabilidad, las predicciones de la mecánica cuántica se vuelven cada vez más cercanas a las predicciones clásicas; para n suficientemente grande, las dos curvas son indistinguibles una de la otra.





ACERTIJO

El escáner de supermercado usa luz de un láser para identificar los productos que van a comprarse. La palabra *láser* es un acrónimo de *l*ight *a*mplification by *s*timulated *e*mission of *r*adiation (amplificación de luz mediante emisión estimulada de radiación). ¿Cómo funciona un láser y qué le brinda las propiedades especiales a la luz emitida por tales dispositivos? *(Paul Shambroom/Photo Researchers, Inc.)*

capítulo

42

Física atómica

Secciones del capítulo

En el capítulo 41 se presentaron algunos de los conceptos y técnicas básicas empleadas en la mecánica cuántica, junto con sus aplicaciones a diversos sistemas unidimensionales. Este capítulo aplica la mecánica cuántica al mundo real de la estructura atómica, y gran parte del capítulo es una aplicación de la mecánica cuántica al estudio del átomo de hidrógeno. Comprender el átomo de hidrógeno, el sistema atómico más simple, es importante por varias razones:



[illegible] Thomson por lo general es considerado el descubridor del electrón. Abrió el campo de la física de partículas subatómicas con su extenso trabajo sobre la desviación de rayos catódicos (electrones) en un campo eléctrico. *(Stock Montage, Inc.)*

- El átomo de hidrógeno es el único sistema atómico que se puede resolver con exactitud.
- Mucho de lo que se aprende acerca del átomo de hidrógeno, con su único electrón, puede extenderse a iones de un solo electrón, como He^+ y Li^{2+}.
- El átomo de hidrógeno es un sistema ideal para efectuar pruebas precisas de teoría contra experimento y para mejorar en general la comprensión de la estructura atómica.
- Los números cuánticos empleados para caracterizar los estados permitidos del hidrógeno también se pueden usar para describir los estados permitidos de átomos más complejos, y tal descripción permite comprender la tabla periódica de los elementos. Esta comprensión es uno de los más grandes triunfos de la mecánica cuántica.
- Las ideas básicas acerca de la estructura atómica deben comprenderse muy bien antes de que se intente trabajar con las complejidades de las estructuras moleculares y de la estructura electrónica de sólidos.

La solución matemática completa de la ecuación de Schrödinger aplicada al átomo de hidrógeno proporciona una hermosa y completa descripción de las propiedades del átomo. Sin embargo, como los procedimientos matemáticos que están involucrados se encuentran más allá del alcance de este texto, se omiten los detalles. Se analizan las soluciones para algunos estados del hidrógeno junto con los números cuánticos utilizados para caracterizar diversos estados estacionarios permitidos. También se estudia el significado físico de los números cuánticos y el efecto de un campo magnético en ciertos estados cuánticos.

Una nueva idea física, *el principio de exclusión*, se presenta en este capítulo. Se trata de un principio que es muy importante para entender las propiedades de átomos de múltiples electrones y la disposición de los elementos en la tabla periódica. De hecho, las implicaciones del principio de exclusión son casi de la misma importancia que las de la ecuación de Schrödinger.

Por último, se aplica el conocimiento de la estructura atómica para describir los mecanismos implicados en la producción de rayos X y en la operación de un láser.

LOS PRIMEROS MODELOS DEL ÁTOMO

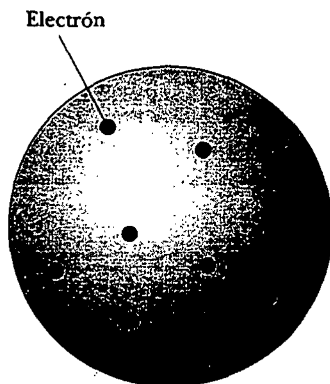


Figura 42.1 Modelo de Thomson del átomo: electrones con carga negativa en un volumen de carga positiva continua.

El modelo del átomo en los días de Newton fue una diminuta esfera, indestructible y dura. Aunque este modelo proporcionó una buena base para la teoría cinética de los gases, fue necesario idear nuevos modelos cuando experimentos posteriores revelaron la naturaleza eléctrica del átomo. J. J. Thomson sugirió un modelo que describe al átomo como un volumen de carga positiva con electrones incrustados por todo el volumen, muy semejante a las semillas en una sandía o a pasas en un espeso pudín (Fig. 42.1).

En 1911 Ernest Rutherford (1871-1937) y sus alumnos Hans Geiger y Ernest Marsden efectuaron un experimento crítico que mostró que el modelo de Thomson podría ser incorrecto. En el experimento un haz de partículas alfa con carga positiva (núcleos de helio) se proyectó contra una delgada hoja metálica, como el blanco en la figura 42.2a. La mayor parte de las partículas atravesaron la hoja como si fuera un espacio vacío; pero algunos resultados del experimento fueron asombrosos: muchas de las partículas desviadas de sus direcciones originales de recorrido se dis-

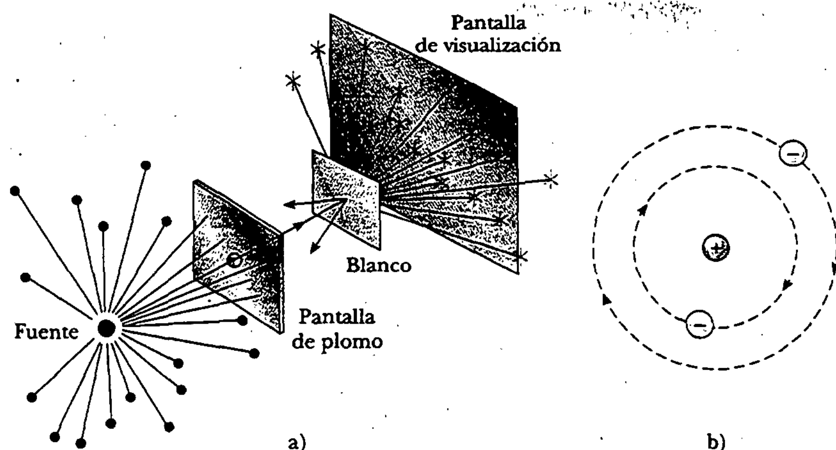


Figura 42.2 a) Técnica de Rutherford para observar la dispersión de partículas alfa desde un blanco de una delgada hoja. La fuente es una sustancia radiactiva que se encuentra en la naturaleza, como el radio. b) Modelo planetario del átomo de Rutherford.

persaron en ángulos *muy grandes*. Algunas partículas incluso se desviaron hacia atrás, ¡invirtiendo su dirección de viaje! Cuando Geiger informó a Rutherford que algunas partículas alfa se desviaron hacia atrás, Rutherford escribió: "Fue con mucho el más increíble evento que me había sucedido en la vida. Fue casi tan increíble como si usted disparara una pieza de artillería de 15 pulgadas contra un pedazo de papel facial y que aquélla regresara y lo golpeara."

No se esperaban tan grandes desviaciones con base en el modelo de Thomson. De acuerdo con este modelo, la carga positiva de un átomo en la hoja está tan dispersa sobre un volumen tan grande (todo el átomo) que una partícula alfa con carga positiva nunca se acercaría lo suficiente a una carga positiva tan grande como para producir desviaciones a ángulos tan grandes. Rutherford explicó sus asombrosos resultados mediante el desarrollo de un nuevo modelo atómico, uno que supuso que la carga positiva en el átomo estaba concentrada en una región que era pequeña en relación con el tamaño del átomo. A dicha concentración de carga positiva él la denominó **núcleo** del átomo. Se supuso que todos los electrones que pertenecían al átomo estaban en un volumen relativamente grande afuera del núcleo. Para explicar por qué estos electrones no eran atraídos al núcleo, Rutherford consideró que los electrones se movían en órbitas alrededor del núcleo con carga positiva, en la misma forma que los planetas giran alrededor del Sol (Fig. 42.2b).

Hay dos dificultades básicas con el modelo planetario de Rutherford. Como se expuso en el capítulo 40, un átomo emite ciertas frecuencias características de radiación electromagnética y no otras; el modelo de Rutherford no puede explicar este fenómeno. Una segunda dificultad es que los electrones de Rutherford están sometidos a una aceleración centrípeta. De acuerdo con la teoría del electromagnetismo de Maxwell, las cargas aceleradas en forma centrípeta que giran con frecuencia f deben radiar ondas electromagnéticas de frecuencia f. Desafortunadamente, este modelo clásico conduce a un desastre cuando se aplica al átomo. Conforme el electrón radia energía, el radio de su órbita disminuye de forma estable y su frecuencia de revolución aumenta, lo cual lleva a una frecuencia siempre en aumento de la radiación emitida y a un colapso final del átomo cuando el electrón se precipita al núcleo (Fig. 42.3).

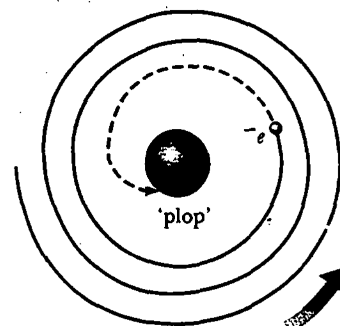


Figura 42.3 Modelo clásico del átomo nuclear.

Ahora el escenario quedaba listo para Bohr. Para evitar las deducciones erróneas de que los electrones se precipitaban hacia el núcleo, y una emisión continua desde los átomos, Bohr postuló que la teoría de la radiación clásica no se cumplía en sistemas de tamaño atómico. Él superó los problemas del electrón clásico que pierde energía en forma continua aplicando las ideas de Planck de los niveles de energía

cuantizados para los electrones que giran alrededor del núcleo. Así, Bohr postuló que los átomos están por lo general confinados a niveles de energía no radiantes y estables, con cada nivel representando un estado estacionario (véase la sección 40.5). Más aún, aplicó el concepto del fotón de Einstein para llegar a una expresión para la frecuencia de la luz emitida cuando el electrón salta de un estado estacionario a otro.

Uno de los primeros indicios de que la teoría de Bohr necesitaba modificarse surgió cuando se usaron técnicas espectroscópicas mejoradas para examinar las líneas espectrales del hidrógeno. Se encontró que muchas de las líneas en la serie de Balmer, junto con otras, no eran líneas únicas en absoluto. En lugar de eso, cada una correspondía a un grupo de líneas muy próximas entre sí. Una dificultad adicional se presentó cuando se observó que, en algunas situaciones, ciertas líneas espectrales individuales se dividían en tres líneas muy cercanas entre sí cuando los átomos se ponían en un campo magnético intenso. Los esfuerzos por explicar estas desviaciones del modelo de Bohr llevaron a mejorar la teoría. Uno de los cambios introducidos en la teoría original fue el postulado de que el electrón podría girar en torno de su propio eje. Asimismo, Arnold Sommerfeld (1868-1951) mejoró la teoría de Bohr al introducir la teoría de la relatividad en el análisis del movimiento del electrón.



NUEVA VISITA AL ÁTOMO DE HIDRÓGENO

En el capítulo 40 se describió la manera en que el modelo de Bohr ve al electrón: como una partícula que orbita alrededor del núcleo en niveles de energía cuantizados que no radian. El modelo de De Broglie dio a los electrones una naturaleza ondulatoria, un modelo que permite cierta comprensión más profunda del átomo de hidrógeno. Sin embargo, dicho modelo no supera todas las objeciones al modelo de Bohr e introduce algunas de sus propias dificultades. Por fortuna, estas dificultades se hicieron a un lado cuando los métodos de la mecánica cuántica se utilizaron para describir átomos.

La función de energía potencial para el átomo de hidrógeno es

$$U(r) = -k_e \frac{e^2}{r} \tag{42.1}$$

donde $k_e = 8.99 \times 10^9$ N·m^2/C^2 es la constante de Coulomb y r es la distancia radial del protón (situado en $r = 0$) al electrón. La figura 42.4 es una gráfica de esta función *versus* r/a_0, donde a_0 es el radio de Bohr, 0.052 9 nm (véase la Ec. 40.24).

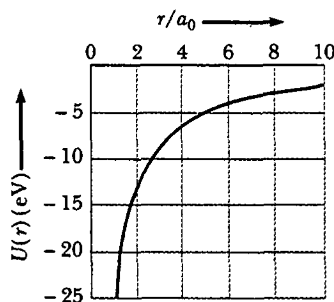


Figura 42.4 Energía potencial $U(r)$ *versus* la proporción r/a_0 para el átomo de hidrógeno. La constante a_0 es el radio de Bohr, y r es la distancia de separación electrón-protón.

El procedimiento formal para resolver el problema del átomo de hidrógeno es sustituir $U(r)$ en la ecuación de Schrödinger y encontrar soluciones apropiadas a la ecuación, como se hizo para la partícula en una caja en el capítulo 41. Sin embargo, el presente problema es más complicado porque es tridimensional y porque U depende de la coordenada radial r. No se intentará obtener estas soluciones. En vez de eso, sólo se describirán sus propiedades y algunas de sus implicaciones respecto a la estructura atómica.

De acuerdo con la mecánica cuántica, las energías de los estados permitidos para el átomo de hidrógeno son

Energías permitidas para el átomo de hidrógeno

$$E_n = -\left(\frac{k_e e^2}{2a_0}\right)\frac{1}{n^2} = -\frac{13.606}{n^2}\,\text{eV} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{42.2}$$

Este resultado tiene exacta concordancia con el obtenido en la teoría de Bohr.

En dicha solución a la ecuación de Schrödinger, tres números cuánticos, todos ellos con valores enteros, son necesarios para cada estado estacionario, lo que corresponde a tres grados de libertad independientes para el electrón: **número cuántico principal n, número cuántico orbital ℓ,** y **número cuántico magnético orbital m_ℓ.**

TABLA 42.1 Tres números cuánticos para el átomo de hidrógeno

Números cuánticos	Nombre	Valores permitidos	Números de estados
n	Número cuántico principal	1, 2, 3,...	Cualquier número
ℓ	Número cuántico orbital	0, 1, 2,..., $n-1$	n
m_ℓ	Número cuántico magnético orbital	$-\ell, -\ell+1,\ldots, 0,\ldots, \ell-1, \ell$	$2\ell+1$

Un cuarto número cuántico, resultado de un tratamiento relativista del átomo de hidrógeno, se analiza en la sección 42.3.

Hay ciertas relaciones importantes entre estos tres números cuánticos, así como ciertas restricciones en sus valores:

Restricciones en los valores de los números cuánticos

Los valores de n pueden variar de 1 a ∞.
Los valores de ℓ pueden variar de 0 a $n-1$.
Los valores de m_ℓ pueden variar de $-\ell$ a ℓ.

Por ejemplo, si $n = 1$, sólo se permite $\ell = 0$ y $m_\ell = 0$. Si $n = 2$, ℓ puede ser 0 o 1; si $\ell = 0$, entonces $m_\ell = 0$; pero si $\ell = 1$, entonces m_ℓ puede ser 1, 0 o -1. La tabla 42.1 resume las reglas para determinar los valores permitidos de ℓ y m_ℓ para un n dado.

Por razones históricas, se dice que **todos los estados que tienen el mismo número cuántico principal forman una capa.** Las capas se identifican por medio de las letras K, L, M,..., las cuales designan los estados para los que $n = 1, 2, 3,\ldots$ Del mismo modo, **todos los estados que tienen los mismos valores de n y ℓ se dice que forman una subcapa.** Las letras[1] *s, p, d, f, g, h*,... se emplean para designar las subcapas para las cuales $\ell = 0, 1, 2, 3,\ldots$ Por ejemplo, el estado designado por $3p$ tiene los números cuánticos $n = 3$ y $\ell = 1$; y el estado $2s$ tiene los números cuánticos $n = 2$ y $\ell = 0$. Estas notaciones se resumen en la tabla 42.2.

Los estados que violan las reglas dadas en la tabla 42.1 no pueden existir. Por ejemplo, el estado $2d$, el cual tendría $n = 2$ y $\ell = 2$, no puede existir debido a que el valor más alto permitido de ℓ es $n - 1$, el cual en este caso es 1. Por tanto, para $n = 2$, $2s$ y $2p$ son estados permitidos, pero $2d$, $2f$,... no lo son. Para $n = 3$, las subcapas permitidas son $3s$, $3p$ y $3d$.

TABLA 42.2 Notación de capas y subcapas atómicas

n	Símbolo de capa	ℓ	Símbolo de subcapa
1	K	0	*s*
2	L	1	*p*
3	M	2	*d*
4	N	3	*f*
5	O	4	*g*
6	P	5	*h*
...		...	

[1] Las primeras cuatro de estas letras vienen de las clasificaciones tempranas de las líneas espectrales: sharp, principal, diffuse y fundamental. Las letras restantes están en orden alfabético.

EJEMPLO 42.1 El nivel $n = 2$ del hidrógeno

Para un átomo de hidrógeno determine el número de estados permitidos correspondientes al número cuántico principal $n = 2$, y calcule las energías de estos estados.

Solución Cuando $n = 2$, ℓ puede ser 0 o 1. Si $\ell = 0$, el único valor que m_ℓ puede tener es 0; para $\ell = 1$, m_ℓ puede ser -1, 0 o 1. En consecuencia, se tiene un estado, designado como el estado $2s$, que se asocia con los números cuánticos $n = 2$, $\ell = 0$ y $m_\ell = 0$, y tres estados, designados como estados $2p$, para los cuales los números cuánticos son $n = 2$, $\ell = 1$, $m_\ell = -1$; $n = 2$, $\ell = 1$, $m_\ell = 0$; y $n = 2$, $\ell = 1$, $m_\ell = 1$.

Como los cuatro estados tienen el mismo número cuántico principal $n = 2$, poseen la misma energía, de acuerdo con la ecuación 42.2:

$$E_2 = -\frac{13.606 \text{ eV}}{2^2} = -3.401 \text{ eV}$$

Ejercicio ¿Cuántos estados posibles existen para el nivel $n = 3$ del hidrógeno? ¿Para el nivel $n = 4$?

Respuesta 9; 16.

EL NÚMERO CUÁNTICO MAGNÉTICO DEL ESPÍN

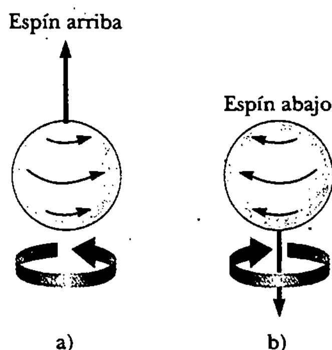


Figura 42.5 El espín de un electrón puede ser a) arriba o b) abajo, en relación con un campo magnético externo.

En el ejemplo 42.1 se encontraron cuatro estados cuánticos que corresponden a $n = 2$. Sin embargo, en realidad ocurren ocho de tales estados. Los cuatro estados adicionales pueden explicarse requiriendo un cuarto número cuántico para cada estado: el **número cuántico magnético del espín** m_s.

La necesidad de este nuevo número cuántico surgió más o menos debido a una característica inusual que se advirtió en los espectros de ciertos gases, como el vapor de sodio. La inspección detallada de una línea sobresaliente en el espectro de emisión del sodio muestra que la línea es, en realidad, dos líneas muy próximas una de la otra llamadas *doblete*. Las longitudes de onda de estas líneas ocurren en la región amarilla del espectro electromagnético a 589.0 nm y 589.6 nm. En 1925, cuando este doblete fue observado por primera vez, la teoría atómica no pudo explicarla. Para resolver este dilema Samuel Goudsmit (1902-1978) y George Uhlenbeck (1900-1988), siguiendo una sugerencia del físico austriaco Wolfgang Pauli (1900-1958), propusieron el número cuántico de espín.

Para describir este nuevo número cuántico, es conveniente (aunque técnicamente incorrecto) considerar al electrón como si girara sobre su eje a medida que orbita el núcleo, como se describió en la sección 30.8. Sólo dos direcciones existen para el espín del electrón, como se muestra en la figura 42.5. Si la dirección del espín es como se indica en la figura 42.5a, se dice que el electrón tiene *espín arriba*. Si la dirección del espín se invierte, como en la figura 42.5b, se afirma que el electrón tiene *espín abajo*. En presencia de un campo magnético externo, la energía del electrón es ligeramente diferente para las dos direcciones del espín, y esta diferencia de energía explica el doblete del sodio. Los números cuánticos asociados con el espín del electrón son $m_s = \frac{1}{2}$ para el estado de espín arriba y $m_s = -\frac{1}{2}$ para el estado de espín abajo.

La descripción clásica del espín del electrón —como resultante de un electrón que gira— es incorrecta, porque la mecánica cuántica dice que un grado de libertad rotacional requeriría demasiados números cuánticos, y la teoría más reciente indica que el electrón es una partícula puntual, sin extensión espacial. Por tanto, no puede considerarse que el electrón gire como se ilustra en la figura 42.5. A pesar de esta dificultad conceptual todas las evidencias experimentales respaldan la idea de que un electrón tiene alguna propiedad intrínseca que puede describirse por medio del número cuántico magnético del espín. Sommerfeld y Paul Dirac (1902-1984) mostraron que este cuarto número cuántico se origina en las propiedades relativistas del electrón.

EJEMPLO 42.2 **Añadiendo algún espín al hidrógeno**

Para un átomo de hidrógeno determine los números cuánticos asociados con los posibles estados que corresponden al número cuántico principal $n = 2$.

Solución Con la adición del número cuántico del espín se tienen las posibilidades dadas en la tabla siguiente.

Ejercicio Muestre que para $n = 3$ hay 18 estados posibles.

n	ℓ	m_ℓ	m_s	Subcapa	Capa	Número de electrones en subcapa
2	0	0	$\frac{1}{2}$	2s	L	2
2	0	0	$-\frac{1}{2}$			
2	1	1	$\frac{1}{2}$	2p	L	6
2	1	1	$-\frac{1}{2}$			
2	1	0	$\frac{1}{2}$			
2	1	0	$-\frac{1}{2}$			
2	1	-1	$\frac{1}{2}$			
2	1	-1	$-\frac{1}{2}$			

LAS FUNCIONES DE ONDA PARA EL HIDRÓGENO

Si por ahora ignora el espín del electrón, la energía potencial del átomo de hidrógeno depende sólo de la distancia radial r entre el núcleo y el electrón. Se espera, por tanto, que alguno de los estados permitidos para este átomo pueda representarse por medio de las funciones de onda que dependen sólo de r. Desde luego, éste es el caso. La función de onda más simple para el hidrógeno es una que describe el estado $1s$ y se designa $\psi_{1s}(r)$:

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^{\,3}}} e^{-r/a_0} \qquad (42.3)$$

Función de onda para el hidrógeno en su estado base

donde a_0 es el radio de Bohr. Observe que Ψ_{1s} tiende a cero a medida que r tiende a ∞, y está normalizada como se presenta (véase la Ec. 41.4). Además, como Ψ_{1s} depende sólo de r, es *esféricamente simétrica*, lo cual, de hecho, es válido para todos los estados s.

Recuerde que la probabilidad de encontrar al electrón en cualquier región es igual a una integral de la densidad de probabilidad $|\Psi|^2$ sobre la región. La densidad de probabilidad para el estado $1s$ es

$$|\psi_{1s}|^2 = \left(\frac{1}{\pi a_0^{\,3}}\right) e^{-2r/a_0} \qquad (42.4)$$

y la probabilidad real de encontrar el electrón en un elemento de volumen dV es $|\Psi|^2\, dV$. Resulta conveniente definir la *función de densidad de probabilidad radial* $P(r)$ como la probabilidad, por unidad de longitud radial, de encontrar el electrón en un cascarón esférico de radio r y espesor dr. Por tanto, $P(r)\,dr$ es la probabilidad de encontrar al electrón en este cascarón. El volumen dV de dicho cascarón infinitesimalmente delgado es igual al área de su superficie, $4\pi r^2$, multiplicada por el espesor del cascarón dr (Fig. 42.6), por lo que esta probabilidad se puede escribir como

$$P(r)\ dr = |\psi|^2\ dV = |\psi|^2\ 4\pi r^2\ dr$$

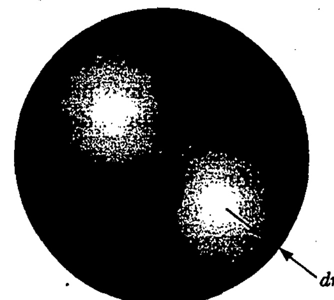


Figura 42.6 Un cascarón esférico de radio r y espesor dr tiene un volumen igual a $4\pi r^2\,dr$.

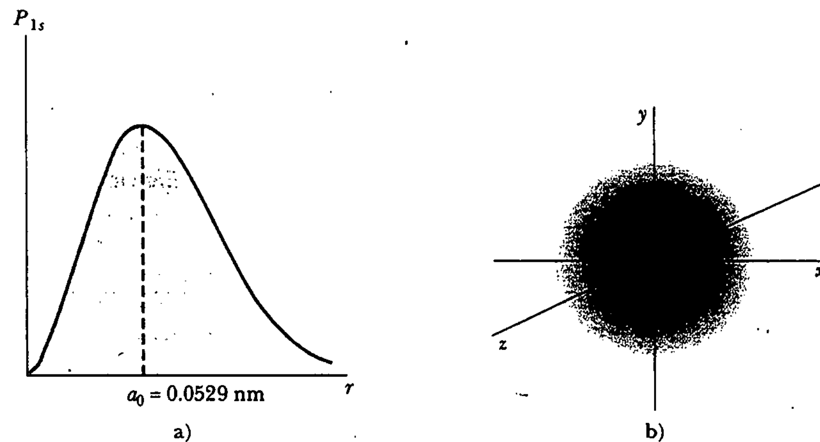


Figura 42.7 a) La probabilidad de encontrar al electrón como una función de la distancia desde el núcleo para el átomo de hidrógeno en el estado (base) 1*s*. Advierta que la probabilidad tiene su valor máximo cuando *r* es igual al radio de Bohr a_0. b) Distribución de carga electrónica esférica para el átomo de hidrógeno en su estado 1*s*.

En consecuencia, la función de densidad de probabilidad radial es

$$P(r) = 4\pi r^2|\Psi|^2 \qquad \textbf{(42.5)}$$

La sustitución de la ecuación 42.4 en la 42.5 proporciona la función de densidad de probabilidad radial para el átomo de hidrógeno en su estado base:

Densidad de probabilidad radial para el estado 1*s* del hidrógeno

$$P_{1s}(r) = \left(\frac{4r^2}{a_0^3}\right)e^{-2r/a_0} \qquad \textbf{(42.6)}$$

En la figura 42.7a se muestra una gráfica de la función $P_{1s}(r)$ *versus* *r*. El pico de la curva corresponde al valor más probable de *r* para este estado particular. La simetría esférica de la función de densidad de probabilidad radial se observa en la figura 42.7b.

Pregunta sorpresa 42.1

Bosqueje una sección transversal de la distribución de carga tridimensional mostrada en la figura 42.7b, imaginando a la esfera como "deslizándose" en el plano *xy*.

EJEMPLO **El estado base del hidrógeno**

Calcule el valor más probable de *r* para un electrón en el estado base del átomo de hidrógeno.

Solución El valor más probable de *r* corresponde al pico de la gráfica *P*(*r*) *versus* *r*. Puesto que la pendiente de la curva en este punto es cero, se puede evaluar el valor más probable de *r* si considera $dP/dr = 0$ y se resuelve para *r*. Con la ecuación 42.6 se obtiene

$$\frac{dP}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\left(\frac{4r^2}{a_0^3}\right)e^{-2r/a_0}\right] = 0$$

Al realizar la operación derivada y simplificar la expresión, se obtiene

$$e^{-2r/a_0}\frac{d}{dr}(r^2) + r^2\frac{d}{dr}(e^{-2r/a_0}) = 0$$

$$2re^{-2r/a_0} + r^2(-2/a_0)e^{-2r/a_0} = 0$$

$$\text{1)} \qquad 2r[1 - (r/a_0)]e^{-2r/a_0} = 0$$

Dicha expresión se satisface si

$$1 - \frac{r}{a_0} = 0$$

$$r = a_0$$

¡El valor más probable de r es el radio de Bohr! El resultado y la ecuación 42.2 son conexiones interesantes entre la teoría de Bohr y la más sofisticada teoría cuántica.

La ecuación 1) también es satisfecha en $r = 0$. Éste es un punto de probabilidad *mínima*, el cual es igual a cero, como se vio en la figura 42.7a.

EJEMPLO 42.4 **Probabilidades del electrón en el hidrógeno**

Calcule la probabilidad de que el electrón en el estado base del hidrógeno se encontrará fuera del primer radio de Bohr.

Solución La probabilidad se encuentra integrando la función de densidad de probabilidad radial para este estado $P_{1s}(r)$ desde el radio de Bohr a_0 hasta ∞. Utilizando la ecuación 42.6 se obtiene

$$P = \int_{a_0}^{\infty} P_{1s}(r)\, dr = \frac{4}{a_0^3}\int_{a_0}^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0}\, dr$$

Es posible poner la integral en forma adimensional cambiando variables de r a $z = 2r/a_0$. Observando que $z = 2$ cuando $r = a_0$ y que $dr = (a_0/2)\,dz$, se obtiene

$$P = \tfrac{1}{2}\int_{2}^{\infty} z^2 e^{-z} dz = -\tfrac{1}{2}(z^2 + 2z + 2)e^{-z}\Big|_2^{\infty}$$

$$P = 5e^{-2} = 0.677 \text{ o } 67.7\%$$

El ejemplo 42.3 muestra que, para el estado base del hidrógeno, el valor más probable de r es igual al radio de Bohr a_0. Éste indica que el valor promedio de r para el estado base del hidrógeno es $\frac{3}{2}a_0$, el cual es 50% más grande que el valor más probable (véase el problema 49). La razón de que el valor promedio sea tan grande es la asimetría en la función de densidad de probabilidad radial (Fig. 42.7a), la cual tiene más área a la derecha del pico. De acuerdo con la mecánica cuántica, el átomo no tiene una frontera claramente definida. Por consiguiente, la distribución de probabilidad para el electrón puede verse como si fuera una región difusa del espacio, conocida por lo general como *nube de electrones.*

La siguiente función de onda más simple para el átomo de hidrógeno es la que corresponde al estado 2s ($n = 2$, $\ell = 0$). La función de onda normalizada para este estado es

Función de onda para el hidrógeno en el estado 2s

$$\psi_{2s}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0} \qquad \textbf{(42.7)}$$

También en este caso se ve que ψ_{2s} depende sólo de r y es simétrica esféricamente. La energía correspondiente a este estado es $E_2 = -(13.606/4)$ eV $= -3.401$ eV. Dicho nivel de energía representa el primer estado excitado del hidrógeno. Gráficas de la función de densidad de probabilidad radial para este y otros estados se muestran en la figura 42.8. La gráfica para el estado 2s tiene dos picos. En tal caso el valor más probable corresponde al valor de r que tiene el valor más alto de $P(\approx 5a_0)$. Un electrón en el estado 2s estaría más alejado del núcleo (en promedio) que un electrón en el estado 1s. El valor promedio de r es incluso mayor para los estados 3d, 3p, y 4d.

Como se ha mencionado, todos los estados s tienen funciones de onda simétricas esféricamente. Los otros estados no tienen esta simetría. Por ejemplo, las tres funciones de onda correspondientes a los estados para los cuales $n = 2$, $\ell = 1$ ($m_\ell = 1$, 0 o -1) pueden expresarse como combinaciones lineales apropiadas de los tres estados p. Aunque la mecánica cuántica limita el conocimiento del *momentum* angular a la proyección a lo largo de cualquier eje a la vez, estos estados p pueden describirse en forma matemática como combinaciones lineales de funciones mutuamente perpendiculares p_x, p_y y p_z, como se representa en la figura 42.9, donde sólo se muestra

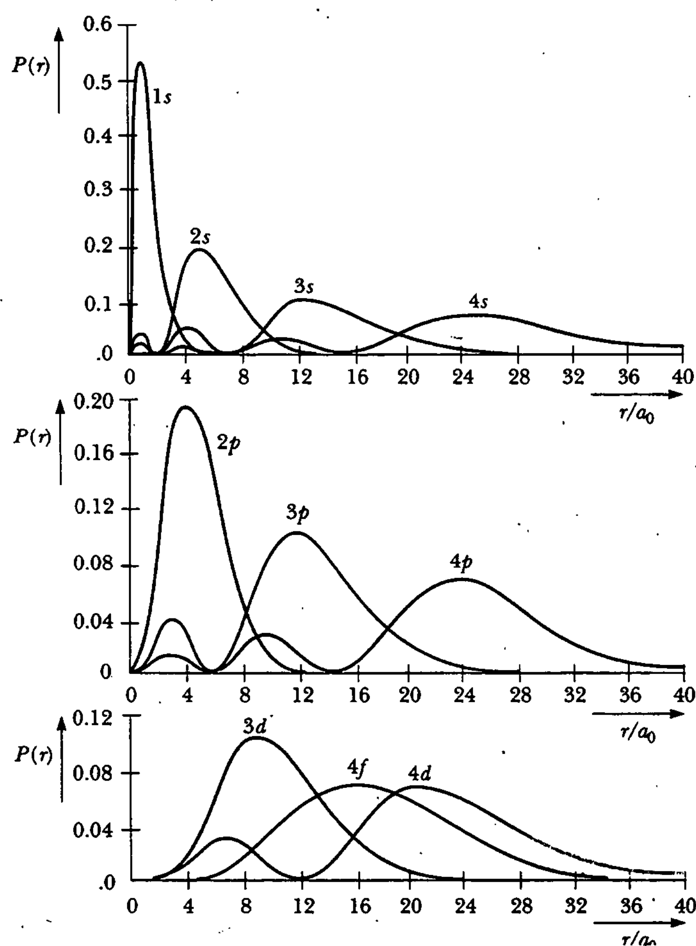


Figura 42.8 Función de densidad de probabilidad radial *versus* r/a_0 para varios estados del átomo de hidrógeno. *(Tomado de E. U. Condon and G. H. Shortley,* The Theory of Atomic Spectra, *Cambridge, England, Cambridge University Press, 1953. Usado con permiso.)*

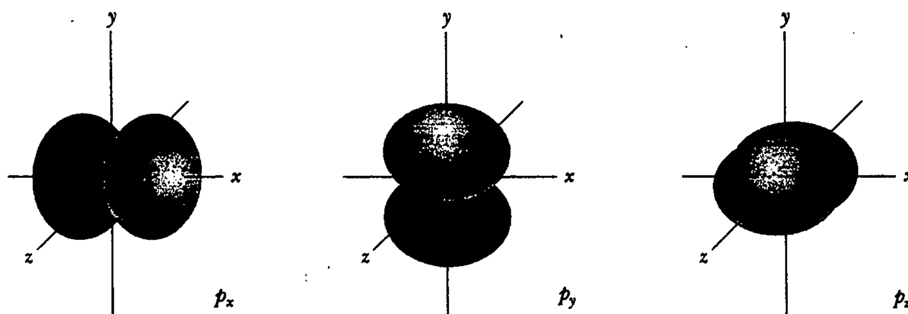


Figura 42.9 Dependencia angular de la distribución de carga para un electrón en un estado p. Las tres distribuciones de carga p_x, p_y y p_z tienen la misma estructura y difieren sólo en su orientación en el espacio.

la dependencia angular de estas funciones. Observe que las tres nubes tienen estructura idéntica pero difieren en su orientación respecto de los ejes x, y y z. Las funciones de onda no esféricas para esos estados son

$$\psi_{2p_x} = xF(r)$$
$$\psi_{2p_y} = yF(r) \qquad (42.8)$$
$$\psi_{2p_z} = zF(r)$$

Funciones de onda para el estado 2p

donde $F(r)$ es alguna función exponencial de r. Las funciones de onda con un carácter altamente direccional como éstas, son convenientes en descripciones de enlaces químicos, la formación de moléculas y propiedades químicas.

LOS OTROS NÚMEROS CUÁNTICOS

La energía de un estado particular en el átomo de hidrógeno depende del número cuántico principal n. A continuación verá qué aportan los otros tres números cuánticos al modelo atómico.

El número cuántico orbital ℓ

Si una partícula se mueve en un círculo de radio r, la magnitud de su *momentum* angular relativa al centro del círculo es $L = mvr$. La dirección de **L** es perpendicular al plano del círculo y está dada por la regla de la mano derecha.[2] De acuerdo con la física clásica, L puede tener cualquier valor. Sin embargo, el modelo de Bohr del hidrógeno postula que la magnitud del *momentum* angular del electrón está restringida a múltiplos de $\hbar$; esto es, $mvr = n\hbar$. Este modelo debe modificarse debido a que predice (de manera incorrecta) que el estado base del hidrógeno ($n = 1$) tiene una unidad de *momentum* angular. Además, si L se considera como cero en el modelo de Bohr, uno está obligado a aceptar una descripción del electrón como una partícula que oscila a lo largo de una línea recta a través del núcleo, una situación físicamente inaceptable.

Las dificultades se resuelven con el modelo de la mecánica cuántica del átomo. De acuerdo con la mecánica cuántica, un átomo en un estado cuyo número cuántico principal es n puede tomar los siguientes valores *discretos* de la magnitud del *momentum* angular orbital:

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\,\hbar \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots, n - 1 \qquad (42.9)$$

Valores permitidos de L

En virtud de que ℓ está restringido a los valores $\ell = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, se ve que $L = 0$ (correspondiente a $\ell = 0$) es un valor aceptable de la magnitud del *momentum* angular. El hecho de que L puede ser cero en este modelo sirve para señalar las dificultades inherentes en cualquier intento por describir resultados basados en la mecánica cuántica en función simplemente de un modelo (clásico) de partícula. En la interpretación de la mecánica cuántica, la nube de electrones para el estado $L = 0$ es simétrica esféricamente y no tiene eje de revolución fundamental.

---

[2] Véanse las secciones 11.3 y 11.4 para detalles sobre el *momentum* angular y una revisión de este material.

EJEMPLO **Cálculo de *L* para un estado *p***

Calcule la magnitud del *momentum* angular orbital de un electrón en un estado *p* del hidrógeno.

Solución Como se sabe que $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}$ J·s, puede utilizar la ecuación 42.9 para calcular *L*. Con $\ell = 1$ para un estado *p*, se tiene

$$L = \sqrt{1(1+1)}\,\hbar = \sqrt{2}\,\hbar = 1.49 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$$

Este número es extremadamente pequeño en relación con, por ejemplo, el *momentum* angular orbital de la Tierra dando vueltas alrededor del Sol, el cual es aproximadamente de 2.7×10^{40} J·s. El número cuántico que describe *L* para objetos macroscópicos, como la Tierra, es tan grande que la separación entre estados adyacentes no puede medirse. Otra vez, se sostiene el principio de correspondencia.

El número cuántico orbital magnético m_ℓ

Debido a que el *momentum* angular es un vector, su dirección debe especificarse. Recuerde del capítulo 30 que un electrón orbitando puede considerarse como una espira de corriente efectiva con un momento magnético correspondiente. Un momento de este tipo puesto en un campo magnético **B** interactúa con el campo. Suponga que un campo magnético débil aplicado a lo largo del eje *z* define una dirección en el espacio. De acuerdo con la mecánica cuántica, L^2 y L_z (la proyección de **L** a lo largo del eje *z*) sólo puede tener valores discretos. El número cuántico magnético orbital m_ℓ especifica los valores permitidos de la componente *z* del *momentum* angular orbital de acuerdo con la expresión

Valores permitidos de L_z

$$L_z = m_\ell \hbar \qquad \textbf{(42.10)}$$

La cuantización del espacio

La cuantización de la dirección de **L** respecto de un campo magnético externo con frecuencia se conoce como **cuantización del espacio.**

Vea ahora las posibles orientaciones de **L** para un valor dado de ℓ. Recuerde que m_ℓ puede tener valores que varían de $-\ell$ a ℓ. Si $\ell = 0$, entonces $m_\ell = 0$ y $L_z = 0$. Si $\ell = 1$, entonces los posibles valores de m_ℓ son −1, 0 y 1; en consecuencia, L_z puede ser $-\hbar$, 0 o $\hbar$. Si $\ell = 2$, entonces m_ℓ puede ser −2, −1, 0, 1 o 2, lo cual corresponde a valores L_z de $-2\hbar$, $-\hbar$, 0, $\hbar$, $2\hbar$, y así sucesivamente.

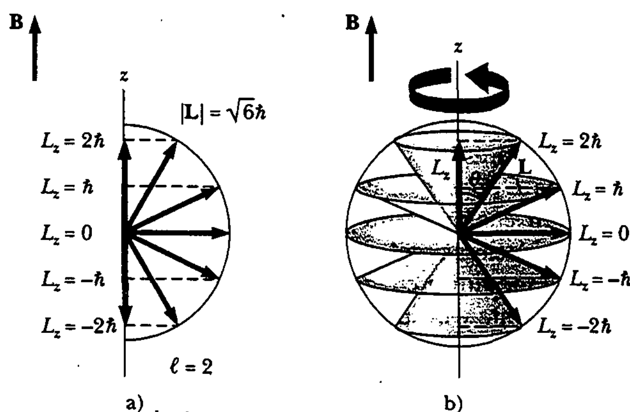


Figura 42.10 a) Las proyecciones permitidas del *momentum* angular orbital **L** para el caso $\ell = 2$. b) El vector de *momentum* angular orbital **L** yace sobre la superficie de un cono y realiza precesión en torno al eje *z* cuando se aplica un campo magnético **B** en la dirección *z*.

La figura 42.10a presenta un modelo vectorial que describe la cuantización del espacio para $\ell = 2$. Advierta que **L** nunca puede estar alineado paralelo o antiparalelo a **B** porque L_z debe ser más pequeño que el *momentum* angular total L. Para que L_z sea cero, **L** debe estar perpendicular a **B**. Desde un punto de vista tridimensional, **L** debe encontrarse sobre la superficie de un cono que forma un ángulo θ con el eje z, como se indica en la figura 42.10b. De acuerdo con la figura, se ve que θ también está cuantizado y que sus valores se especifican por medio de la relación

$$\cos\theta = \frac{L_z}{|\mathbf{L}|} = \frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \quad \textbf{(42.11)}$$

θ está cuantizado

Observe que m_ℓ nunca es mayor que ℓ y, en consecuencia, θ nunca puede ser cero. (Según el punto de vista clásico, θ puede tener cualquier valor.)

Debido al principio de incertidumbre, **L** no apunta en una dirección específica. Se le puede imaginar trazando un cono en el espacio. Si **L** se conociera con exactitud, entonces las tres componentes L_x, L_y y L_z estarían especificadas. Por el momento, suponga que éste es el caso y que el electrón se mueve en el plano xy, de modo que **L** está en la dirección z y la componente z de su *momentum* lineal $p_z = 0$. Lo que significa que p_z se conoce con precisión, lo cual es una violación al principio de incertidumbre, $\Delta p_z \, \Delta z \geq \hbar/2$. En realidad, sólo la magnitud de **L** y una componente (por ejemplo, L_z) pueden tener valores definidos. En otras palabras, la mecánica cuántica permite especificar L y L_z, pero no L_x y L_y. Debido a que la dirección de **L** cambia constantemente cuando se le imagina realizando precesión alrededor del eje z, los valores promedio de L_x y L_y son cero, y L_z mantiene un valor fijo de $m_\ell\hbar$.

Los niveles de energía adicional proporcionados por el número cuántico magnético orbital explican el *efecto Zeeman*, en el cual se observa que las líneas espectrales se escinden cuando un campo magnético está presente, como se muestra en la figura 42.11.

Experimento sorpresa

Haga girar un trompo o un giroscopio con rapidez, y observe cómo su eje de rotación lentamente realiza precesión en torno a una línea vertical que pasa por el punto de soporte. Lo anterior modela la precesión del vector de *momentum* angular, como se muestra en la figura 42.10b. En la fotografía, Wolfgang Pauli y Niels Bohr están mirando este hecho por ellos mismos. *(Cortesía de AIP Niels Bohr Library, Margarethe Bohr Collection)*



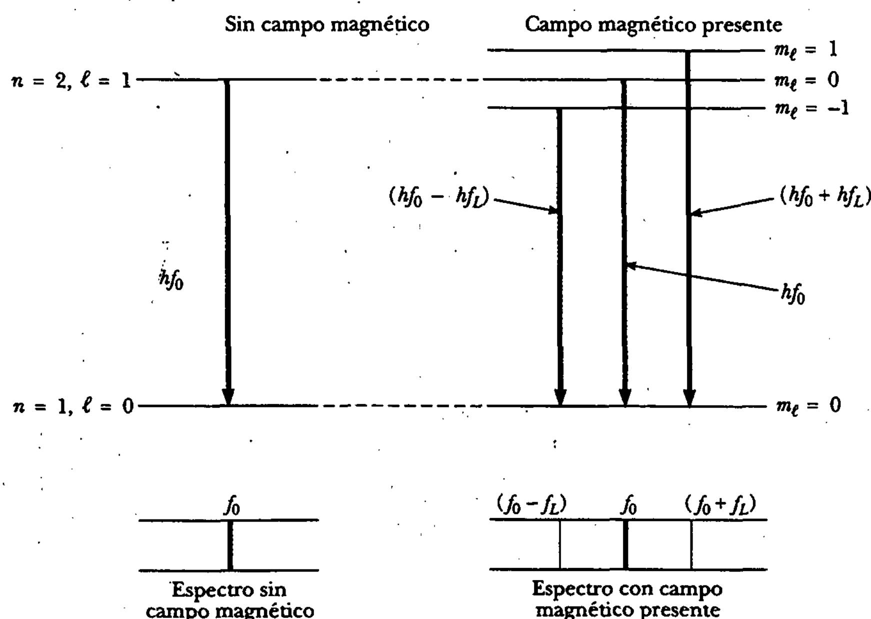


Figura 42.11 Niveles de energía de escisión para los estados base y primero excitado de un átomo de hidrógeno inmerso en un campo magnético **B**. Un átomo en uno de los estados excitados decae al estado base con la emisión de un fotón, dando origen a líneas de emisión en f_0, $f_0 + f_L$ y $f_0 - f_L$. Éste es el efecto Zeeman. Cuando $\mathbf{B} = 0$ sólo se observa la línea en f_0.

EJEMPLO Cuantización espacial para el hidrógeno

Considere el átomo de hidrógeno en el estado $\ell = 3$. Calcule la magnitud de **L** y los valores permitidos de L_z y θ.

Solución Se puede calcular la magnitud del *momentum* angular orbital empleando la ecuación 42.9:

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar = \sqrt{3(3+1)}\,\hbar = 2\sqrt{3}\,\hbar$$

Los valores permitidos de L_z pueden calcularse empleando $L_z = m_\ell \hbar$, con $m_\ell = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3:

$$L_z = -3\hbar, -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar \text{ y } 3\hbar$$

Por último, los valores permitidos de θ se calculan utilizando la ecuación 42.11:

$$\cos\theta = \frac{m_\ell}{2\sqrt{3}}$$

Al sustituir los valores permitidos de m_ℓ se obtiene

$$\cos\theta = \pm 0.866, \pm 0.577, \pm 0.289 \text{ y } 0$$

$$\theta = 30.0°, 54.8°, 73.2°, 90.0°, 107°, 125° \text{ y } 150°$$

Pregunta sorpresa 42.2

Realice dos dibujos como la figura 42.10a, uno para $\ell = 1$ y el otro para $\ell = 3$.

El número cuántico magnético de espín m_s

En 1921 Otto Stern (1888-1969) y Walter Gerlach (1889-1979) efectuaron un experimento que demostró la cuantización del espacio. Sin embargo, sus resultados no concordaron cuantitativamente con la teoría que existía en ese tiempo. En su experimento, un haz de átomos de plata enviado a través de un campo magnético no uniforme se dividía en dos componentes (Fig. 42.12). Ellos repitieron el experimento con otros átomos y en cada caso el haz se dividía en dos o más componentes. El argumento clásico es el siguiente: si se elige la dirección z como la dirección de máxima no uniformidad de **B**, la fuerza magnética neta sobre los átomos está a lo largo del eje z y es proporcional a la componente del momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ del átomo en la dirección z. (Véase la pregunta sorpresa 29.4 para una revisión de la causa de este fenómeno.) Clásicamente $\boldsymbol{\mu}$ puede tener cualquier orientación, por lo que el haz desviado debe dispersarse en forma continua. Sin embargo, de acuerdo con la mecánica cuántica, el haz desviado tiene varios componentes y el número de componentes determina el número de posibles valores de μ_z. Por tanto, como el ex-

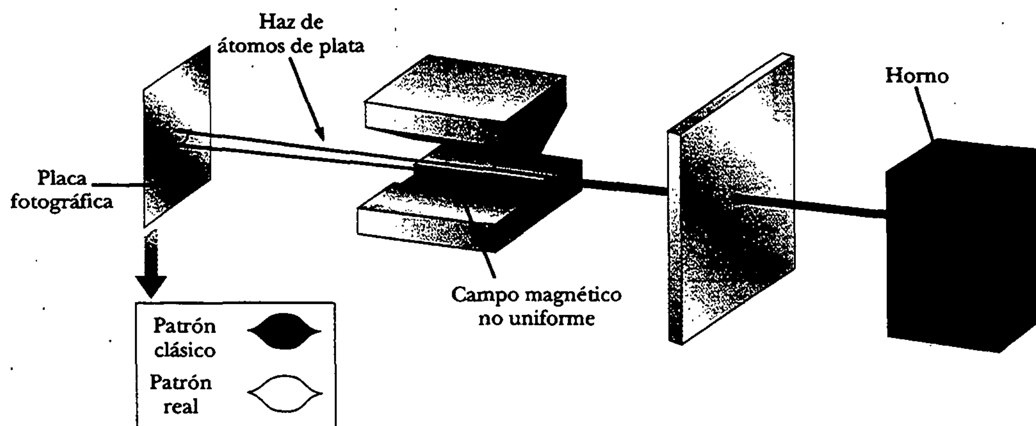


Figura 42.12 El aparato usado por Stern y Gerlach para comprobar la cuantización del espacio. Un haz de átomos de plata se divide en dos mediante un campo magnético no uniforme.

perimento de Stern-Gerlach mostraba haces divididos, la cuantización del espacio se verificó al menos cualitativamente.

Por el momento, suponga que el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ del átomo se debe al *momentum* angular orbital. En vista de que μ_z es proporcional a m_ℓ, el número de posibles valores de μ_z es $2\ell + 1$. Además, como ℓ es un entero, el número de valores de μ_z siempre es impar. Dicha predicción es sin duda inconsistente con las observaciones de Stern y Gerlach de dos componentes (un número *par*) en el haz desviado de átomos de plata. Por tanto, uno está obligado a concluir que o la mecánica cuántica es incorrecta o el modelo necesita mejorarse.

En 1927 Phipps y Taylor repitieron el experimento de Stern-Gerlach usando un haz de átomos de hidrógeno. Este experimento fue importante debido a que trató con un átomo que contiene un solo electrón en su estado base, para el cual la teoría cuántica hace predicciones confiables. Recuerde que $\ell = 0$ para el hidrógeno en su estado base, por lo que $m_\ell = 0$. En consecuencia, no se esperaría que el haz fuera desviado por el campo porque el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ del átomo es cero. Sin embargo, el haz en el experimento Phipps-Taylor se divide otra vez en dos componentes. A partir de este resultado se llega a una única conclusión: algo más que el movimiento orbital está contribuyendo al momento magnético.

Como aprendió con anterioridad, Goudsmit y Uhlenbeck habían propuesto que el electrón tiene un *momentum* angular intrínseco además de su *momentum* angular orbital. Desde un punto de vista clásico, este *momentum* angular intrínseco se atribuye al giro del electrón cargado alrededor de su propio eje y, por consiguiente, recibe el nombre de espín del electrón.[3] En otras palabras, el *momentum* angular total del electrón en un estado electrónico particular contiene tanto una contribución orbital **L** como una contribución del espín **S**. El resultado de Phipps-Taylor confirmó esta hipótesis de Goudsmit y Uhlenbeck.

Pregunta sorpresa 42.3

Explique por qué la teoría clásica predice el resultado marcado como "patrón clásico" en la figura 42.12.

En 1929 Dirac resolvió la ecuación de onda relativista para el electrón en un potencial de pozo utilizando la forma relativista de la energía total de un sistema. Su análisis confirmó la naturaleza fundamental del espín del electrón. (El espín, como la masa y la carga, es una propiedad intrínseca de una partícula, independiente de sus alrededores.) Además, el análisis mostró que el espín del electrón puede describirse por medio de un solo número cuántico s, cuyo valor sólo podría ser $\frac{1}{2}$. El *momentum* angular de espín del electrón *nunca cambia*. Esta noción contradice las leyes clásicas, las cuales dictan que una carga en rotación se frena en presencia de un campo magnético aplicado debido a la fem de Faraday que acompaña al campo variable. Más aún, si el electrón fuese visto como una bola de carga giratoria sujeta a leyes clásicas, partes de ella cerca de su superficie rotarían con rapidez que sobrepasaría la rapidez de la luz. En consecuencia, la visión clásica no se debe llevar tan lejos; a final de cuentas, el electrón giratorio es una entidad cuántica que desafía cualquier descripción clásica simple.

La magnitud del ***momentum* angular del espín S** para el electrón es

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \qquad \textbf{(42.12)}$$

Momentum angular del espín de un electrón

[3] Con frecuencia los físicos emplean la palabra *espín* cuando se refieren al *momentum* angular del espín. Por ejemplo, es común utilizar la frase "el electrón tiene un espín de $\frac{1}{2}$".

Del mismo modo que el *momentum* angular orbital **L**, el *momentum* angular del espín **S** está cuantizado en el espacio, como se describe en la figura 42.13. Puede tener dos orientaciones relativas a un campo magnético externo, especificadas por el número cuántico magnético del espín $m_s = \pm\frac{1}{2}$. La componente z del *momentum* angular del espín es

$$S_z = m_s\hbar = \pm\tfrac{1}{2}\hbar \tag{42.13}$$

Los dos valores de $\pm\,\hbar/2$ para S_z corresponden a las dos posibles orientaciones de **S** mostradas en la figura 42.13. El valor $m_s = +\frac{1}{2}$ se refiere al caso del espín arriba, y al valor $m_S = -\frac{1}{2}$ del espín abajo.

El momento magnético del espín $\boldsymbol{\mu}_{espín}$ del electrón se relaciona con su *momentum* angular de espín **S** por medio de la expresión

$$\boldsymbol{\mu}_{espín} = -\frac{e}{m_e}\mathbf{S} \tag{42.14}$$

donde e es la carga electrónica y m_e es la masa del electrón. Puesto que $S_z = \pm\frac{1}{2}\hbar$, la componente z del momento magnético del espín puede tener los valores

$$\mu_{espín,z} = \pm\frac{e\hbar}{2m_e} \tag{42.15}$$

Como aprendió en la sección 30.8, la cantidad $e\hbar/2m_e$ es el magnetón de Bohr $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24}$ J/T. Advierta que la proporción del momento magnético al *momentum* angular es el doble de grande para el *momentum* angular del espín (Ec. 42.14) como lo es para el *momentum* angular orbital (Ec. 30.25). El factor de 2 se explica en un tratamiento relativista que Dirac realizó por primera vez.

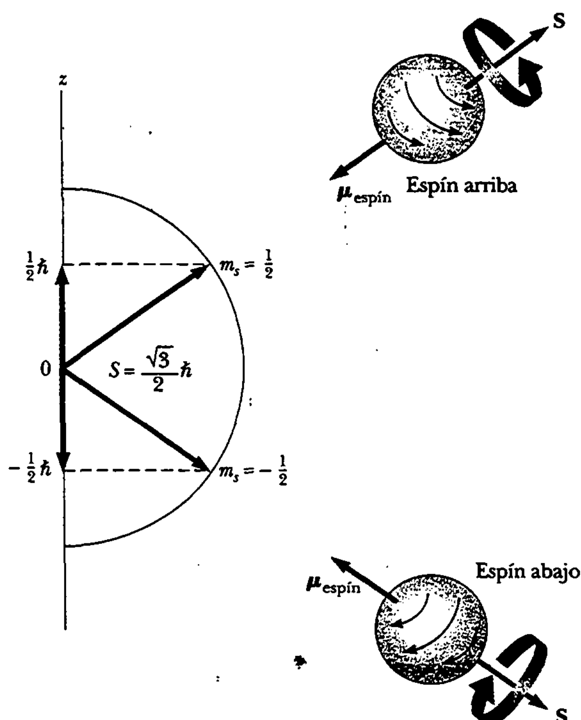


Figura 42.13 El *momentum* angular del espín **S** exhibe la cuantización del espacio. Esta figura muestra las dos orientaciones permitidas del vector *momentum* angular del espín **S** y el momento magnético del espín $\boldsymbol{\mu}_{espín}$ para una partícula de $\frac{1}{2}$ espín, como el electrón.

Los físicos actuales explican el experimento de Stern-Gerlach de la siguiente manera. Los momentos magnéticos observados tanto para la plata como para el hidrógeno se deben sólo al *momentum* angular del espín, sin contribución del *momentum* angular orbital. Un átomo de un solo electrón, como el hidrógeno, tiene su espín de electrón cuantizado en el campo magnético de tal modo que la componente z del *momentum* angular del espín es o $\frac{1}{2}\hbar$ o $-\frac{1}{2}\hbar$, lo que corresponde a $m_s = \pm\frac{1}{2}$. Los electrones con espín $+\frac{1}{2}$ se desvían hacia abajo, y aquellos con espín $-\frac{1}{2}$ se desvían hacia arriba.

El experimento de Stern-Gerlach proporcionó dos importantes resultados. Primero, verificó el concepto de cuantización del espacio. Segundo, mostró que el *momentum* angular de espín existe, aun cuando esta propiedad no se reconoció sino hasta cuatro años después de que se llevó a cabo el experimento.

EL PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN Y LA TABLA PERIÓDICA

En párrafos anteriores se encontró que el estado del átomo de hidrógeno está especificado por cuatro números cuánticos: n, ℓ, m_ℓ y m_s. Como se señaló, el estado de un electrón en cualquier otro átomo también puede especificarse mediante este mismo conjunto de números cuánticos. De hecho, estos cuatro números cuánticos pueden emplearse para describir todos los estados electrónicos de un átomo independientemente del número de electrones en su estructura.

Una pregunta obvia que surge aquí es: "¿Cuántos electrones pueden estar en un estado cuántico particular?" Esta importante pregunta fue contestada por Pauli en 1925, en un enunciado conocido como el **principio de exclusión:**

Dos electrones en el mismo átomo nunca pueden estar en el mismo estado cuántico; en consecuencia, dos electrones en el mismo átomo no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos.

Principio de exclusión

Si tal principio no fuera válido, cualquier electrón en un átomo podría terminar en el estado de energía más bajo posible del átomo y el comportamiento químico de los elementos se modificaría de manera considerable. ¡La naturaleza como la conocemos no existiría!

En realidad, la estructura electrónica de átomos complejos se puede ver como una sucesión de niveles llenos que crecen en energía. Como una regla general, el orden de llenado de las subcapas de un átomo es como sigue. Una vez que se llena una subcapa, el siguiente electrón va a la subcapa vacía de menor energía. Es un comportamiento que se comprende al reconocer que si un átomo no estuviera en su estado de energía más bajo disponible, radiaría energía hasta alcanzar este estado.

Antes de estudiar la configuración electrónica de diversos elementos, es conveniente definir un *orbital* como el estado de un electrón caracterizado por los números cuánticos n, ℓ y m_ℓ. A partir del principio de exclusión, se ve que **sólo dos electrones pueden estar presentes en cualquier orbital.** Uno de estos electrones tiene un número cuántico magnético de espín $m_s = +\frac{1}{2}$ y el otro tiene $m_s = -\frac{1}{2}$. Ya que cada orbital está limitado a dos electrones, el número de éstos que pueden ocupar las diferentes capas también está limitado.

La tabla 42.3 indica el número de estados cuánticos permitidos para un átomo en el cual $n = 3$. Las flechas que apuntan hacia arriba indican un átomo en el cual el electrón es descrito mediante $m_s = \frac{1}{2}$, y aquellas que apuntan hacia abajo indican que $m_s = -\frac{1}{2}$. La capa $n = 1$ puede acomodar sólo dos electrones debido a que $m_\ell = 0$ significa que sólo hay un orbital permitido. (Los tres números cuánticos que describen a este orbital son $n = 1$, $\ell = 0$ y $m_\ell = 0$.) La capa $n = 2$ tiene dos subcapas, una

TABLA 42.3 Estados cuánticos permitidos para un átomo que tiene $n = 3$

n	1	2				3								
ℓ	0	0	1			0	1			2				
m_ℓ	0	0	1	0	−1	0	1	0	−1	2	1	0	−1	−2
m_s	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓



[illegible] de 21 años [illegible] revisión [illegible] relatividad que todavía se [illegible] comprensivos artículos introductorios al tema. Sus otras contribuciones importantes fueron el descubrimiento del principio de exclusión, la explicación de la conexión entre espín de partícula y estadística, y teorías de electrodinámica cuántica relativista, la hipótesis del neutrino y la hipótesis del espín nuclear. (CERN, cortesía de AIP Emilio Segre Visual Archive)

para $\ell = 0$ y una para $\ell = 1$. La subcapa $\ell = 0$ está limitada a dos electrones debido a que $m_\ell = 0$. La subcapa $\ell = 1$ tiene tres orbitales permitidos, lo que corresponde a $m_\ell = 1$, 0 y −1. Puesto que cada orbital puede acomodar dos electrones, la subcapa $\ell = 1$ puede contener seis electrones. Por tanto, la capa $n = 2$ puede contener ocho electrones. La capa $n = 3$ tiene tres subcapas ($\ell = 0, 1, 2$) y nueve orbitales, y puede acomodar hasta 18 electrones. En general, cada capa puede acomodar hasta $2n^2$ electrones.

El principio de exclusión se ilustra mediante un examen del arreglo electrónico en unos cuantos de los átomos más ligeros. Primero, recuerde de la sección 1.2 que el número atómico Z de cualquier elemento es el número de protones en el núcleo de un átomo de éste. El hidrógeno ($Z = 1$) sólo tiene un electrón —el cual, en el estado base del átomo, puede describirse por medio de alguno de dos conjuntos de números cuánticos: 1, 0, 0, $\frac{1}{2}$ o 1, 0, 0, $-\frac{1}{2}$. Dicha configuración electrónica suele escribirse como $1s^1$. La notación $1s$ se refiere al estado para el cual $n = 1$ y $\ell = 0$, y el superíndice indica que un electrón está presente en la subcapa s.

El helio neutro ($Z = 2$) tiene dos electrones. En el estado base, sus números cuánticos son 1, 0, 0, $\frac{1}{2}$ y 1, 0, 0, $-\frac{1}{2}$. No hay otras combinaciones posibles de números cuánticos para este nivel, y se dice que la capa K está llena. La configuración electrónica se escribe $1s^2$.

El litio neutro ($Z = 3$) tiene tres electrones. En el estado base, dos de éstos están en la subcapa $1s$. El tercero está en la subcapa $2s$, porque esta subcapa es ligeramente inferior en energía que la subcapa $2p$.[4] Por tanto, la configuración electrónica para el litio es $1s^22s^1$.

Las configuraciones electrónicas del litio y de algunos elementos sucesivos están dadas en la figura 42.14. La configuración electrónica del berilio ($Z = 4$), con sus cuatro electrones, es $1s^22s^2$, y el boro ($Z = 5$) tiene una configuración de $1s^22s^22p^1$. El electrón $2p$ en el boro puede describirse mediante cualquiera de seis conjuntos de números cuánticos igualmente probables. En la figura 42.14 se muestra este electrón en la caja $2p$ del extremo izquierdo, con espín arriba, pero es igualmente probable que esté en cualquiera de las cajas $2p$ con espín ya sea arriba o abajo.

El carbono ($Z = 6$) tiene seis electrones, y da origen a una pregunta relativa a cómo asignar los dos electrones $2p$. ¿Van dentro del mismo orbital con espines pareados ↑↓ u ocupan diferentes orbitales con espines no pareados ↑↑? Los datos experimentales muestran que la configuración más estable (es decir, la que es preferida energéticamente) es la última, donde los espines no están pareados. En consecuencia, los dos electrones $2p$ en el carbono y los tres electrones $2p$ en el nitrógeno ($Z = 7$) tienen espines no pareados, como se observa en la figura 42.14. La regla general que gobierna estas situaciones, conocida como **regla de Hund**, establece que

Regla de Hund

cuando un átomo tiene orbitales de igual energía, el orden en el cual se llenan de electrones es uno en el que un número máximo de electrones tienen espines no pareados.

[4] En una primera aproximación, la energía depende sólo del número cuántico n, como se ha analizado. Sin embargo, debido al efecto de la carga electrónica que protege la carga nuclear en los átomos con varios electrones, la energía depende también de ℓ. Su efecto de cobertura se estudiará en la sección 42.7.

Átomo	1s	2s	2p			Configuración electrónica
Li	↑↓	↑				$1s^22s^1$
Be	↑↓	↑↓				$1s^22s^2$
B	↑↓	↑↓	↑			$1s^22s^22p^1$
C	↑↓	↑↓	↑	↑		$1s^22s^22p^2$
N	↑↓	↑↓	↑	↑	↑	$1s^22s^22p^3$
O	↑↓	↑↓	↑↓	↑	↑	$1s^22s^22p^4$
F	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑	$1s^22s^22p^5$
Ne	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	↑↓	$1s^22s^22p^6$

Figura 42.14 El llenado de los estados electrónicos debe obedecer el principio de exclusión y la regla de Hund.

Algunas excepciones a dicha regla ocurren en elementos que tienen subcapas que están casi llenas o medio llenas.

En la tabla 42.4 se proporciona una lista completa de las configuraciones electrónicas. En 1871, sin comprensión alguna de la mecánica cuántica que se tiene en la actualidad, el químico ruso Dmitri Mendeleev (1834-1907) realizó un primer intento por encontrar algún orden entre los elementos. Él estaba intentando organizar los elementos para la tabla de contenido de un libro que estaba escribiendo. Dispuso los átomos en una tabla similar a la que se muestra en el apéndice C, según sus masas atómicas y similitudes químicas. La primera tabla propuesta por Mendeleev contenía muchos espacios en blanco, y él audazmente señaló que los huecos estaban ahí sólo porque los elementos aún no habían sido descubiertos. Al advertir que la columna en la cual algunos elementos faltantes debían localizarse, pudo hacer predicciones aproximadas acerca de sus propiedades químicas. Dentro de los 20 años posteriores a su señalamiento, la mayor parte de estos elementos en efecto fueron descubiertos.

Los elementos en la **tabla periódica** están dispuestos de manera que todos aquellos en una columna tienen propiedades químicas similares. Por ejemplo, considere los elementos en la última columna que son todos gases a temperatura ambiente: He (helio), Ne (neón), Ar (argón), Kr (kriptón), Xe (xenón) y Rn (radón). La característica distintiva de todos estos elementos es que normalmente no toman parte en las reacciones químicas —es decir, no se unen a otros átomos para formar moléculas. Por tanto, se clasifican como *gases inertes*—.

TABLA 42.2 Configuración electrónica de los elementos

Número atómico Z	Símbolo	Configuración del estado base	Energía de ionización (eV)
1	H	$1s^1$	13.595
2	He	$1s^2$	24.581
3	Li	[He] $2s^1$	5.39
4	Be	$2s^2$	9.320
5	B	$2s^22p^1$	8.296
6	C	$2s^22p^2$	11.256
7	N	$2s^22p^3$	14.545
8	O	$2s^22p^4$	13.614
9	F	$2s^22p^5$	17.418
10	Ne	$2s^22p^6$	21.559
11	Na	[Ne] $3s^1$	5.138
12	Mg	$3s^2$	7.644
13	Al	$3s^23p^1$	5.984
14	Si	$3s^23p^2$	8.149
15	P	$3s^23p^3$	10.484
16	S	$3s^23p^4$	10.357
17	Cl	$3s^23p^5$	13.01
18	Ar	$3s^23p^6$	15.755
19	K	[Ar] $4s^1$	4.339
20	Ca	$4s^2$	6.111
21	Sc	$3d^14s^2$	6.54
22	Ti	$3d^24s^2$	6.83
23	V	$3d^34s^2$	6.74
24	Cr	$3d^54s^1$	6.76
25	Mn	$3d^54s^2$	7.432
26	Fe	$3d^64s^2$	7.87
27	Co	$3d^74s^2$	7.86
28	Ni	$3d^84s^2$	7.633
29	Cu	$3d^{10}4s^1$	7.724
30	Zn	$3d^{10}4s^2$	9.391
31	Ga	$3d^{10}4s^24p^1$	6.00
32	Ge	$3d^{10}4s^24p^2$	7.88
33	As	$3d^{10}4s^24p^3$	9.81
34	Se	$3d^{10}4s^24p^4$	9.75
35	Br	$3d^{10}4s^24p^5$	11.84
36	Kr	$3d^{10}4s^24p^6$	13.996
37	Rb	[Kr] $5s^1$	4.176
38	Sr	$5s^2$	5.692
39	Y	$4d^15s^2$	6.377
40	Zr	$4d^25s^2$	
41	Nb	$4d^45s^1$	6.881
42	Mo	$4d^55s^1$	7.10
43	Tc	$4d^55s^2$	7.228
44	Ru	$4d^75s^1$	7.365

Nota: La notación entre corchetes se usa como un método abreviado para evitar repetición al indicar electrones en la capa interna. Por ende, [He] representa $1s^2$, [Ne] representa $1s^22s^22p^6$, [Ar] representa $1s^22s^22p^63s^23p^6$, y así sucesivamente.

Número atómico Z	Símbolo	Configuración del estado base	Energía de ionización (eV)
45	Rh	$4d^85s^1$	7.461
46	Pd	$4d^{10}$	8.33
47	Ag	$4d^{10}5s^1$	7.574
48	Cd	$4d^{10}5s^2$	8.991
49	In	$4d^{10}5s^25p^1$	
50	Sn	$4d^{10}5s^25p^2$	7.342
51	Sb	$4d^{10}5s^25p^3$	8.639
52	Te	$4d^{10}5s^25p^4$	9.01
53	I	$4d^{10}5s^25p^5$	10.454
54	Xe	$4d^{10}5s^25p^6$	12.127
55	Cs	[Xe] $6s^1$	3.893
56	Ba	$6s^2$	5.210
57	La	$5d^16s^2$	5.61
58	Ce	$4f^15d^16s^2$	6.54
59	Pr	$4f^36s^2$	5.48
60	Nd	$4f^46s^2$	5.51
61	Pm	$4f^56s^2$	
62	Fm	$4f^66s^2$	5.6
63	Eu	$4f^76s^2$	5.67
64	Gd	$4f^75d^16s^2$	6.16
65	Tb	$4f^96s^2$	6.74
66	Dy	$4f^{10}6s^2$	
67	Ho	$4f^{11}6s^2$	
68	Er	$4f^{12}6s^2$	
69	Tm	$4f^{13}6s^2$	
70	Yb	$4f^{14}6s^2$	6.22
71	Lu	$4f^{14}5d^16s^2$	6.15
72	Hf	$4f^{14}5d^26s^2$	7.0
73	Ta	$4f^{14}5d^36s^2$	7.88
74	W	$4f^{14}5d^46s^2$	7.98
75	Re	$4f^{14}5d^56s^2$	7.87
76	Os	$4f^{14}5d^66s^2$	8.7
77	Ir	$4f^{14}5d^76s^2$	9.2
78	Pt	$4f^{14}5d^86s^2$	8.88
79	Au	[Xe, $4f^{14}5d^{10}$] $6s^1$	9.22
80	Hg	$6s^2$	10.434
81	Tl	$6s^26p^1$	6.106
82	Pb	$6s^26p^2$	7.415
83	Bi	$6s^26p^3$	7.287
84	Po	$6s^26p^4$	8.43
85	At	$6s^26p^5$	
86	Rn	$6s^26p^6$	10.745
87	Fr	[Rn] $7s^1$	
88	Ra	$7s^2$	5.277
89	Ac	$6d^17s^2$	6.9
90	Th	$6d^27s^2$	
91	Pa	$5f^26d^17s^2$	

continúa

Número atómico Z	Símbolo	Configuración del estado base	Energía de ionización (eV)
92	U	$5f^3 6d^1 7s^2$	4.0
93	Np	$5f^4 6d^1 7s^2$	
94	Pu	$5f^6 7s^2$	
95	Am	$5f^7 7s^2$	
96	Cm	$5f^7 6d^1 7s^2$	
97	Bk	$5f^8 6d^1 7s^2$	
98	Cf	$5f^{10} 6d^0 7s^2$	
99	Es	$5f^{11} 6d^0 7s^2$	
100	Fm	$5f^{12} 6d^0 7s^2$	
101	Md	$5f^{13} 6d^0 7s^2$	
102	No	$5f^{14} 6d^0 7s^2$	
103	Lr	$5f^{14} 6d^1 7s^2$	
104	Rf	$5f^{14} 6d^2 7s^2$	

Puede entender en parte este comportamiento si observa las configuraciones electrónicas en la tabla 42.4. El comportamiento químico de un elemento depende de la capa más externa que contiene electrones. Las capas dentro de aquélla están llenas y no contribuyen al comportamiento químico. La configuración electrónica para el helio es $1s^2$ —la capa $n = 1$ (que es la capa más externa porque es la única capa) está llena. De manera adicional, la energía del átomo en esta configuración es considerablemente menor que la energía para la configuración en la cual un electrón está en el siguiente nivel disponible, la subcapa $2s$. Luego, considere la configuración electrónica para el neón, $1s^2 2s^2 p^6$. De nueva cuenta, la capa más externa ($n = 2$ en este caso) está llena y una amplia brecha de energía ocurre entre la subcapa $2p$ llena y la siguiente subcapa disponible, la $3s$. El argón tiene la configuración $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$. Aquí, sólo la subcapa $3p$ está llena, pero de nuevo ocurre una amplia brecha en la energía entre la subcapa $3p$ llena y la siguiente subcapa disponible, la $3d$. Podría continuar este procedimiento en todos los gases inertes; el patrón sería el mismo. Un gas inerte se forma cuando una capa o una subcapa se llena y hay una gran brecha de energía entre la capa llena o subcapa llena y la siguiente más alta disponible.

ESPECTROS ATÓMICOS

En el capítulo 40 se estudió brevemente el origen de las líneas espectrales visibles para el átomo de hidrógeno y iones similares al hidrógeno. Recuerde que un átomo emite radiación electromagnética si el átomo en un estado excitado hace una transición hacia un estado de menor energía. El conjunto de longitudes de onda que se observa cuando un átomo específico experimenta dicho tipo de procesos se denomina **espectro de emisión** para dicho átomo. De igual modo, los átomos que tienen electrones en la configuración del estado base pueden absorber radiación electromagnética en longitudes de onda específicas, lo que produce un **espectro de absorción**. Estos espectros pueden utilizarse para identificar elementos.

El diagrama de niveles de energía para el hidrógeno se presenta en la figura 42.15. Las diferentes líneas diagonales representan transiciones permitidas entre estados estacionarios. Cada vez que un átomo efectúa una transición de un estado de energía mayor a uno menor, se emite un fotón de luz. La frecuencia de este fotón

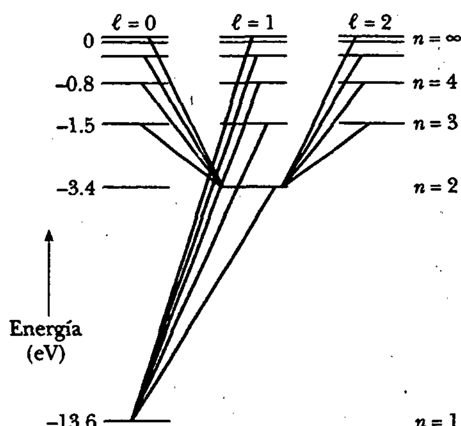


Figura 42.15 Algunas transiciones electrónicas permitidas para el hidrógeno, representado por las líneas coloreadas. Dichas transiciones deben obedecer la regla de selección $\Delta\ell = \pm 1$.

es $f = \Delta E/h$, donde ΔE es la diferencia de energía entre los dos estados y h es la constante de Planck. Las **reglas de selección** para las *transiciones permitidas* son

$$\Delta\ell = \pm 1 \quad \text{y} \quad \Delta m_\ell = 0, \pm 1 \tag{42.16}$$

Reglas de selección para transiciones atómicas permitidas

Se dice que las transiciones que no obedecen las reglas de selección están *prohibidas*. (Dichas transiciones pueden ocurrir, pero su probabilidad es baja comparada con la probabilidad de las transiciones permitidas.)

En virtud de que el *momentum* angular orbital de un átomo cambia cuando un fotón se emite o absorbe (es decir, como resultado de una transición entre estados) y ya que el *momentum* angular debe conservarse, se concluye que **el fotón implicado en el proceso debe tener *momentum* angular.** De hecho, el fotón tiene un *momentum* angular equivalente al de una partícula que tiene un espín de 1. En consecuencia, un fotón tiene energía, *momentum* lineal y *momentum* angular.

El fotón transporta *momentum* angular

Recuerde de la ecuación 40.32 que las energías permitidas para átomos de un electrón, como el hidrógeno y el He^+, son

$$E_n = -\frac{k_e e^2}{2a_0}\left(\frac{Z^2}{n^2}\right) = -\frac{13.6Z^2}{n^2}\,\text{eV} \tag{42.17}$$

Energías permitidas para átomos de un electrón

Para átomos con numerosos electrones la carga nuclear positiva Ze, es cubierta en forma considerable por la carga negativa de los electrones de la capa interna. Por tanto, los electrones exteriores interactúan con una carga neta que es mucho menor que la carga nuclear. La expresión para las energías permitidas a átomos con numerosos electrones tienen la misma forma que la ecuación 42.17 con Z sustituida por un número atómico efectivo Z_{eff}:

$$E_n = -\frac{13.6Z_{\text{eff}}^2}{n^2}\,\text{eV} \tag{42.18}$$

Energías permitidas para átomos con numerosos electrones

donde Z_{eff} depende de n y ℓ.

Es interesante graficar la energía de ionización (véase la sección 40.5) *versus* el número atómico Z, como en la figura 42.16. Advierta el patrón de $\Delta Z = 2$, 8, 8, 18, 18, 32 para los diversos máximos. Este patrón se obtiene a partir del principio de exclusión y ayuda a explicar por qué los elementos repiten sus propiedades químicas en grupos. Por ejemplo, los picos en $Z = 2$, 10, 18 y 36 corresponden a los elementos helio, neón, argón y kriptón, los cuales tienen sus capas externas llenas. Estos elementos tienen energías de ionización relativamente altas y comportamiento químico similar.

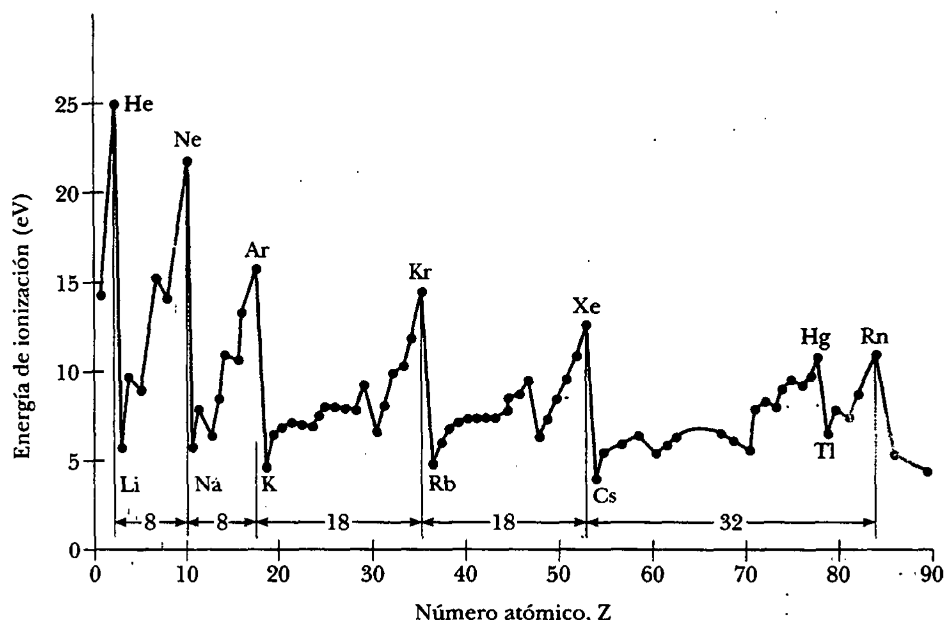


Figura 42.16 Energía de ionización de los elementos contra número atómico Z. *(Adaptado de J. Orear,* Physics, *New York, Macmillan, 1979.)*

Espectros de rayos X

Los rayos X se emiten cuando un blanco metálico es bombardeado con electrones de alta energía o cualquier otra partícula cargada. El espectro de rayos X consiste por lo común de una amplia banda continua que contiene una serie de líneas definidas, como se muestra en la figura 42.17. El espectro continuo es el resultado de colisiones entre electrones incidentes y átomos en el blanco. La energía cinética perdida por los electrones durante las colisiones emerge como la energía ($E = hf$) de los fotones de rayos X radiados del blanco. Las líneas definidas superpuestas sobre el espectro continuo se conocen como **rayos X característicos**, puesto que son privativas del material del blanco. Se descubrieron en 1908, aunque su origen permaneció sin explicar hasta que los detalles de la estructura atómica, en particular la estructura de capas del átomo, fueron descubiertos.

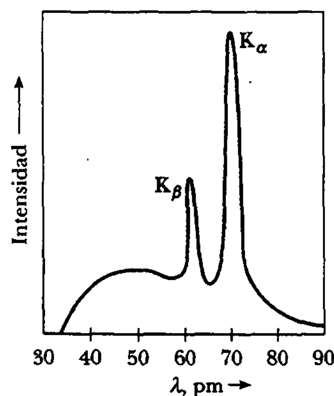


Figura 42.17 El espectro de rayos X de un blanco metálico consiste en un amplio espectro continuo que contiene un número de líneas definidas; las líneas se deben a *rayos X característicos.* Los datos mostrados fueron obtenidos cuando electrones de 37 keV bombardearon un blanco de molibdeno.

La emisión de rayos X característicos ocurre cuando un electrón bombardeado que choca con un átomo blanco tiene suficiente energía para separar un electrón de una capa interna del átomo. El vacío creado en la capa se llena cuando un electrón de un nivel más alto desciende y lo ocupa. La transición se acompaña con la emisión de un fotón cuya energía es igual a la diferencia de energía entre los dos niveles. Es común que la energía de dichas transiciones sea mayor que 10 000 eV, y los fotones emitidos tienen longitudes de onda en el intervalo de 0.001 nm a 0.1 nm, en la región de rayos X del espectro electromagnético.

Suponga que el electrón incidente tiene un electrón atómico desalojado de su capa más interna —la capa K. Si el lugar vacío se llena con un electrón que desciende de la siguiente capa más alta —la capa L— el fotón emitido tiene una energía correspondiente a la línea de rayos X característica K_α en la curva de la figura 42.17. Si el espacio vacío se llena con un electrón que desciende de la capa M, se produce la línea K_β en la figura 42.17.

Otras líneas de rayos X características se forman cuando los electrones descienden de niveles superiores a espacios vacíos diferentes a los de la capa K. Por ejemplo, las líneas L son producidas cuando los vacíos de la capa L se llenan con electrones que descienden de capas más altas. Una línea L_α se produce cuando un

electrón cae de la capa M a la capa L, y una línea L_β se produce por una transición de la capa N a la capa L.

Aunque los átomos con muchos electrones no pueden ser analizados con exactitud ni con el modelo de Bohr ni con la ecuación de Schrödinger, se puede aplicar el conocimiento de la ley de Gauss del capítulo 24 para realizar algunas estimaciones sorprendentemente precisas de las longitudes de onda y las energías de rayos X esperadas. Considere un átomo de número atómico Z en el cual se ha expulsado uno de los dos electrones en la capa K. Suponga que se dibuja una esfera gaussiana dentro del radio más probable de los electrones L. El campo eléctrico en la posición de los electrones L es una combinación de los campos creados por el núcleo, el electrón individual K, los otros electrones L y los electrones exteriores. Las funciones de onda de los electrones exteriores son tales que los electrones tienen una probabilidad muy alta de encontrarse más allá del núcleo de lo que están los electrones L. Por ende, ellos tienen mucha más probabilidad de encontrarse afuera de la superficie gaussiana que adentro y, en promedio, no contribuyen de manera significativa al campo eléctrico en la posición de los electrones L. La carga efectiva dentro de la superficie gaussiana es la carga nuclear positiva y una carga negativa debida al electrón individual K. Si ignora las interacciones entre los electrones L, un electrón individual L se comporta como si experimentara un campo eléctrico debido a una carga $(Z-1)e$ encerrada por la superficie gaussiana. La carga nuclear está bloqueada por el electrón en la capa K, tal como Z_{eff} en la ecuación 42.18 es $Z-1$. Para capas de niveles más altos, la carga nuclear está bloqueada por los electrones en todas las capas internas.

Ahora puede usar la ecuación 42.18 para estimar la energía asociada con un electrón en la capa L:

$$E_L = -(Z-1)^2 \frac{13.6}{2^2} \text{eV}$$

Después de que el átomo efectúa la transición, existen dos electrones en la capa K. Usando un argumento similar para una superficie gaussiana dibujada dentro del radio más probable para el electrón individual K, se puede argüir que la energía asociada con uno de dichos electrones es aproximadamente el de un átomo con un electrón con la carga nuclear reducida por la carga negativa del otro electrón. Por tanto,

$$E_K = -(Z-1)^2(13.6 \text{ eV}) \qquad \textbf{(42.19)}$$

Como indica el ejemplo 42.7, la energía del átomo con un electrón en una capa M puede estimarse de un modo similar. Considerando la diferencia de energía entre los niveles inicial y final, puede calcularse la energía y la longitud de onda del fotón emitido.

Pregunta sorpresa 42.4

Advierta en la figura 42.17 que el espectro continuo se detiene de manera repentina en la longitud de onda de corte de aproximadamente 34 pm. ¿Por qué ocurre una longitud de onda de corte?

En 1914, Henry G. J. Moseley (1887-1915) graficó los valores de Z para varios elementos *versus* $\sqrt{1/\lambda}$, donde λ es la longitud de onda de la línea K_α de cada elemento. Encontró que la gráfica es una línea recta, como en la figura 42.18. Lo anterior concuerda con el cálculo aproximado de los niveles de energía dados por la ecuación 42.19. A partir de esta gráfica Moseley determinó los valores Z de elementos que aún no se habían descubierto y produjo una tabla periódica que concordaba muy bien con las propiedades químicas conocidas de los elementos. Hasta dicho experimento, los números atómicos habían sido meros soportes para los elementos que aparecían en la tabla periódica, los elementos eran ordenados de acuerdo con su masa.

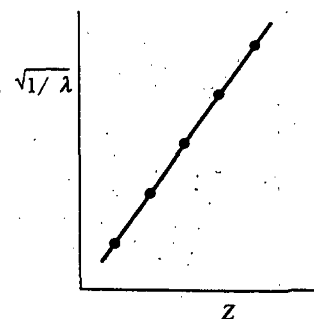


Figura 42.18 Una gráfica Moseley de $\sqrt{1/\lambda}$ *versus* Z, donde λ es la longitud de onda de la línea de rayos X K_α del elemento de número atómico Z

EJEMPLO La energía de un rayo X

Determine la energía del rayo X característico emitido por un blanco de tungsteno (símbolo químico W) cuando un electrón desciende de la capa M ($n = 3$) a un espacio vacío en la capa K ($n = 1$).

Solución El número atómico del tungsteno es $Z = 74$. Con la ecuación 42.19 se ve que la energía asociada con el electrón en la capa K es aproximadamente

$$E_K = -(74 - 1)^2(13.6 \text{ eV}) = -72\,500 \text{ eV}$$

Un electrón en la capa M está sujeto a una carga nuclear efectiva que depende del número de electrones en los estados $n = 1$ y $n = 2$ porque dichos electrones bloquean a los electrones M del núcleo. Dado que existen ocho electrones en el estado $n = 2$ y uno permanece en el estado $n = 1$, casi nueve electrones tapan al electrón M del núcleo, por lo que $Z_{\text{eff}} = Z - 9$. Por tanto, la energía asociada con un electrón en la capa M es, a partir de la ecuación 42.18,

$$E_M = -\frac{13.6 Z_{\text{eff}}^2}{3^2}\text{eV} = -\frac{13.6(Z-9)^2}{3^2}\text{eV}$$

$$= -\frac{(13.6)(74-9)^2}{9}\text{eV} = -6\,380\,\text{eV}$$

Por consiguiente, el rayo X emitido tiene una energía igual a $E_M - E_K = -6\,380 \text{ eV} - (-72\,500 \text{ eV}) = 66\,100 \text{ eV}$. A pesar de la aproximación efectuada al desarrollar las ecuaciones 42.18 y 42.19 y la estimación de la carga nuclear efectiva, este resultado está en excelente concordancia con las medidas realizadas de los rayos X de los blancos de tungsteno.

Ejercicio Calcule la longitud de onda del rayo X emitido en esta transición.

Respuesta 0.018 8 nm.

TRANSICIONES ATÓMICAS

Se ha visto que un átomo absorbe y emite radiación electromagnética sólo a frecuencias que corresponden a la separación de energía entre los estados permitidos. A continuación considere los detalles de estos procesos. Considere un átomo que tiene los estados de energía permitidos denominados E_1, E_2, E_3,... en la figura 42.19. Cuando la radiación incide sobre el átomo, sólo aquellos fotones cuya energía hf es igual a la separación de energía ΔE entre dos niveles de energía pueden ser absorbidos por el átomo. La figura 42.20 es un diagrama esquemático que representa dicho proceso, el cual se denomina **absorción estimulada**, debido a que el fotón estimula al átomo que hace la transición ascendente. A temperaturas ordinarias, la mayor parte de los átomos en una muestra están en el estado base. Si un recipiente que contiene muchos átomos de un elemento gaseoso se ilumina con radiación de todas las frecuencias de fotón posibles (es decir, un espectro continuo), sólo los fotones de energías $E_2 - E_1$, $E_3 - E_1$, $E_4 - E_1$, $E_3 - E_2$, $E_4 - E_2$, etc. son absorbidos por los átomos. Como resultado de esta absorción, algunos átomos se llevan a niveles de energía permitidos más altos, los cuales, como se aprendió en la sección 40.5, se denominan **estados excitados**.

Una vez que un átomo está en estado excitado, hay cierta probabilidad de que el átomo excitado saltará de regreso al nivel de energía inferior y emitirá un fotón durante el proceso, como en la figura 42.21. Se trata de un proceso que se conoce como **emisión espontánea** porque ocurre de manera aleatoria, sin requerir un evento que "dispare" la transición. En general, un átomo permanece en estado excitado sólo por aproximadamente 10^{-8} s.

Cuando un átomo en estado excitado regresa al estado base vía dos o más pasos intermedios, los fotones emitidos durante el proceso son más bajos en energía que el fotón original absorbido por el átomo. Este proceso se conoce como *fluorescencia*. En un tubo de luz fluorescente, los electrones que dejan un filamento en el extremo del tubo chocan con átomos de vapor de mercurio presente en el tubo, provocando que los átomos de mercurio se eleven a estados excitados. Conforme estos átomos realizan transiciones a estados más bajos, emiten fotones ultravioleta que golpean un recubrimiento sobre la superficie interior del tubo. El recubrimiento absorbe los fotones y emite luz visible mediante la fluorescencia.

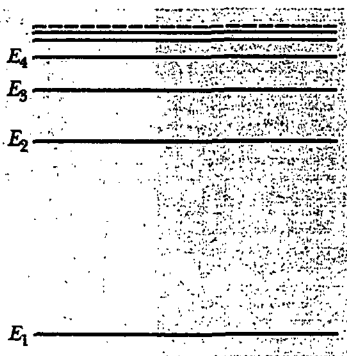


Figura 42.19 Diagrama de niveles de energía de un átomo que tiene varios estados permitidos. El estado de menor energía E_1 es el estado base. Todos los demás son estados excitados.

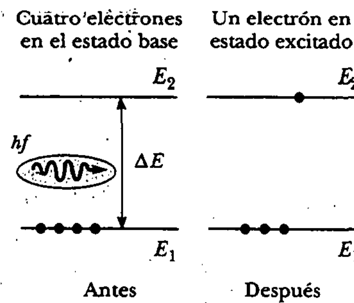


Figura 42.20 Absorción estimulada de un fotón. Los puntos representan electrones. Un electrón es transferido desde el estado base al estado excitado cuando el átomo absorbe un fotón de energía $hf = E_2 - E_1$.

Los materiales *fosforescentes* brillan debido a un proceso similar, pero los átomos excitados pueden permanecer en estado excitado por periodos que abarcan desde unos cuantos segundos a varias horas. Eventualmente, los átomos caen al estado base y, mientras esto sucede, emiten luz visible. Por esta razón, los materiales fosforescentes emiten luz mucho tiempo después de haber sido colocados en la oscuridad.

Pregunta sorpresa 42.5

Haga un dibujo similar al de la figura 42.21 para la fluorescencia.

Además de la emisión espontánea, también ocurre la **emisión estimulada.** Suponga que un átomo permanece en estado excitado E_2, como en la figura 42.22. Si el dicho estado es un *estado metaestable* —es decir, si su tiempo de vida es mucho mayor que el típico tiempo de vida de 10^{-8} s de los estados excitados— entonces el intervalo de tiempo hasta que ocurra la emisión espontánea será relativamente

Experimento sorpresa

Coloque un objeto que brille en la oscuridad en un cajón durante un día. Mientras el cuarto está oscuro, abra el cajón y observe el objeto. ¿Brilla? Ahora exponga el objeto a la luz de una lámpara incandescente. Apague la luz y observe la brillantez del objeto resplandeciente en la oscuridad. A continuación exponga el objeto a la luz de un tubo de luz fluorescente (el cual emite alguna luz ultravioleta). Apague la luz y de nuevo observe la brillantez del resplandor. ¿El objeto ahora es más brillante o más opaco de lo que estaba después de exponerlo a la lámpara incandescente?

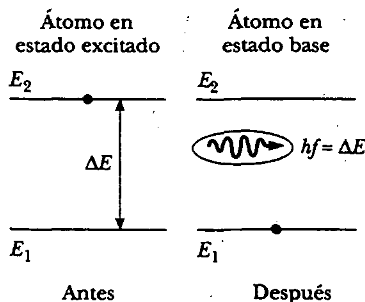


Figura 42.21 Emisión espontánea de un fotón por un átomo que inicialmente está en el estado excitado E_2. Cuando el átomo cae al estado base, emite un fotón de energía $hf = E_2 - E_1$.

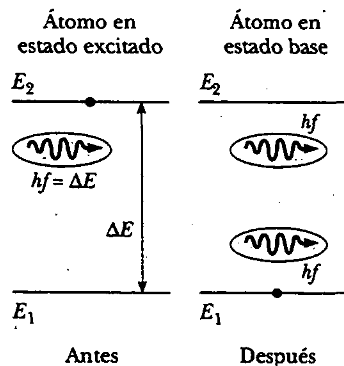


Figura 42.22 Emisión estimulada de un fotón por un fotón incidente de energía hf. Inicialmente, el átomo está en estado excitado. El fotón incidente estimula al átomo para que emita un segundo fotón de energía $hf = E_2 - E_1$.



Figura 42.23 Un ión de bario individual (el punto pequeño en el centro) brilla debido a que está estimulado por un haz láser (no mostrado). La estructura circunvecina es la trampa electromagnética que mantiene al ión en su lugar. *(Cortesía de David Wineland, National Institute of Standards and Technology)*

largo. Suponga que en dicho intervalo un fotón de energía $hf = E_2 - E_1$ incide sobre el átomo. Una posibilidad es que la energía del fotón será suficiente para que el fotón ionice al átomo. Otra posibilidad es que la interacción entre el fotón incidente y el átomo causará que el átomo regrese al estado base y por tanto emita un segundo fotón con energía $hf = E_2 - E_1$. En este proceso el fotón incidente no es absorbido; por tanto, después de la emisión estimulada, existen dos fotones con idéntica energía —el fotón incidente y el fotón emitido—. Los dos están en fase; una importante consideración en los rayos láser, los cuales se estudiarán en la siguiente sección.

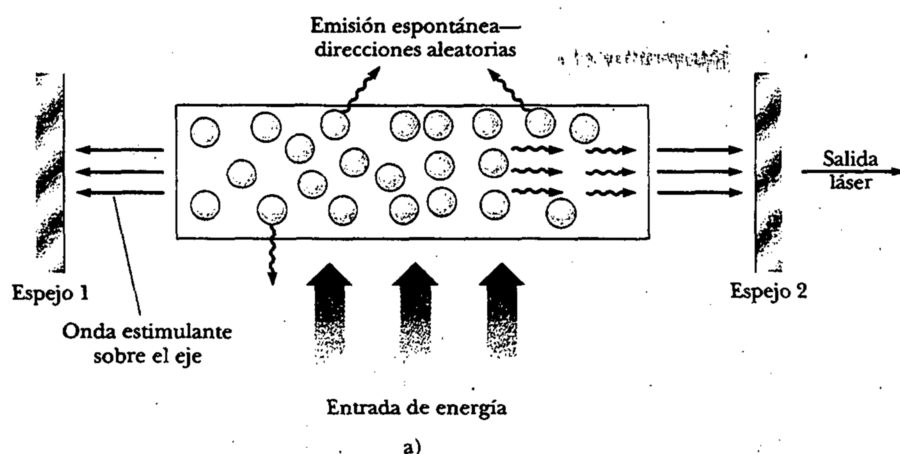
A mediados de la década de 1980 se volvió posible "atrapar" electromagnéticamente un ión individual (Fig. 42.23) y estimularlo para emitir luz. Tal procedimiento confirmó de manera directa la existencia de niveles de energía discretos en los átomos.

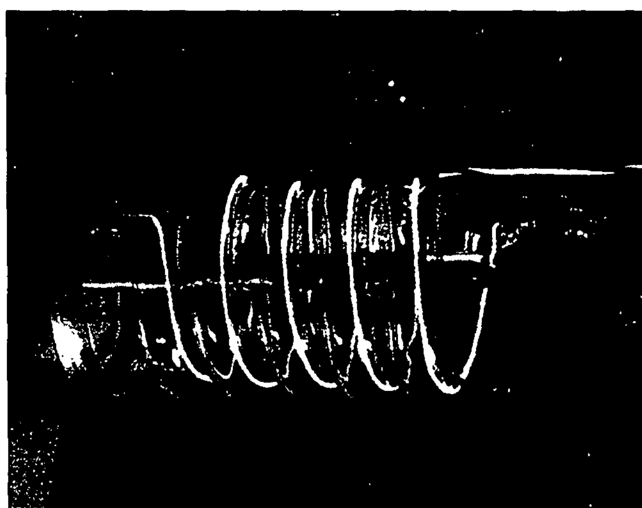
Sección opcional



RAYOS LÁSER Y HOLOGRAFÍA

Ya se ha descrito cómo un fotón incidente puede producir transiciones de energía atómica hacia arriba (absorción estimulada) o hacia abajo (emisión estimulada). Los dos procesos son igualmente probables. Cuando incide luz sobre un conjunto de átomos, suele haber una absorción neta de energía debido a que, cuando el sistema





b)

Figura 42.24 a) Diagrama esquemático de un diseño láser. El tubo contiene los átomos que son el medio activo. Una fuente externa de energía (por ejemplo, un dispositivo óptico o eléctrico) "bombea" los átomos a estados excitados. Los espejos paralelos de los extremos confinan los fotones al tubo, pero el espejo 2 es ligeramente transparente. b) Fotografía del primer láser de rubí, mostrando la lámpara de destello que rodea la barra de rubí. *(b, Cortesía de HRL Laboratories LLC, Malibú, CA)*

está en equilibrio térmico, hay muchos más átomos en el estado base que en los estados excitados. Sin embargo, si la situación se invirtiera de manera que haya más átomos en un estado excitado que en el estado base, puede producirse una emisión neta de fotones. A este tipo de situaciones se le conoce como **inversión de población.**

De hecho, éste es el principio fundamental involucrado en la operación de un **láser** —acrónimo de *l*ight *a*mplification by *s*timulated *e*mission of *r*adiation (amplificación de luz mediante emisión estimulada de radiación)—. La amplificación corresponde a la acumulación de fotones en el sistema como una consecuencia de una reacción en cadena de eventos. Las tres condiciones siguientes deben satisfacerse para conseguir la acción láser:

- El sistema debe estar en estado de inversión de población.
- El estado excitado del sistema debe ser un estado metaestable. Cuando esta condición se alcanza, la emisión estimulada ocurre antes que la emisión espontánea.
- Los fotones emitidos deben estar confinados en el sistema suficiente tiempo para estimular la emisión adicional de otros átomos excitados. Tal confinamiento se

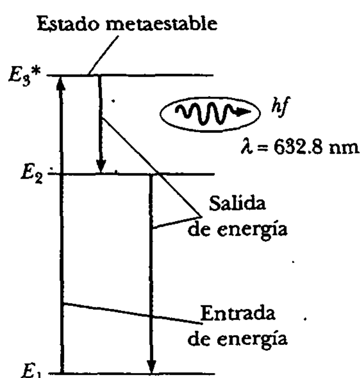


Figura 42.25 Diagrama de niveles de energía para un átomo de neón en un láser helio-neón. El átomo emite fotones de 632.8 nm mediante emisión estimulada en la transición $E_3^* - E_2$. Ésta es la fuente de luz coherente en el láser.

consigue usando espejos de reflexión en los extremos del sistema. Un extremo se hace totalmente reflejante y el otro es hasta cierto punto transparente para dejar que escape parte del haz láser.

En un láser gaseoso de helio-neón, una mezcla de helio y neón se confina en un tubo de vidrio sellado (Fig. 42.24a). Un oscilador conectado al tubo ocasiona que los electrones lo barran, chocando con los átomos del gas y llevándolos a estados excitados. Como se muestra en la figura 42.25, los átomos de neón se excitan hasta el estado E_3^* por medio de este proceso (el asterisco * indica un estado metaestable) y también como consecuencia de los choques con átomos de helio excitados. La emisión estimulada ocurre cuando los átomos de neón hacen una transición al estado E_2 y los átomos excitados cercanos se estimulan. El resultado de esto es la producción de luz coherente a una longitud de onda de 632.8 nm.

Aplicaciones

Desde el desarrollo del primer láser en 1960 (mostrado en la Fig. 42.24b), la tecnología láser ha crecido de manera muy importante. Ahora se pueden conseguir rayos láser que cubren longitudes de onda en las regiones infrarroja, visible y ultravioleta. Las aplicaciones incluyen la "soldadura" quirúrgica de retinas desprendidas, agrimensura de precisión y mediciones de longitud, corte preciso de metales y otros materiales (como las telas en la figura 42.26), así como comunicaciones telefónicas por fibra óptica. Estas y otras aplicaciones son posibles gracias a las características únicas de la luz láser. Además de ser altamente monocromática, la luz láser también es muy direccional y puede enfocarse con exactitud para producir regiones de energía luminosa muy intensa (con densidades de energía 10^{12} veces las de la flama de una antorcha de corte típica).

Los rayos láser se utilizan en mediciones de precisión de grandes distancias (determinación de alcance). En años recientes se ha vuelto importante, para fines astronómicos y geofísicos, medir lo más exacto posible la distancia desde diferentes puntos sobre la superficie de la Tierra hasta un punto en la superficie lunar. Para

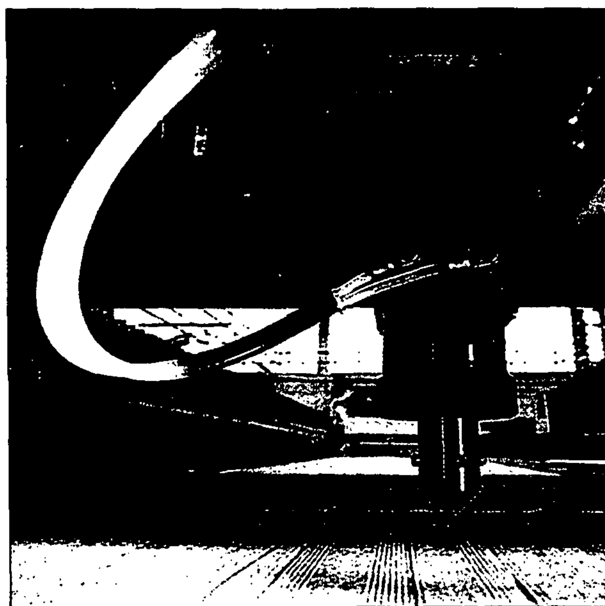


Figura 42.26 Este robot que porta unas tijeras láser, con las cuales puede cortar hasta 50 capas de tela a la vez, es una de las muchas aplicaciones de la tecnología láser. *(Philippe Plailly/SPL/Photo Researchers, Inc.)*

facilitar esto los astronautas del Apolo instalaron prismas reflectores de 0.5 m cuadrados sobre la Luna, lo cual permite que los pulsos láser dirigidos desde una estación terrestre sean retrorreflejados hacia la misma estación (véase la Fig. 35.8a). Empleando la rapidez conocida de la luz y el tiempo de recorrido medido del viaje redondo de un pulso de 1 ns, es posible determinar la distancia Tierra-Luna, 380 000 km, hasta una precisión de 10 cm.

Las aplicaciones médicas aprovechan el hecho de que diferentes longitudes de onda láser pueden absorberse en tejidos biológicos específicos. Por ejemplo, ciertos procedimientos láser han reducido enormemente la ceguera producida por glaucoma y por diabetes. El glaucoma es una enfermedad de ojos muy extendida, la cual se caracteriza por una alta presión de fluido en el ojo que puede conducir a la destrucción del nervio óptico. Una sencilla operación láser (iridectomía) puede "quemar" y abrir un pequeño agujero en una membrana obstruida, y liberar la presión destructiva. Asimismo, un serio efecto colateral de la diabetes es la neovascularización, o formación de vasos sanguíneos débiles, los cuales a menudo pierden sangre. Cuando esto ocurre en la retina la visión se deteriora (retinopatía diabética) y finalmente se destruye. En la actualidad es posible dirigir la luz verde de un láser de ión de argón a través del lente del cristalino y el fluido ocular, enfocar sobre los bordes de la retina y fotocoagular los vasos rotos. Incluso gente que sólo tiene defectos de visión menores, como la miopía, se está beneficiando del uso de rayos láser para darle nueva forma a la córnea, cambiando con ello su longitud focal y reduciendo la necesidad de anteojos.

La cirugía láser es ahora una práctica cotidiana en los hospitales alrededor del mundo. Luz infrarroja a 10 μm de un láser de bióxido de carbono puede cortar tejido muscular, evaporando principalmente el agua contenida en el material celular. En dicha técnica se necesita una potencia de láser cercana a 100 W. La ventaja de este "bisturí láser" sobre los métodos convencionales es que la radiación láser corta el tejido y coagula la sangre al mismo tiempo, lo cual reduce de manera sustancial la pérdida de sangre. Además, la técnica elimina virtualmente la migración de células, lo cual es muy importante al extirpar un tumor.

Un haz láser puede atraparse en finas guías luminosas de fibra de vidrio (endoscopios) mediante la reflexión total interna. Las fibras de luz pueden introducirse por orificios naturales, conducirse alrededor de órganos internos y dirigirse a puntos específicos interiores del cuerpo, eliminando la necesidad de cirugía invasiva. Por ejemplo, el sangrado en el tracto gastrointestinal puede cauterizarse ópticamente mediante endoscopios de fibra óptica introducidos por la boca.

En investigaciones biológicas y médicas, con frecuencia es importante aislar y extraer células raras para estudio y crecimiento. Un separador de células láser aprovecha que células específicas pueden marcarse con tinturas fluorescentes. Después, todas las células se dejan caer desde una delgada boquilla cargada y se exploran con un láser para el etiquetado. Si se activan mediante la etiqueta de emisión de luz correcta, un pequeño voltaje aplicado a placas paralelas desvía la célula cargada eléctricamente que cae en un vaso colector. Éste es un método eficiente para extraer las proverbiales agujas de un pajar.

Una de las más inusuales e interesantes aplicaciones del láser es la producción de imágenes tridimensionales en un proceso llamado **holografía**. La figura 42.27 muestra cómo se hace un holograma. La luz de un láser se divide en dos partes por medio de un espejo semiplateado en B. Luego de pasar por el lente L_1, el cual diverge los rayos de luz, una parte del haz se refleja en el objeto que se va a fotografiar e incide sobre una película fotográfica ordinaria. La otra mitad del haz se hace divergir por medio del lente L_2, se refleja en los espejos M_1 y M_2, y finalmente llega a la película. Los dos haces se superponen en la película para formar un patrón de interferencia muy complicado. Este modelo de interferencia puede producirse sólo si la relación de fase de las ondas en los dos haces es constante durante toda la exposición de la película. Es una condición que se consigue si se ilumina la escena con

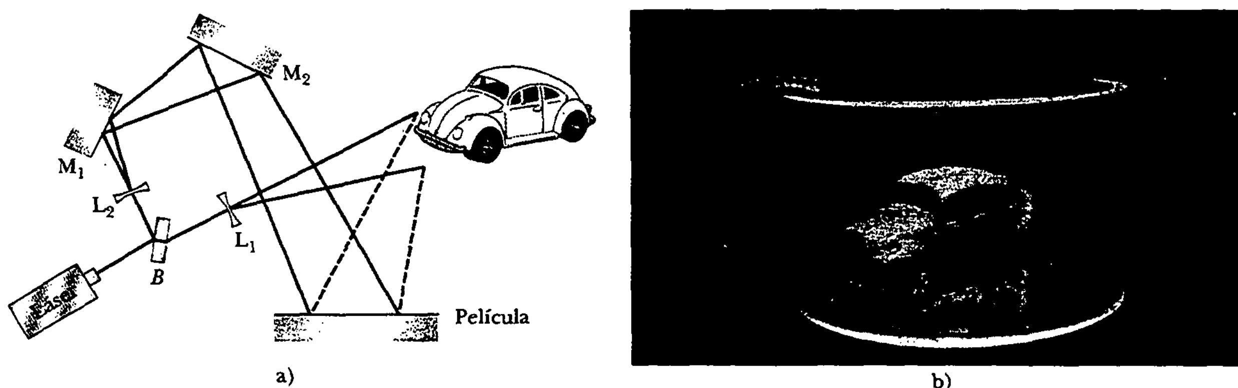


Figura 42.27 a) Arreglo para producir un holograma. b) Fotografía de un holograma que usa una película cilíndrica. *(Cortesía de Central Scientific Company.)*

radiación láser coherente. El holograma no sólo registra la intensidad de la luz dispersada en el objeto (como en una fotografía convencional) sino también la diferencia de fase entre el haz reflejado de los espejos y el haz dispersado en el objeto. Debido a esta diferencia de fase, el patrón de interferencia que se forma produce una imagen que tiene una perspectiva completa en tres dimensiones.

Un holograma se observa mejor si se permite que luz coherente pase a través de la película revelada cuando uno mira hacia atrás en dirección de donde proviene el haz. La luz que pasa a través del holograma se difracta. Emerge en una forma idéntica a la luz que deja el objeto mientras el holograma se estaba registrando; como resultado, ver el holograma es casi como mirar a través de una ventana hacia el objeto. La figura 42.27b es la fotografía de un holograma que fue elaborado mediante el empleo de una película cilíndrica. Uno ve una imagen tridimensional en la cual la perspectiva cambia conforme la cabeza del observador se mueve.

RESUMEN

La mecánica cuántica puede aplicarse al átomo de hidrógeno empleando la función de energía potencial $U(r) = -k_e e^2/r$ en la ecuación de Schrödinger. La solución a esta ecuación produce las funciones de onda para los estados permitidos y las energías permitidas:

$$E_n = -\left(\frac{k_e e^2}{2a_0}\right)\frac{1}{n^2} = -\frac{13.606}{n^2}\,\text{eV} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{42.2}$$

donde n es el **número cuántico principal**. Las funciones de onda permitidas dependen de tres números cuánticos: n, ℓ y m_ℓ, donde ℓ es el **número cuántico orbital**, y m_ℓ es el **número cuántico magnético orbital**. Las restricciones sobre los números cuánticos son

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$$

$$m_\ell = -\ell, -\ell + 1, \ldots, \ell - 1, \ell$$

Todos los estados que tienen el mismo número cuántico principal n forman una **capa**, identificada por las letras K, L, M,... (que corresponden a $n = 1, 2, 3,\ldots$). Todos los estados que tienen los mismos valores de n y ℓ forman una **subcapa**, designada por las letras *s, p, d, f*,... (que corresponden a $\ell = 0, 1, 2, 3,\ldots$).

Con el fin de describir de manera completa un estado cuántico, es necesario incluir un cuarto número cuántico m_s, llamado **número cuántico magnético de espín**. Este número cuántico puede tener sólo dos valores $\pm\frac{1}{2}$.

Un átomo en un estado caracterizado por un valor específico de n puede tener los siguientes valores de L, la magnitud del *momentum* angular orbital del átomo **L**:

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\,\hbar \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots, n - 1 \tag{42.9}$$

Los valores permitidos de la proyección de **L** a lo largo del eje z son

$$L_z = m_\ell \hbar \tag{42.10}$$

Sólo se permiten valores discretos de L_z, y éstos están determinados por las restricciones en m_ℓ. La cuantización de L_z se conoce como **cuantización del espacio**.

El electrón tiene un *momentum* angular intrínseco denominado **momentum angular de espín**. Lo anterior significa que el *momentum* angular total de un electrón en un átomo puede tener dos contribuciones, una que surge del espín del electrón (**S**) y otra que proviene del movimiento orbital del electrón (**L**). El espín electrónico puede describirse con un solo número cuántico $s = \frac{1}{2}$. La magnitud del *momentum* angular de espín es

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \tag{42.12}$$

y la componente z de **S** es

$$S_z = m_s \hbar = \pm\tfrac{1}{2}\hbar \tag{42.13}$$

Es decir, el *momentum* angular de espín también está cuantizado en el espacio, como lo especifica el número cuántico magnético de espín $m_s = \pm\frac{1}{2}$.

El momento magnético $\boldsymbol{\mu}_{\text{espín}}$ asociado con el *momentum* angular de espín de un electrón es

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{espín}} = -\frac{e}{m_e}\mathbf{S} \tag{42.14}$$

La componente z de $\boldsymbol{\mu}_{\text{espín}}$ puede tener los valores

$$\mu_{\text{espín}} = \pm\frac{e\hbar}{2m_e} \tag{42.15}$$

El **principio de exclusión** establece que **dos electrones en un átomo no pueden estar en el mismo estado cuántico**. En otras palabras, dos electrones no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos n, ℓ, m_ℓ y m_s. Con este principio es posible determinar la configuración electrónica de los elementos. Esto sirve como base para comprender la estructura atómica y las propiedades químicas de los elementos.

Las transiciones electrónicas permitidas entre dos niveles cualesquiera en un átomo están gobernadas por las **reglas de selección**

$$\Delta\ell = \pm 1 \quad \text{y} \quad \Delta m_\ell = 0, \pm 1 \tag{42.16}$$

El espectro de rayos X de un blanco de metal consta de un conjunto de líneas características definidas, superpuestas a un amplio espectro continuo. Los **rayos X característicos** son emitidos por átomos cuando un electrón experimenta una transición de una capa externa a un espacio vacío en una capa interna.

Las transiciones atómicas pueden ser descritas con tres procesos: **absorción estimulada**, en la cual un fotón incidente eleva el átomo a un estado de energía mayor; **emisión espontánea**, en la cual el átomo realiza una transición a un estado de energía menor, emitiendo un fotón; y **emisión estimulada**, en la cual un fotón incidente

provoca que un átomo excitado efectúe una transición descendente, emitiendo un fotón idéntico al incidente.

PREGUNTAS

1. ¿Por qué se necesitan tres números cuánticos para describir el estado de un átomo de un electrón (ignorando el espín)?
2. Compare la teoría de Bohr y el tratamiento de Schrödinger del átomo de hidrógeno. Comente sobre la energía total y el *momentum* angular orbital.
3. ¿Por qué la dirección del *momentum* angular orbital de un electrón es opuesta a la de su momento magnético?
4. ¿Por qué se utiliza un campo magnético no uniforme en el experimento Stern-Gerlach?
5. ¿El experimento de Stern-Gerlach podría realizarse con iones en vez de átomos neutros? Explique.
6. Describa algunos experimentos que apoyen la conclusión de que el número cuántico magnético de espín de los electrones sólo puede tener los valores $\pm\frac{1}{2}$.
7. Explique algunas de las consecuencias del principio de exclusión.
8. ¿Por qué el litio, el potasio y el sodio muestran propiedades químicas similares?
9. Explique por qué un fotón debe tener un espín de 1.
10. Se necesita una energía de aproximadamente 21 eV para excitar un electrón en un átomo de helio a partir del estado 1*s* al estado 2*s*. La misma transición para el ión He^+ requiere casi el doble de dicha energía. Explique.
11. ¿La intensidad de la luz de un láser disminuye como $1/r^2$?
12. El espectro de absorción o emisión de un gas está compuesto por líneas que se ensanchan conforme la densidad de las moléculas del gas aumentan. ¿Por qué supone usted que ocurre lo anterior?
13. ¿Cómo es posible que los electrones, cuyas posiciones están descritas por una distribución de probabilidad alrededor de un núcleo, puedan existir en estados de energía *definida* (por ejemplo: 1*s*, 2*p*, 3*d*,...)?
14. Es fácil entender cómo dos electrones (uno con espín arriba, otro con espín abajo) pueden llenar la capa 1*s* de un átomo de helio. ¿Cómo es posible que ocho electrones más puedan caber en el nivel 2*s*, 2*p* para completar la capa $1s^22s^22p^6$ de un átomo de neón?
15. En 1914 Henry Moseley descubrió cómo definir el número atómico de un elemento a partir de su espectro de rayos X característico. ¿Cómo fue posible esto? (*Sugerencia:* Véanse las Figs. 42.17 y 42.18.)
16. ¿Cuáles son las ventajas de usar luz monocromática para ver una imagen holográfica?
17. ¿Por qué la emisión estimulada es tan importante en la operación de un láser?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** = use computadora para resolver el problema = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 42.1 Los primeros modelos del átomo

1. En el experimento de dispersión de Rutherford, partículas alfa de 4.00 MeV (núcleos de ^4He que contienen 2 protones y 2 neutrones) dispersan núcleos de oro (que contienen 79 protones y 118 neutrones). Si una partícula alfa choca de frente con el núcleo de oro y se dispersa de regreso a 180°, determine a) la distancia de máximo acercamiento de la partícula alfa al núcleo de oro y b) la fuerza máxima ejercida sobre la partícula alfa. Suponga que el núcleo de oro permanece fijo a lo largo de todo el proceso.
2. En el experimento de dispersión de Rutherford, partículas alfa de energía *E* (núcleos de ^4He que contienen 2 protones y 2 neutrones) se dispersan en un blanco cuyos átomos tienen un número atómico *Z*. Si una partícula alfa choca de frente con un núcleo objetivo y se dispersa de regreso a 180°, determine a) la distancia de máximo acercamiento de la partícula alfa al núcleo objetivo y b) la fuerza máxima ejercida sobre la partícula alfa. Suponga que el núcleo objetivo permanece fijo a lo largo de todo el proceso.

Sección 42.2 Nueva visita al átomo de hidrógeno

3. Un fotón con 2.28 eV de energía apenas es capaz de producir un efecto fotoeléctrico cuando incide sobre una placa de sodio. Suponga que el fotón es más bien absorbido por el hidrógeno. Encuentre a) el mínimo *n* para un átomo de hidrógeno que puede ser ionizado por medio de este fotón y b) la rapidez del electrón liberado que se aleja del núcleo.
4. La serie de Balmer para el átomo de hidrógeno corresponde a transiciones electrónicas que terminan en el estado con número cuántico $n = 2$, como se muestra en la figura 40.18. a) Considere el fotón de longitud de onda más larga; determine su energía y longitud de onda. b) Considere la línea espectral de longitud de onda más corta; encuentre su energía fotónica y longitud de onda.
5. Una expresión general para los niveles de energía de átomos y iones de un electrón es

$$E_n = -\frac{\mu k_e^2 q_1^2 q_2^2}{2\hbar^2 n^2}$$

donde k_e es la constante de Coulomb, q_1 y q_2 son las cargas de las dos partículas y μ es la masa reducida, dada por $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$. En el problema 4 se encontró

que la longitud de onda para la transición de $n = 3$ a $n = 2$ del átomo de hidrógeno es 656.3 nm (luz roja visible). ¿Cuáles son las longitudes de onda para esta misma transición en a) positronio, el cual se compone de un electrón y de un positrón, y b) de helio ionizado individualmente? (*Nota*: Un positrón es un electrón con carga positiva.)

6. El hidrógeno gaseoso ordinario es una mezcla de dos clases de átomos (isótopos) que contienen un núcleo de una o dos partículas. Estos isótopos son hidrógeno-1 con un núcleo protón y deuterio con un núcleo deuterón. (Un deuterón es un protón y un neutrón ligados.) El hidrógeno-1 y el deuterio tienen propiedades químicas idénticas pero pueden ser separados mediante una ultracentrifugadora u otro método. Su espectro de emisión muestra líneas de los mismos colores a longitudes de onda muy poco diferentes. a) Use la ecuación dada en el problema 5 para mostrar que la diferencia en longitud de onda entre las líneas espectrales del hidrógeno y el deuterio asociadas con una transición electrónica particular está dada por

$$\lambda_H - \lambda_D = (1 - \mu_H/\mu_D)\lambda_H$$

b) Evalúe la diferencia en longitud de onda para la línea H_α del hidrógeno, con longitud de onda de 656.3 nm, emitida por un átomo que hace una transición desde un estado $n = 3$ a un estado $n = 2$.

Sección 42.3 El número cuántico magnético del espín

7. Enumere los posibles conjuntos de números cuánticos para electrones en a) la subcapa $3d$ y b) la subcapa $3p$.

Sección 42.4 Las funciones de onda para el hidrógeno

8. Grafique la función de onda $\psi_{1s}(r)$ (véase la Ec. 42.3) y la función de densidad de probabilidad radial $P_{1s}(r)$ (véase la Ec. 42.6) para el hidrógeno. Considere que r varía de 0 a $1.5a_0$, donde a_0 es el radio de Bohr.
9. La función de onda del estado base para el electrón en un átomo de hidrógeno es

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

donde r es la coordenada radial del electrón y a_0 es el radio de Bohr. a) Demuestre que la función de onda como está dada es normalizada. b) Encuentre la probabilidad de localizar al electrón entre $r_1 = a_0/2$ y $r_2 = 3a_0/2$.

10. La función de onda para un electrón en el estado $2p$ del hidrógeno está descrita por la expresión

$$\psi_{2p}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$$

¿Cuál es la distancia más probable desde el núcleo para encontrar un electrón en el estado $2p$? (véase la figura 42.8).

WEB 11. Muestre que una función de onda $1s$ para un electrón en el hidrógeno,

$$\psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

satisface la ecuación de Schrödinger simétrica radialmente,

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr}\right) - \frac{k_e e^2}{r}\psi = E\psi$$

12. Durante un periodo particular, un electrón en el estado base de un átomo de hidrógeno se "observa" 1 000 veces a una distancia $a_0/2$ del núcleo. ¿Cuántas veces se observa este electrón a una distancia $2a_0$ del núcleo durante este periodo de "observación"?

Sección 42.5 Los otros números cuánticos

13. Calcule el *momentum* angular de un electrón en a) el estado $4d$ y b) el estado $6f$.
14. Si un electrón tiene un *momentum* angular orbital de 4.714×10^{-34} J·s, ¿cuál es el número cuántico orbital para el estado del electrón?
15. Un átomo de hidrógeno está en su quinto estado excitado. El átomo emite un fotón de 1 090 nm de longitud de onda. Determine el máximo *momentum* angular orbital posible del electrón después de la emisión.
16. Encuentre todos los valores posibles de L, L_z y θ para un electrón en el estado $3d$ del hidrógeno.

WEB 17. ¿Cuántos conjuntos de números cuánticos son posibles para un electrón en el cual a) $n = 1$, b) $n = 2$, c) $n = 3$, d) $n = 4$ y e) $n = 5$? Verifique sus resultados para mostrar que concuerdan con la regla general de que el número de conjuntos de números cuánticos es igual a $2n^2$.

18. La componente z del momento magnético de espín del electrón está dada por el magnetón de Bohr, $\mu_B = e\hbar/2m_e$. Muestre que el magnetón de Bohr tiene el valor numérico 9.27×10^{-24} J/T $= 5.79 \times 10^{-5}$ eV/T.
19. a) Encuentre la densidad de masa de un protón, bosquejándolo como una esfera sólida de 1.00×10^{-15} m de radio. b) Considere un modelo clásico de un electrón como una esfera sólida con la misma densidad que el protón. Encuentre su radio. c) Si este electrón posee *momentum* angular de espín $I\omega = \hbar/2$ debido a rotación clásica en torno al eje z, determine la rapidez de un punto sobre el ecuador del electrón, y d) compare esta rapidez con la de la luz.
20. Todos los objetos, grandes y pequeños, se comportan de manera mecánico-cuántica. a) Estime el número cuántico ℓ para la Tierra en su órbita alrededor del Sol. b) ¿Qué cambio de energía (en joules) ocurriría si la Tierra hiciera una transición a un estado adyacente permitido?
21. Como el electrón, el núcleo de un átomo tiene *momentum* angular de espín y un momento magnético correspondiente. La componente z del momento magnético de espín para un núcleo está caracterizada por el *magnetón nuclear* $\mu_n = e\hbar/2m_p$, donde m_p es la masa del protón. a) Calcule el valor de μ_n en joules por tesla y en electronvolts por tesla. b) Determine la proporción μ_n/μ_B y comente su resultado.
22. Un electrón está en la capa N. Determine el valor máximo de la componente z de su *momentum* angular.
23. Un mesón ρ tiene una carga de $-e$, un número cuántico de espín de 1 y una masa 1 507 veces la del electrón. Su-

ponga que los electrones en los átomos son sustituidos por mesones ρ y enumere los posibles conjuntos de números cuánticos para mesones ρ en la subcapa $3d$.

Sección 42.6 El principio de exclusión y la tabla periódica

24. a) Escriba la configuración electrónica para el estado base del oxígeno ($Z = 8$). b) Escriba los valores para el conjunto de números cuánticos n, ℓ, m_ℓ y m_s para cada electrón en el oxígeno.
25. Bajando por la tabla periódica, ¿cuál subcapa se llena primero, la $3d$ o la $4s$? ¿Cuál configuración electrónica tiene energía inferior: $[\text{Ar}]3d^44s^2$ o $[\text{Ar}]3d^54s^1$? ¿Cuál tiene el mayor número de espines no pareados? Identifique este elemento y analice la regla de Hund en este caso. (*Nota:* La notación [Ar] representa la configuración llena del argón.)
26. Dos electrones en el mismo átomo tienen $n = 3$ y $\ell = 1$. Enumere los números cuánticos para los posibles estados del átomo. ¿Cuántos estados serían posibles si el principio de exclusión fuese inoperante?
27. Considere un átomo en su estado base, con sus electrones exteriores llenando por completo la capa M. a) Identifique el átomo. b) Enumere el número de electrones en cada subcapa.
28. Para un átomo neutro del elemento 110, ¿cuál sería su configuración electrónica probable?
29. WEB a) Revise la tabla 42.4 en orden de número atómico ascendente y advierta que los electrones llenan las subcapas de tal manera que aquellas con los valores más bajos de $n + \ell$ se llenan primero. Si dos subcapas tienen el mismo valor de $n + \ell$, la que tiene el valor más bajo de n se llena primero. Con estas dos reglas escriba el orden en el cual se llenan las subcapas hasta $n + \ell = 7$. b) Prediga la valencia química para los elementos que tienen números atómicos 15, 47 y 86, y compare sus predicciones con las valencias reales.
30. Diseñe una tabla similar a la que se muestra en la figura 42.14 para átomos que contienen de 11 a 19 electrones. Emplee la regla de Hund y conjeture a partir de esta información.

Sección 42.7 Espectros atómicos

31. a) Determine los posibles valores de los números cuánticos ℓ y m_ℓ para el ión He^+ en el estado correspondiente a $n = 3$. b) ¿Cuál es la energía de este estado?
32. Si usted desea producir en el laboratorio rayos X de 10.0 nm, ¿cuál es el voltaje mínimo que debe usar al acelerar los electrones?
33. Un blanco de tungsteno es golpeado por electrones que han sido acelerados desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 40.0 kV. Encuentre la longitud de onda más corta de la radiación emitida.
34. En la producción de rayos X los electrones se aceleran a través de un alto voltaje ΔV y luego se desaceleran incidiendo en un blanco. Muestre que la longitud de onda más corta de los rayos X que pueden producirse es

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{1240\,\text{nm}\cdot\text{V}}{\Delta V}$$

35. Utilice el método ilustrado en el ejemplo 42.7 para calcular la longitud de onda de los rayos X emitidos por un blanco de molibdeno ($Z = 42$) cuando un electrón se mueve de la capa L ($n = 2$) a la capa K ($n = 1$).
36. La longitud de onda de rayos X característicos correspondientes a la línea K_β es 0.152 nm. Determine el material en el blanco.
37. Se disparan electrones hacia un blanco de bismuto y se emiten rayos X. Determine a) la energía de transición de las capas M a la L para el Bi y b) la longitud de onda de los rayos X emitidos cuando un electrón desciende de la capa M a la capa L.
38. La serie K del espectro discreto del tungsteno contiene longitudes de onda de 0.018 5 nm, 0.020 9 nm y 0.021 5 nm. La energía de ionización de la capa K es 69.5 keV. Determine las energías de ionización de las capas L, M y N. Bosqueje las transiciones.
39. Cuando el electrón más externo de un átomo de álcali es excitado, se encuentra que los estados con la misma n pero diferente ℓ tienen energías hasta cierto punto diferentes porque penetran en el núcleo central a diferentes grados. Los orbitales de baja ℓ penetran más, mientras que los orbitales de alta ℓ penetran menos. Las longitudes de onda de las líneas de absorción están dadas aproximadamente por la ecuación

$$1/\lambda_{n\ell\to n'\ell'} = R_H[(n - \delta_\ell)^{-2} - (n' - \delta_{\ell'})^{-2}]$$

Observe que ésta es parecida a la ecuación 40.29, la cual describe al hidrógeno, pero con los números cuánticos principales n sustituidos por números cuánticos efectivos. Aquí δ_ℓ es el "defecto cuántico" asociado con el número cuántico orbital ℓ. El valor de δ_ℓ es independiente de n. Para el sodio (Na), $\delta_0 = 1.35$. La longitud de onda más larga para una transición de absorción que lleva Na desde su estado base a un estado con número cuántico principal más alto es de 330 nm. a) ¿Para qué otro valor de ℓ puede usted determinar el defecto cuántico y b) cuál es el valor de dicho defecto?

Sección 42.8 Transiciones atómicas

40. La familiar luz amarilla de una lámpara de vapor de sodio se produce a partir de una transición $3p \to 3s$ en ^{11}Na. Evalúe la longitud de onda de esta luz dado que la diferencia de energía $E_{3p} - E_{3s} = 2.10$ eV.
41. Suponga que un gran número n de átomos idénticos están en un primer estado excitado. La rapidez dn/dt a la cual esta población "desexcitará" es $dn/dt = -Pn$, donde P es la rapidez de probabilidad de transición cuántica. La rapidez de transición está dada, a su vez, por $P = A + u_f B$, donde A es el coeficiente de Einstein para emisión espontánea y B es el coeficiente de Einstein para emisión estimulada debida a la presencia de fotones con densidad de energía u_f por unidad de frecuencia. Einstein mostró que estos coeficientes están relacionados mediante $A = 16\pi^2\hbar B/\lambda^3$. Para una transición atómica de 645 nm de longitud de onda, ¿cuál debe ser la densidad de energía de los fotones para que la emisión estimulada sea tan importante como la emisión espontánea?

(Opcional)

Sección 42.9 **Rayos láser y holografía**

42. El láser de bióxido de carbono es uno de los más poderosos que se han desarrollado. La diferencia de energía entre los dos niveles del láser es 0.117 eV. Determine la frecuencia y la longitud de onda de la radiación emitida por este láser. ¿En qué parte del espectro electromagnético se encuentra esta radiación?

WEB 43. Un láser de rubí entrega un pulso de 10.0 ns a 1.00 MW de potencia promedio. Si los fotones tienen una longitud de onda de 694.3 nm, ¿cuántos están contenidos en el pulso?

44. Una importante característica de un láser es su ganancia G, la cual especifica el mejoramiento relativo de la intensidad del haz luminoso sobre la longitud L del láser. Cuando $G = 1.05$, ocurre un incremento en la intensidad del 5% mientras la luz realiza un pase a través del láser. La ganancia está dada por

$$G = e^{\sigma(n_u - n_\ell)L}$$

En esta ecuación σ es la absorción atómica transversal para la transición láser, con unidades de longitud al cuadrado. Está relacionada con la probabilidad de transición cuántica. Las variables n_u y n_ℓ son las densidades numéricas (unidades de longitud^{-3}) de átomos activos en los estados de energía superior e inferior de la transición láser. Si $L = 0.500$ m y $\sigma = 1.00 \times 10^{-18}$ m^2 para un láser particular, ¿qué inversión $n_u - n_\ell$ de densidad numérica debe mantenerse para tener una ganancia de 1.05?

45. El número N de átomos en un estado particular recibe el nombre de población de dicho estado. Este número depende de la energía de tal estado y la temperatura. En equilibrio térmico la población de átomos en un estado de energía E_n está dada por una expresión de la distribución de Boltzmann:

$$N = N_g e^{-(E_n - E_g)/k_B T}$$

donde T es la temperatura absoluta y N_g es la población del estado base, de energía E_g. a) Antes de que la potencia se active, los átomos de neón en un láser están en equilibrio térmico a 27.0°C. Encuentre la relación de equilibrio entre las poblaciones de los estados E_3^* y E_2 mostrada en la figura 42.25. b) Encuentre la relación de equilibrio a 4.00 K de las poblaciones de los dos estados en un láser de rubí que puede producir un haz luminoso de 694.3 nm de longitud de onda.

46. Los rayos láser funcionan mediante una ingeniosa producción artificial de una "inversión de población" entre los estados de energía atómica inferior y superior involucrados en el procesamiento láser. Esto significa que más átomos vienen con electrones en el estado excitado superior que en el inferior. Considere la transición de láser de rubí a 694.3 nm. Suponga que 2% más átomos vienen en el estado superior que en el inferior. Por simplicidad, suponga que ambos niveles tienen sólo un estado cuántico asociado con ellos. a) Para demostrar cuán no natural es tal situación, encuentre la temperatura para la cual la distribución de Boltzmann describe una inversión de población del 2.00%. b) ¿Por qué tal situación no ocurre de manera natural?

PROBLEMAS ADICIONALES

47. Un láser de Nd:YAG que se utiliza en cirugía del ojo emite un pulso de 3.00 mJ en 1.00 ns, enfocado en un punto de 30.0 μm de diámetro sobre la retina. a) Encuentre (en unidades del SI) la potencia por unidad de área en la retina. (Esta cantidad se denomina irradiancia.) b) ¿Qué energía se entrega a un área de tamaño molecular, considerada como un área circular de 0.600 nm de diámetro?

48. **Problema de repaso.** a) ¿Cuánta energía se requiere para provocar que un electrón en hidrógeno se mueva desde el estado $n = 1$ al estado $n = 2$? b) Suponga que los electrones ganan esta energía a través de colisiones entre átomos de hidrógeno a una alta temperatura. ¿A qué temperatura la energía cinética atómica promedio $3k_BT/2$, donde k_B es la constante de Boltzmann, sería lo suficientemente grande para excitar los electrones?

49. Muestre que el valor promedio de r para el estado 1s del hidrógeno tiene el valor $3a_0/2$. (*Sugerencia:* Utilice la ecuación 42.6.)

50. Encuentre el valor (de esperanza) promedio de $1/r$ en el estado 1s del hidrógeno. Está dado por

$$\langle 1/r \rangle = \int_{\text{todo el espacio}} |\psi|^2 (1/r) dV = \int_0^\infty P(r)(1/r) dr$$

¿El resultado es igual al inverso del valor promedio de r?

51. Suponga que un átomo de hidrógeno está en el estado 2s. Tomando $r = a_0$, calcule valores para a) $\psi_{2s}(a_0)$, b) $|\psi_{2s}(a_0)|^2$ y c) $P_{2s}(a_0)$. (*Sugerencia:* Use la ecuación 42.7.)

52. Como se hizo notar en un capítulo anterior, el muón es una partícula elemental con la carga de un electrón pero una masa 207 veces mayor que la de un electrón. El muonio es un "átomo" compuesto de un muón y un protón. Usando la fórmula para los niveles de energía de los átomos parecidos al hidrógeno dada en el problema 42.5, encuentre la energía de ionización del estado base del muonio.

53. Un láser de rubí de pulsos emite luz a 694.3 nm. Para un pulso de 14.0 ps que contiene 3.00 J de energía, encuentre a) la longitud física del pulso conforme viaja por el espacio y b) el número de fotones en él. c) Si el haz tiene una sección transversal circular de 0.600 cm de diámetro, encuentre el número de fotones por milímetro cúbico.

54. Un láser de pulsos emite luz de longitud de onda λ. Para un pulso de duración t que tiene energía E, encuentre a) la longitud física del pulso conforme viaja por el espacio y b) el número de fotones en él. c) Si el haz tiene una sección transversal circular de diámetro d, encuentre el número de fotones por unidad de volumen.

55. a) Demuestre que la posición radial más probable para un electrón en el estado 2s del hidrógeno es $r = 5.236a_0$. b) Demuestre que la función de onda dada por la ecuación 42.7 está normalizada.

56. La fuerza sobre un momento magnético μ_z en un campo magnético no uniforme B_z está dada por $F_z = \mu_z(dB_z/dz)$. Si un haz de átomos de plata viaja una distancia horizontal de 1.00 m a través de tal campo y cada átomo tiene una rapidez de 100 m/s, ¿cuán intenso debe ser el gradiente del campo dB_z/dz para desviar al haz 1.00 mm?

57. Un electrón en cromo se mueve desde el estado $n = 2$ al estado $n = 1$ sin emitir un fotón. En vez de eso, la energía en exceso es transferida a un electrón exterior (uno en el estado $n = 4$), el cual luego es expulsado por el átomo. (Esto se llama proceso Auger [pronunciado "oh-jay"] y el electrón expulsado es referido como un electrón Auger.) Use la teoría de Bohr para encontrar la energía cinética del electrón Auger.

58. Suponga que la energía de ionización de un átomo es 4.10 eV. En el espectro de este mismo átomo se observan líneas de emisión con longitudes de onda de 310 nm, 400 nm y 1 377.8 nm. Use esta información para construir el diagrama de niveles de energía con el menor número de niveles. Suponga que los niveles más altos están muy juntos entre ellos.

59. Todos los átomos tienen el mismo tamaño hasta un orden de magnitud. a) Para demostrarlo estime los diámetros del aluminio (con masa molar = 27.0 g/mol y densidad 2.70 g/cm^3) y el uranio (con masa molar = 238 g/mol y densidad 18.9 g/cm^3). b) ¿Qué implican los resultados acerca de las funciones de onda para electrones de capa interna cuando se avanza hacia átomos de masas atómicas más y más grandes? (*Sugerencia:* El volumen molar es aproximadamente D^3N_A, donde D es el diámetro atómico y N_A es el número de Avogadro.)

60. En el espacio interestelar el hidrógeno atómico produce la línea espectral definida conocida como radiación de 21 cm, la cual los astrónomos han encontrado muy útil para detectar nubes de hidrógeno entre estrellas. Esta radiación es útil porque el polvo interestelar que oscurece las longitudes de onda visibles es transparente a estas longitudes de onda de radio. La radiación no es generada por una transición electrónica entre estados de energía caracterizados por n. En lugar de eso, en el estado base ($n = 1$), los espines del electrón y el protón pueden ser paralelos o antiparalelos, con una resultante más o menos diferente en estos estados de energía. a) ¿Cuál condición tiene la energía más alta? b) De manera más precisa, la línea tiene longitud de onda de 21.11 cm. ¿Cuál es la diferencia de energía entre los estados? c) El tiempo de vida promedio en el estado excitado es aproximadamente de 10^7 años. Calcule la incertidumbre asociada en la energía de este nivel de energía excitado.

61. Para hidrógeno en el estado $1s$, ¿cuál es la probabilidad de encontrar el electrón más allá de $2.50a_0$ del núcleo?

62. En el estado base del hidrógeno, ¿cuál es la probabilidad de encontrar un electrón más cerca del núcleo que el radio de Bohr?

WEB 63. De acuerdo con la física clásica, una carga e que se mueve con una aceleración a radia a una rapidez

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0}\frac{e^2a^2}{c^3}$$

a) Demuestre que un electrón en un átomo de hidrógeno clásico (véase la figura 42.3) gira en espiral dentro del núcleo a una rapidez de

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{e^4}{12\pi^2\epsilon_0^2r^2m_e^2c^3}$$

b) Encuentre el tiempo que tarda el electrón en llegar a $r = 0$, empezando desde $r_0 = 2.00 \times 10^{-10}$ m.

64. En un átomo de litio la nube electrónica del electrón exterior se traslapa con las nubes de electrones de los dos electrones de la capa K. Un cálculo detallado de la carga efectiva que ejerce una fuerza eléctrica sobre otro electrón puede realizarse usando la mecánica cuántica. Para el caso del átomo de litio, la carga efectiva sobre cada electrón interior es $-0.85e$. Use este valor para encontrar a) la carga efectiva sobre el núcleo como "se ve" por el electrón de valencia exterior y b) la energía de ionización (compare ésta con 5.4 eV).

65. **Problema de repaso.** En la técnica conocida como resonancia del espín electrón (REE), una muestra que contiene electrones no pareados se pone en un campo magnético. Considere la situación más simple, aquella en la cual sólo hay un electrón y, por tanto, sólo son posibles dos estados de energía, que corresponden a $m_s = \pm\frac{1}{2}$. En la REE, la absorción de un fotón hace que el momento magnético del espín del electrón pase de un estado de energía menor a uno de energía mayor. (El estado de energía inferior corresponde al caso en el que el momento magnético $\boldsymbol{\mu}_{\text{espín}}$ se alinea con el campo magnético, y el estado de energía superior corresponde al caso en el que $\boldsymbol{\mu}_{\text{espín}}$ se alinea contra el campo.) ¿Cuál es la frecuencia requerida del fotón para excitar una transición de REE en un campo magnético de 0.350 T?

66. La figura P42.66 muestra los diagramas de niveles de energía del He y el Ne. Un voltaje eléctrico excita el átomo de He de su estado base a su estado excitado de 20.61 eV. El átomo de He excitado choca con un átomo de Ne en su estado base y lo excita hasta el estado a 20.66 eV. El procesamiento láser ocurre en la transición electrónica de E_3* a E_2 en los átomos de Ne. Muestre que la longitud de onda de la luz roja del láser de He-Ne es aproximadamente de 633 nm.

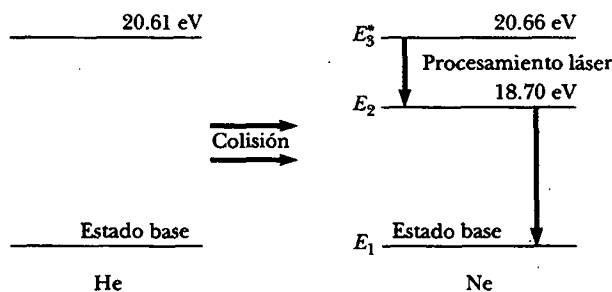


Figura P42.66

67. Un número adimensional que aparece a menudo en la física atómica es la constante de estructura fina $\alpha = k_ee^2/\hbar c$, donde k_e es la constante de Coulomb. a) Obtenga un valor numérico para $1/\alpha$. b) En experimentos de dispersión se considera que el tamaño del electrón es igual al radio clásico del electrón, $r_e = k_ee^2/m_ec^2$. En función de α, ¿cuál es la proporción entre la longitud de on-

da de Compton (véase la sección 40.3), $\lambda_C = h/m_ec$, y el radio clásico del electrón? c) En función de α, ¿cuál es la proporción entre el radio de Bohr, a_0, y la longitud de onda de Compton? d) En términos de α, ¿cuál es la proporción entre la longitud de onda de Rydberg, $1/R_H$ y el radio de Bohr? (véase la sección 40.5).

68. Muestre que la función de onda para un electrón en el estado 2s en el hidrógeno

$$\psi_{2s}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0}$$

satisface la ecuación de Schrödinger simétrica radialmente dada en el problema 11.

69. Un haz luminoso colimado de frecuencia f pasa en la dirección x a través de una muestra de una sustancia transparente conínd ice de refracción n. La longitud de su trayectoria es L. La frecuencia se sintoniza para ser resonante con una transición entre dos niveles atómicos en la sustancia. El haz puede inducir emisión estimulada desde átomos en el estado superior, y puede ser absorbido por átomos en el estado inferior. La intensidad del haz es, por tanto, una función $I(x)$ de la posición. El número de transiciones por unidad de tiempo y por área que el haz inducirá sobre una pequeña distancia dx en el material es igual a $BNI(x)n\ dx/c$, donde B es el coeficiente de Einstein para la transición (relacionado con la probabilidad de transición) y N es la densidad numérica (por ejemplo, densidad de población) de los átomos del estado inicial en la transición. La misma ecuación se mantiene tanto para la emisión como para la absorción estimuladas. Demuestre que si I_0 es la intensidad del haz antes de que entre al material, la intensidad del haz en el otro extremo es

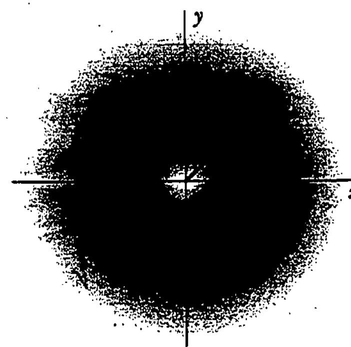
$$I(L) = I_0e^{-\alpha L}$$

donde $\alpha = hf\,B\,\Delta Nn/c$, y donde ΔN es la diferencia en densidades numéricas entre estados inferior y superior. (*Sugerencia:* La intensidad es (energía/tiempo)/área y los fotones tienen energía.)

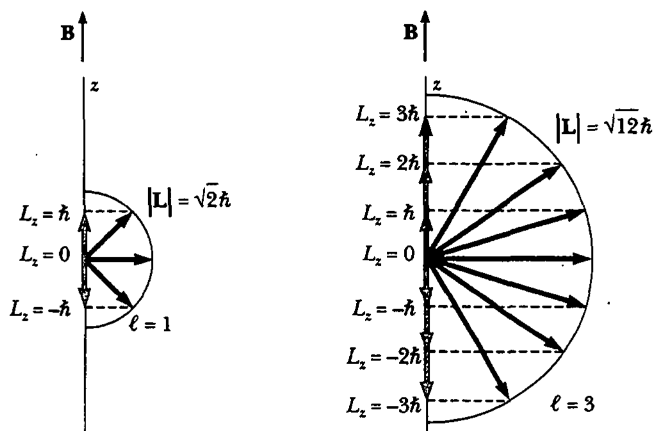
70. **Problema de repaso.** El premio Nobel de física de 1997 fue otorgado a Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji y William Phillips por "el desarrollo de métodos para enfriar y atrapar átomos con luz láser". Una parte de su trabajo fue la producción de un haz de átomos (masa ~ 10^{-25} kg) que se mueven a una rapidez del orden de 1 km/s, similar a la rapidez de las moléculas en el aire a temperatura ambiente. Un intenso rayo de luz láser sintonizado a una transición atómica visible (suponga 500 nm) se dirige de frente hacia el haz de átomos. Esto es, el haz de átomos y el haz de luz se están contrapropagando. Un átomo en el estado base inmediatamente absorbe un fotón. El *momentum* total se conserva en el proceso de absorción. Después de un tiempo de vida del orden de 10^{-8} s, el átomo excitado radia mediante emisión espontánea. Éste tiene una probabilidad igual de emitir un fotón en cualquier dirección. Por tanto, el "retroceso" promedio del átomo es cero a lo largo de muchos ciclos de absorción y emisión. a) Estime la desaceleración promedio del haz de átomos. b) ¿Cuál es el orden de magnitud de la distancia a lo largo de la cual los átomos en el haz llegarán a detenerse?

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

42.1 La distribución de carga tridimensional mostrada en la figura 42.7b no es uniforme —tiene un pico en el radio de Bohr. La figura 42.7a representa la probabilidad de encontrar al electrón como una función de la distancia desde el centro del núcleo. Puesto que dicha probabilidad es una función de r pero no de x o y individualmente, la oportunidad de encontrar al electrón en el plano xy es un máximo en cualquier punto para el cual $r = a_0$. Para $r < a_0$, la probabilidad cae con rapidez —lo cual indica que es improbable encontrar al electrón muy cerca de o dentro del núcleo—. Conforme r se vuelve muy grande, la probabilidad de nuevo tiende a cero, lo que significa que el enlace del electrón no tiene una probabilidad significativa de estar alejado del núcleo. Imagine que usted está viendo hacia abajo del eje z de la figura 42.7b, hacia el plano xy. El área pico, donde se tiene más probabilidad de encontrar al electrón, aparecería más oscura, y las áreas de menor probabilidad serían más claras.



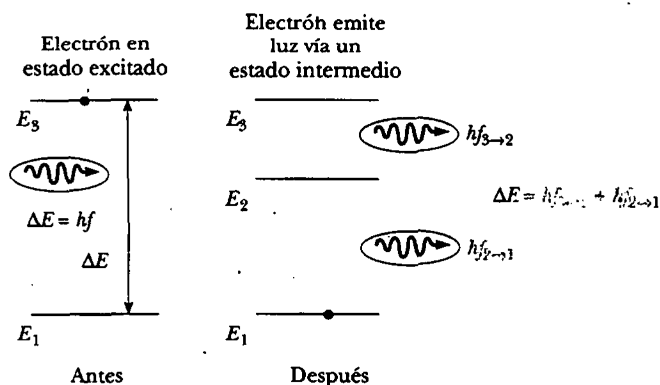
42.2 El dibujo $\ell = 3$ es una representación gráfica de los resultados del ejemplo 42.6. Cálculos similares producen la magnitud y dirección del *momentum* angular para el caso $\ell = 1$.



42.3 La física clásica no pone restricciones al *momentum* angular L del átomo en el haz. En consecuencia, el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ de un átomo puede apuntar en cualquier dirección. Cada átomo interactúa de manera diferente con el campo magnético no uniforme y es desviado en concordancia. Esta variación aleatoria en la desviación resulta en un patrón de exposición uniformemente distribuido sobre la placa fotográfica, como el patrón clásico en la figura 42.12. Desde luego, experimentalmente éste no es el caso.

42.4 Los electrones que bombardean tienen una energía de 37 keV. La longitud de onda de corte corresponde a uno de dichos electrones que pierde toda su energía cinética en una sola colisión, energía que es emitida desde el blanco como un solo fotón. Se puede calcular la longitud de onda de este fotón a partir de las ecuaciones 16.14 y 40.6: $\lambda = c/f = hc/E = 34$ pm. Longitudes de onda más cortas que esta pueden aparecer en el espectro continuo sólo si la energía de los electrones bombarderos está aumentando.

42.5







ACERTIJO

La copa de vidrio y los cubiertos de plata tras ella son muy diferentes, aunque las mismas leyes de la física gobiernan la apariencia de ambos. ¿Qué hace al vidrio transparente y proporciona a los metales su brillo? *(George Semple)*

capítulo

43

Moléculas y sólidos

La hermosa simetría y regularidad de los sólidos cristalinos ha estimulado y permitido rápidos avances en el campo de la física de estado sólido en el siglo XX. El arreglo atómico más aleatorio, el de un gas, fue bien comprendido en el siglo XIX, como se estudió en el capítulo 21. Al inicio del siglo XX los grandes progresos se realizaron primero en aclarar las propiedades de los arreglos atómicos más regulares, el de los sólidos cristalinos. Más recientemente, ha avanzado la comprensión de los líquidos y sólidos amorfos (irregulares). El reciente interés de la física en los materiales amorfos de bajo costo ha sido motivado por su empleo en dispositivos como las celdas solares, elementos de memoria y guías de onda de fibra óptica.

En el presente capítulo se estudian los conjuntos de átomos conocidos como moléculas. Primero se describen los mecanismos de enlace en las moléculas, los diversos modos de excitación molecular y la radiación emitida o absorbida por moléculas. Luego se da el siguiente paso lógico, al mostrar cómo se combinan las moléculas para formar sólidos. Después, mediante el examen de sus distribuciones electrónicas, se explicarán las diferencias entre materiales aislantes, conductores, semiconductores y superconductores. El capítulo también incluye análisis de uniones semiconductoras y varios dispositivos semiconductores, y concluye con un tratamiento más amplio de los superconductores.

ENLACES MOLECULARES

La energía de una molécula estable es menor que la energía total de los átomos separados. Los mecanismos de enlace en una molécula se deben principalmente a fuerzas eléctricas entre átomos (o iones). Cuando dos átomos están separados por una distancia infinita, la fuerza eléctrica entre ellos es cero, como lo es la energía potencial eléctrica del sistema que constituyen. A medida que los átomos se aproximan entre sí, actúan tanto fuerzas atractivas como repulsivas. A separaciones muy grandes, las fuerzas dominantes son atractivas. Para pequeñas separaciones las fuerzas electrostáticas y el principio de exclusión resultan en una fuerza repulsiva, como se analizará en breve.

La energía potencial de un sistema de átomos puede ser positiva o negativa, dependiendo de la distancia entre los átomos constituyentes. Como se vio en el ejem-

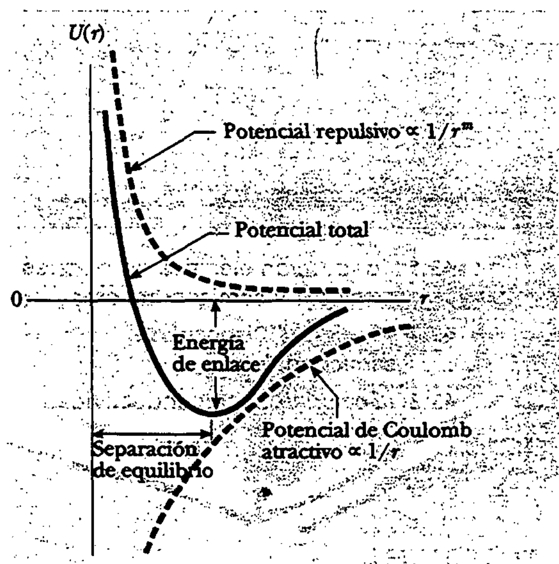


Figura 43.1 Energía potencial total como función de la distancia de separación internuclear para un sistema de dos átomos.

plo 8.11, la energía potencial total de un sistema de dos átomos puede aproximarse por una expresión de la forma:

$$U = -\frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^m} \qquad \textbf{(43.1)}$$

donde r es la distancia de separación internuclear, A y B son parámetros asociados con las fuerzas atractiva y repulsiva, y n y m son enteros pequeños. En la figura 43.1 se grafica la energía potencial total *versus* la distancia de separación internuclear para un sistema de dos átomos. A grandes distancias de separación, la pendiente de la curva es positiva, lo que corresponde a una fuerza atractiva neta. Cuando los átomos están muy próximos entre sí, la pendiente es negativa, lo cual indica una fuerza repulsiva neta. En la distancia de separación de equilibrio, las fuerzas atractiva y repulsiva apenas se equilibran, la energía potencial tiene su valor mínimo y la pendiente de la curva es cero.

Una descripción completa de los mecanismos de enlace en moléculas es muy complicada debido a que involucra las interacciones mutuas de muchas partículas. En esta sección, por tanto, sólo se analizan algunos modelos simplificados: enlace iónico, enlace covalente, enlace de van der Waals y enlace de hidrógeno.

Enlace iónico

Cuando dos átomos se combinan de tal manera que uno de ellos proporciona uno o más de sus electrones exteriores al otro, el enlace formado se denomina **enlace iónico**. Los enlaces iónicos se deben fundamentalmente a la atracción de Coulomb entre iones con cargas opuestas.

Un ejemplo conocido de un sólido enlazado iónicamente es el cloruro de sodio, NaCl, la familiar sal de mesa. El sodio, que tiene la configuración electrónica $1s^2 2s^2 2p^6 3s$, es relativamente fácil de ionizar, al proporcionar su electrón $3s$ para formar un ion Na^+. La energía requerida para ionizar el átomo con el fin de formar Na^+ es 5.1 eV. El cloro, cuya configuración electrónica es $1s^2 2s^2 2p^5$, tiene un electrón menos que la estructura de capa llena del argón. Porque las configuraciones de capa llena son energéticamente más favorables que las configuraciones de capa no llena, el ion Cl^- es más estable que el átomo Cl neutro. La energía liberada cuando un átomo toma un electrón recibe el nombre de **afinidad electrónica del átomo**. Para el cloro, la afinidad electrónica es 3.7 eV. Por tanto, la energía requerida para formar Na^+ y Cl^- a partir de átomos aislados es $5.1 - 3.7 = 1.4$ eV.

La energía total *versus* la distancia de separación internuclear para el NaCl se grafica en la figura 43.2. La energía total tiene un valor mínimo de − 4.2 eV a la distancia de separación de equilibrio, la cual es aproximadamente de 0.24 nm. Lo anterior significa que la energía necesaria para romper el enlace Na^+— Cl^- y formar átomos neutros de sodio y cloro, denominada **energía de disociación**, es igual a 4.2 eV.

Cuando los dos iones se acercan hasta 0.24 nm uno del otro, sus capas exteriores llenas se traslapan, lo cual produce una repulsión entre las capas. Tal repulsión es en parte electrostática en origen y en parte el resultado del principio de exclusión. Puesto que todos los electrones deben obedecer el principio de exclusión, algunos de ellos en las capas traslapadas son forzados hacia estados de mayor energía, y la energía del sistema aumenta, como si una fuerza repulsiva existiera entre ellos.

Pregunta sorpresa 43.1

La figura 43.2 muestra la energía total *versus* la distancia de separación internuclear para iones Na^+ y Cl^-. Una vez que los iones están separados más de 0.24 nm, la energía aumenta pero no sin límite. ¿Cuál es el máximo valor de la energía para $r > 0.24$ nm?

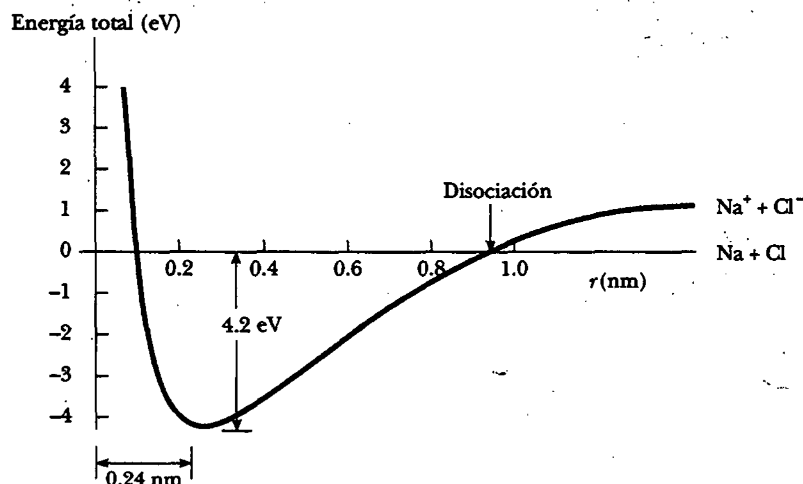


Figura 43.2 Energía total *versus* distancia de separación internuclear para iones Na^+ y Cl^-. La energía requerida para separar la molécula de NaCl en átomos neutros de Na y Cl es 4.2 eV.

Enlaces covalentes

Un **enlace covalente** entre dos átomos es uno en el cual los electrones suministrados por uno o ambos átomos son compartidos. Muchas moléculas diatómicas, como H_2, F_2 y CO deben su estabilidad a enlaces covalentes. En el caso de la molécula H_2, los dos electrones son compartidos igualmente por los núcleos y ocupan lo que se conoce como *orbital molecular.* La densidad electrónica es grande en la región entre los dos núcleos, con los electrones actuando como el "pegamento" que mantiene unidos a los núcleos.

La formación orbital molecular a partir de los orbitales *s* de los dos átomos de hidrógeno en H_2 aparece en la figura 43.3. Debido al principio de exclusión, los dos electrones en el estado base de H_2 deben tener espines antiparalelos. Asimismo, debido al principio de exclusión, si un tercer átomo H se lleva cerca de la molécula H_2, el tercer electrón tendría que ocupar un nivel de mayor energía, lo cual es una situación energéticamente desfavorable. En consecuencia, la molécula de H_3 no es estable y no se forma.



Figura 43.3 Enlace covalente formado por los dos electrones 1*s* de la molécula H_2. La profundidad del color azul en cualquier posición es proporcional a la probabilidad de encontrar un electrón en dicho sitio.

Moléculas estables más complejas que H_2, como H_2O, CO_2 y CH_4 también contienen enlaces covalentes. Considere al metano, CH_4, una molécula orgánica común que se muestra de manera esquemática en el diagrama de electrones compartidos de la figura 43.4a. En este caso, un enlace covalente se forma entre el átomo de carbono y cada átomo de hidrógeno, resultando en un total de cuatro enlaces covalentes C–H. El arreglo geométrico de los cuatro enlaces se muestra en la figura 43.4b. Los cuatro núcleos de hidrógeno están en las esquinas de un tetraedro regular, con el núcleo de carbono en el centro.

Como los orbitales moleculares externos de las moléculas covalentes están llenos, las interacciones entre tales moléculas son muy débiles. De hecho, muchas moléculas covalentes forman gases o líquidos en lugar de sólidos.

Enlace de van der Waals

Si dos moléculas están separadas a cierta distancia, se atraen entre ellas por fuerzas electrostáticas débiles denominadas **fuerzas de van der Waals.** De igual modo, los átomos que no forman enlaces iónicos o covalentes se atraen mutuamente por medio de fuerzas de van der Waals. Por tal razón, a temperaturas muy bajas donde las excitaciones térmicas son despreciables, los gases primero se condensan en líqui-

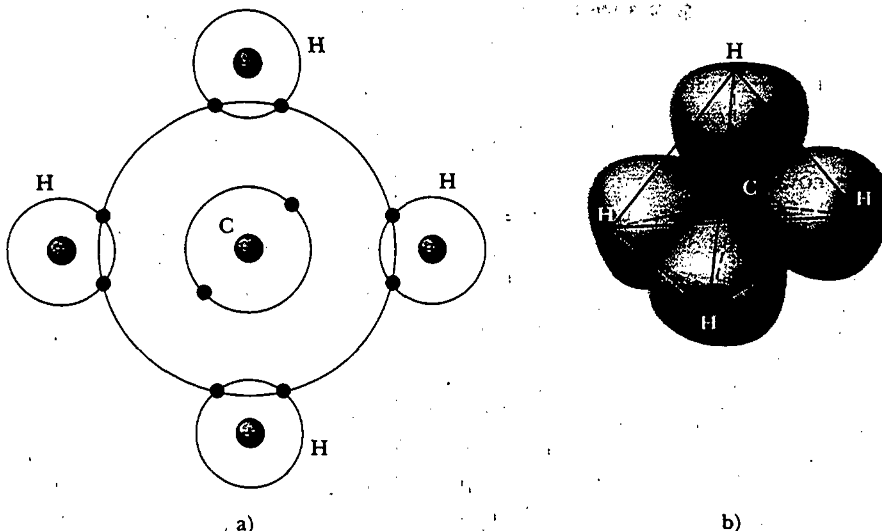


Figura 43.4 a) Una representación muy esquemática de los cuatro enlaces covalentes en la molécula CH_4. b) El arreglo espacial de estos cuatro enlaces. El átomo de carbono está en el centro de un tetraedro que tiene átomos de hidrógeno en sus esquinas. La densidad electrónica es mucho mayor entre los núcleos.

dos y después se solidifican (excepto el helio, el cual no se solidifica a presión atmosférica).

Hay tres tipos de fuerzas de van der Waals. El primer tipo, denominado *fuerza de dipolo-dipolo*, es una interacción entre dos moléculas, cada una con un momento de dipolo eléctrico permanente —por ejemplo, moléculas polares, como el H_2O, tienen momentos de dipolo eléctrico permanente y atraen a otras moléculas polares (Fig. 43.5)—. En efecto, una molécula interactúa con el campo eléctrico producido por otra molécula.

El segundo tipo, la *fuerza de dipolo-dipolo inducido*, resulta cuando una molécula polar que tiene un momento de dipolo eléctrico permanente induce un momento de dipolo en una molécula no polar.

El tercer tipo se llama *fuerza de dispersión*, una fuerza atractiva que ocurre entre dos moléculas no polares. Aquí, la interacción es resultado de que, aunque el momento de dipolo promedio de una molécula no polar es cero, el promedio del cuadrado del momento de dipolo es diferente de cero debido a las fluctuaciones de carga. En consecuencia, dos moléculas no polares cerca una de otra tienden a estar correlacionadas como para producir una fuerza atractiva de van der Waals.

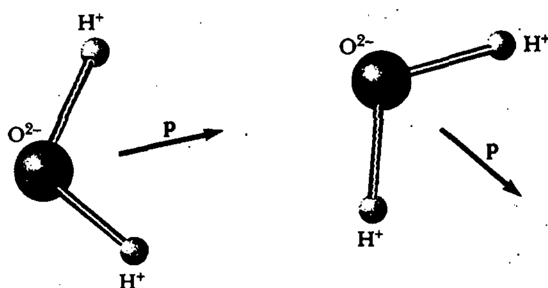


Figura 43.5 Las moléculas de agua tienen un momento de dipolo eléctrico permanente **p**. Las moléculas se atraen mutuamente ya que el campo eléctrico producido por una molécula interactúa con y orienta el momento de dipolo de una molécula vecina.

El enlace de hidrógeno

Ya que el hidrógeno sólo tiene un electrón, se espera que forme un enlace covalente sólo con otro átomo. Sin embargo, un átomo de hidrógeno en una molécula dada también puede formar un segundo tipo de enlace con un átomo en otra molécula vía un **enlace de hidrógeno**. Tome la molécula de agua como ejemplo. En los dos enlaces covalentes en esta molécula, los electrones de los átomos de hidrógeno es más probable que se encuentren cerca del átomo de oxígeno que de los átomos de hidrógeno, lo cual deja esencialmente descubiertos protones en las posiciones de los átomos de hidrógeno. Dicha carga positiva destapada puede ser atraída al extremo negativo de otra molécula polar. Debido a que el protón no está cubierto por los electrones, el extremo negativo de la otra molécula puede acercarse mucho al protón para formar un enlace que es lo suficientemente intenso para formar una estructura cristalina sólida, como la del hielo. Los enlaces *dentro* de una molécula de agua son covalentes, pero los enlaces *entre* moléculas de agua en el hielo son enlaces de hidrógeno. Ya que los enlaces de hidrógeno son relativamente débiles, el hielo se derrite a la baja temperatura de 0°C.

El enlace de hidrógeno tiene una energía de enlace de alrededor de 0.1 eV. Aunque es relativamente débil en comparación con los otros enlaces químicos, el enlace de hidrógeno es el mecanismo responsable del enlace de moléculas biológicas y polímeros. Por ejemplo, en el caso de la famosa molécula de ADN (ácido desoxirribonucleico), que tiene una estructura de doble hélice (Fig. 43.6), los enlaces de hidrógeno que se forman cuando dos átomos comparten un protón crea uniones entre las vueltas de la hélice.



Figura 43.6 Las moléculas de ADN se mantienen juntas mediante enlaces de hidrógeno. *(Douglas Struthers/Tony Stone Images)*

APLICACIÓN Midiendo fuerzas de enlace molecular con un microscopio de fuerza atómica (nueva visita al ejemplo 8.11)

Como se destacó en la sección 41.8, un microscopio de fuerza atómica (MFA) usa una punta muy fina montada sobre una ménsula en cercana proximidad a una superficie para poder visualizar la topografía superficial con resolución nanométrica. El MFA es similar al microscopio de efecto túnel exploratorio, sólo que aquí la punta interactúa con la superficie para medir fuerza en lugar de corriente de efecto túnel. Una variación de la técnica del MFA permite medir las fuerzas de enlace entre átomos o entre vínculos en moléculas biológicas u otras macromoléculas, como se ilustra en la figura 43.7. En esta figura la molécula está ligada a una superficie que se puede mover verticalmente con precisión nanométrica. La fuerza ejercida sobre la punta donde otra parte de la molécula está anclada provoca que la ménsula se pandee. La ménsula puede ser considerada como un resorte simple; por tanto, su combado es proporcional a la fuerza ejercida sobre ella (ley de Hooke). El MFA llega a medir fuerzas tan diminutas como piconewtons. En un experimento para medir fuerzas de enlace, una punta especialmente preparada se pone con cuidado en contacto con una superficie revestida con las moléculas de interés. Varias moléculas pueden unirse a la punta, pero una cuidadosa extensión continua (mediante el movimiento de la superficie hacia abajo) deja unida a la punta sólo la molécula más larga puenteando la distancia superficie-punta. La fuerza necesaria para romper el siguiente enlace más débil se mide mediante el registro de la curvatura de la ménsula conforme la punta se retrae.

Considere la fuerza requerida para romper un solo enlace covalente en una molécula. Este problema se simplifica enormemente mediante la consideración del rompimiento de enlace para una función de energía potencial, que ya se conoce: la interacción de van der Waals descrita con anterioridad en esta sección. La función de energía potencial establecida en forma general en la ecuación 43.1 toma la forma de la ecuación de Lennard-Jones citada en el ejemplo 8.11:

$$U(r) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$$

Dicha función está graficada en la figura 43.8 para el argón, un gas inerte que interactúa mediante la fuerza de van der Waals, con parámetros experimentalmente determinados $\sigma = 0.340$ nm y $\epsilon = 0.010\,4$ eV. La forma de esta función de energía potencial es genérica para muchos tipos de enlaces (compárese con la gráfica en la Fig. 43.2). La posición de la energía mínima representa la distancia de equilibrio para el enlace. Las interacciones repulsivas entre los electrones de capa interior provoca un gran aumento en la energía si los átomos se acercan, y la energía de interacción tiende a cero cuando los átomos están alejados lo suficiente. (Advierta que para cada pequeña desviación de la distancia de equilibrio, el primer término en una expansión de la serie de Taylor es cuadrática, lo cual es la forma de la función de energía potencial para un oscilador armónico.)

La distancia de equilibrio internuclear se calcula al encontrar la posición del mínimo en $U(r)$, esto es, donde $dU(r)/dr = 0$:

$$\frac{dU(r)}{dr} = -\frac{4\epsilon}{\sigma}\left[12\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13} - 6\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{7}\right] = 0$$

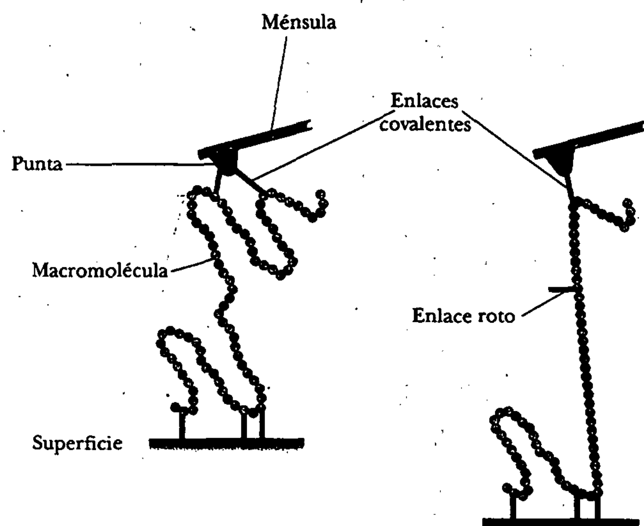


Figura 43.7 Midiendo fuerzas de enlace con la punta de un MFA. Una sola cadena macromolecular se une covalentemente a la punta en dos partes. Aumentar el alargamiento rompe un enlace, lo que produce un cambio repentino en la curva fuerza *versus* separación conforme la separación se incrementa. *(Adaptado de M. Grandbois, M. Beyer, M. Reif, H. Clausen-Schaumann, H. Goub, "How Strong Is a Covalent Bond?" Science 283:1727-1730, 1999.)*

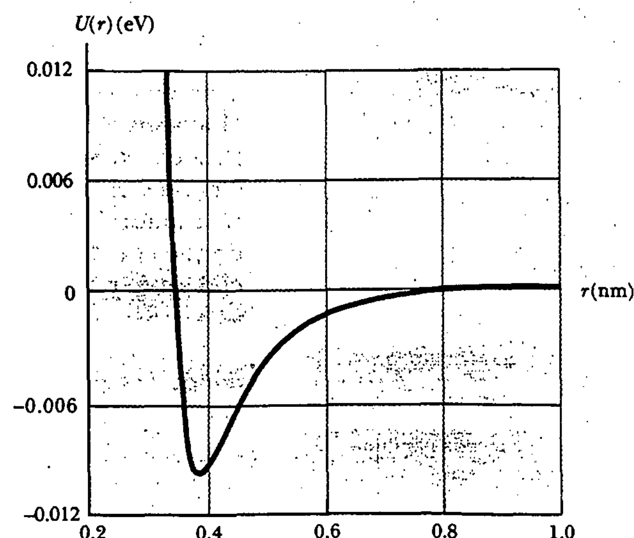


Figura 43.8 Energía potencial *versus* distancia de separación internuclear para dos átomos de argón enlazados por la interacción de van der Waals.

Esto es equivalente a la posición de fuerza neta cero. Resolviendo para la posición de equilibrio r_{eq} se encuentra en

$$r_{eq} = 2^{1/6}\sigma$$

que para el argón es 0.382 nm.

Cuando se aplica fuerza mediante un MFA, el enlace se rompe en el punto para el cual la fuerza es un máximo. Puesto que la fuerza es $F = -dU/dr$, la máxima fuerza atractiva ocurre en $d^2U/dr^2 = 0$. Se calcula

$$\frac{d^2U(r)}{dr^2} = \frac{4\epsilon}{\sigma^2}\left[156\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{14} - 42\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{8}\right] = 0$$

y se encuentra que $r_{ruptura} = 0.423$ nm, lo cual corresponde a una fuerza de 7.33×10^{-2} eV/nm = 11.7 pN. Una ménsula con una constante de resorte de 0.12 N/m se combaría casi 0.1 nm con esta fuerza. Usando técnicas similares, Grandbois y colaboradores[1] encontraron que el enlace covalente silicio-carbono se rompe con una fuerza de casi 2 nN y que el enlace azufre-carbono se rompe con una fuerza de aproximadamente 1.4 nN.

Un análisis completo de un experimento con MFA también incluiría la energía potencial de la ménsula combada.[2] Sin embargo, el análisis simplificado de la ruptura de enlace para un sistema modelo sugiere cómo se pueden aplicar las técnicas de MFA para sistemas macromoleculares más complejos e importantes.

LA ENERGÍA Y ESPECTROS DE MOLÉCULAS

Como en el caso de los átomos, la estructura y propiedades de moléculas pueden estudiarse al examinar la radiación que emiten o absorben. Antes de describir estos procesos es importante entender las distintas maneras en que puede excitarse una molécula.

Considere una molécula individual en la fase gaseosa. La energía de la molécula puede dividirse en cuatro categorías: 1) energía electrónica, debida a interacciones entre los electrones y núcleos de las moléculas; 2) energía traslacional, la cual se debe al movimiento del centro de masa de la molécula a través del espacio; 3) energía rotacional, debida a la rotación de la molécula alrededor de su centro de masa, y 4) energía vibratoria, consecuencia de la vibración de los átomos constituyentes de la molécula:

Energía total de una molécula

$$E = E_{el} + E_{tras} + E_{rot} + E_{vib}$$

La energía electrónica de una molécula es muy compleja ya que incluye la interacción de muchas partículas cargadas; sin embargo, se han desarrollado algunas técnicas para aproximar sus valores. Puesto que la energía traslacional no se relaciona con la estructura interna, esta energía molecular no es importante al interpretar los espectros moleculares.

Movimiento rotacional de una molécula

Considere la rotación de una molécula alrededor de su centro de masa, limitando el análisis al caso diatómico (Fig. 43.9a), pero observando que las mismas ideas pueden extenderse a moléculas poliatómicas. Una molécula diatómica alineada a lo largo del eje x sólo tiene dos grados de libertad rotacionales, lo que corresponde a rotaciones alrededor de los ejes y y z. Si ω es la frecuencia angular de rotación alrededor de uno de estos ejes, la energía cinética rotacional de la molécula en torno a dicho eje se puede expresar en la forma

$$E_{rot} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \quad \textbf{(43.2)}$$

donde I es el momento de inercia de la molécula, dado por

Momento de inercia para una molécula diatómica

$$I = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)r^2 = \mu r^2 \quad \textbf{(43.3)}$$

[1] M. Grandbois, M. Beyer, M. Rief, H. Clausen-Schaumann y H. Gaub, "How Strong Is a Covalent Bond?" *Science* 283:1727-1730, 1999.

[2] Para mayores detalles véase B. Shapiro y H. Qian, "A Quantitative Analysis of Single Protein-Ligand Complex Separation with the Atomic Force Microscope", *Biophys. Chem.* 67:211-219, 1997.

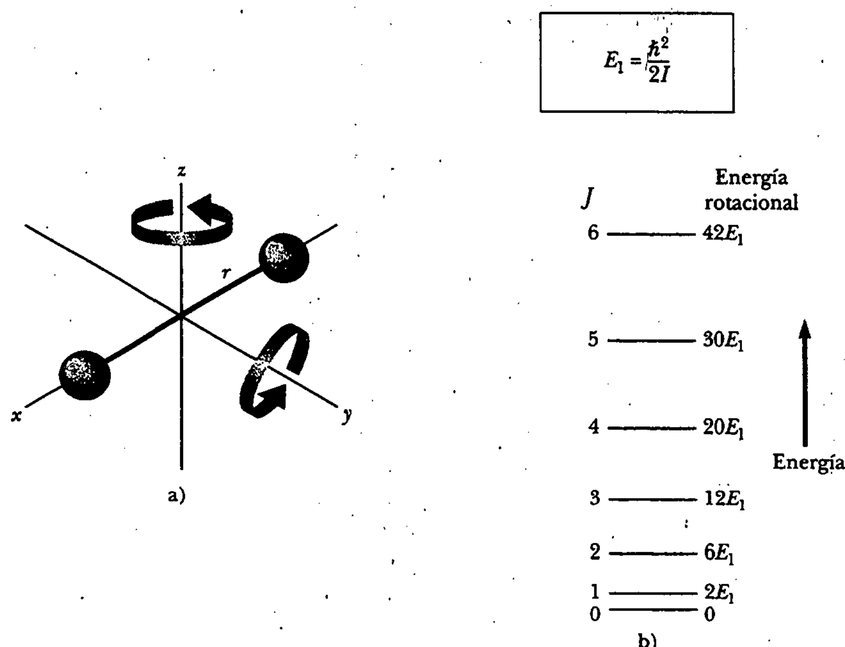


Figura 43.9 a) Una molécula diatómica orientada a lo largo del eje *x* tiene dos grados de libertad rotacional, los que corresponden a rotaciones alrededor de los ejes *y* y *z*. b) Energías rotacionales permitidas de una molécula diatómica calculada con la ecuación 43.6.

donde m_1 y m_2 son las masas de los átomos que forman la molécula, r es la separación atómica y μ es la **masa reducida** de la molécula:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \textbf{(43.4)}$$

Masa reducida de una molécula

La magnitud del *momentum* angular de la molécula es $I\omega$, la cual, de manera clásica, puede tener cualquier valor. La mecánica cuántica, sin embargo, restringe el *momentum* angular a los valores

$$I\omega = \sqrt{J(J+1)}\hbar \qquad J = 0, 1, 2, \ldots \quad \textbf{(43.5)}$$

Valores permitidos del *momentum* angular rotacional

donde J es un entero conocido como **número cuántico rotacional**. Al sustituir la ecuación 43.5 en la 43.2 se obtiene una expresión para los valores permitidos de la energía cinética rotacional:

$$E_{\text{rot}} = \tfrac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2I}(I\omega)^2 = \frac{\left(\sqrt{J(J+1)}\hbar\right)^2}{2I}$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) \qquad J = 0, 1, 2, \ldots \quad \textbf{(43.6)}$$

Valores permitidos de la energía rotacional

Así, se ve que **la energía rotacional de la molécula está cuantizada y depende de su momento de inercia**. Las energías rotacionales permitidas de una molécula diatómica se grafican en la figura 43.9b.

Para la mayor parte de las moléculas, las transiciones entre niveles de energía rotacionales adyacentes resulta en radiación que se encuentra en el intervalo de frecuencias de las microondas ($f \sim 10^{11}$ Hz). Cuando una molécula absorbe un fotón de microondas, la molécula salta de un nivel de energía rotacional inferior a uno su-

TABLA 43.1 Diversas transiciones rotacionales de la molécula de CO

Transición rotacional	Longitud de onda del fotón absorbido (m)	Frecuencia del fotón absorbido (Hz)
$J = 0 \rightarrow J = 1$	2.60×10^{-3}	1.15×10^{11}
$J = 1 \rightarrow J = 2$	1.30×10^{-3}	2.30×10^{11}
$J = 2 \rightarrow J = 3$	8.77×10^{-4}	3.46×10^{11}
$J = 3 \rightarrow J = 4$	6.50×10^{-4}	4.61×10^{11}

Tomado de G. M. Barrows, *The Structure of Molecules*, Nueva York, W. A. Benjamin, 1963.

perior. Las transiciones rotacionales permitidas de moléculas lineales se regulan mediante la regla de selección $\Delta J = \pm 1$. Es decir, una línea de absorción en el espectro de microondas de una molécula lineal corresponde a una separación de energía igual a $E_J - E_{J-1}$. De acuerdo con la ecuación 43.6, se observa que las transiciones permitidas están dadas por la condición

Separación entre niveles rotacionales adyacentes

$$\Delta E = E_J - E_{J-1} = \frac{\hbar^2}{2I}[J(J+1) - (J-1)J]$$

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{I}J = \frac{h^2}{4\pi^2 I}J \qquad \textbf{(43.7)}$$

donde J es el número cuántico rotacional del estado de energía más alto. Porque $\Delta E = hf$, donde f es la frecuencia del fotón absorbido, se ve que la frecuencia permitida de la transición $J = 0$ a $J = 1$ es $f_1 = h/4\pi^2 I$. La frecuencia correspondiente a la transición $J = 1$ a $J = 2$ es $2f_1$, y así sucesivamente. Tales predicciones concuerdan muy bien con las frecuencias observadas.

Las longitudes de onda y frecuencias para el espectro de absorción de microondas de la molécula de monóxido de carbono están dadas en la tabla 43.1. A partir de estos datos pueden evaluarse el momento de inercia y la longitud del enlace de la molécula.

EJEMPLO 43.[illegible] Rotación de la molécula de CO

La transición rotacional de $J = 0$ a $J = 1$ de la molécula de CO ocurre a 1.15×10^{11} Hz. a) Emplee esta información para calcular el momento de inercia de la molécula.

Solución De acuerdo con la ecuación 43.7, se ve que la diferencia de energía entre los niveles rotacionales $J = 0$ y $J = 1$ es $h^2/4\pi^2 I$. Igualando dicho valor de ΔE con la energía del fotón absorbido se tiene

$$\Delta E = \frac{h^2}{4\pi^2 I} = hf$$

Resolviendo para I se obtiene

$$I = \frac{h}{4\pi^2 f} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{4\pi^2(1.15 \times 10^{11}\,\text{s}^{-1})}$$
$$= 1.46 \times 10^{-46}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

b) Calcule la longitud del enlace de la molécula.

Solución La ecuación 43.3 sirve para calcular la longitud del enlace, aunque primero es necesario conocer el valor de la masa reducida μ de la molécula de CO:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(12\,\text{u})(16\,\text{u})}{12\,\text{u} + 16\,\text{u}} = 6.86\,\text{u}$$
$$= (6.86\,\text{u})\left(1.66 \times 10^{-27}\,\frac{\text{kg}}{\text{u}}\right) = 1.14 \times 10^{-26}\,\text{kg}$$

donde se ha usado el hecho de que $1\,\text{u} = 1.66 \times 10^{-27}$ kg.

Al sustituir este valor y el resultado del inciso a) en la ecuación 43.3, y resolviendo para r se obtiene

$$r = \sqrt{\frac{I}{\mu}} = \sqrt{\frac{1.46 \times 10^{-46}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}{1.14 \times 10^{-26}\,\text{kg}}}$$
$$= 1.13 \times 10^{-10}\,\text{m} = 0.113\,\text{nm}$$

Movimiento vibratorio de moléculas

Una molécula es una estructura flexible en la cual los átomos están ligados entre sí, por lo que se pueden considerar "resortes efectivos" (véase la Fig. 13.11). Si se perturba, la molécula puede vibrar y adquirir energía vibratoria. Este movimiento vibratorio y la energía vibratoria correspondiente pueden alterarse si la molécula se expone a ondas electromagnéticas de la frecuencia adecuada.

Considere la molécula diatómica que se muestra en la figura 43.10a. Su resorte efectivo tiene una constante de fuerza k. Una gráfica de la energía potencial *versus* la separación atómica para una de estas moléculas se dibuja en la figura 43.10b, donde r_0 es la separación atómica de equilibrio. De acuerdo con la mecánica clásica, la frecuencia de vibración para este sistema es

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \tag{43.8}$$

donde de nuevo μ es la masa reducida dada por la ecuación 43.4.

Como se esperaba, la solución de la mecánica cuántica a este sistema muestra que la energía está cuantizada, con energías permitidas

$$E_{\text{vib}} = (v + \tfrac{1}{2})hf \qquad v = 0, 1, 2,... \tag{43.9}$$

donde v es un entero llamado **número cuántico vibratorio**. Si el sistema permanece en el estado de vibración más bajo, para el cual $v = 0$, su energía de punto cero es $\frac{1}{2}hf$. La vibración acompañante —el *movimiento del punto cero*— siempre está presente, incluso si la molécula no está excitada. En el primer estado excitado, $v = 1$ y la energía vibratoria es $\frac{3}{2}hf$, y así sucesivamente.

Sustituyendo la ecuación 43.8 en la 43.9 se obtiene la siguiente expresión para la energía vibratoria:

$$E_{\text{vib}} = (v + \tfrac{1}{2})\frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad v = 0, 1, 2, ... \tag{43.10}$$

Valores permitidos de energía vibratoria

La regla de selección para las transiciones vibratorias permitidas es $\Delta v = \pm 1$. De acuerdo con la ecuación 43.10 se ve que la diferencia de energía entre cualesquiera dos niveles vibratorios sucesivos es

$$\Delta E_{\text{vib}} = \frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} = hf \tag{43.11}$$

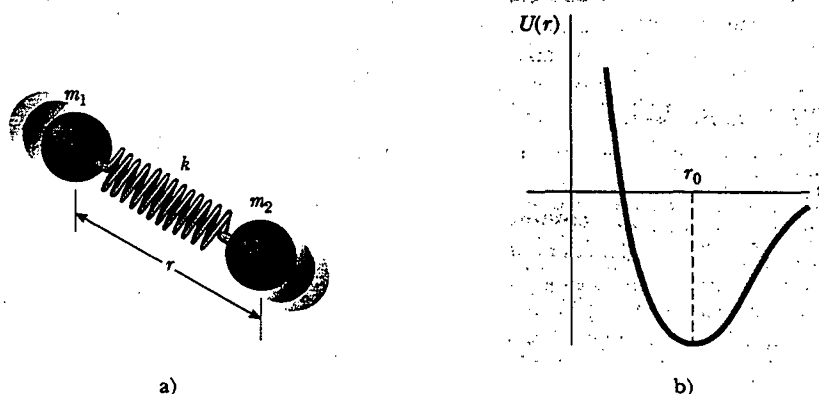


Figura 43.10 a) Modelo de resorte efectivo para una molécula diatómica. La vibración está a lo largo del eje molecular. b) Gráfica de la energía potencial de una molécula diatómica *versus* la distancia de separación atómica, donde r_0 es la distancia de separación de equilibrio de los átomos.

TABLA 43.2 Frecuencia de fotón y constante de fuerza de resorte efectivo para la transición $v = 0$ a $v = 1$ en algunas moléculas diatómicas

Molécula	Frecuencia de fotón (Hz)	Constante de fuerza k (N/m)
HF	8.72×10^{13}	970
HCl	8.66×10^{13}	480
HBr	7.68×10^{13}	410
HI	6.69×10^{13}	320
CO	6.42×10^{13}	1 850
NO	5.63×10^{13}	1 530

Tomado de G. M. Barrows, *The Structure of Molecules*, Nueva York, W. A. Benjamin, 1963. El valor k fue calculado a partir de la ecuación 43.11.

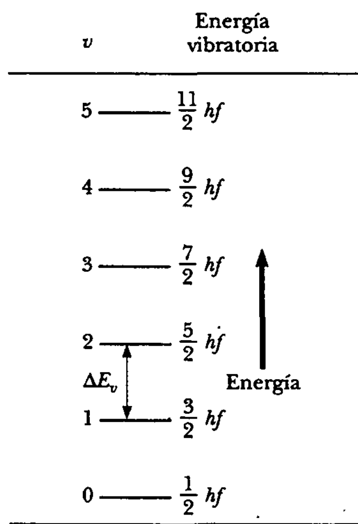


Figura 43.11 Energías vibratorias permitidas de una molécula diatómica, donde f es la frecuencia de vibración de la molécula, dada por la ecuación 43.8. Los espaciamientos entre niveles vibratorios adyacentes son iguales si la molécula se comporta como un oscilador armónico.

Las energías vibratorias de una molécula diatómica se grafican en la figura 43.11. A temperaturas ordinarias la mayor parte de las moléculas tienen energías vibratorias correspondientes al estado $v = 0$, debido a que el espaciamiento entre estados vibratorios es mucho más grande que k_BT. Las moléculas no están excitadas térmicamente en los estados superiores.

Las transiciones entre niveles vibratorios son causadas por absorción en la región infrarroja del espectro, es decir, una molécula salta de un nivel de energía vibratoria menor a uno mayor absorbiendo un fotón que tiene una frecuencia en el intervalo infrarrojo. Las frecuencias de fotón correspondientes a la transición $v = 0$ a $v = 1$ de diversas moléculas diatómicas se registran en la tabla 43.2, junto con las constantes de fuerza de los resortes efectivos que mantienen unidas a las moléculas. Los últimos valores fueron calculados empleando la ecuación 43.11. La "rigidez" de un enlace puede medirse por medio del tamaño de la constante de fuerza efectiva.

EJEMPLO 43. Vibración de la molécula de CO

La frecuencia del fotón que causa la transición $v = 0$ a $v = 1$ en la molécula de CO es 6.42×10^{13} Hz. a) Calcule la constante de fuerza k para esa molécula.

Solución Se puede usar la ecuación 43.11 y el valor $\mu = 1.14 \times 10^{-26}$ kg que se calculó en el ejemplo 43.1b:

$$\frac{h}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} = hf$$

$$k = 4\pi^2 \mu f^2$$

$$= 4\pi^2(1.14 \times 10^{-26}\ \text{kg})(6.42 \times 10^{13}\ \text{s}^{-1})^2$$

$$= 1.85 \times 10^3\ \text{N/m}$$

b) ¿Cuál es la máxima amplitud de vibración de esta molécula en el estado vibratorio $v = 0$?

Solución La energía potencial máxima almacenada en la molécula es $\frac{1}{2}kA^2$, donde A es la amplitud de vibración. Igualando tal energía máxima con la energía vibratoria dada por la ecuación 43.10, con $v = 0$ se obtiene

$$\tfrac{1}{2}kA^2 = \frac{h}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Sustituyendo el valor $k = 1.85 \times 10^3$ N/m y el valor para μ del inciso a) se obtiene

$$A^2 = \frac{h}{2\pi k}\sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$= \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{2\pi(1.85 \times 10^3\ \text{N/m})}\sqrt{\frac{1.85 \times 10^3\ \text{N/m}}{1.14 \times 10^{-26}\ \text{kg}}}$$

$$= 2.30 \times 10^{-23}\ \text{m}^2$$

De manera que

$$A = 4.79 \times 10^{-12}\ \text{m} = 4.79 \times 10^{-3}\ \text{nm}$$

Al comparar este resultado con la longitud del enlace de 0.113 nm que se calculó en el ejemplo 43.1b, se ve que la amplitud de vibración es casi 4% de la longitud del enlace. Por tanto, observe que la espectroscopia infrarroja proporciona información útil acerca de las propiedades elásticas (resistencias del enlace) de las moléculas.

Espectros moleculares

En general, una molécula gira y vibra de manera simultánea. En una primera aproximación estos movimientos son independientes uno del otro, por lo que la energía total de la molécula es la suma de las ecuaciones 43.6 y 43.9:

$$E = (v + \tfrac{1}{2})hf + \frac{\hbar^2}{2I}J(J+1) \qquad \textbf{(43.12)}$$

Los niveles de energía de cualquier molécula pueden calcularse a partir de esta expresión, y cada nivel es indicado mediante dos números cuánticos, J y v. A partir de estos cálculos se construye un diagrama de niveles de energía, como el que se muestra en la figura 43.12a. Para cada valor permitido del número cuántico vibratorio v hay un conjunto completo de niveles rotacionales que corresponden a $J = 0, 1, 2,...$ Note que la separación de energía entre niveles rotacionales sucesivos es mucho más pequeña que la separación entre niveles vibratorios sucesivos. Como se destacó con anterioridad, la mayor parte de las moléculas a temperaturas ordinarias están en el

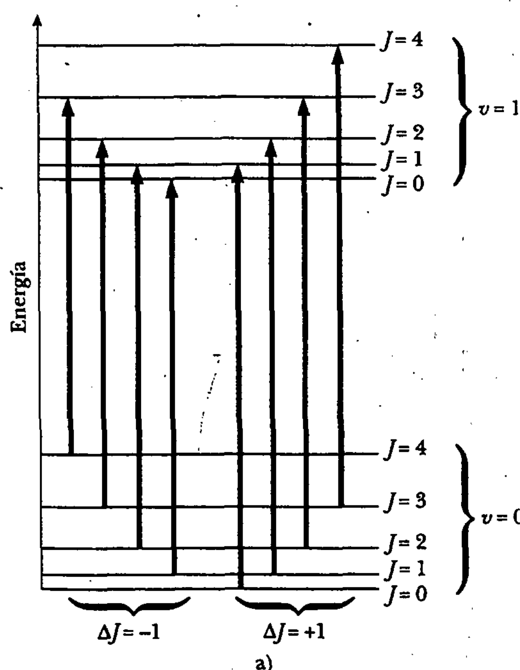


Figura 43.12 a) Transiciones absorbentes entre los estados vibratorios $v = 0$ y $v = 1$ de una molécula diatómica. Las transiciones obedecen la regla de selección $\Delta J = \pm 1$ y caen en dos secuencias, la de $\Delta J = +1$ y la de $\Delta J = -1$. Las energías de transición están dadas por la ecuación 43.12. b) Líneas esperadas en el espectro de absorción de una molécula. Las líneas a la derecha de la marca central corresponden a transiciones en las cuales J cambia por +1; las líneas a la izquierda de la marca central corresponden a transiciones para las cuales J cambia por −1. Estas mismas líneas aparecen en el espectro de emisión.

estado vibratorio $v = 0$; dichas moléculas pueden estar en varios estados rotacionales, como se muestra en la figura 43.12a.

Cuando una molécula absorbe un fotón infrarrojo, el número cuántico vibratorio v aumenta en una unidad en tanto que el número cuántico rotacional J aumenta o disminuye en una unidad, como se percibe en la figura 43.12. Así, el espectro de absorción molecular se compone de dos grupos de líneas: el grupo a la derecha del centro satisface las reglas de selección $\Delta J = 1$ y $\Delta v = 1$, y el grupo a la izquierda del centro satisface[3] las reglas de selección $\Delta J = -1$ y $\Delta v = 1$.

Las energías de los fotones absorbidos se calculan a partir de la ecuación 43.12:

$$\Delta E = hf + \frac{\hbar^2}{I}(J+1) \qquad J = 0, 1, 2, \ldots (\Delta J = +1) \tag{43.13}$$

$$\Delta E = hf + \frac{\hbar^2}{I}J \qquad J = 1, 2, 3, \ldots (\Delta J = -1) \tag{43.14}$$

donde ahora J es el número cuántico rotacional del estado *inicial*. La ecuación 43.13 genera la serie de líneas igualmente espaciadas *superiores* a la frecuencia f, en tanto la ecuación 43.14 genera la serie *inferior* a esta frecuencia. Las líneas adyacentes están separadas en frecuencia por la unidad fundamental $\hbar/2\pi I$; lo anterior se observa al sustituir hf por ΔE en la ecuación 43.7 y establecer $J = 1$. La figura 43.12b muestra las frecuencias esperadas en el espectro de absorción de la molécula; estas mismas frecuencias aparecen en el espectro de emisión.

El espectro de absorción de la molécula HCl mostrado en la figura 43.13 sigue muy bien este patrón y refuerza el modelo. Sin embargo, es patente una peculiaridad: cada línea se divide en un doblete. Este doblamiento ocurre debido a que dos isótopos del cloro (véase la sección 1.2) estuvieron presentes en la muestra usada para obtener este espectro. Ya que los isótopos tienen diferentes masas, las dos moléculas de HCl tienen diferentes valores de I.

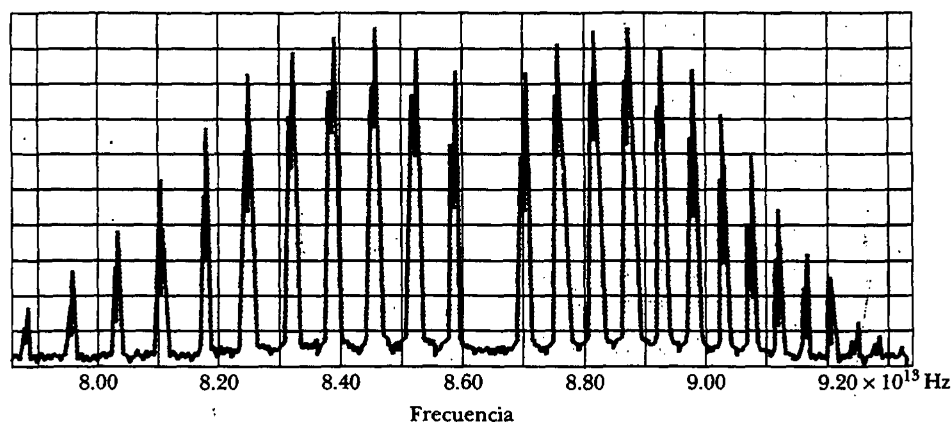


Figura 43.13 Espectro de absorción de la molécula HCl. Cada línea se divide en un doblete porque la muestra contiene dos isótopos de cloro que poseen diferente masa y, en consecuencia, distintos momentos de inercia.

[3] La regla de selección $\Delta J = \pm 1$ implica que el fotón que provoca la transición es una partícula de espín 1 con número cuántico de espín $s = 1$. Por tanto, esta regla de selección describe la conservación del *momentum* angular del sistema que consta de la molécula y el fotón.

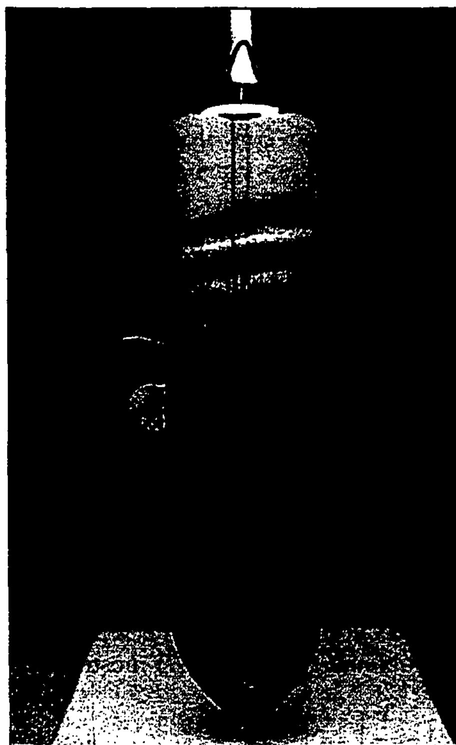
Pregunta sorpresa 43.2

Usando la figura 43.13 estime el momento de inercia de una molécula de HCl.

Para moléculas de CO_2 la mayor parte de las líneas de absorción están en la porción infrarroja del espectro. Por tanto, la luz visible del Sol no es absorbida por el CO_2 atmosférico sino que, en vez de eso, golpea la superficie de la Tierra, calentándola. A su vez, la Tierra emite radiación infrarroja. Estas ondas IR son absorbidas por el CO_2 en el aire en lugar de radiarlo hacia el espacio. En consecuencia, el CO_2 atmosférico actúa como una válvula de una vía para la energía proveniente del Sol. El quemado de combustibles fósiles puede añadir más CO_2 a la atmósfera. Muchos científicos temen que lleguen a ocasionarse cambios climáticos sustanciales a partir de un "efecto invernadero" mejorado.

43.3 ENLACES EN SÓLIDOS

Un sólido cristalino se compone de un gran número de átomos dispuestos en una configuración regular, formando una estructura periódica (en otras palabras, repetitiva). Dos de los mecanismos de enlace descritos en la sección 43.1 —iónico y covalente— también son apropiados al describir los enlaces en sólidos. Por ejemplo, los iones del cristal NaCl están enlazados iónicamente, como ya se había señalado, y los átomos de carbono en el cristal al que se le denomina diamante forman enlaces covalentes entre ellos. El enlace metálico descrito al final de la presente sección es responsable de la cohesión del cobre, plata, sodio y otros metales sólidos.



a)



b)

Sólidos cristalinos. a) Un cilindro de silicio (Si) cristalino casi puro, de aproximadamente 25 cm de largo. Tales cristales son cortados en obleas y procesados para hacer varios dispositivos semiconductores. b) Aunque este cristal se llama "diamante" Herkimer, es cuarzo natural (SiO_2), uno de los minerales más comunes en la Tierra. Los cristales de cuarzo se emplean para hacer lentes y prismas para cámaras especiales y en ciertas aplicaciones de electrónica. *(Charles D. Winters)*

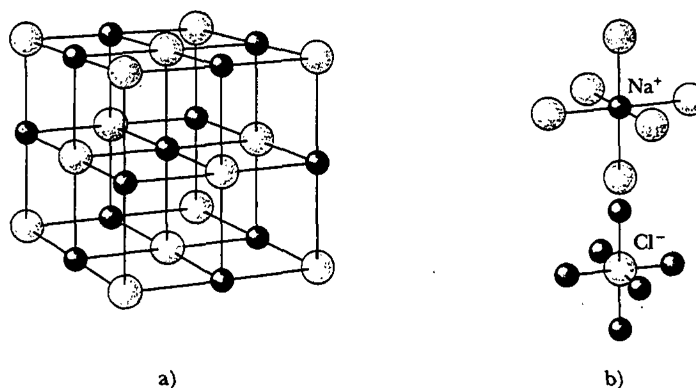


Figura 43.14 a) Estructura cristalina de NaCl. b) Cada ion de sodio positivo (esferas rojas) está rodeado por seis iones de cloro negativos (esferas azules), y cada ion de cloro está rodeado por seis iones de sodio.

Sólidos iónicos

Muchos cristales se forman mediante enlace iónico, donde la interacción dominante entre los iones es la interacción de Coulomb. Considere el cristal de NaCl en la figura 43.14. Cada ion Na^+ tiene seis iones Cl^- vecinos más cercanos, y cada ion Cl^- tiene seis iones Na^+ vecinos más cercanos. Cada ion Na^+ es atraído hacia sus seis vecinos Cl^-. La energía potencial atractiva correspondiente es $-6k_e e^2/r$, donde k_e es la constante de Coulomb y r es la distancia de separación entre cada Na^+ y Cl^-. Además, hay 12 iones Na^+ a una distancia de $\sqrt{2}\,r$ desde el Na^+, y estos 12 iones positivos ejercen fuerzas repulsivas más débiles sobre el Na^+ central. Asimismo, más allá de estos 12 iones de Na^+ están más iones Cl^- que ejercen una fuerza atractiva, etcétera. El efecto neto de todas estas interacciones es una energía potencial eléctrica negativa resultante

$$U_{\text{atractiva}} = -\alpha k_e \frac{e^2}{r} \tag{43.15}$$

donde α es un número puro conocido como **constante de Madelung**. El valor de α depende sólo de la estructura del cristal. Por ejemplo, $\alpha = 1.747\,6$ para la estructura del NaCl. Cuando los iones constituyentes de un cristal se acercan unos a otros, existe una fuerza repulsiva debida a las fuerzas electrostáticas y al principio de exclusión, como se estudió en la sección 43.1. Es así tomando en cuenta el término de energía potencial B/r^m en la ecuación 43.1. Por tanto, la energía potencial total es

$$U_{\text{total}} = -\alpha k_e \frac{e^2}{r} + \frac{B}{r^m} \tag{43.16}$$

donde m en esta expresión es algún pequeño entero.

Una gráfica de la energía potencial total contra la separación de iones se muestra en la figura 43.15. La energía potencial tiene su valor mínimo U_0 en la separación de equilibrio, cuando $r = r_0$. Se deja como un problema (problema 47) mostrar que

$$U_0 = -\alpha k_e \frac{e^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \tag{43.17}$$

Dicha energía mínima U_0 se conoce como **energía cohesiva iónica** del sólido, y su valor absoluto representa la energía requerida para separar el sólido en una colección de iones aislados positivos y negativos. Su valor para NaCl es −7.84 eV por ion par.

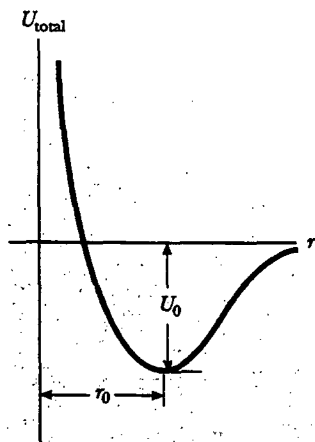


Figura 43.15 Energía potencial total *versus* distancia de separación de iones para un sólido iónico, donde U_0 es la energía cohesiva iónica y r_0 es la distancia de separación de equilibrio entre iones.

Con el fin de calcular la **energía cohesiva atómica**, la cual es la energía de enlace relativa a la energía de los átomos neutros, se deben sumar 5.14 eV al valor de la energía cohesiva iónica para explicar la transición desde Na^+ a Na, y se deben sustraer 3.61 eV para convertir el Cl^- en Cl. Por ende, la energía cohesiva atómica del NaCl es

$$-7.84\ \text{eV} + 5.14\ \text{eV} - 3.61\ \text{eV} = -6.31\ \text{eV}$$

Los cristales iónicos tienen las siguientes propiedades generales:

Propiedades de sólidos iónicos

- Forman cristales relativamente estables y duros. (El punto de fusión del NaCl es 801°C.)
- Son pobres conductores eléctricos debido a que no contienen electrones libres.
- Tienen altas temperaturas de evaporación.
- Son transparentes a la radiación visible pero absorben intensamente en la región infrarroja. La luz visible no es absorbida porque las capas formadas por los electrones en los sólidos iónicos están enlazadas en forma tan estrecha que la radiación visible no posee suficiente energía para estimular a los electrones a la siguiente capa permitida. La radiación infrarroja se absorbe con intensidad porque las vibraciones de los iones tienen una frecuencia resonante natural en la región infrarroja de baja energía.
- Muchos son bastante solubles en líquidos polares, como el agua. Las moléculas solventes polares ejercen una fuerza eléctrica atractiva sobre los iones cargados, la cual rompe los enlaces iónicos y disuelve el sólido.

Sólidos covalentes

El carbono sólido, en forma de diamante, es un cristal cuyos átomos están enlazados covalentemente. Ya que el carbono atómico tiene la configuración electrónica $1s^2 2s^2 2p^2$, le faltan cuatro electrones para llenar su capa $n = 2$, la cual puede acomodar ocho electrones. Por tanto, dos átomos de carbono tienen una intensa atracción entre sí, con una energía cohesiva de 7.37 eV.

En la estructura del diamante cada átomo de carbono está enlazado covalentemente a otros cuatro átomos de carbono localizados en las cuatro esquinas de un cubo, como se muestra en la figura 43.16a. Para formar dicha configuración de en-

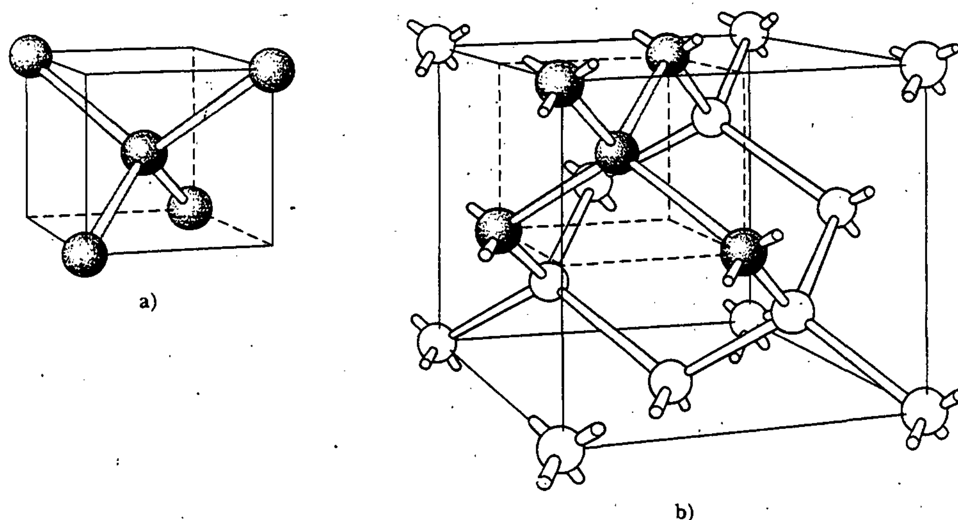


Figura 43.16 a) Cada átomo de carbono en un cristal de diamante está enlazado en forma covalente a otros cuatro átomos de carbono y forma una estructura tetraédrica. b) La estructura cristalina del diamante que muestra el arreglo de enlace tetraédrico.



Figura 43.17 Representación de computadora de una "buckyball", abreviatura para la molécula buckminsterfullerene. Estas estructuras moleculares casi esféricas que parecen balones de sóccer fueron llamadas así en honor de R. Buckminster Fuller, el inventor de la cúpula geodésica. Esta forma de carbono, C_{60}, fue descubierta por astrofísicos mientras investigaban el gas de carbono que existe entre las estrellas. Los científicos están estudiando activamente las propiedades y usos potenciales de la buckminsterfullerene y moléculas relacionadas. *(Charles D. Winters)*

laces, un electrón $2s$ de cada átomo debe ascenderse a la subcapa $2p$ de modo que la configuración electrónica se convierta en $1s^2 2s^1 2p^3$, la cual corresponde a una subcapa p medio llena. La promoción de este electrón requiere una energía de casi 4 eV.

La estructura cristalina del diamante se muestra en la figura 43.16b. Observe que cada átomo de carbono forma enlaces covalentes con cuatro átomos vecinos cercanos. La estructura básica del diamante se denomina tetraédrica (cada átomo de carbono está en el centro de un tetraedro regular), y el ángulo entre los enlaces es de 109.5°. Otros cristales, como el silicio y el germanio, tienen estructuras similares.

Cuando los átomos de carbono forman una gran estructura hueca, la combinación recibe el nombre de **buckminsterfullerene** (buckyballs), en honor al famoso arquitecto que inventó la cúpula geodésica. La forma única de esta molécula (Fig. 43.17) proporciona una "caja" para mantener a otros átomos o moléculas. Estructuras relacionadas, llamadas "buckytubes" debido a sus largos y estrechos arreglos cilíndricos de átomos de carbono, proporcionan la base para materiales sumamente fuertes, aunque muy ligeros.

Las energías cohesivas atómicas de algunos sólidos covalentes se proporcionan en la tabla 43.3. Las grandes energías explican la dureza de los sólidos covalentes. El diamante es particularmente duro y tiene un punto de fusión muy alto (alrededor de 4 000 K). Los sólidos enlazados en forma covalente con frecuencia son muy duros, tienen grandes energías de enlace y altos puntos de fusión, además de ser buenos aislantes eléctricos.

Sólidos metálicos

Los enlaces metálicos son por lo general más débiles que los enlaces iónicos o covalentes. Los electrones exteriores en los átomos de un metal son relativamente libres de moverse a través del material, y el número de tales electrones móviles en un metal es grande. La estructura del metal puede verse como un "mar" o "gas" de electrones casi libres que rodean una rejilla de iones positivos (Fig. 43.18). El mecanismo de enlace en un metal es la fuerza atractiva entre los iones positivos y el gas de electrones. Los metales tienen una energía cohesiva en el intervalo de 1 a 3 eV, el cual es más pequeño que las energías cohesivas de sólidos iónicos o covalentes.

La luz interactúa intensamente con los electrones libres en los metales. Por esa razón, la luz visible se absorbe y vuelve a emitirse muy cerca de la superficie de un metal, lo cual explica la naturaleza brillante de las superficies metálicas. (Compare esto con la transparencia del vidrio mostrado en la fotografía al comienzo del capítulo. La luz visible no interactúa de manera intensa con los electrones del vidrio.) Además de la alta conductividad eléctrica de los metales producidos por electrones libres, la naturaleza no direccional del enlace metálico permite que muchos diferentes tipos de átomos metálicos se disuelvan en un metal anfitrión en cantidades varia-

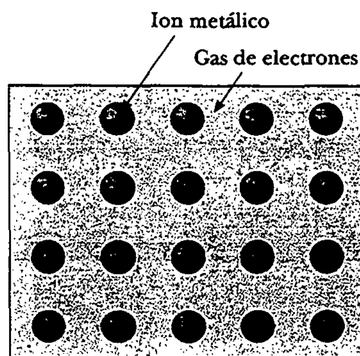


Figura 43.18 Diagrama altamente esquemático de un metal. El área azul representa el gas de electrones y los círculos anaranjados representan los iones metálicos positivos.

Tab[illegible] Sólidos covalentes

Sólido	Energía cohesiva (eV)
C (diamante)	7.37
Si	4.63
Ge	3.85
InAs	5.70
SiC	6.15
ZnS	6.32
CuCl	9.24

bles. Las *soluciones sólidas* resultantes, o *aleaciones*, pueden ser diseñadas para tener propiedades particulares, como resistencia a la tensión, ductilidad, conductividad eléctrica y térmica, así como resistencia a la corrosión. Tales propiedades suelen ser controlables y en muchos casos predecibles.

TEORÍA DE BANDAS DE SÓLIDOS

Si dos átomos idénticos se apartan una distancia considerable, no interactúan y sus niveles de energía electrónica pueden considerarse como los de átomos aislados. Suponga que los dos átomos son sodio, cada uno con un electrón solitario $3s$ que tiene una energía específica bien definida. Cuando los dos átomos de sodio se juntan, sus órbitas exteriores empiezan a traslaparse. Cuando la interacción entre ellos es suficientemente intensa, se forman[4] dos niveles de energía $3s$, como se muestra en la figura 43.19a.

Cuando un gran número de átomos se juntan para formar un sólido, ocurre un fenómeno similar. Conforme los átomos se acercan unos a otros los diversos niveles de energía atómica empiezan a dividirse. Esta división de niveles para seis átomos muy próximos se muestra en la figura 43.19b. En tal caso hay seis niveles de energía que corresponden a seis diferentes combinaciones de funciones de onda de átomos aislados. Puesto que el intervalo de valores de energía en los cuales se dividen los niveles que se traslapan no es una función del número de átomos que se combinan, los niveles de energía de los seis átomos están espaciados de manera más próxima que los niveles de dos átomos.

Si el argumento anterior se extiende al gran número de átomos que se encuentran en los sólidos (del orden de 10^{23} átomos por cm^3), se obtiene un gran número de niveles con un espaciamiento tan próximo que es posible considerarlos como una **banda** continua de niveles de energía, como está mostrado en la figura 43.19c. En el caso del sodio, se acostumbra referirse a la distribución continua de niveles de energía permitidos como banda $3s$, ya que la banda se origina a partir de los niveles $3s$ de átomos de sodio individuales.

En general, un sólido cristalino tiene un número considerable de bandas de energía permitidas que proviene de los diferentes niveles de energía atómicos. La figura 43.20 muestra las bandas de energía permitidas del sodio. Advierta que la energía de desdoblamiento, denominada *bandas de energía prohibidas*, ocurre entre las bandas permitidas.

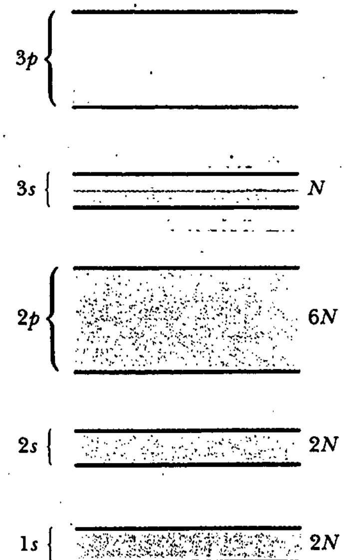


Figura 43.20 Bandas de energía del sodio. Advierta la energía de desdoblamiento (regiones blancas) entre las bandas permitidas; los electrones no pueden ocupar estados que se encuentran en estos espacios prohibidos. Lo azul representa bandas de energía ocupadas por los 11 electrones del sodio cuando el átomo está en su estado base. Lo amarillo representa bandas de energía que están vacías.

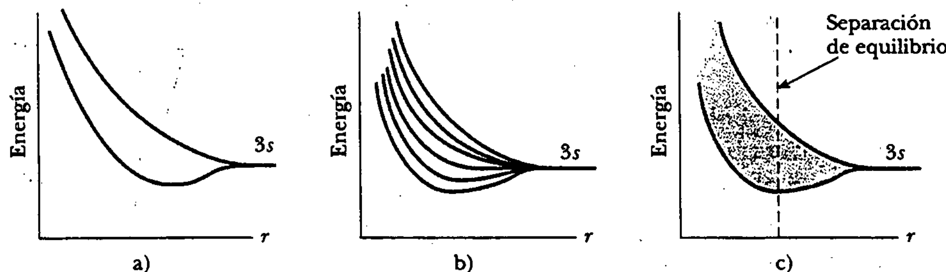


Figura 43.19 a) División de los niveles $3s$ cuando dos átomos de sodio se acercan. b) División de los niveles $3s$ cuando seis átomos de sodio se acercan. c) Formación de una banda $3s$ cuando un gran número de átomos de sodio se ensamblan para formar un sólido.

[4] Existe una división en los niveles de energía debido a las dos maneras de las funciones de onda de los átomos que se pueden combinar. Si ψ_1 y ψ_2 son dos funciones de onda, el estado $\psi_1 + \psi_2$ resulta en una mayor densidad de electrones entre los dos núcleos atómicos, mientras que el estado $\psi_1 - \psi_2$ tiene cero probabilidad de encontrar al electrón entre los dos núcleos. Como el electrón está enlazado más apretadamente (tiene menor energía) cuando está entre los átomos, el estado $\psi_1 + \psi_2$ tiene una energía un poco menor que el estado $\psi_1 - \psi_2$. En consecuencia, existen dos niveles de energía ligeramente separados para el electrón cuando los dos átomos se acercan.

Para N átomos combinados en cualquier sólido cada banda de energía tiene N niveles de energía. En el caso del sodio las bandas $1s$, $2s$ y $2p$ están llenas, como se indica por medio de las áreas de color azul en la figura 43.20. Un nivel de energía cuyo *momentum* angular orbital es ℓ puede contener $2(2\ell + 1)$ electrones. El factor 2 surge de las dos posibles orientaciones del espín del electrón, en tanto que el factor $2\ell + 1$ corresponde al número de posibles orientaciones del *momentum* angular orbital. La capacidad de cada banda para un sistema de N átomos es $2(2\ell + 1)N$ electrones. Por tanto, las bandas $1s$ y $2s$ contienen cada una $2N$ electrones ($\ell = 0$), y la banda $2p$ contiene $6N$ electrones ($\ell = 1$). Ya que el sodio sólo tiene un electrón $3s$ y hay un total de N átomos en el sólido, la banda $3s$ contiene sólo N electrones y sólo está medio llena, como está indicado mediante la coloración azul-amarillo en la figura 43.20. La banda $3p$, la cual se encuentra arriba de la banda $3s$, está vacía por completo (totalmente amarilla en la figura).

En la sección 43.6 se analizará cómo la teoría de bandas permite comprender el comportamiento de conductores, aislantes y semiconductores.

TEORÍA DE ELECTRONES LIBRES DE METALES

En la sección 27.3 se describió una teoría clásica de la conducción eléctrica en metales, lo que condujo a la ley de Ohm. De acuerdo con esta teoría, un metal puede ser modelado como un clásico gas de conducción de electrones que se mueve a través de un enrejado (fijo) de núcleos de ion. Aunque tal teoría predice la forma funcional correcta de la ley de Ohm, no predice los valores correctos de las conductividades eléctrica y térmica.

En esta sección se estudia la teoría de electrones libres de metales, la cual remedia las deficiencias del modelo clásico al tomar en cuenta la naturaleza ondulatoria de los electrones. En dicho modelo uno imagina que los electrones de la capa exterior tienen libertad de movimiento a través del metal, pero están atrapados dentro de una cavidad formada por la superficie del metal.

La física estadística puede aplicarse a una colección de partículas con el propósito de relacionar las propiedades microscópicas con las macroscópicas. En el caso de los electrones es necesario recurrir a la *estadística cuántica*, con el requisito de que cada estado del sistema puede ser ocupado por sólo un electrón. Cada estado se especifica por medio de un conjunto de números cuánticos. La probabilidad de que un estado particular con energía E sea ocupado por uno de los electrones en un sólido está dada por

Función de distribución Fermi-Dirac

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_BT} + 1} \quad (43.18)$$

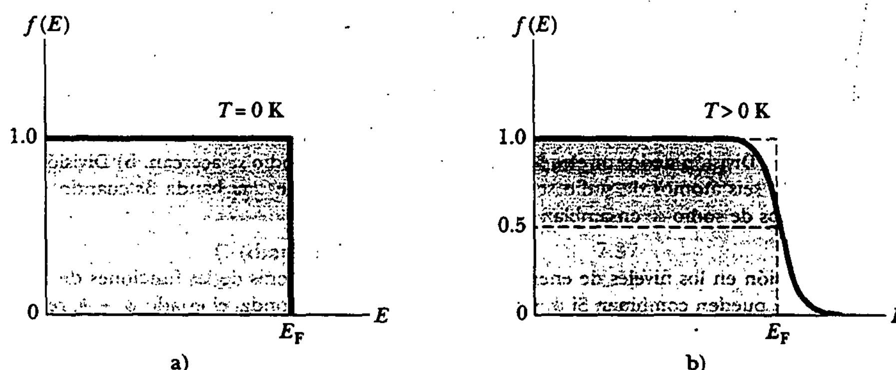


Figura 43.21 Gráfica de la función de distribución Fermi-Dirac $f(E)$ *versus* energía en a) $T = 0$ K y b) $T > 0$ K. La energía E_F es la energía de Fermi.

donde $f(E)$ se denomina **función de distribución Fermi-Dirac** y E_F recibe el nombre de **energía de Fermi**. Se trata de una expresión que describe cómo se distribuye la energía entre los electrones. Una gráfica de $f(E)$ *versus* E en $T = 0$ K se muestra en la figura 43.21a. Observe que $f(E) = 1$ para $E < E_F$, y $f(E) = 0$ para $E > E_F$. Es decir, en 0 K, todos los estados cuyas energías están debajo de la energía de Fermi están ocupados, en tanto que todos los estados con energías mayores que la energía de Fermi están vacíos. Una gráfica de $f(E)$ *versus* E a cierta temperatura $T > 0$ K se observa en la figura 43.21b. La curva muestra que conforme aumenta T, la distribución se redondea ligeramente, con los estados entre E y $E - k_BT$ perdiendo población y los estados entre E y $E + k_BT$ ganando población. La energía de Fermi E_F también depende de la temperatura, pero en los metales la dependencia es débil.

Pregunta sorpresa 43.3

En la figura 43.21b, ¿cuál es el significado físico de la parte curva de la gráfica cerca de E_F?

Pregunta sorpresa 43.4

¿Dónde está el nivel de energía Fermi en la figura 43.20?

En la sección 41.4 se encontró que si una partícula de masa m está confinada a moverse en una caja unidimensional de longitud L, los estados permitidos tienen niveles de energía cuantizados:

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Las funciones de onda para estos estados permitidos son ondas estacionarias dadas por $\psi = A\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)$, la cual satisface la condición de frontera $\psi = 0$ en $x = 0$ y $x = L$.

Suponga a continuación una pieza de metal con la forma de un cubo sólido de lado L y volumen L^3, y enfóquese sobre un electrón que tiene libertad de moverse en todas direcciones en este volumen. En dicho modelo se requiere que $\psi(x, y, z) = 0$ en las fronteras. Este requisito resulta en soluciones que son ondas estacionarias en tres dimensiones. Puede mostrarse (véase el problema 30) que la energía para uno de tales electrones es

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m_eL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \qquad \textbf{(43.19)}$$

donde m_e es la masa del electrón y n_x, n_y y n_z son números cuánticos. También en este caso los niveles de energía están cuantizados, y cada uno está caracterizado por este conjunto de tres números cuánticos (uno para cada grado de libertad) y el número cuántico de espín m_s. Por ejemplo, el estado base correspondiente a $n_x = n_y = n_z = 1$ tiene una energía igual a $3\hbar^2\pi^2/2m_eL^2$.

Si los números cuánticos se tratan como variables continuas, el número de estados permitidos por unidad de volumen que tienen energías entre E y $E + dE$ es

$$g(E)\,dE = CE^{1/2}dE \qquad \textbf{(43.20)}$$

donde

$$C = \frac{8\sqrt{2}\,\pi m_e^{3/2}}{h^3} \qquad \textbf{(43.21)}$$

La función $g(E) = CE^{1/2}$ recibe el nombre de **función de densidad de estados**.

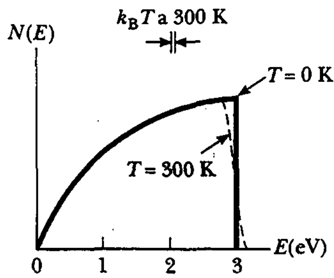


Figura 43.22 Gráfica de distribución electrónica contra energía en un metal a $T = 0$ K (líneas rojizas curva y vertical) y $T = 300$ K (líneas rojiza curva y discontinua negra). La energía de Fermi E_F es 3 eV.

En un metal en equilibrio térmico, el número de electrones por unidad de volumen que tienen energía entre E y $E + dE$ es igual al producto $f(E)g(E)\ dE$:

$$N(E)\,dE = C\frac{E^{1/2}dE}{e^{(E-E_F)/k_BT}+1} \tag{43.22}$$

Una gráfica de $N(E)$ *versus* E para dos temperaturas se proporciona en la figura 43.22.

Si n_e es el número total de electrones por unidad de volumen, se requiere que

$$n_e = \int_0^\infty N(E)\,dE = C\int_0^\infty \frac{E^{1/2}dE}{e^{(E-E_F)/k_BT}+1} \tag{43.23}$$

Se puede usar esta condición para calcular la energía de Fermi. En $T = 0$ K, la función de distribución de Fermi $f(E) = 1$ para $E < E_F$, y $f(E) = 0$ para $E > E_F$. Por tanto, en $T = 0$ K, la ecuación 43.23 se convierte en

$$n_e = C\int_0^{E_F} E^{1/2}dE = \tfrac{2}{3}CE_F{}^{3/2} \tag{43.24}$$

La sustitución de la ecuación 43.21 en la 43.24 produce, para la energía de Fermi a 0 K

Energía de Fermi a $T = 0$ K

$$E_F(0) = \frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3n_e}{8\pi}\right)^{2/3} \tag{43.25}$$

De acuerdo con este resultado, E_F muestra un aumento gradual con la concentración de electrones crecientes. Lo anterior se esperaba, pues los electrones llenan los estados de energía disponibles, dos electrones por estado, en concordancia con el principio de exclusión, hasta la energía de Fermi.

El orden de magnitud de la energía de Fermi para metales es aproximadamente de 5 eV. Valores representativos de varios metales están proporcionados en la tabla 43.4, junto con valores para la rapidez de Fermi v_F de los electrones, la cual es la rapidez de los electrones cuando su energía es igual a la energía de Fermi. La rapidez de Fermi está definida por la relación

$$\tfrac{1}{2}m_e v_F{}^2 \equiv E_F \tag{43.26}$$

La tabla 43.4 también enumera la temperatura de Fermi, T_F, definida por la relación

$$k_BT_F \equiv E_F \tag{43.27}$$

Se deja como una tarea (problema 29) mostrar que la energía promedio de un electrón libre en un metal a 0 K es

$$E_{av} = \tfrac{3}{5}E_F \tag{43.28}$$

En resumen, un metal se puede considerar como un sistema que contiene un número muy grande de niveles de energía disponibles para los electrones libres, los cuales llenan tales niveles en concordancia con el principio de exclusión, empezando con $E = 0$ y terminando con E_F. En $T = 0$ K todos los niveles debajo de la energía de Fermi están llenos y todos los niveles arriba de la energía de Fermi están vacíos. Aunque los niveles son discretos, están tan próximos que los electrones tienen una distribución de energía casi continua. A 300 K, una muy pequeña fracción de los electrones libres se excitan por arriba de la energía de Fermi.

TABLA 43.4 Valores calculados de varios parámetros para metales a 300 K basados en la teoría de electrones libres

Metal	Concentración de electrones (m^{-3})	Energía de Fermi (eV)	Rapidez de Fermi (m/s)	Temperatura de Fermi (K)
Li	4.70×10^{28}	4.72	1.29×10^{6}	5.48×10^{4}
Na	2.65×10^{28}	3.23	1.07×10^{6}	3.75×10^{4}
K	1.40×10^{28}	2.12	0.86×10^{6}	2.46×10^{4}
Cu	8.49×10^{28}	7.05	1.57×10^{6}	8.12×10^{4}
Ag	5.85×10^{28}	5.48	1.39×10^{6}	6.36×10^{4}
Au	5.90×10^{28}	5.53	1.39×10^{6}	6.41×10^{4}

EJEMPLO 43.3 La energía de Fermi del oro

Cada átomo de oro (Au) contribuye con un electrón libre para el metal. Calcule a) la energía de Fermi, b) la rapidez de Fermi y c) la temperatura de Fermi para el oro.

Solución a) La concentración de electrones libres en el oro es $5.90 \times 10^{28}\ m^{-3}$ (véase la tabla 43.4). La sustitución de este valor en la ecuación 43.25 produce

$$E_F(0) = \frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3n_e}{8\pi}\right)^{2/3}$$
$$= \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ J \cdot s)^2}{2(9.11 \times 10^{-31}\ kg)}\left(\frac{3 \times 5.90 \times 10^{28} m^{-3}}{8\pi}\right)^{2/3}$$
$$= 8.85 \times 10^{-19} J = 5.53\ eV$$

b) La rapidez de Fermi se define mediante la ecuación 43.26, $\frac{1}{2}m_e v_F^2 = E_F$. Resolviendo para v_F se obtiene

$$v_F = \left(\frac{2E_F}{m_e}\right)^{1/2} = \left(\frac{2 \times 8.85 \times 10^{-19}\ J}{9.11 \times 10^{-31}\ kg}\right)^{1/2}$$
$$= 1.39 \times 10^6\ m/s$$

c) La temperatura de Fermi está definida por la ecuación 43.27:

$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = \frac{8.85 \times 10^{-19}\ J}{1.38 \times 10^{-23}\ J/K} = 6.41 \times 10^4\ K$$

Así, ¡la temperatura de un gas de partículas clásicas tendría que elevarse hasta cerca de 64 000 K para tener una energía promedio por partícula igual a la energía de Fermi a 0 K!

43.6 CONDUCCIÓN ELÉCTRICA EN METALES, AISLANTES Y SEMICONDUCTORES

Los buenos conductores eléctricos contienen una alta densidad de portadores de carga, en tanto que la densidad de portadores de carga en aislantes es casi cero. Los semiconductores son una clase de materiales tecnológicamente importantes en los cuales las densidades de portadores de carga son intermedias entre las de los aislantes y las de los conductores. En esta sección se estudian los mecanismos de conducción en las tres clases de materiales. Las enormes variaciones en sus conductividades eléctricas pueden explicarse en función de las bandas de energía.

Metales

Si un material conducirá electricidad, los portadores de carga en el material deben tener libertad de moverse en respuesta a un campo eléctrico aplicado. Considere los electrones en un metal como los portadores de carga que se investigarán. El movimiento de los electrones en respuesta a un campo eléctrico representa un aumento en la energía correspondiente a la energía cinética adicional de los electrones en movimiento. En consecuencia, para responder a un campo eléctrico, los electrones deben moverse hacia un estado de energía más alto sobre un diagrama de

niveles de energía. Para que puedan hacer esto, los estados de energía deben estar disponibles sobre los estados llenos en la banda. Si una banda queda completamente llena con electrones, ninguno de tales estados está disponible, y los electrones no pueden responder al campo eléctrico mediante movimiento.

En la sección 43.4 se describió la configuración de la banda de energía para el estado base del sodio metálico. Es posible obtener una mejor comprensión de cómo actúan los metales como conductores eléctricos considerando una banda medio llena, como la banda 3*s* del sodio.

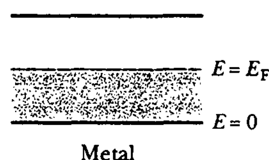


Figura 43.23 Banda medio llena de un metal, un conductor eléctrico. En $T = 0$ K, la energía de Fermi se encuentra en la mitad de la banda.

La figura 43.23 presenta una banda medio llena en un metal en $T = 0$ K, donde la región azul representa niveles llenos con electrones. Debido a que los electrones obedecen la estadística de Fermi-Dirac, todos los niveles debajo de la energía de Fermi están llenos con electrones y todos los niveles arriba de la energía d[illegible]mi están vacíos. La energía de Fermi se encuentra en la mitad de la banda, como se estudió para el sodio en la pregunta sorpresa 43.4. A temperaturas un poco mayores de 0 K, algunos electrones son excitados térmicamente hasta niveles arriba de E_F, pero todo lo que ocurre es un cambio menor respecto del caso de 0 K. Sin embargo, **si una diferencia de potencial se aplica al metal, los electrones que tienen energías cercanas a la de Fermi sólo requieren una pequeña cantidad de energía adicional del campo aplicado para alcanzar estados cercanos de energía vacíos sobre la energía de Fermi.** Así, los electrones en un metal experimentan sólo un pequeño campo aplicado y tienen libertad para moverse porque hay muchos estados vacíos disponibles cerca de los estados de energía ocupados. A partir de dicho alto grado de movilidad de los electrones se concluye que los metales son excelentes conductores eléctricos.

Aislantes

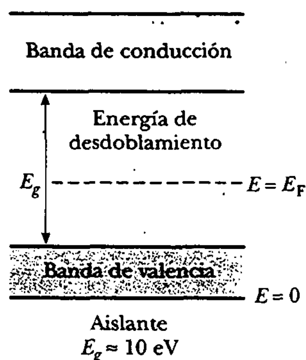


Figura 43.24 Un aislante eléctrico a $T = 0$ K tiene una banda de valencia llena y una banda de conducción vacía. El nivel de Fermi se encuentra en algún lugar entre estas bandas, en la región conocida como energía de desdoblamiento.

Considere a continuación las dos bandas de energía más exteriores de un material, donde la banda inferior está llena con electrones y la superior vacía a 0 K (Fig. 43.24). Es común referirse a la energía de separación entre la banda más exterior llena y la banda vacía adyacente como la **energía de desdoblamiento** E_g del material. La energía de desdoblamiento para un aislante es grande ($\approx$ 10 eV). La banda inferior llena se conoce como **banda de valencia,** y la banda superior vacía es la **banda de conducción.** La energía de Fermi está en algún lugar en la energía de desdoblamiento, como se observa en la figura 43.24. A 300 K (temperatura ambiente), $k_B T = 0.025$ eV, la cual es mucho más pequeña que la energía de desdoblamiento en un aislante. A estas temperaturas la distribución de Fermi-Dirac predice que muy pocos electrones se excitan térmicamente en la banda de conducción [illegible] aunque un aislante tiene muchos estados vacíos que pueden aceptar e[illegible] su banda de conducción, hay tan pocos electrones ocupando estos e[illegible] la conductividad eléctrica total es muy pequeña, lo que da como resulta[illegible]a alta resistividad de los aislantes.

Semiconductores

Los semiconductores tienen la estructura de banda de un aislante y una energía de desdoblamiento del orden de 1 eV. La tabla 43.5 muestra la energía de desdoblamiento para algunos materiales representativos. En $T = 0$ K, todos los electrones en estos materiales están en la banda de valencia y no hay energía disponible para excitarlos a través de la brecha de energía de desdoblamiento. De este modo, los semiconductores son pobres conductores a temperaturas muy bajas. Sin embargo, a temperaturas ordinarias la situación es bastante diferente. Por ejemplo, la conductividad del silicio a temperatura ambiente es de aproximadamente $1.6 \times 10^{-3}\ (\Omega \cdot m)^{-1}$.

La estructura de bandas de un semiconductor se muestra en la figura 43.25. Ya que el nivel de Fermi se localiza cerca de la parte media del hueco para un semi-

TABLA 43.5 Valores de la energía de desdoblamiento para algunos semiconductores*

	E_g (eV)	
Cristal	**0 K**	**300 K**
Si	1.17	1.14
Ge	0.744	0.67
InP	1.42	1.35
GaP	2.32	2.26
GaAs	1.52	1.43
CdS	2.582	2.42
CdTe	1.607	1.45
ZnO	3.436	3.2
ZnS	3.91	3.6

* Tomado de C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 5a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1976.

conductor y en virtud de que E_g es pequeña, un número apreciable de electrones son excitados térmicamente desde la banda de valencia hasta la banda de conducción. Hay muchos niveles vacíos en la banda de conducción; por tanto, la aplicación de una pequeña diferencia de potencial puede incrementar sin dificultad la energía de los electrones en la banda de conducción, originando una corriente moderada. Dado que para los electrones el ser excitados térmicamente a través de la angosta brecha es más probable a temperaturas más altas, la conductividad de semiconductores aumenta muy rápido con la temperatura. Ello contrasta claramente con la conductividad de los metales, la cual disminuye en forma lenta con la temperatura, como se describe al final de la sección 27.3.

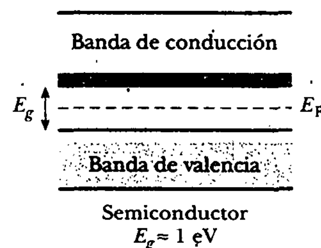


Figura 43.25 Estructura de bandas de un semiconductor a temperatura ordinaria ($T \approx 300$ K). La energía de desdoblamiento es mucho menor que en un aislante, y muchos electrones ocupan estados en la banda de conducción.

Los portadores de carga en un semiconductor pueden ser negativos, positivos o ambos. Cuando un electrón se mueve desde la banda de valencia hacia la banda de conducción, deja atrás un sitio vacío, que recibe el nombre de **hoyo**, en la de otro modo banda de valencia llena. Este hoyo (sitio deficiente de electrones) aparece como una carga positiva $+e$ y actúa como un portador de carga en el sentido de que un electrón libre de un sitio cercano puede transferirlo dentro de un hoyo. Siempre que un electrón se comporta así, crea un nuevo hoyo en el sitio que abandonó. Por ende, el efecto neto puede verse como el hoyo emigrando a través del material en la dirección opuesta a la dirección del movimiento del electrón.

En un cristal puro que contiene sólo un elemento o compuesto, hay igual número de hoyos y electrones de conducción. Tales combinaciones de cargas reciben el nombre de **pares electrón-hoyo**, y un semiconductor puro que contiene dichos pares se denomina **semiconductor intrínseco** (Fig. 43.26). En presencia de un campo eléctrico externo, los hoyos se mueven en la dirección del campo y los electrones de conducción se mueven en la dirección opuesta al campo.

Semiconductores dopados

Cuando se añaden impurezas a semiconductores, tanto su estructura de bandas como su resistividad se modifican. El proceso de agregar impurezas, denominado **dopaje**, es importante al fabricar dispositivos y semiconductores que tengan regiones bien definidas de diferente conductividad. Por ejemplo, cuando un átomo que contiene cinco electrones en la capa exterior, como el arsénico, se añade a un semiconductor, cuatro de los electrones participan en los enlaces covalentes con átomos del semiconductor y uno queda afuera (Fig. 43.27a). El electrón adicional está casi libre de su átomo padre y tiene un nivel de energía que se encuentra dentro de la

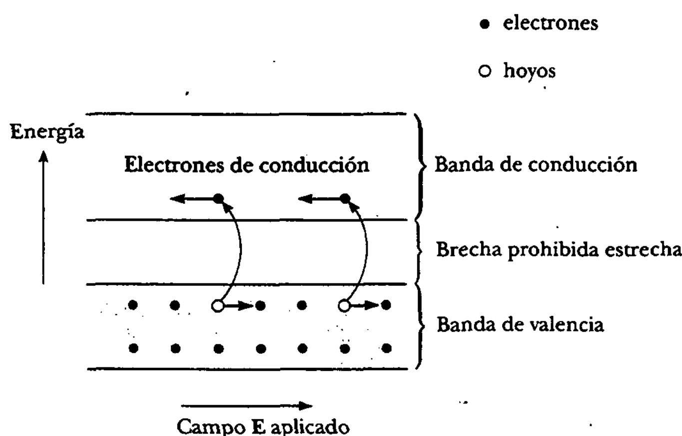


Figura 43.26 Movimiento de cargas (hoyos y electrones) en un semiconductor intrínseco. Los electrones se mueven en la dirección opuesta a la dirección del campo eléctrico externo, y los hoyos se mueven en la dirección del campo.

energía de desdoblamiento, justo debajo de la banda de conducción (Fig. 43.27b). El átomo pentavalente dona en efecto un electrón a la estructura y, en consecuencia, se conoce como **átomo donador**. Puesto que los espaciamientos entre los niveles de energía del electrón del átomo donador y la parte inferior de la banda de conducción son muy pequeños (por lo común, casi de 0.05 eV), sólo una pequeña cantidad de excitación térmica se necesita para hacer que este electrón se mueva dentro de la banda de conducción. (Recuerde que la energía promedio de un electrón a temperatura ambiente es aproximadamente $k_BT \approx 0.025$ eV.) Los semiconductores dopados con átomos donadores reciben el nombre de **semiconductores tipo *n*** ya que la mayoría de los portadores de cargas son electrones, los cuales tienen carga ***n***egativa.

Si el semiconductor se dopa con átomos que contienen tres electrones en la capa exterior, como indio y aluminio, los tres forman enlaces covalentes con sus átomos semiconductores vecinos, dejando una deficiencia —un hoyo— de electrón,

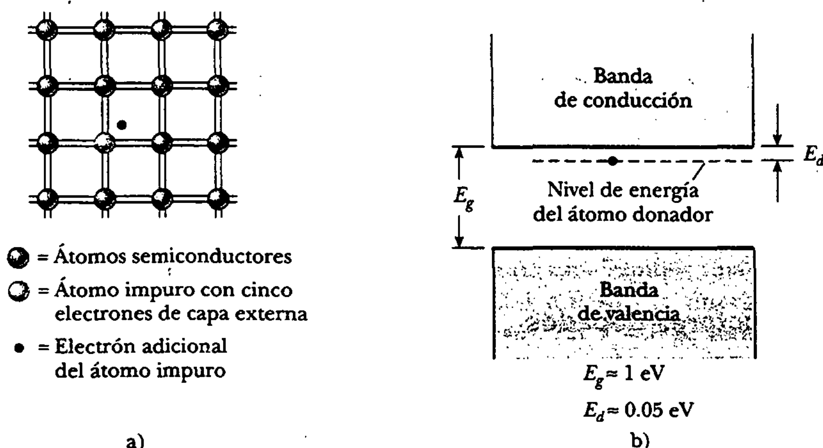


Figura 43.27 a) Representación bidimensional de un semiconductor (gris) que contiene un átomo impuro (amarillo-naranja), el cual tiene cinco electrones de capa exterior. Cada línea doble representa un enlace covalente. b) Diagrama de banda de energía para un semiconductor en el cual el electrón casi libre del átomo impuro se encuentra en la brecha prohibida, justo abajo del fondo de la banda de conducción.

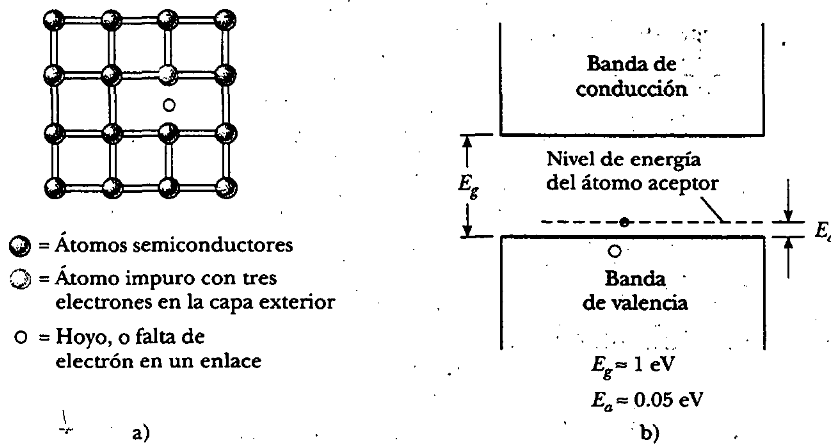


Figura 43.28 a) Representación bidimensional de un semiconductor (gris) que contiene un átomo impuro (amarillo-naranja) con tres electrones en su capa externa. b) Diagrama de energía-banda para un semiconductor, en el cual el hoyo que resulta del átomo impuro trivalente está en la abertura prohibida, justo arriba de la parte superior de la banda de valencia.

donde estaría el cuarto enlace si un electrón de átomo impuro estuviese disponible para formarlo (Fig. 43.28a). El nivel de energía de este hoyo está dentro de la energía de desdoblamiento, justo arriba de la banda de valencia, como se muestra en la figura 43.28b. Un electrón de la banda de valencia tiene suficiente energía a temperatura ambiente para llenar estos niveles de impurezas, dejando detrás un hoyo en la banda de valencia. Ya que un átomo trivalente acepta en efecto un electrón de la banda de valencia, estas impurezas se conocen como **átomos aceptores.** Un semiconductor dopado con impurezas trivalentes (aceptor) se conoce como **semiconductor tipo *p*** porque la mayoría de los portadores de carga son hoyos con carga *p*ositiva.

Cuando la conducción en un semiconductor es el resultado de impurezas de aceptor o donador, el material se denomina **semiconductor extrínseco.** El intervalo normal de densidades de dopaje para semiconductores extrínsecos es de 10^{13} a 10^{19} cm^{-3}, mientras la densidad de electrones en un semiconductor común es de aproximadamente 10^{21} cm^{-3}.

Sección opcional

DISPOSITIVOS SEMICONDUCTORES

La unión *p-n*

Considere ahora qué pasa cuando un semiconductor tipo *p* se une a un semiconductor tipo *n* para formar una unión *p-n*. La unión se compone de las tres distintas regiones mostradas en la figura 43.29a: una región *p*, una región de agotamiento y una región *n*.

La región de agotamiento, que se extiende varios micrómetros a cualquiera de los lados del centro de la unión, puede considerarse como si surgiera cuando las dos mitades de la unión se juntan. Los electrones donadores móviles del lado *n* más cercano a la unión (área azul oscuro en la figura 43.29a) se difunden hacia el lado *p*, dejando atrás iones positivos inmóviles. Al mismo tiempo los hoyos del lado *p* más cercanos a la unión se difunden hacia el lado *n* y dejan atrás una región (área café en la Fig. 43.29a) de iones negativos fijos.

La región de agotamiento contiene un campo eléctrico interno (el cual surge de las cargas de los iones fijos) del orden de 10^4 a 10^6 V/cm (véase la Fig. 43.29b).

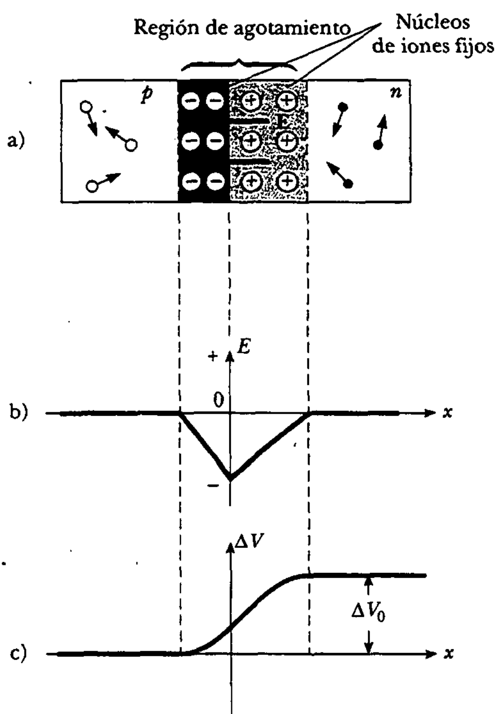


Figura 43.29 a) Arreglo físico de una unión *p-n*. b) Campo eléctrico interno *versus* x para la unión *p-n*. c) Diferencia de potencial eléctrico interno ΔV *versus* x para la unión *p-n*. La diferencia de potencial ΔV_0 representa la diferencia de potencial a través de la unión en ausencia de un campo eléctrico aplicado.

Este campo barre cargas móviles fuera de esta región. Por tanto, la región de agotamiento se llama así porque carece de portadores de carga móviles. Este campo eléctrico interno crea una diferencia de potencial interna ΔV_0 que evita la difusión adicional de hoyos y electrones a través de la unión y asegura una corriente cero a través de la unión cuando no se aplica diferencia de potencial.

Quizá el rasgo más notable de la unión *p-n* es su capacidad para pasar corriente en una sola dirección. Esta acción es más fácil de entender en función de la gráfica de diferencia de potencial mostrada en la figura 43.29c. Si un voltaje ΔV se aplica a la unión de tal modo que el lado p esté conectado a la terminal positiva de una fuente de voltaje, como se muestra en la figura 43.30a, la diferencia de potencial interna ΔV_0 a través de la unión está disminuyendo; la disminución resulta en una corriente que aumenta exponencialmente con el voltaje directo creciente, o ***polarización directa***. En la ***polarización inversa*** (donde el lado n de la unión está conectado a la terminal positiva de una fuente de voltaje) la diferencia de potencial interna ΔV_0 se incrementa con la polarización inversa creciente; el aumento origina una corriente inversa muy pequeña que alcanza con rapidez un valor de saturación I_0. La relación corriente-voltaje para un diodo ideal es

$$I = I_0(e^{e\Delta V/k_B T} - 1) \qquad \textbf{(43.29)}$$

donde la primera e es la base del logaritmo natural, la segunda e representa la magnitud de la carga del electrón, k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura en kelvins. La figura 43.30b indica una curva característica $I\Delta V$ de una unión *p-n* real.

Pregunta sorpresa 43.5

¿La unión *p-n* descrita en la figura 43.30 obedece la ley de Ohm?

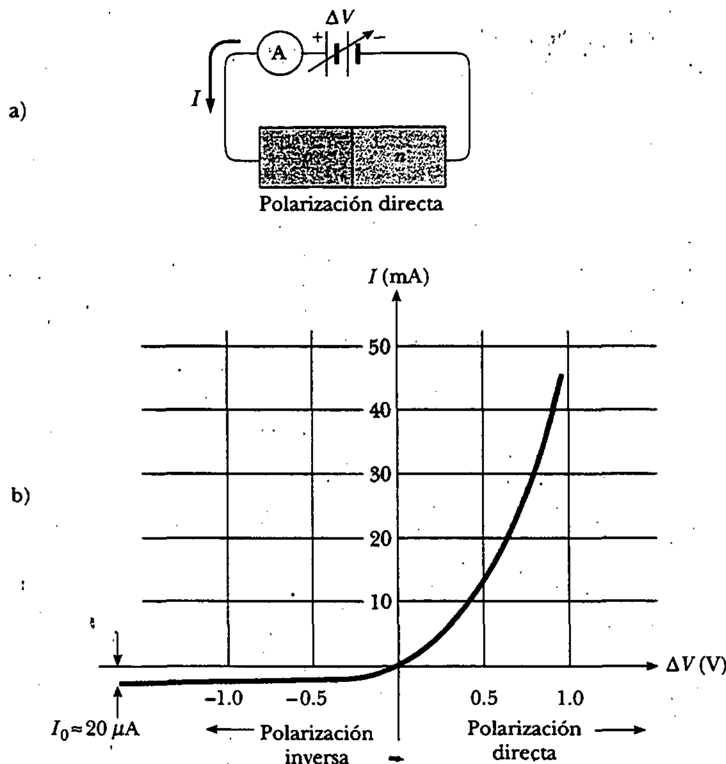


Figura 43.30 a) Esquema de una unión *p-n* bajo polarización directa. b) La curva característica de una unión *p-n* real.

Experimento sorpresa

Apunte un control remoto de televisión a la lente de una videograbadora y grabe durante unos cuantos segundos mientras usted oprime los botones del control remoto. Cuando reproduzca la cinta verá los destellos "invisibles" del control remoto. El dispositivo semiconductor en la videograbadora que percibe la luz que entra a la lente es sensible a los pulsos infrarrojos que salen del control remoto.

Diodos emisores y absorbedores de luz

La emisión y absorción de luz en semiconductores es similar a la emisión y absorción de luz de los átomos gaseosos, excepto que en el análisis de los semiconductores los niveles de energía atómica discretos deben ser sustituidos por bandas. Como se observa en la figura 43.31a, un electrón excitado eléctricamente dentro de la banda de conducción puede recombinarse sin dificultad con un hoyo (especialmente si el electrón se inyecta dentro de una región *p*). Conforme ocurre esta recombinación, se emite un fotón de energía E_g. Los diodos emisores de luz (LED) y los rayos láser semiconductores son ejemplos típicos de dispositivos que usan este fenómeno.

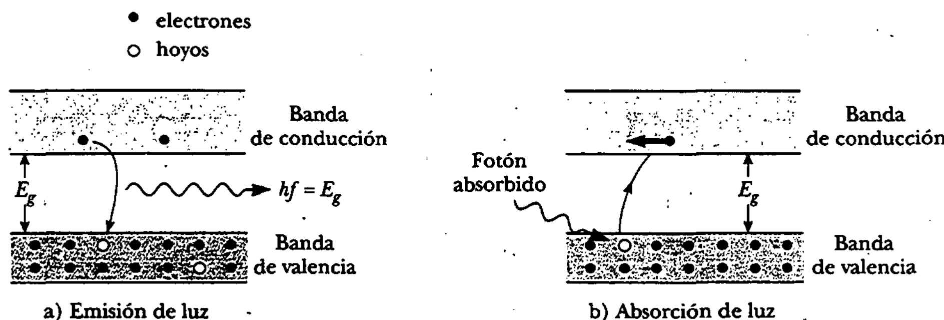


Figura 43.31 a) Emisión de luz a partir de un semiconductor. b) Absorción de luz mediante un semiconductor.



El *Sojourner*, visto aquí recorriendo la superficie de Marte en 1997, usó celdas solares fotovoltaicas para convertir luz solar en electricidad. *(Cortesía de la NASA)*

De manera inversa, un electrón en la banda de valencia puede absorber un fotón de luz y ser promovido a la banda de conducción, dejando un hoyo tras de sí (Fig. 43.31b). Un dispositivo que opera con este principio es la celda solar fotovoltaica.

EJEMPLO 43 ¿Dónde está el control remoto?

Estime la banda de desdoblamiento del semiconductor en el LED infrarrojo de un control remoto de televisión típico.

Solución En el capítulo 34 se aprendió que la longitud de onda de la luz infrarroja va de los 700 nm a 1 mm. Elija un número con el que sea fácil trabajar, como 1 000 nm. (Ésta no es una mala estimación. Los controles remotos por lo general operan en el intervalo de 880 a 950 nm.)

La energía de un fotón está dada por $E = hc/\lambda$, así que la energía de los fotones del control remoto es de aproximadamente 2.0×10^{-19} J = 1.2 eV, lo cual corresponde a una energía de desdoblamiento E_g de más o menos 1.2 eV en el semiconductor del LED.

El transistor de unión

web
Para aprender más acerca de los controles remotos de TV y cientos de otros dispositivos cotidianos visite **www.howstuffworks.com**

La invención del transistor, en 1948, por John Bardeen (1908-1991), Walter Brattain (1902-1987) y William Shockley (1910-1989) revolucionó por completo el mundo de la electrónica. Por este trabajo estos tres hombres compartieron el premio Nobel en 1956. Hacia 1960 el transistor había sustituido al tubo de vacío en muchas aplicaciones electrónicas. La llegada del transistor creó una industria de miles de millones de dólares que produce dispositivos tan populares como los radios portátiles, las calculadoras de bolsillo, computadoras, receptores de televisión y juegos electrónicos.

Una forma del transistor de unión consta de un material semiconductor en el cual una región *n* muy estrecha está en medio de dos regiones *p*. Dicha configuración se denomina **transistor *pnp***. Otra configuración es el **transistor *npn***, el cual se compone de una región *p* en medio de dos regiones *n*. Ya que el funcionamiento de los dos transistores en esencia es el mismo, sólo se describirá al transistor *pnp*. La estructura del transistor *pnp* junto con sus símbolos de circuito se muestra en la figura 43.32. Las regiones exteriores se denominan **emisor** y **colector**, y la estrecha región central se conoce como **base**. La configuración contiene dos uniones: la interfase emisor-base y la interfase colector-base.

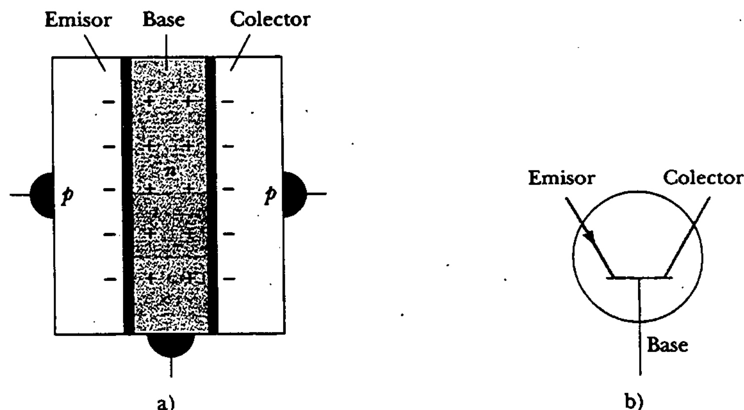


Figura 43.32 a) El transistor *pnp* consta de una región *n* (base) en medio de dos regiones *p* (emisor y colector). b) Símbolo de circuito para el transistor *pnp*.

Suponga que se aplica un voltaje al transistor de modo que el emisor está a un potencial eléctrico más alto que el colector. (Esto se consigue con la batería ΔV_{ec} en la figura 43.33.) Si considera al transistor como dos uniones *p-n* espalda con espalda, se ve que la unión emisor-base está directamente polarizada, y que la unión base-colector está polarizada en forma inversa. El emisor está excesivamente dopado en relación con la base, de modo que casi toda la corriente se compone de hoyos que se mueven a través de la unión emisor-base. La mayor parte de estos hoyos no se recombinan con los electrones en la base debido a que ésta es muy estrecha. En vez de ello, los hoyos se aceleran a través de la unión base-colector polarizada en forma inversa, produciendo la corriente de emisor I_e que aparece en la figura 43.33.

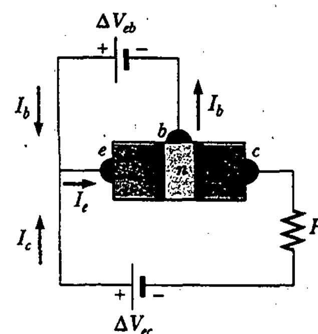


Figura 43.33 Un voltaje de polarización ΔV_{eb} aplicado a la base como se muestra produce una pequeña corriente de base I_b que se usa para controlar la corriente del colector I_c en un transistor *pnp*.

Aunque sólo un pequeño porcentaje de los hoyos se recombina en la base, los que lo hacen limitan la corriente del emisor a un valor pequeño porque los portadores de carga positiva se acumulan en la base y evitan que los hoyos fluyan en ella. Con el objetivo de evitar esta limitación de corriente, una parte de la carga positiva en la base debe extraerse; esto se logra conectando la base a la batería rotulada como ΔV_{eb}, como se muestra en la figura 43.33. Aquellas cargas positivas que no son barridas a través de la unión base-colector salen de la base por medio de esta trayectoria agregada. **Esta corriente de la base I_b es muy pequeña, pero un mínimo cambio en ella puede alterar de manera significativa la corriente del colector I_c.** Si el transistor está polarizado apropiadamente, la corriente del colector (salida) es directamente proporcional a la corriente de la base (entrada), y el transistor actúa como un amplificador de corriente. Esta condición puede escribirse como

$$I_c = \beta I_b$$

donde β, el factor *ganancia de corriente*, por lo general está en el intervalo de 10 a 100.

El transistor puede emplearse para amplificar una señal pequeña. El pequeño voltaje que se va a amplificar se pone en serie con la batería ΔV_{eb}. La señal de entrada produce una pequeña variación en la corriente de la base, lo que produce un gran cambio en la corriente del colector y, consecuentemente, un gran cambio en el voltaje a través del resistor de salida.

El circuito integrado

Inventado en forma independiente por Jack Kilby (n. 1923) en Texas Instruments al final de 1958, y por Robert Noyce (n. 1927) en Fairchild Camera and Instrument a principios de 1959, el circuito integrado ha sido llamado con justicia "la más extraordinaria tecnología que jamás impactara a la humanidad". El primer dispositivo de Kilby se muestra en la figura 43.34. Los circuitos integrados en efecto han iniciado

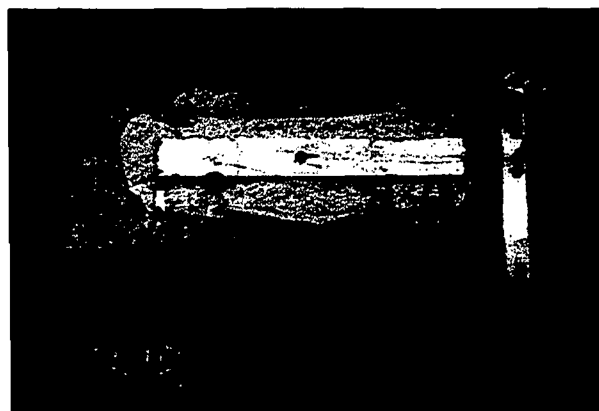


Figura 43.34 El primer circuito integrado de Jack Kilby, probado el 12 de septiembre de 1958. *(Cortesía de Texas Instruments, Inc.)*

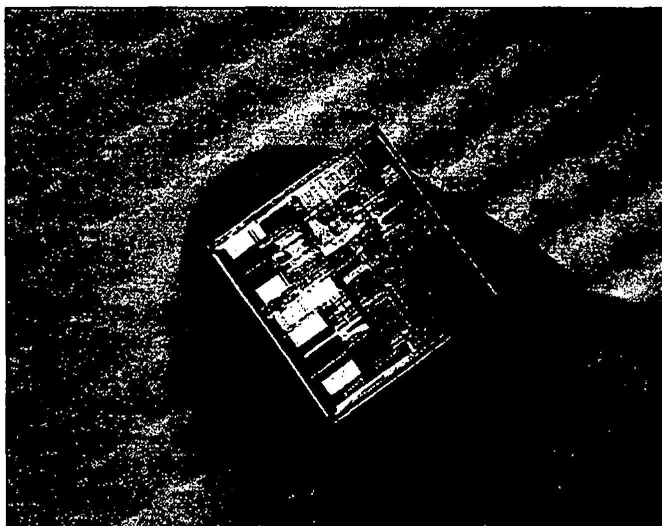


Figura 43.35 Los circuitos integrados continúan reduciéndose en tamaño y precio mientras, de manera simultánea, crecen en capacidad. *(Cortesía de Intel Corporation)*

una "segunda revolución industrial" y se encuentran en el corazón de computadoras, relojes, cámaras, automóviles, aeronaves, robots, vehículos espaciales y todo tipo de redes de comunicación y conmutación.

En términos simples, un **circuito integrado** es una colección de transistores, diodos, resistores y capacitores interconectados que se fabrican sobre un solo pedazo de silicio, conocido como *chip*. Los chips más avanzados contienen fácilmente varios millones de componentes en un área de 1 cm^2 (Fig. 43.35), con el número de componentes por pulgada cuadrada duplicándose cada año desde que el circuito integrado fue inventado. La figura 43.36 ilustra los avances dramáticos realizados en la tecnología de chips en los pasados 30 años.

web
Para mayor información visite **www.intel.com**

Los circuitos integrados fueron inventados en parte para resolver el problema de interconexión generado por el transistor. En la era de los tubos de vacío, las consideraciones de potencia y tamaño de componentes individuales impusieron

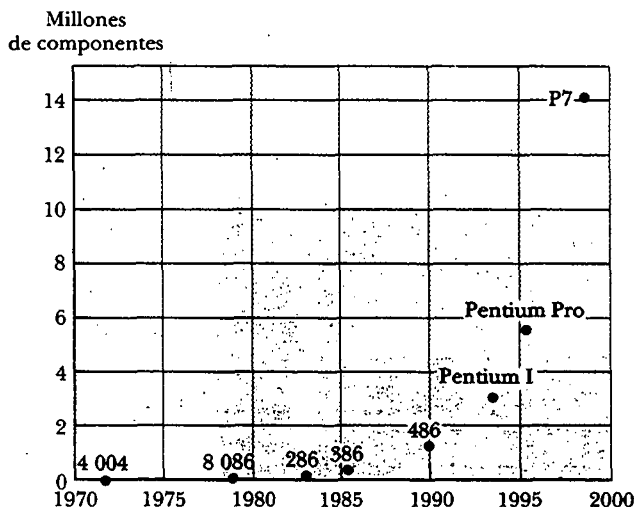


Figura 43.36 Esta gráfica ilustra los avances dramáticos en la tecnología de chips: el número de componentes que caben en un solo chip de computadora contra año de manufactura.

modestos límites sobre el número de componentes que podrían interconectarse en un circuito dado. Con la llegada del diminuto transistor de baja potencia y alta confiabilidad, los límites de diseño sobre el número de componentes desaparecieron y fueron sustituidos con el problema de alambrar juntos cientos de miles de componentes. La magnitud de este problema puede apreciarse cuando se considera que las computadoras de segunda generación (compuestas por transistores discretos en lugar de circuitos integrados) contenían varios cientos de miles de componentes que requerían más de un millón de uniones que debían soldarse y probarse en forma manual.

Además de resolver el problema de interconexión, los circuitos integrados poseen las ventajas de miniaturización y rápida respuesta, dos atributos fundamentales para las computadoras de alta velocidad. La respuesta rápida es producto de la miniaturización y del empaque compacto de los componentes, ya que el tiempo de respuesta de un circuito depende del tiempo que tardan las señales eléctricas en viajar a casi 0.3 m/ns para pasar de un componente a otro. Este tiempo se reduce por el empaque compacto de los componentes.

Sección opcional



43.8 SUPERCONDUCTIVIDAD

En la sección 27.5 aprendió que existe una clase de metales y compuestos conocidos como **superconductores** cuya resistencia eléctrica disminuye virtualmente a cero bajo una cierta temperatura T_c llamada *temperatura crítica* (tabla 43.6). Ahora se apreciarán en mayor detalle estos sorprendentes materiales, usando lo que se acaba de aprender acerca de las propiedades de los sólidos para ayudarlo a comprender el comportamiento de los superconductores.

web
Para un análisis más detallado sobre el campo de la superconductividad visite la página en Internet para este libro
www.saunderscollege.com/physics/

Comience examinando el efecto Meissner, descrito en la sección 30.8 como la exclusión de flujo magnético del interior de los superconductores. Argumentos simples, basados en las leyes de la electricidad y el magnetismo se pueden usar para mostrar que el campo magnético dentro de un superconductor no puede cambiar con el tiempo. De acuerdo con la ecuación 27.8, $R = \Delta V/I$, y ya que la diferencia de potencial ΔV a través de un conductor es proporcional al campo eléctrico dentro del conductor, se ve que el campo eléctrico es proporcional a la resistencia del conductor. En consecuencia, ya que $R = 0$ para un superconductor a o bajo su temperatura crítica, *el campo eléctrico en su interior debe ser cero.* Ahora recuerde que la ley de Faraday de la inducción se puede expresar en la forma mostrada en la ecuación 31.9:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \textbf{(43.30)}$$

Esto es, la integral de línea del campo eléctrico alrededor de cualquier espira cerrada es igual al negativo de la rapidez de cambio en el flujo magnético Φ_B a través de la espira. Puesto que $\mathbf{E}$ es cero en cualquier parte dentro del superconductor, la integral sobre cualquier trayectoria cerrada dentro del superconductor es cero. Por tanto, $d\Phi_B/dt = 0$; esto indica que **el flujo magnético en el superconductor no puede cambiar**. A partir de esta información se puede concluir que $B(= \Phi_B/A)$ debe permanecer constante dentro del superconductor.

TABLA 43.6 Temperaturas críticas para varios superconductores

Material	T_c (K)
Zn	0.88
Al	1.19
Sn	3.72
Hg	4.15
Pb	7.18
Nb	9.46
Nb_3Sn	18.05
Nb_3Ge	23.2
$YBa_2Cu_3O_7$	92
Bi-Sr-Ca-Cu-O	105
Tl-Ba-Ca-Cu-O	125

Antes de 1933 se supuso que la superconductividad fue una manifestación de conductividad perfecta. Si un conductor perfecto es enfriado bajo su temperatura crítica en la presencia de un campo magnético aplicado, el campo estaría atrapado en el interior del conductor incluso después de que el campo externo se removiera. Además, el estado final del conductor perfecto dependería de qué ocurra primero, la aplicación del campo o el enfriamiento por abajo de T_c. Si el campo se aplica

después de que se enfría el material, el campo sería expulsado del superconductor. Si el campo se aplica antes de que el material se enfríe, el campo no sería expulsado una vez que el material se ha enfriado. Sin embargo, en 1933 W. Hans Meissner y Robert Ochsenfeld descubrieron que, cuando un metal se vuelve superconductor en la presencia de un campo magnético débil, el campo es expulsado. En consecuencia, se logra el mismo estado final $\mathbf{B} = 0$ siempre que el campo sea aplicado antes o después de que el material se enfría abajo de su temperatura crítica.

El efecto Meissner se ilustra en la figura 43.37 para un material superconductor en la forma de un largo cilindro. Advierta que el campo penetra el cilindro cuando su temperatura es mayor que T_c (Fig. 43.37a). Sin embargo, conforme la temperatura disminuye debajo de T_c, las líneas de campo son expulsadas espontáneamente del interior del superconductor (Fig. 43.37b), por tanto, un superconductor es más que un conductor perfecto (resistividad $\rho = 0$); también es un diamagneto perfecto ($\mathbf{B} = 0$). La propiedad de que $\mathbf{B} = 0$ en el interior de un superconductor es tan fundamental como la propiedad de resistencia cero. Si la magnitud del campo magnético aplicado excede un valor crítico B_c, definido como el valor de B que destruye las propiedades superconductoras de un material, el campo de nuevo penetra la muestra.

Ya que un superconductor es un diamagneto perfecto que tiene una susceptibilidad magnética negativa, repele un imán permanente. De hecho, uno puede realizar una demostración del efecto Meissner haciendo flotar un pequeño imán permanente sobre un superconductor y logrando levitación magnética, como se vio en la figura 30.34.

Usted debe recordar, a partir de su estudio de la electricidad, que un buen conductor expulsa campos eléctricos estáticos mediante el movimiento de las cargas sobre su superficie. En efecto, las cargas superficiales producen un [illegible] que cancela de manera exacta el campo externo aplicado dentro [illegible] En una forma similar, un superconductor expele campos magnéticos mediante la formación de corrientes superficiales. Para ver por qué ocurre esto, considere de nuevo al superconductor mostrado en la figura 43.37. Suponga que la muestra inicialmente está a una temperatura $T > T_c$, como se ilustra en la figura 43.37a, de modo que el campo magnético penetra el cilindro. Conforme el cilindro se enfría a una temperatura $T < T_c$, el campo es expulsado, como se muestra en la figura 43.37b. Las corrientes superficiales inducidas sobre la superficie del superconductor producen un campo magnético que cancela con exactitud el campo externo aplicado dentro del superconductor. Como usted esperaría, las corrientes superficiales desaparecen cuando se remueve el campo magnético externo.

Un importante desarrollo en la física que produjo mucha excitación en la comunidad científica fue el descubrimiento de los superconductores con base en óxi-

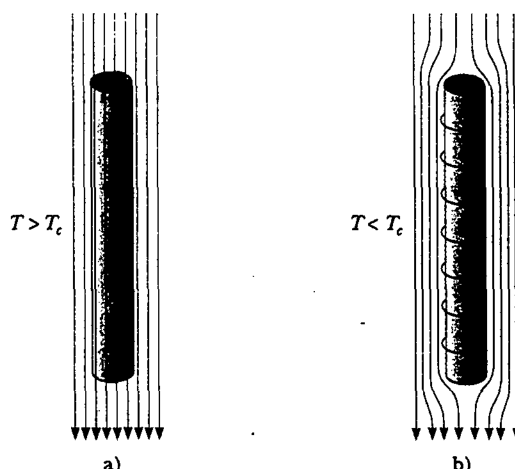


Figura 43.37 Un superconductor en la forma de un largo cilindro en la presencia de un campo magnético externo. a) A temperaturas sobre T_c, las líneas de campo penetran el cilindro porque están en su estado normal. b) Cuando el cilindro se enfría a $T < T_c$ y se vuelve superconductor, el flujo magnético es excluido de su interior mediante la inducción de corrientes superficiales.

do de cobre de alta temperatura. La excitación comenzó con una publicidad en 1986 de J. Bednorz (n. 1950) y K. Alex Müller (n. 1927), científicos del IBM Zurich Research Laboratory, en Suiza. En su informe[5] Bednorz y Müller reportaron fuerte evidencia de superconductividad a 30 K en un óxido de bario, lantano y cobre. Se les otorgó el premio Nobel de física en 1987 por su extraordinario descubrimiento. Poco tiempo después, una nueva familia de compuestos fue abierta para su estudio, y la actividad de investigación en el campo de la superconductividad avanzó vigorosamente. A comienzos de 1987, grupos en la Universidad de Alabama en Huntsville y de la Universidad de Houston anunciaron superconductividad a casi 92 K en un óxido de itrio, bario y cobre ($YBa_2Cu_3O_7$). Más tarde en dicho año, equipos de científicos de Japón y Estados Unidos reportaron superconductividad a 105 K en un óxido de bismuto, estroncio, calcio y cobre. Más recientemente, los científicos han reportado superconductividad a temperaturas tan altas como 150 K en un óxido que contiene mercurio (véase la Fig. 27.13). En la actualidad, no se puede descartar la posibilidad de superconductividad a temperatura ambiente, y los mecanismos responsables del comportamiento de superconductores de alta temperatura todavía están bajo investigación. La búsqueda de nuevos materiales superconductores continúa tanto por razones científicas como porque las aplicaciones prácticas se vuelven más probables y se expanden conforme la temperatura crítica se eleva.

RESUMEN

Dos o más átomos se combinan para formar moléculas debido a una fuerza atractiva neta entre los átomos. Los mecanismos responsables del enlace molecular pueden clasificarse como sigue:

- Los **enlaces iónicos** se forman debido principalmente a la atracción de Coulomb entre iones con carga opuesta. El cloruro de sodio (NaCl) es un ejemplo.
- Los **enlaces covalentes** se forman cuando los átomos constituyentes de una molécula comparten electrones. Por ejemplo, los dos electrones de la molécula de H_2 están compartidos igualmente entre los dos núcleos.
- Los **enlaces de van der Waals** son enlaces electrostáticos débiles entre átomos que no forman enlaces iónicos o covalentes. Estos enlaces son responsables de la condensación de átomos de gas inertes y de moléculas no polares en la fase líquida.
- Los **enlaces de hidrógeno** se forman entre el centro de la carga positiva en una molécula polar que incluye uno o más átomos de hidrógeno y el centro de la carga negativa en otra molécula polar.

La energía de una molécula de gas está compuesta por contribuciones de la energía electrónica en los enlaces y de los movimientos traslacional, rotacional y vibratorio de la molécula.

Los valores permitidos de la energía rotacional de una molécula diatómica son

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) \qquad J = 0, 1, 2, \ldots \tag{43.6}$$

donde I es el momento de inercia de la molécula y J es un entero denominado **número cuántico rotacional**. La regla de selección para las transiciones entre estados rotacionales está dada por $\Delta J = \pm 1$.

Los valores permitidos de la energía vibratoria de una molécula diatómica son

$$E_{\text{vib}} = (v + \tfrac{1}{2}) \frac{h}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \qquad v = 0, 1, 2, \ldots \tag{43.10}$$

donde v es el **número cuántico vibratorio**, k es la constante de fuerza del "resorte efectivo" que enlaza la molécula, y μ es la **masa reducida** de la molécula. La regla

[5] J. G. Bednorz y K. A. Müller, *Z. Phys. B* 64:189, 1986.

de selección para las transiciones vibratorias permitidas es $\Delta v = \pm 1$, y la diferencia de energía entre cualesquiera dos niveles adyacentes es la misma sin importar cuáles dos niveles están involucrados.

Los mecanismos de enlace en los sólidos pueden ser clasificados de manera similar a los esquemas para moléculas. Por ejemplo, los iones Na^+ y Cl^- en el NaCl forman **enlaces iónicos**, mientras que los átomos de carbono en el diamante forman **enlaces covalentes**. El **enlace metálico** se caracteriza por una fuerza atractiva neta entre los núcleos de ión positivo y los electrones móviles libres de un metal.

En un sólido cristalino los niveles de energía del sistema forman un conjunto de **bandas**. Los electrones ocupan los estados de más baja energía, con no más que un electrón por estado. Las energías de desdoblamiento están presentes entre las bandas de estados permitidos.

En la **teoría de electrones libres de metales** los electrones libres llenan los niveles cuantizados en concordancia con el principio de exclusión de Pauli. El número de estados por unidad de volumen disponibles para los electrones de conducción con energías entre E y $E + dE$ es

$$N(E)\,dE = C\frac{E^{1/2}dE}{e^{(E-E_F)/k_BT}+1} \qquad \textbf{(43.22)}$$

donde C es una constante, y E_F es la **energía de Fermi**. En $T = 0$ K, todos los niveles debajo de E_F están llenos, todos los niveles arriba de E_F están vacíos, y

$$E_F(0) = \frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3n_e}{8\pi}\right)^{2/3} \qquad \textbf{(43.25)}$$

donde n_e es el número total de electrones de conducción por unidad de volumen. Sólo aquellos electrones que tienen energías cercanas a E_F contribuyen a la conductividad eléctrica del metal.

Un **semiconductor** es un material que tiene una energía de desdoblamiento de aproximadamente 1 eV y una banda de valencia que está llena en $T = 0$ K. Debido a su pequeña energía de desdoblamiento, un número significativo de electrones puede excitarse térmicamente desde la banda de valencia hacia la banda de conducción. Las estructuras de banda y las propiedades eléctricas de un semiconductor pueden modificarse, ya sea agregando átomos donadores que contienen cinco electrones de las capas exteriores (como el arsénico) o átomos aceptores que contienen tres electrones de las capas exteriores (como el indio). Un semiconductor **dopado** con átomos impuros donadores recibe el nombre de **semiconductor de tipo *n***, en tanto que uno dopado con átomos impuros aceptores se conoce como **semiconductor de tipo *p***. Los niveles de energía de estos átomos de impurezas caen dentro de la energía de desdoblamiento del material.

PREGUNTAS

1. Analice las tres principales formas de excitación de una molécula (además del movimiento traslacional) y las energías relativas asociadas con las tres excitaciones.
2. Explique el papel del principio de exclusión de Pauli en la descripción de las propiedades eléctricas de metales.
3. Analice las propiedades de un material que determinan si es un buen aislante eléctrico o un buen conductor.
4. La tabla 43.5 muestra que la energía de desdoblamiento para semiconductores disminuye con la temperatura creciente. ¿Qué es lo que usted supone que explica este comportamiento?
5. La resistividad de metales aumenta con la temperatura en aumento, en tanto que la resistividad de un semiconductor intrínseco disminuye con la temperatura creciente. Explique.
6. Estudie las diferencias en las estructuras de bandas de metales, aislantes y semiconductores. ¿Cómo el modelo de estructuras de banda le permite a usted comprender mejor las propiedades eléctricas de estos materiales?
7. Analice los modelos responsables de los diferentes tipos de enlaces que forman moléculas estables.
8. Reflexione sobre las propiedades eléctricas, físicas y ópticas de los sólidos enlazados iónicamente. Compare sus

estimaciones con las propiedades tabuladas para tales sólidos.

9. Estudie las propiedades eléctricas y físicas de sólidos enlazados en forma covalente. Compare sus estimaciones con las propiedades tabuladas para tales sólidos.
10. Analice las propiedades eléctricas y físicas de los metales.
11. Cuando un fotón es absorbido por un semiconductor se crea un par electrón-hoyo. Proporcione una explicación física de este enunciado empleando el modelo de bandas de energía como la base para su descripción.
12. Los átomos pentavalentes, como el arsénico, son átomos donadores en un semiconductor, como el silicio, en tanto que los átomos trivalentes, como el indio, son aceptores. Estudie la tabla periódica en el apéndice C y determine qué otros elementos podrían ser buenos donadores o aceptores.
13. ¿Cuáles son las suposiciones esenciales hechas en la teoría de electrones libres de metales? ¿Cómo el modelo de bandas de energía difiere de la teoría de electrones libres al describir las propiedades de los metales?
14. ¿Cómo los niveles vibratorio y rotacional de las moléculas de hidrógeno pesado (D_2) se comparan con los de las moléculas de H_2?
15. ¿Qué es más fácil de excitar en una molécula diatómica, el movimiento rotacional o el vibratorio?
16. La energía de la luz visible varía entre 1.8 y 3.1 eV. ¿Esto explica por qué el silicio, con una energía de desdoblamiento de 1.1 eV (véase la tabla 43.5), aparece opaco, en tanto que el diamante, con una energía de desdoblamiento de 5.5 eV, aparece transparente?
17. ¿Por qué un emparedado *pnp* o *npn* (cuyas regiones centrales son muy delgadas) es esencial en la operación del transistor?
18. ¿Cómo puede el análisis del espectro rotacional de una molécula llevar a una estimación del tamaño de esa molécula?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante ☐ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** = use computadora para resolver el problema = Física interactiva ☐ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 43.1 Enlaces moleculares

WEB 1. **Problema de repaso** Un ion K^+ y uno Cl^- están separados una distancia de 5.00×10^{-10} m. Suponiendo que los dos iones actúan como cargas puntuales, determine a) la fuerza que cada ion ejerce sobre el otro y b) la energía potencial de atracción en electronvolts.

2. El cloruro de potasio es una molécula enlazada iónicamente, y se vende como un sustituto de la sal para uso en dietas bajas en sodio. La afinidad electrónica del cloro es 3.6 eV. Se requiere una entrada de energía de 0.7 eV para formar iones separados K^+ y Cl^- de átomos de K y Cl separados. ¿Cuál es la energía de ionización de K?

3. Una descripción de la energía potencial de una molécula diatómica está dada por el potencial de Lennard-Jones,

$$U = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

donde A y B son constantes. Encuentre, en términos de A y B, a) el valor r_0 al cual la energía es un mínimo y b) la energía E requerida para romper una molécula diatómica. c) Evalúe r_0 en metros y E en electronvolts para la molécula H_2. En sus cálculos, considere $A = 0.124 \times 10^{-120}$ eV·m^{12} y $B = 1.488 \times 10^{-60}$ eV·m^6. (*Nota*: aunque este potencial sigue usándose extensamente para modelar, se sabe que tiene serios defectos. Por ejemplo, su comportamiento tanto en pequeños como en grandes valores de r representa grandes errores.)

4. Una fuerza de dispersión van der Waals entre átomos de helio produce un potencial de pozo muy poco profundo, con una profundidad del orden de 1 meV. ¿Alrededor de cuál temperatura usted esperaría que el helio se condense?

Sección 43.2 La energía y espectros de moléculas

5. La molécula de yoduro de cesio (CsI) tiene una separación atómica de 0.127 nm. a) Determine la energía del estado rotacional de excitación más bajo y la frecuencia del fotón absorbido en la transición $J = 0$ a $J = 1$. b) ¿Cuál sería el cambio fraccionario en esta frecuencia si la separación atómica estimada es inferior por 10%?

6. La molécula de CO hace una transición del estado rotacional $J = 1$ a $J = 2$ cuando absorbe un fotón de 2.30×10^{11} Hz de frecuencia. Encuentre el momento de inercia de esta molécula a partir de estos datos.

WEB 7. Una molécula de HCl se excita hasta su primer nivel de energía rotacional, correspondiente a $J = 1$. Si la distancia entre sus núcleos es de 0.127 5 nm, ¿cuál es la rapidez angular de la molécula alrededor de su centro de masa?

8. Una molécula diatómica se compone de dos átomos que tienen masas m_1 y m_2 separadas por una distancia r. Muestre que el momento de inercia alrededor del eje por el centro de masa de una molécula está dado por la ecuación 43.3, $I = \mu r^2$.

9. a) Calcule el momento de inercia de una molécula de NaCl en torno a su centro de masa. Los átomos están separados una distancia $r = 0.28$ nm. b) Calcule la longitud de onda de la radiación emitida si una molécula de NaCl experimenta una transición del estado $J = 2$ al estado $J = 1$.

10. El espectro rotacional de la molécula de HCl contiene líneas con longitudes de onda de 0.060 4, 0.069 0, 0.080 4, 0.096 4 y 0.120 4 mm. ¿Cuál es el momento de inercia de la molécula?

WEB 11. Si la constante de fuerza efectiva de una molécula vibratoria de HCl es $k = 480$ N/m, estime la diferencia de

energía entre el estado base y el primer nivel vibratorio excitado.

12. Emplee los datos en la tabla 43.2 para calcular la mínima amplitud de vibración de a) la molécula HI y b) la molécula HF. ¿Cuál tiene el enlace más débil?
13. Los núcleos de la molécula de O_2 están separados por 1.2×10^{-10} m. La masa de cada átomo de oxígeno en la molécula es de 2.66×10^{-26} kg. a) Determine las energías rotacionales de una molécula de oxígeno en electronvolts para los niveles correspondientes a $J = 0$, 1 y 2. b) La constante de fuerza efectiva k entre los átomos en la molécula de oxígeno es 1 177 N/m. Determine las energías vibratorias (en electronvolts) correspondientes a $v = 0$, 1 y 2.
14. La figura P43.14 es un modelo de una molécula de benceno. Todos los átomos se encuentran en un plano, y los átomos de carbono forman un hexágono regular, como lo hacen los átomos de hidrógeno. Los átomos de carbono están separados 0.110 nm de centro a centro. Determine las energías de rotación permitidas alrededor de un eje perpendicular al plano del papel a través del punto central O. Los átomos de hidrógeno y carbono tienen masas de 1.67×10^{-27} kg y 1.99×10^{-26} kg, respectivamente.

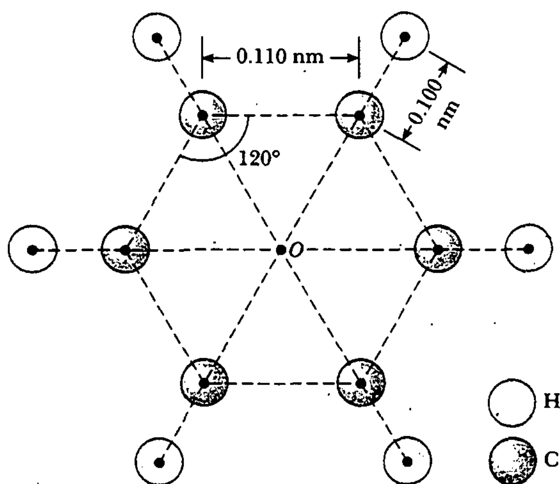


Figura P43.14

15. Si la molécula de CO fuera rígida, ¿qué transición rotacional del estado J podría absorber el fotón de la misma longitud de onda que el de la transición vibratoria de 0 a 1? (Utilice la información que proporciona la tabla 43.2.)
16. ¿Fotones de qué frecuencias pueden ser emitidos espontáneamente por moléculas de CO en el estado con $v = 1$ y $J = 0$?
17. La mayor parte de la masa de un átomo está en su núcleo. Modele la distribución de masa en una molécula diatómica como dos esferas, cada una de 2.00×10^{-15} m de radio y 1.00×10^{-26} kg de masa, localizadas en puntos a lo largo del eje x como se muestra en la figura 43.9 y están separadas 2.00×10^{-10} m. La rotación en torno al eje que une los núcleos en la molécula diatómica por lo general es ignorada ya que el primer estado excitado tendría una energía que es demasiado grande de alcanzar. Para ver por qué calcule la proporción entre la energía del primer estado excitado de rotación alrededor del eje x, y la energía del primer estado excitado para la rotación alrededor del eje y.

Sección 43.3 Enlaces en sólidos

18. Use un lente de aumento para mirar la sal de mesa que sale de un salero. Compare lo que ve con la figura 43.14a. La distancia entre un ion sodio y un ion cloro vecino más cercano es de 0.261 nm. Realice la estimación del orden de magnitud del número N de átomos en un grano de sal típico. Suponga que usted tiene un número de granos de sal igual a este número N. ¿Cuál sería el volumen de esta cantidad de sal?
19. Emplee la ecuación 43.17 para calcular la energía cohesiva iónica para el NaCl. Considere $\alpha = 1.747\ 6$, $r_0 = 0.281$ nm y $m = 8$.
20. La distancia entre los iones K^+ y Cl^- en un cristal de KCl es de 0.314 nm. Calcule las distancias desde un ion K^+ hasta su ion K^+ vecino más cercano, a su segundo ion K^+ vecino más cercano y a su tercer ion K^+ vecino más cercano.
21. Considere una cadena unidimensional de iones alternantes positivo y negativo. Muestre que la energía potencial asociada con un ion en este cristal hipotético es

$$U(r) = -k_e\alpha\frac{e^2}{r}$$

donde la constante de Madelung es $\alpha = 2 \ln 2$, y r es el espaciamiento interiónico. [*Sugerencia:* use la expansión en serie para $\ln(1 + x)$.]

Sección 43.4 Teoría de bandas de sólidos

Sección 43.5 Teoría de electrones libres de metales

22. Muestre que la ecuación 43.25 puede expresarse como $E_F = (3.65 \times 10^{-19})n^{2/3}$ eV donde E_F está en electronvolts cuando n está en electrones por metro cúbico.
23. La energía de Fermi para la plata es de 5.48 eV. La plata tiene una densidad de 10.6×10^3 kg/m³ y una masa atómica de 108. Con esta información muestre que la plata tiene un electrón libre por átomo.
24. a) Encuentre la velocidad común de un electrón de conducción en cobre cuya energía cinética es igual a la energía de Fermi, 7.05 eV. b) ¿Cómo se compara esto con la rapidez de arrastre de 0.1 mm/s?
25. El sodio es un metal monovalente que tiene una densidad de 0.971 g/cm³, y una masa molar de 23.0 g/mol. Emplee esta información para calcular a) la densidad de los portadores de carga, b) la energía de Fermi y c) la rapidez de Fermi para el sodio.
26. Cuando la plata sólida comienza a fundirse, ¿cuál es la fracción aproximada de los electrones de conducción que son térmicamente excitados sobre el nivel de Fermi?
27. WEB Calcule la energía de un electrón de conducción en plata de 800 K si la probabilidad de encontrar el electrón en ese estado es 0.950. La energía de Fermi es 5.48 eV a esta temperatura.

28. Considere un cubo de oro de 1.00 mm por lado. Calcule el número aproximado de electrones de conducción en este cubo cuyas energías estén en el intervalo de 4.000 a 4.025 eV.

29. Muestre que la energía cinética promedio de un electrón de conducción en un metal a 0 K es $E_{av} = \frac{3}{5} E_F$. (*Sugerencia:* en general, la energía cinética promedio es

$$E_{av} = \frac{1}{n_e} \int EN(E)\, dE$$

donde n_e es la densidad de electrones, $N(E)\,dE$ está dada por la ecuación 43.22 y la integral es sobre todos los valores posibles de la energía.

30. **Problema de repaso** Un electrón se mueve en una caja tridimensional de longitud de lado L y volumen L^3. Si la función de onda de la partícula es $\psi = A \operatorname{sen}(k_x x)\operatorname{sen}(k_y y)\operatorname{sen}(k_z z)$, muestre que su energía está dada por la ecuación 43.19:

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m_e L^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

donde los números cuánticos (n_x, n_y, n_z) son enteros ≥ 1. (*Sugerencia:* la ecuación de Schrödinger en tres dimensiones puede escribirse

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{\hbar^2}{2m_e}(U - E)\psi$$

Para confinar al electrón dentro de la caja, considere $U = 0$ en el interior y $U = \infty$ en el exterior.)

31. (a) Considere un sistema de electrones confinado en una caja tridimensional. Calcule la proporción entre el número de niveles de energía permitidos a 8.50 eV y el número a 7.00 eV. (b) El cobre tiene una energía de Fermi de 7.0 eV a 300 K. Calcule la proporción entre el número de niveles ocupados a una energía de 8.50 eV y el número a la energía de Fermi. Compare su respuesta con la obtenida en el inciso a).

Sección 43.6 Conducción eléctrica en metales, aislantes y semiconductores

32. La energía de desdoblamiento para el silicio a 300 K es 1.14 eV. a) Encuentre el fotón de más baja frecuencia que asciende un electrón desde la banda de valencia a la banda de conducción. b) ¿Cuál es la longitud de onda de este fotón?

33. Luz de un tubo de descarga de hidrógeno incide sobre un cristal de CdS. ¿Cuáles líneas espectrales de la serie de Balmer se absorben y cuáles se transmiten?

34. Un diodo emisor de luz (LED) hecho del semiconductor GaAsP emite luz roja ($\lambda = 650$ nm). Determine la banda de energía de desdoblamiento E_g en el semiconductor.

WEB 35. La mayor parte de la radiación solar tiene una longitud de onda de 1 μm o menos. ¿Qué energía de desdoblamiento tendría el material en una celda solar para absorber esta radiación? ¿El silicio es apropiado? (Véase la tabla 43.5.)

36. Suponga que usted construirá un instrumento científico que está térmicamente aislado de su entorno, pero tal que usted pueda usar un láser externo para elevar la temperatura de un blanco dentro de él. (Puede ser un calorímetro, pero este criterio de diseño podría aplicarse también a otros dispositivos.) Dado que usted sabe que el diamante es transparente y un buen aislante térmico, usted decide usar una ventana de diamante en el aparato. El diamante tiene una energía de desdoblamiento de 5.5 eV entre sus bandas de valencia y conducción. ¿Cuál es la longitud de onda más corta del láser que usted puede usar para calentar la muestra en el interior?

(Opcional)
Sección 43.7 Dispositivos semiconductores

Nota: El problema 71 en el capítulo 27 también se aplica a esta sección.

37. ¿Para qué valores del voltaje de polarización ΔV en la ecuación 43.29 a) $I = 9.00\ I_0$? b) $I = -0.900\ I_0$? Suponga $T = 300$ K.

38. El diodo mostrado en la figura 43.30 está conectado en serie con una batería y un resistor de 150 Ω. ¿Qué fem de la batería se requiere para una corriente de 25.0 mA?

39. Usted coloca un diodo en un circuito microelectrónico para proteger el sistema en caso de que una persona no entrenada instale la batería invertida. En la situación correcta de la polarización directa, la corriente es de 200 mA con una diferencia de potencial de 100 mV a través del diodo a temperatura ambiente (300 K). Si la batería se invirtiese, ¿cuál sería la magnitud de la corriente a través del diodo?

(Opcional)
Sección 43.8 Superconductividad

Nota: El problema 26 en el capítulo 30 y los problemas 76 al 79 en el capítulo 32 también se aplican a esta sección.

40. Una delgada barra de material superconductor de 2.50 cm de largo se coloca en un campo magnético de 0.540 T con su eje cilíndrico a lo largo de las líneas de campo magnético. a) Bosqueje las direcciones del campo aplicado y la corriente superficial inducida. b) Encuentre la magnitud de la corriente superficial sobre la superficie curva de la barra.

41. Determine la corriente generada en un anillo superconductor de niobio metálico de 2.00 cm de diámetro si un campo magnético de 0.020 0 T en una dirección perpendicular al anillo es repentinamente disminuido a cero. La inductancia del anillo es 3.10×10^{-8} H.

42. *Una demostración convincente de la resistencia cero.* Una demostración directa y relativamente sencilla de la resistencia cero de cd puede realizarse usando el método de la sonda de cuatro puntos. La sonda mostrada en la figura P43.42 consta de un disco de $YBa_2Cu_3O_7$ (un superconductor de elevada T_c) al cual se unen cuatro alambres mediante soldadura de indio o algún otro material de contacto adecuado. La corriente se mantiene a través de la muestra mediante la aplicación de un voltaje de cd entre los puntos a y b, y se mide con un amperímetro de cd. La corriente puede variarse con la resistencia variable R. La diferencia de potencial ΔV_{cd} entre c y d se mide

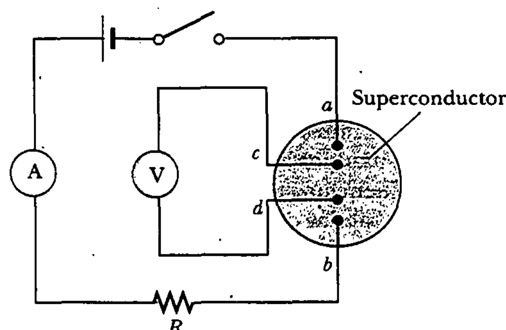


Figura P43.42 Diagrama de circuito usado en la medición de la sonda de cuatro puntos de la resistencia de cd de una muestra. Un amperímetro digital de cd se usa para medir la corriente, y la diferencia de potencial entre *c* y *d* se mide con un voltímetro digital de cd. Advierta que no hay fuente de voltaje en la espira interior del circuito donde se mide ΔV_{cd}.

con un voltímetro digital. Cuando la sonda se sumerge en nitrógeno líquido, la muestra rápidamente se enfría a 77 K, bajo la temperatura crítica del material, 92 K. La corriente permanece casi constante, pero ΔV_{cd} *cae abruptamente a cero.* a) Explique esta observación sobre la base de lo que usted sabe acerca de los superconductores. b) Los datos en la tabla P43.42 representan valores reales de ΔV_{cd} para diferentes valores de I tomados sobre la muestra a temperatura ambiente. Dibuje una gráfica I–ΔV de los datos y determine si la muestra se comporta en una forma lineal. A partir de los datos obtenga un valor para la resistencia de cd de la muestra a temperatura ambiente. c) A temperatura ambiente se encuentra que ΔV_{cd} = 2.234 mV para I = 100.3 mA, pero después de que la muestra se enfría a 77 K, ΔV_{cd} = 0 e I = 98.1 mA. ¿Qué cree usted que puede causar la ligera disminución en la corriente?

TABLA P43.42 Corriente *versus* diferencia de potencial ΔV_{cd} medida en una muestra cerámica a granel de $YBa_2Cu_3O_7$ a temperatura ambiente[a]

I (mA)	ΔV_{cd} (mV)
57.8	1.356
61.5	1.441
68.3	1.602
76.8	1.802
87.5	2.053
102.2	2.398
123.7	2.904
155	3.61

[a] La corriente fue suministrada por una batería de 6 V en serie con un resistor variable R. Los valores de R variaron de 10 a 100 Ω. Los datos son del laboratorio del autor (RAS).

PROBLEMAS ADICIONALES

43. Como usted aprenderá en el capítulo 44, el carbono-14 (^{14}C) es un isótopo del carbono. Tiene la misma estructura electrónica química del mucho más abundante isótopo carbono-12 (^{12}C), pero tiene diferentes propiedades nucleares. Su masa es de 14 u, más grande porque tiene dos neutrones adicionales en su núcleo. Suponga que el potencial molecular del CO es el mismo para ambos isótopos de carbono y que las tablas y ejemplos en la sección 43.2 se refieren a monóxido de carbono con átomos de carbono-12. a) ¿Cuál es la frecuencia vibratoria del ^{14}CO? b) ¿Cuál es el momento de inercia del ^{14}CO? c) ¿Cuáles longitudes de onda de la luz pueden ser absorbidas por ^{14}CO en el estado ($v = 0, J = 10$) que provocaría que terminara en el nivel $v = 1$?
44. La constante de resorte efectiva asociada con los enlaces en la molécula N_2 es de 2 297 N/m. Cada uno de los átomos de nitrógeno tiene una masa de 2.32×10^{-26} kg, y sus núcleos están separados 0.120 nm. Suponga que la molécula es rígida y está en el estado de vibración base. Calcule el valor J del estado rotacional que tendría la misma energía que el primer estado vibratorio excitado.
45. La molécula de hidrógeno se separa (disocia) cuando es excitada internamente por 4.5 eV. Suponiendo que esta molécula se comporta como un oscilador armónico que tiene frecuencia angular clásica $\omega = 8.28 \times 10^{14}$ rad/s, encuentre el número cuántico vibratorio más alto para un estado debajo de la energía de disociación de 4.5 eV.
46. Bajo presión, el helio líquido se solidifica cuando cada átomo se enlaza con otros cuatro, y cada enlace tiene una energía promedio de 1.74×10^{-23} J. Encuentre el calor latente de fusión del helio en joules por gramo. (La masa molar del He es 4 g/mol.)
47. Muestre que la energía cohesiva iónica de un sólido enlazado iónicamente está dada por la ecuación 43.17. (*Sugerencia*: empiece con la ecuación 43.16 y observe que $dU/dr = 0$ a $r = r_0$.)
48. La energía de disociación del hidrógeno molecular en estado base es 4.48 eV, mientras que sólo toma 3.96 eV disociarla cuando está en el primer estado vibratorio excitado con $J = 0$. Usando esta información determine la profundidad de la función de energía potencial del H_2 molecular.
49. Una partícula se mueve en un movimiento unidimensional en una región donde su energía potencial es

$$U(x) = \frac{A}{x^3} - \frac{B}{x}$$

donde $A = 0.150$ eV·nm³ y $B = 3.68$ eV·nm. La forma general de esta función se muestra en la figura 43.15, donde x sustituye a r. a) Encuentre la posición de equilibrio estático x_0 de la partícula. b) Determine la profundidad U_0 de este potencial de pozo. c) Al moverse a

lo largo del eje x, ¿qué fuerza máxima hacia la dirección x negativa experimenta la partícula?

50. Una partícula de masa m se mueve en un movimiento unidimensional en una región donde su energía potencial es

$$U(x) = \frac{A}{x^3} - \frac{B}{x}$$

donde A y B son constantes con las unidades apropiadas. La forma general de esta función se muestra en la figura 43.15, donde x sustituye a r. a) Encuentre la posición de equilibrio estático x_0 de la partícula en términos de m, A y B. b) Determine la profundidad U_0 de este potencial de pozo. c) Al moverse a lo largo del eje x, ¿qué fuerza máxima hacia la dirección x negativa experimenta la partícula?

51. Como una alternativa a la ecuación 43.1, otro modelo útil para la energía potencial de una molécula diatómica es el potencial Morse

$$U(r) = B[e^{-a(r-r_0)} - 1]^2$$

donde B, a y r_0 son parámetros usados para ajustar la forma del potencial y su profundidad. a) ¿Cuál es la separación de equilibrio de los núcleos? b) ¿Cuál es la profundidad potencial de pozo, esto es, la diferencia en energía entre el valor mínimo del potencial y su asíntota conforme r tiende al infinito? c) Si μ es la masa reducida del sistema de dos núcleos, ¿cuál es la frecuencia vibratoria de la molécula diatómica en su estado base? (Suponga que el potencial es casi parabólico alrededor del pozo mínimo.) d) ¿Qué cantidad de energía necesita ser suministrada a la molécula de estado base para separar los dos núcleos hasta el infinito?

52. La función de distribución de Fermi-Dirac puede escribirse como

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_BT} + 1} = \frac{1}{e^{(E/E_F-1)T_F/T} + 1}$$

Prepare una hoja de cálculo que le permita calcular y graficar $f(E)$ *versus* E/E_F a una temperatura fija T. Examine las curvas obtenidas para $T = 0.1T_F$, $0.2T_F$ y $0.5\ T_F$, donde $T_F = E_F/k_B$.

53. La constante de Madelung puede encontrarse sumando una serie infinita de términos alternantes que dan la energía potencial electrostática entre un ion Na^+ y sus seis vecinos Cl^- más cercanos, sus doce vecinos Na^+ que siguen en cercanía, y así sucesivamente (Fig. 43.14a). a) A partir de esta expresión muestre que los primeros tres términos de la serie producen $\alpha = 2.13$ para la estructura NaCl. b) ¿Esa serie converge rápidamente? Calcule el cuarto término como una comprobación.

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

43.1 Este valor máximo es la energía necesaria para separar infinitamente los iones de sodio y cloro. Éste en ocasiones se denomina *energía de activación* y, como se hizo notar con antelación, es de 1.4 eV.

43.2 El espaciamiento entre picos adyacentes es de aproximadamente 0.08×10^{13} Hz. Puesto que estas líneas están separadas en frecuencia por $\hbar/2\pi I$, el momento de inercia es 1.05×10^{-34} J·s/$(2\pi)(0.08 \times 10^{13}$ Hz$) = 2.1 \times 10^{-47}$ kg·m^2, lo cual no es muy diferente del valor para la molécula de CO calculada en el ejemplo 43.1.

43.3 A cualquier temperatura sobre el cero absoluto, la energía interna k_BT (≈ 0.025 eV cerca de una temperatura ambiente ≈ 300 K) está disponible, y esta energía provoca que algunos de los electrones tengan energías mayores que E_F. La función de distribución Fermi-Dirac $f(E)$ proporciona la probabilidad de encontrar un electrón en un nivel de energía particular. En la figura 43.21b, dicha probabilidad no suele ser de 1.0 para electrones que tienen energías iniciales ligeramente menores E_F porque dichos electrones pueden absorber algo de la energía interna disponible y ahora tienen energías mayores que E_F. Esto produce un valor distinto de cero de $f(E)$ para energías ligeramente mayores que E_F.

43.4 En la frontera azul-amarillo en la banda 3*s*. Algunos electrones en el área azul 3*s* tienen suficiente energía para moverse dentro del área amarilla 3*s*. En consecuencia, la frontera horizontal en la figura 43.20 y la parte curva de la figura 43.21b representan la misma cosa.

43.5 No. Si la ley de Ohm se obedeciera, la corriente I sería directamente proporcional a la diferencia de potencial ΔV a través del dispositivo (véase la Ec. 27.8, $I = \Delta V/R$). En vez de ello la curva en la figura 43.30 tiene una pendiente que varía con ΔV.

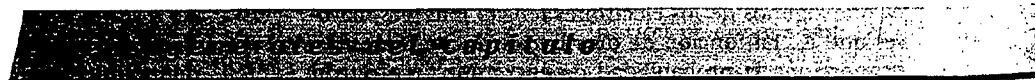
ACERTIJO

Esta sorprendente fotografía fue creada usando una técnica llamada *visualización por resonancia magnética* (MRI, por sus siglas en inglés). Ser capaces de ver detalles de la estructura interna del cuerpo es obviamente de gran beneficio para los médicos. Cuando este procedimiento médico se desarrolló por primera vez, los pacientes en ocasiones se resistían a someterse a ella porque originalmente se le llamó prueba de resonancia magnética nuclear. La gente tenía miedo de las implicaciones de la palabra *nuclear*. ¿Tenían razón para temer? ¿Cómo se forman tales imágenes? *(SBHA/Tony Stone Images)*



capítulo

44 Estructura nuclear



En 1896, año que marca el nacimiento de la física nuclear, el físico francés Henri Becquerel (1852-1908) descubrió radiactividad en compuestos de uranio. Una gran cantidad de investigación siguió a este descubrimiento en un intento por atender la naturaleza de la radiación emitida por los núcleos radiactivos. El trabajo pionero de Rutherford mostró que la radiación emitida era de tres tipos: rayos alfa, beta y gamma, clasificados de acuerdo con la naturaleza de su carga eléctrica y su capacidad para penetrar la materia e ionizar el aire. Experimentos posteriores mostraron que los rayos alfa son núcleos de helio; los rayos beta, electrones; y los rayos gamma fotones de alta energía.

En 1911 Rutherford, Geiger y Marsden efectuaron los experimentos de dispersión de partículas alfa descritos en la sección 42.1. Tales experimentos establecieron que a) el núcleo de un átomo puede considerarse esencialmente como una masa puntual y una carga puntual, y que b) la mayor parte de la masa atómica está contenida en el núcleo. Estudios subsecuentes revelaron la presencia de un nuevo tipo de fuerza, la fuerza nuclear de corto alcance, la cual es predominante a distancias de menos de aproximadamente 10^{-14} m y cero en grandes distancias.

Otros acontecimientos importantes en el desarrollo de la física nuclear incluyen

- La observación de reacciones nucleares en 1930 por Cockroft y Walton empleando núcleos de partículas aceleradas artificialmente
- El descubrimiento del neutrón en 1932 por Chadwick y la conclusión de que los neutrones integran casi la mitad del núcleo
- El descubrimiento de la radiactividad artificial en 1933 por Joliot e Irene Curie
- El descubrimiento de la fisión nuclear en 1938 por Hahn y Strassmann
- El desarrollo del primer reactor de fisión controlada en 1942 por Fermi y sus colaboradores

En el presente capítulo se estudian las propiedades y estructura del núcleo atómico. Se comienza por describir las propiedades básicas de los núcleos y después se analizan las fuerzas nucleares y la energía de enlace, modelos nucleares y el fenómeno de radiactividad. También se analizan las reacciones nucleares y los diversos procesos por medio de los cuales decaen los núcleos.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚCLEOS

Todos los núcleos están compuestos por dos tipos de partículas: protones y neutrones. La única excepción es el núcleo de hidrógeno ordinario, el cual es un solo protón. Al describir el núcleo atómico se usan las siguientes cantidades:

- El **número atómico** Z, que es igual al número de protones en el núcleo (el número atómico a veces se denomina *número de carga*)
- El **número neutrónico** N, que es igual al número de neutrones en el núcleo
- El **número de masa** A, que es igual al número de **nucleones** (neutrones más protones) en el núcleo

Al representar núcleos es conveniente usar el símbolo ^A_ZX para mostrar cuántos protones y neutrones están presentes, donde X representa el símbolo químico del elemento. Por ejemplo, $^{56}_{26}\text{Fe}$ (hierro) tiene número de masa 56 y número atómico 26; por tanto, contiene 26 protones y 30 neutrones. Cuando no haya dudas se omite el subíndice Z gracias a que el símbolo químico siempre puede utilizarse para determinar Z.

Los núcleos de todos los átomos de un elemento particular contienen el mismo número de protones, pero a menudo contienen diferentes números de neutrones.

Como se hizo notar en la sección 1.2, los núcleos que se relacionan de esta forma se denominan **isótopos.**

Isótopos

Los isótopos de un elemento tienen el mismo valor Z pero diferentes valores de N y A.

La abundancia natural de isótopos puede diferir sustancialmente. Por ejemplo ${}^{11}_{6}C$, ${}^{12}_{6}C$, ${}^{13}_{6}C$ y ${}^{14}_{6}C$ son cuatro isótopos del carbono. La abundancia natural del isótopo ${}^{12}_{6}C$ es casi de 98.9%, en tanto que la del isótopo ${}^{13}_{6}C$ es de sólo casi 1.1%. Algunos isótopos, como el ${}^{11}_{6}C$ y el ${}^{14}_{6}C$, no se producen naturalmente pero pueden producirse en el laboratorio mediante reacciones nucleares o por rayos cósmicos.

Incluso el elemento más simple, el hidrógeno, tiene isótopos: ${}^{1}_{1}H$, el núcleo de hidrógeno ordinario, ${}^{2}_{1}H$, deuterio, y ${}^{3}_{1}H$, tritio.

Carga y masa

El protón conduce una sola carga positiva, igual en magnitud a la carga e del electrón ($|e| = 1.6 \times 10^{-19}$ C). Como su nombre indica, el neutrón es eléctricamente neutro. Como el neutrón no tiene carga, es difícil de detectar.

Las masas nucleares pueden medirse con gran precisión con el uso del espectrómetro de masas (véase la sección 29.5) y el análisis de las reacciones nucleares. El protón tiene aproximadamente 1 836 veces la masa del electrón; las masas del protón y el neutrón son casi iguales. En el capítulo 1 se definió la unidad de masa atómica u, de tal modo que la masa de un átomo del isótopo ${}^{12}C$ es exactamente 12 u, donde 1 u, = 1.660 540 × 10^{-27} kg. De acuerdo con esta definición, el protón y el neutrón tienen cada uno una masa de aproximadamente 1 u, en tanto que el electrón tiene una masa que es sólo una pequeña fracción de este valor:

$$\text{Masa del protón} = 1.007\,276 \text{ u}$$

$$\text{Masa del neutrón} = 1.008\,665 \text{ u}$$

$$\text{Masa del electrón} = 0.000\,548\,6 \text{ u}$$

Uno puede preguntarse cómo seis protones y seis neutrones, cada uno con una masa mayor a 1 u, se pueden combinar con seis electrones para formar un átomo de carbono-12 que tiene una masa de exactamente 12 u. La masa adicional de las partículas separadas aparece como energía de enlace cuando las partículas se combinan para formar el núcleo, lo cual se analizará con más detalle en la sección 44.3.

TABLA 44.1 Masa de partículas seleccionadas en diversas unidades

	Masa		
Partícula	**kg**	**u**	**MeV/c^2**
Protón	$1.672\,62 \times 10^{-27}$	1.007 276	938.28
Neutrón	$1.674\,93 \times 10^{-27}$	1.008 665	939.57
Electrón	$9.109\,39 \times 10^{-31}$	$5.48\,579 \times 10^{-4}$	0.510 999
Átomo de ${}^{1}_{1}H$	$1.673\,53 \times 10^{-27}$	1.007 825	938.783
Núcleo de ${}^{4}_{2}He$	$6.644\,66 \times 10^{-27}$	4.001 506	3 727 [illegible]
Átomo de ${}^{12}_{6}C$	$1.992\,65 \times 10^{-27}$	12.000 000	11 [illegible]

Como la energía en reposo de una partícula está dada por $E_R = mc^2$, con frecuencia es conveniente expresar la unidad de masa atómica en función de su *energía en reposo equivalente.* Para una unidad de masa atómica se tiene

$$E_R = mc^2 = (1.660\,540 \times 10^{-27}\ \text{kg})(2.997\,924\,58 \times 10^8\ \text{m/s})^2$$
$$= 931.494\ \text{MeV}$$

donde se ha utilizado la conversión 1 eV = $1.602\,177 \times 10^{-19}$ J.

Los físicos nucleares a menudo expresan la masa en términos de la unidad MeV/c^2, donde

$$1\ \text{u} \equiv 931.494\ \text{MeV}/c^2$$

Las masas de algunos núcleos y átomos se proporcionan en la tabla 44.1. Las masas y algunas otras propiedades de isótopos seleccionados se proporcionan en el apéndice A.3.

EJEMPLO 44.1 La unidad de masa atómica

Use el número de Avogadro para mostrar que 1 u = 1.66×10^{-27} kg.

Solución A partir de la definición de la mol dada en la sección 1.3, se sabe exactamente que 12 g (= 1 mol) de ^{12}C contiene el número de Avogadro de átomos, donde $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ átomos/mol. Así, la masa de un átomo de carbono es

$$\text{Masa de un átomo } ^{12}\text{C} = \frac{0.012\ \text{kg}}{6.02 \times 10^{23}\ \text{átomos}}$$
$$= 1.99 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

Puesto que un átomo de ^{12}C se define de modo que tenga una masa de 12 u se encuentra que

$$1\ \text{u} = \frac{1.99 \times 10^{-26}\ \text{kg}}{12.0} = 1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

El tamaño y la estructura de los núcleos

En los experimentos de dispersión de Rutherford, núcleos de átomos de helio con carga positiva (partículas alfa) se dirigían a una delgada pieza de hoja metálica. Conforme las partículas alfa atravesaban la hoja, con frecuencia pasaban cerca de un núcleo del metal. Debido a la carga positiva, tanto en las partículas incidentes como en los núcleos, aquéllas se desviaban de sus trayectorias en línea recta por la fuerza repulsiva de Coulomb. ¡Algunas partículas incluso rebotaban justo hacia atrás!
Estas partículas se movían en apariencia directamente hacia un núcleo, en un curso de choque frontal.

Rutherford empleó conservación de energía con el fin de encontrar una expresión para la distancia de separación d a la cual una partícula alfa que se acercaba a un núcleo de manera frontal se regresaba por la repulsión de Coulomb. En este choque frontal —razonó—, la energía cinética de la partícula incidente debe convertirse por completo en energía potencial eléctrica cuando la partícula se detiene en el punto de máximo acercamiento y da la vuelta (Fig. 44.1). Si se iguala la energía cinética inicial de una partícula alfa con la energía potencial eléctrica del sistema (partícula alfa de masa m más núcleo blanco de número atómico Z), se tiene

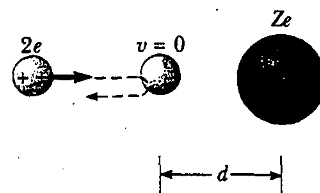


Figura 44.1 Una partícula alfa rumbo a una colisión frontal con un núcleo de carga Ze. Debido a la repulsión de Coulomb entre cargas iguales, la partícula alfa se acerca a una distancia d del núcleo, llamada distancia de máximo acercamiento.

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = k_e\frac{q_1q_2}{r} = k_e\frac{(2e)(Ze)}{d}$$

Resolviendo para d, la distancia de máximo acercamiento, se obtiene

$$d = \frac{4k_eZe^2}{mv^2}$$

A partir de esta expresión Rutherford encontró que las partículas alfa se acercaban a los núcleos hasta 3.2×10^{-14} m cuando la hoja era de oro. Así, el radio del núcleo de oro debe ser menor que este valor. Para átomos de plata se encontró que la distancia de máximo acercamiento era de 2×10^{-14} m. A partir de los resultados de sus experimentos de dispersión Rutherford concluyó que la carga positiva en un átomo se concentra en una pequeña esfera, a la cual dio el nombre de núcleo, cuyo radio no es mayor que aproximadamente 10^{-14} m.

Ya que tales longitudes tan pequeñas son comunes en física nuclear, una unidad de longitud conveniente que se utiliza con frecuencia es el femtómetro (fm), llamado algunas veces **fermi**, definido como

$$1 \text{ fm} \equiv 10^{-15} \text{ m}$$

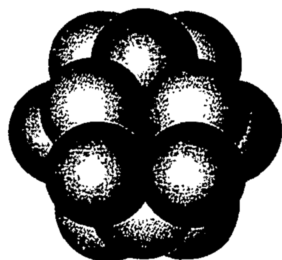


Figura 44.2 Un núcleo se puede modelar como un grupo de esferas estrechamente empacadas, donde cada esfera es un nucleón.

A principios de 1920 se sabía que el núcleo de un átomo contenía Z protones y tenía una masa casi equivalente a la de A protones donde, en promedio, $A \approx 2Z$ para núcleos ligeros ($Z \leq 20$) y $A > 2Z$ para núcleos pesados. Con el fin de explicar la masa nuclear, Rutherford propuso que cada núcleo también debía contener $A - Z$ partículas neutras que llamó neutrones. En 1932 el físico británico James Chadwick (1891-1974) descubrió el neutrón y fue galardonado con el premio Nobel por este importante trabajo.

Desde los experimentos de dispersión de Rutherford, numerosos experimentos han demostrado que la mayoría de los núcleos son aproximadamente esféricos y tienen un radio promedio dado por

Radio nuclear

$$r = r_0 A^{1/3} \tag{44.1}$$

donde r_0 es una constante igual a 1.2×10^{-15} m y A es el número de masa. Ya que el volumen de una esfera es proporcional al cubo de su radio, se desprende de la ecuación 44.1 que el volumen de un núcleo (supuesto esférico) es directamente proporcional a A, el número total de nucleones. Dicha proporcionalidad sugiere que *todos los núcleos tienen casi la misma densidad.* Cuando los nucleones se combinan para formar un núcleo, lo hacen como si fueran esferas empaquetadas apretadamente (Fig. 44.2), lo cual ha llevado a una analogía entre el núcleo y una gota de líquido, donde la densidad de la gota es independiente de su tamaño. El modelo de la gota líquida se estudiará en la sección 44.4.

EJEMPLO **El volumen y densidad de un núcleo**

Encuentre a) una expresión aproximada para la masa de un núcleo de número de masa A, b) una expresión para el volumen de este núcleo en función de A, y c) un valor numérico para la densidad del núcleo.

Solución a) La masa del protón es aproximadamente igual a la del neutrón. De modo que, si la masa de una de estas partículas es m, la masa del núcleo es aproximadamente Am.

b) Si se supone que el núcleo es esférico, y se emplea la ecuación 44.1, se encuentra que el volumen es

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi r_0^3 A$$

c) La densidad nuclear es

$$\rho_n = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{Am}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = \frac{3m}{4\pi r_0^3}$$

Al considerar $r_0 = 1.2 \times 10^{-15}$ m, y $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, se encuentra que

$$\rho_n = \frac{3(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}{4\pi(1.2 \times 10^{-15} \text{ m})^3} = 2.3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

La densidad nuclear es aproximadamente 2.3×10^{14} veces tan grande como la densidad del agua ($\rho_{agua} = 1.0 \times 10^3$ kg/m^3).

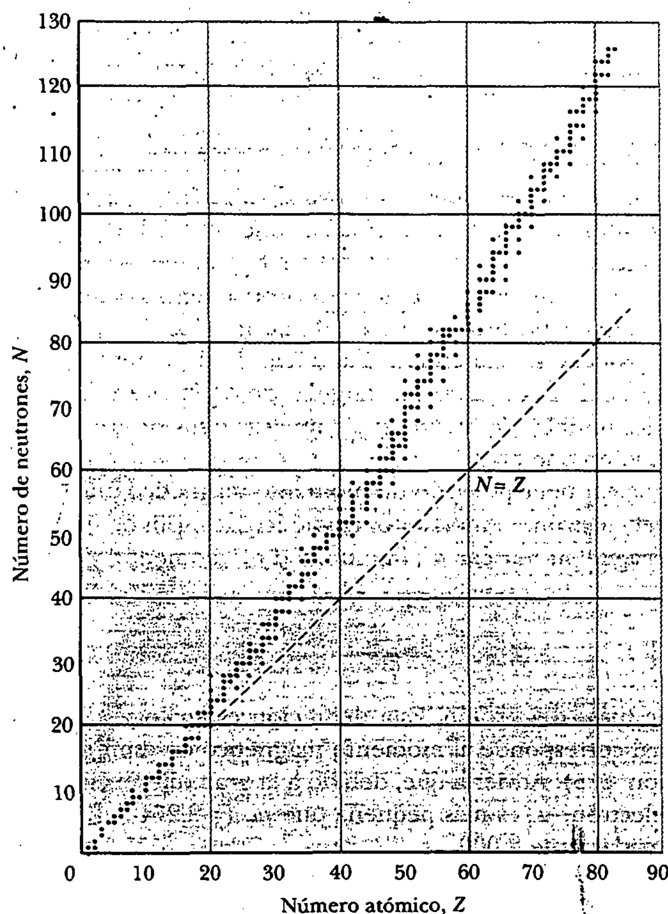
Ejercicio Si la Tierra fuese comprimida hasta que tuviese esta densidad, ¿cuán grande sería?

Respuesta ¡Sería una esfera de 370 m de diámetro!

Estabilidad nuclear

Ya que el núcleo se considera como un grupo de protones y neutrones empaquetado estrechamente, es posible que a usted le sorprenda que pueda existir. En virtud de que cargas similares (los protones) muy próximas ejercen fuerzas de Coulomb repulsivas muy grandes entre sí, estas fuerzas deberían causar que el núcleo se separara. Sin embargo, los núcleos son estables gracias a la presencia de la **fuerza nuclear**, una fuerza atractiva de muy corto alcance (más o menos 2 fm) que actúa entre todas las partículas nucleares. Los protones se atraen entre sí por medio de la fuerza nuclear, y al mismo tiempo se repelen mutuamente mediante la fuerza de Coulomb. La fuerza nuclear actúa también entre pares de neutrones y entre neutrones y protones.

Hay alrededor de 400 núcleos estables; cientos de otros núcleos se han observado, pero éstos son inestables. En la figura 44.3 se proporciona una gráfica de número de neutrones N *versus* número atómico Z para varios núcleos estables. Los núcleos estables se representan por los puntos azules, los cuales se encuentran en un estrecho intervalo llamado *línea de estabilidad*. Observe que los núcleos ligeros son más estables si contienen un número igual de protones y neutrones; es decir, si $N = Z$. También advierta que los núcleos pesados son más estables si el número de neutrones es mayor que el de protones —sobre $Z = 20$, la línea de estabilidad se desvía hacia arri-



web Para una versión muy detallada y "clicable" de la figura 44.3 visite Brookhaven National Lab en **www.dne.bnl.gov/CoN/index.html**

Figura 44.3 Número de neutrones N *versus* número atómico Z para núcleos estables (puntos azules). Estos núcleos se encuentran en una estrecha banda llamada línea de estabilidad. La línea discontinua corresponde a la condición $N = Z$.

ba desde la línea que representa $N = Z$—. Lo anterior puede comprenderse reconociendo que, conforme aumenta el número de protones, aumenta la intensidad de la fuerza de Coulomb, lo cual tiende a romper el núcleo separándolo. En consecuencia, son necesarios más neutrones para mantener el núcleo estable, pues éstos sólo experimentan la fuerza nuclear atractiva. Con el tiempo, las fuerzas de Coulomb repulsivas entre protones no pueden compensarse mediante la adición de más neutrones. Así ocurre cuando $Z = 83$, lo cual significa que los elementos que contienen más de 83 protones no tienen núcleos estables.

Pregunta sorpresa 44.1

Los puntos azules en la figura 44.3 forman una secuencia de grupos orientados verticalmente. ¿Qué representan estos grupos?

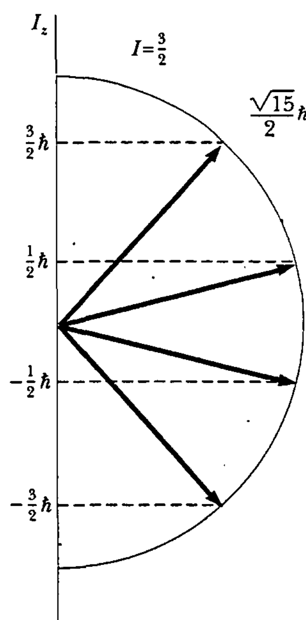


Figura 44.4 Posibles orientaciones del vector *momentum* angular del espín nuclear y sus proyecciones a lo largo del eje *z* para el caso $I = \frac{3}{2}$.

Es interesante observar que la mayor parte de los núcleos estables tienen valores pares de A. Además, sólo ocho núcleos tienen valores impares tanto para Z como para N. Ciertos valores de Z y N corresponden a núcleos con estabilidad inusualmente alta. Estos valores, denominados **números mágicos**, son

$$Z \text{ o } N = 2, 8, 20, 28, 50, 82 \qquad \textbf{(44.2)}$$

Por ejemplo, la partícula alfa (dos protones y dos neutrones), que tiene $Z = 2$ y $N = 2$, es muy estable. La inusual estabilidad de núcleos con números mágicos progresivamente mayores indica una estructura de capas del núcleo similar a la estructura de capas atómicas. En la sección 44.4 se estudia brevemente un modelo nuclear, el modelo de partícula independiente, que explica los números mágicos.

Espín nuclear y momento magnético de espín

En el capítulo 42 se analizó el hecho de que el electrón tiene un *momentum* angular intrínseco, al cual se le denominó espín. Los núcleos también tienen espín debido a que sus partículas componentes —neutrones y protones— tienen cada una un espín intrínseco $\frac{1}{2}$, así como *momentum* angular orbital dentro del núcleo. La magnitud del *momentum* angular nuclear es $\sqrt{I(I+1)}\hbar$, donde I se llama **número cuántico de espín nuclear**, y puede ser un entero o la mitad de un entero. El valor máximo de la componente z del vector *momentum* angular de espín es $I\hbar$. La figura 44.4 ilustra las orientaciones posibles del vector espín nuclear y sus proyecciones a lo largo del eje z para el caso en que $I = \frac{3}{2}$.

El espín nuclear tiene asociado un momento magnético nuclear correspondiente, similar al del electrón. El momento magnético de espín de un núcleo se mide en términos del **magnetón nuclear** μ_n, una unidad de momento definida como

Magnetón nuclear

$$\mu_n \equiv \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05 \times 10^{-27}\ \text{J/T} \qquad \textbf{(44.3)}$$

donde m_p es la masa del protón. Esta definición es análoga a la del magnetón de Bohr μ_B, la cual corresponde al momento magnético de espín de un electrón libre (véase la sección 42.5). Advierta que, debido a la gran diferencia entre las masas del protón y del electrón, μ_n es más pequeña que μ_B (= 9.274×10^{-24} J/T) por un factor de aproximadamente 2 000.

El momento magnético de un protón libre es 2.792 8 μ_n. Por desgracia, no hay una teoría general del magnetismo nuclear que explique este valor. Sorprendentemente, el neutrón sin carga también tiene un momento magnético, el cual tiene un valor de −1.913 5 μ_n. El signo menos indica que este momento es opuesto al *momentum* angular de espín del neutrón. La existencia de un momento magnético para el

neutrón sugiere que éste no es fundamental sino que, en vez de ello, tiene una estructura subyacente. Tal estructura se estudiará en el capítulo 46.

Pregunta sorpresa 44.2

¿Qué esperaría usted que no cambie sustancialmente entre diferentes isótopos de un elemento: a) la masa atómica, b) el momento magnético de espín nuclear, c) propiedades químicas?



RESONANCIA MAGNÉTICA NUCLEAR Y VISUALIZACIÓN POR RESONANCIA MAGNÉTICA

Los momentos magnéticos nucleares, así como los momentos magnéticos electrónicos, realizan un movimiento de precesión cuando se colocan en un campo magnético externo. La frecuencia a la cual lo hacen, conocida como **frecuencia de precesión de Larmor** ω_p, es directamente proporcional a la magnitud del campo magnético. Lo anterior se describe de manera esquemática en la figura 44.5a, donde el campo magnético externo está a lo largo del eje z. Por ejemplo, la frecuencia de Larmor de un protón en un campo magnético de 1 T es de 42.577 MHz. La energía potencial del momento de dipolo magnético $\boldsymbol{\mu}$ en un campo magnético externo **B** está dada por $-\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$. Cuando el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ está alineado con el campo tan próximamente como la física cuántica permite, la energía potencial del momento de dipolo en el campo tiene su valor mínimo $E_{\text{mín}}$. Cuando la proyección de $\boldsymbol{\mu}$ es tan antiparalela al campo como es posible, la energía potencial tiene su valor máximo $E_{\text{máx}}$. En general, existen otros estados energéticos entre aquellos valores que corresponden a las direcciones cuantizadas del momento magnético respecto al campo. Para un núcleo con espín $\frac{1}{2}$, existen sólo dos estados permitidos, con energías $E_{\text{mín}}$ y $E_{\text{máx}}$. Estos dos estados de energía se muestran en la figura 44.5b.

Frecuencia de precesión de Larmor

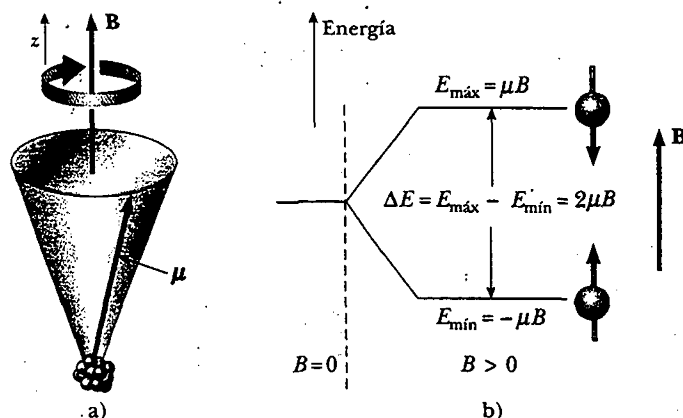


Figura 44.5 a) Cuando un núcleo se coloca en un campo magnético externo **B**, el momento magnético de espín nuclear realiza precesión en torno al campo magnético con una frecuencia proporcional a la magnitud del campo. b) Un núcleo con espín $\frac{1}{2}$ puede ocupar uno de dos estados de energía cuando se coloca en un campo magnético externo. El estado de energía más bajo $E_{\text{mín}}$ corresponde al caso en que el espín está alineado con el campo tanto como es posible, y el estado de energía más alto $E_{\text{máx}}$ corresponde al caso en que el espín es opuesto al campo tanto como es posible.

Resonancia magnética nuclear

Si se emplea una técnica llamada **RMN**, por **resonancia magnética nuclear**, es posible observar transiciones entre estos dos estados de espín. Un campo magnético constante (**B** en la Fig. 44.5a) se introduce para definir un eje z. Un segundo campo magnético, débil y oscilante, se aplica perpendicular a **B**. Cuando la frecuencia del campo oscilante se ajusta para igualar la frecuencia de precesión de Larmor de los núcleos en la muestra, actúa un momento de torsión en los momentos magnéticos que realizan precesión causando que se "muevan rápidamente" entre los dos estados de espín mostrados en la figura 44.5b. Dichas transiciones producen una absorción neta de energía por los núcleos, una absorción que puede detectarse de manera electrónica.

Un diagrama del aparato empleado en resonancia magnética nuclear se ilustra en la figura 44.6. La energía absorbida por los núcleos es suministrada por el generador que produce el campo magnético oscilante. La resonancia magnética nuclear, y una técnica relacionada conocida como *resonancia del espín del electrón*, son métodos muy importantes para estudiar sistemas nucleares y atómicos, así como la manera en que estos sistemas interactúan con sus alrededores.

web
Para más información sobre la MRI y muchos otros temas concernientes a la física visite:
http://physics.miningco.com/msubtext.htm

Una técnica de diagnóstico médico ampliamente utilizada, la **visualización por resonancia magnética** (**MRI**, por sus siglas en inglés) se basa en la resonancia magnética nuclear. Puesto que casi dos tercios de los átomos en el cuerpo humano son hidrógeno (el cual proporciona una señal intensa), la MRI trabaja en forma excepcional para visualizar tejidos internos. El paciente se coloca dentro de un gran solenoide que suministra un campo magnético constante en el tiempo, cuya magnitud varía espacialmente a través del cuerpo. Debido a la variación en el campo, los protones en diferentes partes del cuerpo realizan precesión a diferentes frecuencias, por lo que la señal de resonancia puede utilizarse para proporcionar información acerca de las posiciones de los protones. Una computadora se emplea para analizar la información de la posición y proporcionar datos con los cuales construir una imagen final. Una exploración con MRI mostrando increíbles detalles en la estructura interna del cuerpo se presenta en la figura 44.7.

La principal ventaja de la MRI sobre otras técnicas de imágenes es que produce daño celular mínimo. Los fotones asociados con las señales de radiofrecuencia usadas en la MRI tienen energías aproximadas de sólo 10^{-7} eV. Ya que las intensidades de los enlaces moleculares son mucho más grandes (casi 1 eV), la radiación de las radiofrecuencias causa poco daño celular. En comparación, los rayos X tienen energías que varían de 10^4 a 10^6 eV y pueden causar un daño celular considerable.

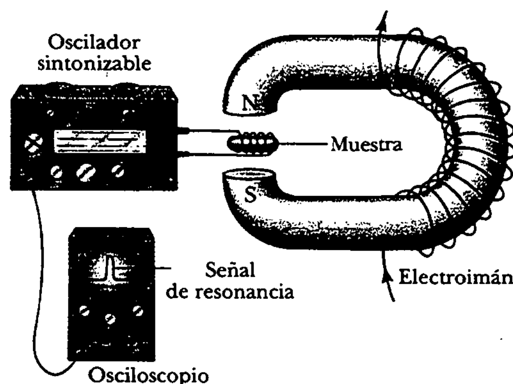


Figura 44.6 Arreglo experimental para resonancia magnética nuclear. El campo magnético de la radiofrecuencia creado por la bobina que rodea la muestra y es proporcionado por el oscilador de frecuencia variable debe ser perpendicular al campo magnético constante generado por el electroimán. Cuando los núcleos en la muestra alcanzan la condición de resonancia, los núcleos absorben energía del campo de radiofrecuencia de la bobina, y esta absorción cambia las características del circuito, en el cual la bobina está incluida. La mayoría de los modernos espectrómetros RMN usan imanes superconductores a intensidades de campo fijas y operan a frecuencias de aproximadamente 200 MHz.

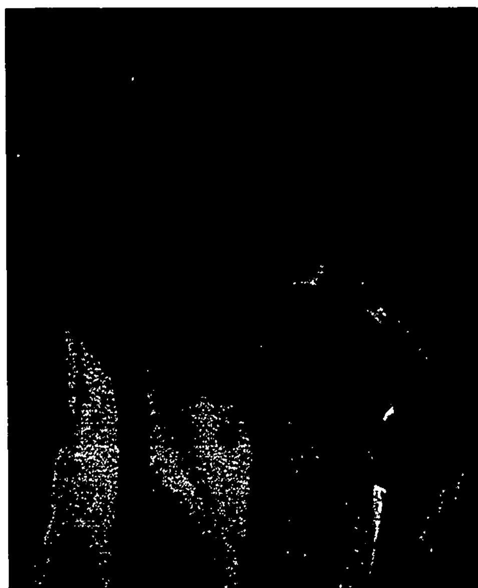


Figura 44.7 Imagen de una rodilla explorada con MRI. *(Susie Leavines/Photo Researchers, Inc.)*

En consecuencia, a pesar de algunos temores de los individuos acerca de la palabra *nuclear* asociada con la MRI, ¡la radiación de radiofrecuencia involucrada es bastante más segura que los rayos X que estos individuos pueden aceptar con mayor facilidad! Una desventaja de la MRI es que el equipo requerido para realizar el procedimiento es muy costoso.

¡El campo magnético producido por el solenoide es suficiente para levantar un carro, y la señal de radio es de aproximadamente la misma magnitud que la de una pequeña estación transmisora comercial!

ENERGÍA DE ENLACE Y FUERZAS NUCLEARES

La masa total de un núcleo siempre es menor que la suma de las masas de sus nucleones individuales. Ya que la masa es una medida de la energía, **la energía total del sistema ligado (el núcleo) es menor que la energía combinada de los nucleones separados**. Como se aprendió en el ejemplo 39.14, esta diferencia de energía recibe el nombre de **energía de enlace** del núcleo y puede considerarse como la energía que debe sumarse al núcleo para dividirlo en sus componentes. Por tanto, con el fin de separar un núcleo en protones y neutrones, debe entregarse energía al sistema.

La conservación de la energía y la relación de equivalencia masa-energía de Einstein muestran que la energía de enlace E_b de cualquier núcleo de masa M_A es

$$E_b(\text{MeV}) = (Zm_p + Nm_n - M_A) \times 931.494\ \text{MeV/u} \qquad \textbf{(44.4)}$$

Energía de enlace de un núcleo

donde m_p es la masa del protón, m_n es la masa del neutrón y todas las masas están expresadas en unidades de masa atómica. En la práctica, con frecuencia es más conveniente utilizar la masa de átomos neutros (masa nuclear más masa de los electrones) al calcular la energía de enlace debido a que los espectrómetros de masas por lo general miden masas atómicas.[1]

[1] Es posible usar masas atómicas en lugar de masas nucleares debido a que las masas del electrón se cancelan en estos cálculos.

En la figura 44.8 se presenta una gráfica de la energía de enlace por nucleón E_b/A, como una función del número de masa A correspondiente a diversos núcleos estables. Observe que la curva en la figura 44.8 tiene su máximo cerca de $A = 60$. Esto significa que los núcleos con números de masa mayores o menores que 60 no están tan fuertemente enlazados como los que están cerca de la mitad de la tabla periódica. Los valores más altos de la energía de enlace por nucleón cerca de $A = 60$ implican que se libera energía cuando un núcleo pesado se divide, o *fisiona*, en dos núcleos más ligeros. La energía se libera en la fisión porque los nucleones en cada núcleo producto están enlazados más fuertemente entre ellos de lo que están los nucleones en el núcleo original. El importante proceso de fisión y un segundo importante proceso de *fusión*, en el cual la energía se libera conforme los núcleos ligeros se combinan, se consideran en detalle en el capítulo 45.

Otra importante característica de la figura 44.8 es que la energía de enlace por nucleón es más o menos constante en alrededor de 8 MeV por nucleón para todos los núcleos con $A > 50$. Para tales núcleos se dice que las fuerzas nucleares están *saturadas*; esto significa que, en la estructura empaquetada apretadamente que se muestra en la figura 44.2, un nucleón particular puede formar enlaces atractivos sólo con un número limitado de otros nucleones.

Pregunta sorpresa 44.3

La figura 44.8 indica que, arriba respecto de $A = 50$, es necesaria una cantidad de energía aproximadamente constante para remover un nucleón desde el núcleo. Compare esto con la figura 42.16, la cual muestra las cantidades de energía ampliamente variables necesarias para remover un electrón de un átomo. ¿Por qué existe tal diferencia entre las dos gráficas?

La figura 44.8 proporciona claridad en preguntas fundamentales acerca del origen de los elementos químicos. En los inicios de la vida del universo hubo sólo hidrógeno y helio. Nubes de gas cósmico y polvo se fundieron bajo fuerzas gravitacionales para formar estrellas. Conforme las estrellas maduraban, producían elementos más pesados a partir de los elementos más ligeros contenidos en ellas, comenzando con fusión de átomos de hidrógeno para formar helio. El proceso continuaba mientras la estrella envejecía, generando átomos que tenían números atómicos cada vez más grandes, hasta el isótopo de hierro con $A = 56$, el cual está en el pico de la curva mostrada en la figura 44.8.

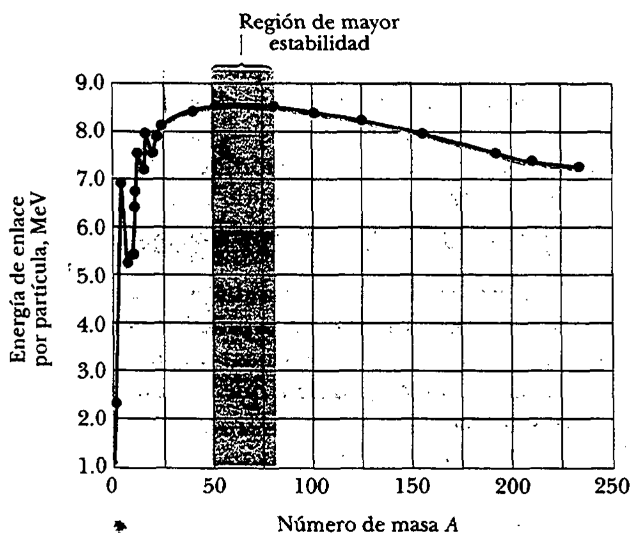
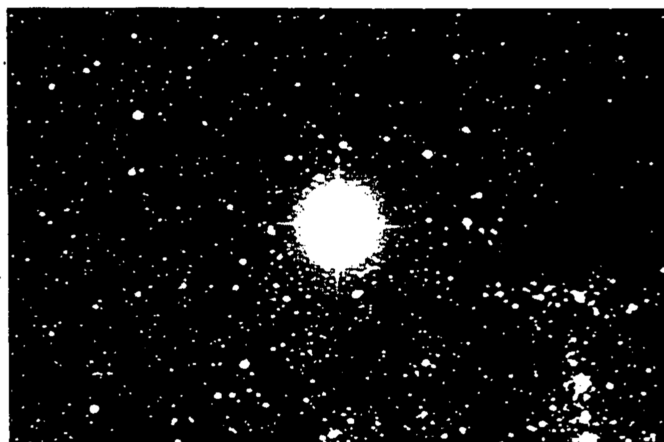


Figura 44.8 Energía de enlace por nucleón *versus* número de masa para núcleos que yacen a lo largo de la línea de estabilidad en la figura 44.3.

Antes Después

Imágenes antes y después de la supernova 1987A en la Gran Nube Magallánica. La flecha en la imagen "antes" apunta a la estrella que explotó. Ésta fue la supernova más brillante vista dentro de los pasados varios cientos de años. *(Anglo-Australian Telescope Board)*

Toma energía adicional crear elementos con números de masa más grandes que 56 debido a sus más bajas energías de enlace por nucleón. Tal energía viene de la explosión supernova que ocurrió al final de la existencia de algunas grandes estrellas. Por tanto, todos los átomos pesados en su cuerpo fueron producidos a partir de las explosiones de estrellas antiguas. ¡Usted literalmente está hecho de polvo estelar!

Las características generales de la fuerza nuclear responsable de la energía de enlace de los núcleos se han revelado en una amplia variedad de experimentos y son las siguientes:

- La fuerza nuclear es atractiva y es la fuerza más intensa en la naturaleza.
- Es una fuerza de corto alcance que se reduce a cero cuando la separación entre nucleones es mayor que varios fermis. Este limitado alcance es puesto en evidencia por los experimentos de dispersión y se muestra en la gráfica de energía potencial neutrón-protón de la figura 44.9a, la cual se obtuvo dispersando neutrones desde un blanco que contiene hidrógeno. La profundidad de energía potencial del pozo es de 40 a 50 MeV y contiene una componente repulsiva intensa que evita que la distancia de separación entre nucleones sea menor que aproximadamente 0.4 fm.
- La magnitud de la fuerza nuclear depende de las orientaciones relativas del espín de los nucleones.
- Los experimentos de dispersión y otras pruebas indirectas muestran que la fuerza nuclear es independiente de la carga de los nucleones interactuantes. Por esta razón es posible utilizar electrones de alta rapidez para sondear las propiedades de los núcleos. La independencia de la carga significa también que la única diferencia entre las interacciones neutrón-protón (n-p) y protón-protón (p-p) es que la energía potencial p-p es una superposición de interacciones nuclear y de Coulomb, como se ilustra en la figura 44.9b. A distancias de separación menores que 2 fm, las energías potenciales p-p y n-p son casi idénticas, pero para distancias mayores que esto, la energía potencial p-p es positiva con un máximo de alrededor de 1 MeV a 4 fm.

Pregunta sorpresa 44.4

¿Alguna curva en la figura 44.9 puede ser vertical en algún punto?

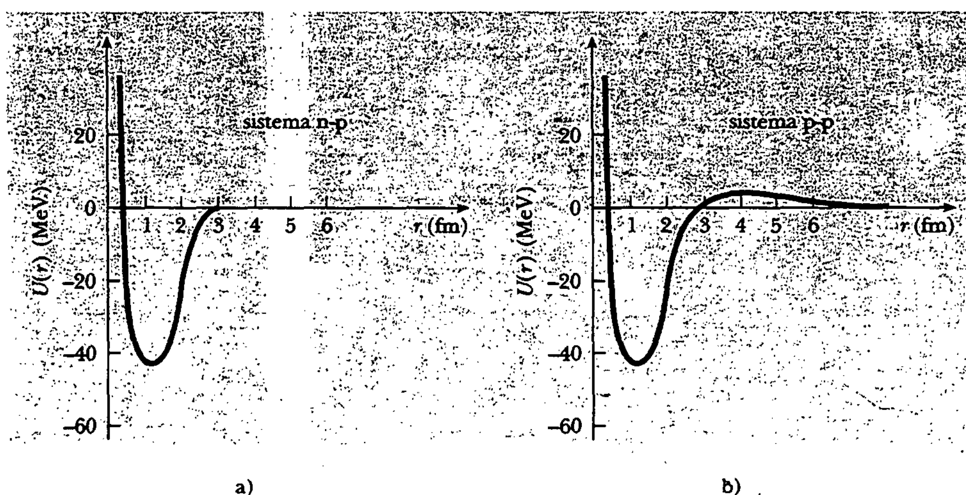


Figura 44.9 a) Energía potencial *versus* distancia de separación para un sistema neutrón-protón. b) Energía potencial *versus* distancia de separación para un sistema protón-protón. La diferencia en las dos curvas se debe a la gran repulsión de Coulomb en el caso de la interacción protón-protón.



MODELOS NUCLEARES

A pesar de que los detalles de las fuerzas nucleares siguen sin comprenderse bien, se han propuesto varios modelos nucleares muy útiles para entender las características generales de los datos experimentales nucleares y los mecanismos responsables de la energía de enlace. El modelo de la gota líquida explica la energía de enlace nuclear, y el modelo de partícula independiente explica la existencia de isótopos estables.

Modelo de la gota líquida

En 1936 Bohr propuso considerar a los nucleones como si fueran moléculas en una gota de líquido. En el **modelo de gota líquida**, los núcleos interactúan fuertemente entre sí y experimentan frecuentes choques cuando se agitan dentro del núcleo. Este movimiento de agitación es similar al movimiento agitado térmicamente de moléculas en una gota de líquido.

Tres efectos principales afectan la energía de enlace del núcleo en el modelo de la gota líquida:

- **El efecto de volumen.** La figura 44.8 muestra que, para $A > 50$, la energía de enlace por nucleón es aproximadamente constante, lo cual indica que la fuerza nuclear satura. Ello indica que la energía de enlace del núcleo es proporcional a A y, por tanto, proporcional al volumen nuclear. La contribución a la energía de enlace del núcleo entero es C_1A, donde C_1 es una constante ajustable.
- **El efecto de superficie.** Ya que los nucleones sobre la superficie de la gota tienen menor número de vecinos que los que se encuentran en el interior, los nucleones superficiales reducen la energía de enlace en una cantidad proporcional a su número. Ya que el número de nucleones superficiales es proporcional al área de la superficie $4\pi r^2$ del núcleo, y como $r^2 \propto A^{2/3}$ (Ec. 44.1), el término de la superficie se puede expresar como $-C_2A^{2/3}$, donde C_2 es una constante.

- **El efecto de la repulsión de Coulomb.** Cada protón repele a cualquier otro protón en el núcleo. La correspondiente energía potencial por par de protones interactuantes es $k_e e^2/r$, donde k_e es la constante de Coulomb. La energía de Coulomb total representa el trabajo requerido para congregar Z protones desde el infinito hasta una esfera de volumen V. Esta energía es proporcional al número de pares de protones $Z(Z-1)/2$ e inversamente proporcional al radio nuclear. En consecuencia, la reducción de energía que resulta del efecto de Coulomb es $-C_3Z(Z-1)/A^{1/3}$.

Otro pequeño efecto que disminuye la energía de enlace es importante para núcleos que tienen un número excesivo de neutrones —en otras palabras, núcleos pesados—. Tal efecto origina un término de energía de enlace de la forma $-C_4(N-Z)^2/A$.

Sumando estas contribuciones se obtiene la energía de enlace total

$$E_b = C_1A - C_2A^{2/3} - C_3\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - C_4\frac{(N-Z)^2}{A} \qquad \textbf{(44.5)}$$

Fórmula semiempírica de energía de enlace

Esta ecuación, llamada a menudo **fórmula semiempírica de energía de enlace**, contiene cuatro constantes que son arregladas para adecuar la expresión con los datos experimentales. Para núcleos con $A \geq 15$, las constantes tienen los valores

$$C_1 = 15.7 \text{ MeV} \qquad C_2 = 17.8 \text{ MeV}$$

$$C_3 = 0.71 \text{ MeV} \qquad C_4 = 23.6 \text{ MeV}$$

La ecuación 44.5, junto con estas constantes, se adecuan bastante bien a los valores conocidos de las masas nucleares. Sin embargo, el modelo de la gota líquida no explica algunos detalles más finos de la estructura nuclear, como las reglas de estabilidad y el *momentum* angular. Por otra parte, sí proporciona una descripción cualitativa de la fisión nuclear, mostrada de modo esquemático en la figura 44.10.

El modelo de partícula independiente

En el segundo modelo del núcleo, el **modelo de partícula independiente**, con frecuencia denominado *modelo de capa*, se supone que cada nucleón existe en una capa, similar a una capa atómica para un electrón. Los nucleones existen en estados de energía cuantizados y hay pocas colisiones entre ellos. Obviamente, las suposiciones de este modelo difieren de manera considerable de las efectuadas en el modelo de la gota líquida.

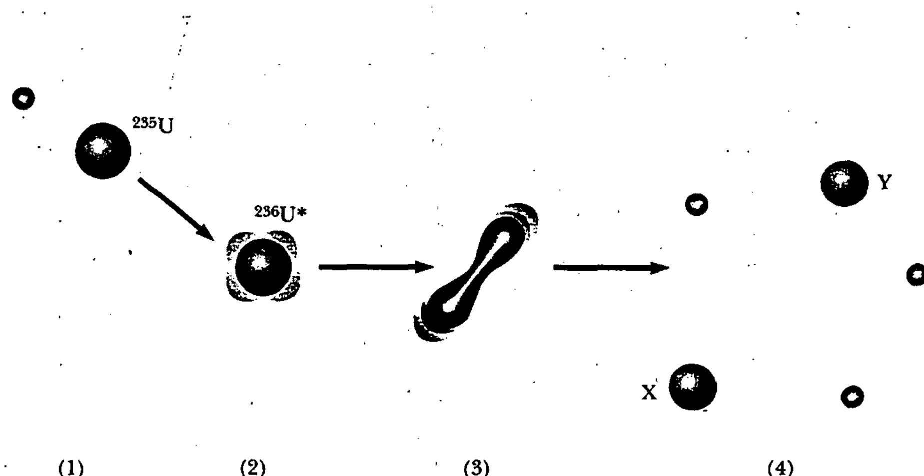


Figura 44.10 Pasos que conducen a la fisión de acuerdo con el modelo de la gota líquida del núcleo.

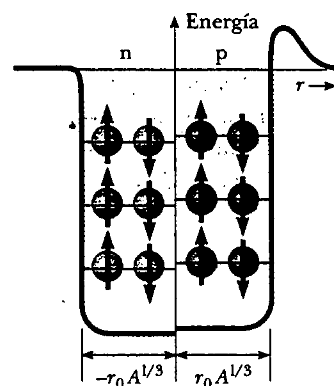


Figura 44.11 Un potencial de pozo cuadrado que contiene 12 nucleones. Los círculos rojos representan protones, y los círculos verdes representan neutrones. Los niveles de energía para los protones son ligeramente mayores que los de los neutrones debido al potencial de Coulomb experimentado por los protones. La diferencia en los niveles aumenta conforme aumenta Z. Advierta que sólo dos nucleones con espines opuestos pueden ocupar un nivel dado, como lo requiere el principio de exclusión.



[illegible] por su desarrollo del modelo de capa del núcleo (modelo de partícula independiente), publicado en 1950. Un modelo similar fue desarrollado de manera simultánea por Hans Jensen, un científico alemán. Goeppert-Mayer y Jensen fueron recompensados con el premio Nobel de física en 1963 por sus extraordinarios trabajos en la comprensión de la estructura del núcleo. *(Cortesía de Louise Barker/AIP Niels Bohr Library)*

Los estados cuantizados ocupados por los nucleones pueden ser descritos por un conjunto de números cuánticos. Puesto que tanto el neutrón como el protón tienen espín $\frac{1}{2}$, el principio de exclusión puede aplicarse para describir los estados permitidos (como se hizo para los electrones en el capítulo 42). Es decir, cada estado puede contener sólo dos protones (o dos neutrones) que tengan espines *opuestos* (Fig. 44.11). Los protones tienen un conjunto de estados permitidos, y éstos difieren de aquellos para los neutrones porque las dos especies se mueven en diferentes potenciales de pozo. Los niveles de energía del protón son más altos que los niveles del neutrón porque los protones experimentan una superposición de energía potencial de Coulomb y energía potencial nuclear, en tanto que los neutrones sólo experimentan una energía potencial nuclear.

Un factor que influye en las características observadas de los estados base nucleares es el efecto de *espín-órbita nuclear.* A diferencia de la interacción espín-órbita entre el espín de un electrón y su movimiento orbital en un átomo, la cual es de origen magnético, el efecto espín-órbita para nucleones en un núcleo se debe a la fuerza nuclear. Éste es mucho más intenso que en el caso atómico y tiene signo opuesto. Cuando estos efectos se toman en cuenta, el modelo de partícula independiente es capaz de explicar los números mágicos observados.

Por último, el modelo de partícula independiente es de gran ayuda para entender por qué los núcleos que contienen un número par de protones y neutrones son más estables que otros núcleos. (Hay 160 isótopos par-par.) Cualquier estado particular se llena cuando contiene dos protones (o dos neutrones) que tienen espines opuestos. Un protón o neutrón adicional puede añadirse al núcleo sólo a expensas de aumentar la energía de éste. El aumento de energía conduce a un núcleo que es menos estable que el original. Una inspección cuidadosa de los núcleos estables muestra que la mayoría tiene una estabilidad especial cuando sus nucleones se combinan en pares, lo cual produce un *momentum* angular total de cero. Lo anterior explica el gran número de núcleos de gran estabilidad (aquellos con altas energías de enlace) con los números mágicos dados por la ecuación 44.2.

RADIACTIVIDAD

En 1896 Henri Becquerel descubrió accidentalmente que cristales de sulfato de uranil potasio emiten una radiación invisible que puede velar una placa fotográfica cuando la placa se cubre para evitar la luz. Después de una serie de experimentos, concluyó que la radiación emitida por los cristales era de un nuevo tipo, la cual no requería estimulación externa y era tan penetrante que podía velar placas fotográfi-

cas protegidas e ionizar gases. Dicho proceso de emisión espontánea de radiación por uranio de inmediato recibió el nombre de **radiactividad**.

Experimentos subsecuentes realizados por otros científicos mostraron que otras sustancias eran más poderosamente radiactivas. Las investigaciones más importantes de este tipo fueron conducidas por Marie y Pierre Curie. Después de varios años de cuidadosos y laboriosos procesos de separación química sobre toneladas de pechblenda, un mineral radiactivo, los Curie informaron el descubrimiento de dos elementos antes desconocidos, los cuales eran radiactivos. Éstos recibieron el nombre de polonio y radio. Experimentos subsecuentes, incluido el famoso trabajo de Rutherford acerca de la dispersión de partículas alfa, sugirieron que la radiactividad es el resultado del *decaimiento*, o desintegración, de núcleos inestables.

En las sustancias radiactivas ocurren tres tipos de decaimiento radiactivo: decaimiento alfa (α), en el cual las partículas emitidas son núcleos de ^{4}He; decaimiento beta (β), en el cual las partículas emitidas son o electrones o positrones, y decaimiento gamma (γ), en el cual los "rayos" emitidos son fotones de alta energía. Un **positrón** es una partícula como el electrón en todos los aspectos excepto que el positrón tiene una carga de $+e$ (en otras palabras, el positrón es el *gemelo antimateria* del electrón). El símbolo e^- se emplea para designar un electrón, y e^+ designa a un positrón.

Es posible distinguir entre las tres formas de radiación empleando el esquema descrito en la figura 44.12. La radiación de una muestra radiactiva se dirige hacia una región en la cual hay un campo magnético. El haz de radiación se divide en tres componentes, dos que se desvían en direcciones opuestas y la tercera que no sufre cambio de dirección. A partir de esta simple observación es posible concluir que la radiación del haz no desviado no porta carga (el rayo gamma), la componente desviada hacia arriba corresponde a las partículas cargadas positivamente (partículas alfa), y la componente desviada hacia abajo corresponde a partículas con carga negativa (e^-). Si el haz incluye un positrón (e^+), éste se desvía hacia arriba como la partícula alfa, pero siguiendo una trayectoria diferente debida a su pequeña masa.

Los tres tipos de radiación tienen potencias de penetración bastante diferentes. Las partículas alfa apenas penetran una hoja de papel, las partículas beta (electrones y positrones) pueden penetrar unos cuantos milímetros de aluminio y los rayos gamma pueden penetrar varios centímetros de plomo.

La rapidez a la cual un proceso de decaimiento particular ocurre en una muestra radiactiva es proporcional al número de núcleos radiactivos presentes (es decir,



Marie Curie (1867-1934) En 1903 la científica polaca Marie Curie compartió el premio Nobel de física con su esposo Pierre y con Becquerel por sus estudios de las sustancias radiactivas. En 1911 recibió un premio Nobel de química por su descubrimiento de radio y polonio. Murió de leucemia provocada por años de exposición a sustancias radiactivas. "Yo insisto en creer que las ideas que entonces nos guiaron son las únicas que pueden conducir a un verdadero progreso social. No podemos esperar construir un mundo mejor sin mejorar al individuo. Hacia este fin cada uno de nosotros debe trabajar hacia su propio mayor desarrollo, aceptando al mismo tiempo su parte de responsabilidad en la vida general de la humanidad." *(FPG International)*



Las manecillas y números de este reloj luminoso contienen cantidades minúsculas de radio mezcladas con un material fosforescente. El decaimiento radiactivo del radio causa que el reloj brille en la oscuridad. *(© 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs)*

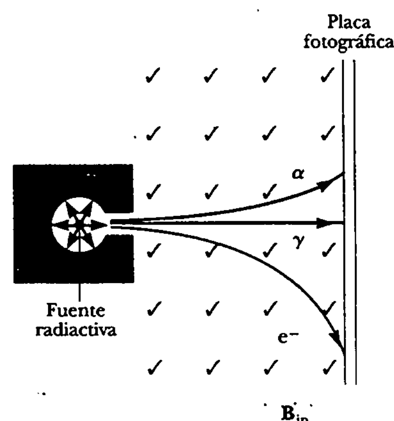


Figura 44.12 La radiación de una fuente radiactiva puede separarse en tres componentes mediante el uso de un campo magnético para desviar las partículas cargadas. La placa fotográfica a la derecha registra los eventos. El rayo gamma no es desviado por el campo magnético.

el número de núcleos que aún no han decaído). Si N es el número de núcleos radiactivos presentes en algún instante, la rapidez de cambio de N es

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \qquad \textbf{(44.6)}$$

donde λ, llamada **constante de decaimiento**, es la probabilidad de decaimiento por núcleo por segundo. El signo menos indica que dN/dt es negativa; es decir, N está disminuyendo en el tiempo.

La ecuación 44.6 se escribe en la forma

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt$$

cuya solución es

Decaimiento exponencial

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \textbf{(44.7)}$$

donde la constante N_0 representa el número de núcleos radiactivos en $t = 0$. La ecuación 44.7 muestra que el número de núcleos radiactivos en una muestra disminuye exponencialmente con el tiempo.

La **rapidez de decaimiento** R, que es el número de decaimientos por segundo, se obtiene diferenciando la ecuación 44.7 respecto del tiempo:

Ecuación de vida media

$$R = \left|\frac{dN}{dt}\right| = N_0 \lambda e^{-\lambda t} = R_0 e^{-\lambda t} \qquad \textbf{(44.8)}$$

donde $R = \lambda N$ y $R_0 = N_0\lambda$ es la rapidez de decaimiento en $t = 0$. La rapidez de decaimiento R de una muestra con frecuencia se conoce como su **actividad**. Advierta que tanto N como R disminuyen de manera exponencial con el tiempo. La gráfica de N *versus* t mostrada en la figura 44.13 ilustra la naturaleza exponencial del decaimiento.

Otro parámetro útil en la caracterización del decaimiento de un núcleo es la **vida media** $T_{1/2}$:

La vida media de una sustancia radiactiva es el tiempo que tarda en decaer la mitad de un número dado de núcleos radiactivos.

Al considerar $N = N_0/2$ y $t = T_{1/2}$ en la ecuación 44.7 se obtiene

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

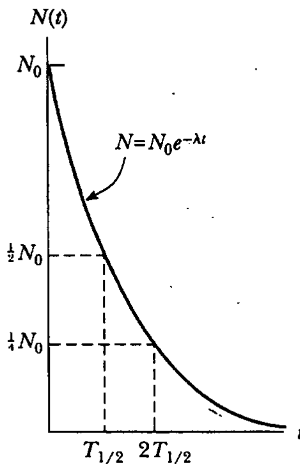


Figura 44.13 Gráfica de la ley del decaimiento exponencial para núcleos radiactivos. El eje vertical representa el número de núcleos radiactivos presentes en cualquier tiempo t, y el eje horizontal es el tiempo. El tiempo $T_{1/2}$ es la vida media de la muestra.

Al cancelar los factores N_0 y luego tomar los recíprocos de ambos lados se obtiene $e^{\lambda T_{1/2}} = 2$. Tomando el logaritmo natural de ambos lados se obtiene

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \qquad \textbf{(44.9)}$$

Ésta es una expresión conveniente que relaciona la vida media $T_{1/2}$ con la constante de decaimiento λ. Después de transcurrido un tiempo igual a una vida media, quedan (por definición) $N_0/2$ núcleos radiactivos; después de dos vidas medias, la mitad de éstos ha decaído y quedan $N_0/4$ núcleos radiactivos; después de tres vidas medias, quedan $N_0/8$, y así sucesivamente. En general, después de n vidas medias, el número de núcleos radiactivos que quedan es $N_0/2^n$.

Una unidad de actividad que se usa con frecuencia es el **curie** (Ci), definido como

El curie

$$1 \text{ Ci} \equiv 3.7 \times 10^{10} \text{ decaimientos/s}$$

Este valor se eligió originalmente debido a que es la actividad aproximada de 1 g de radio. La unidad de actividad del SI es el **becquerel** (Bq):

El becquerel

$$1 \text{ Bq} \equiv 1 \text{ decaimiento/s}$$

Por tanto, 1 Ci = 3.7×10^{10} Bq. El curie es una unidad bastante grande y las unidades de actividad empleadas más a menudo son el milicurie y el microcurie.

EJEMPLO ¿Cuántos núcleos quedan?

El isótopo carbono-14, $^{14}_{6}C$, es radiactivo y tiene una vida media de 5 730 años. Si usted empieza con una muestra de 1 000 núcleos de carbono-14, ¿cuántos quedarán todavía en 22 920 años?

Solución En 5 730 años la mitad de la muestra habrá decaído, quedando 500 núcleos de carbono-14. En otros 5 730 años (para un total de tiempo transcurrido de 11 460 años) el número se habrá reducido a 250 núcleos. Después de otros 5 730 años (tiempo total de 17 190 años) quedan 125. Finalmente, después de cuatro vidas medias (22 920 años), quedan aproximadamente 62.

Estos números representan circunstancias ideales. El decaimiento radiactivo es en realidad un proceso promediado sobre una gran cantidad de átomos, y el resultado real depende de la estadística. La muestra original en este ejemplo contenía sólo 1 000 núcleos, sin duda un número no muy grande. Por ende, si se contara el número restante después de una vida media para esta pequeña muestra, es posible que no sería exactamente 500.

Ejemplo 44.4 La actividad del radio

La vida media del núcleo radiactivo radio-226, $^{226}_{88}Ra$, es 1.6×10^3 años. a) ¿Cuál es la constante de decaimiento λ de este núcleo?

Solución Se puede calcular λ empleando la ecuación 44.9 y el hecho de que

$$T_{1/2} = (1.6 \times 10^3 \text{ años})(3.15 \times 10^7 \text{ s/año})$$
$$= 5.0 \times 10^{10} \text{ s}$$

Por tanto,

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{5.0 \times 10^{10} \text{ s}} = 1.4 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$$

Advierta que este resultado también es la probabilidad de que cualquier núcleo individual de $^{226}_{88}Ra$ decaerá en un intervalo de tiempo de 1 s.

b) Si una muestra contiene 3.0×10^{16} núcleos de $^{226}_{88}Ra$ en $t = 0$, determine su actividad en curies en este tiempo.

Solución Por definición (Ec. 44.8) R_0, la actividad en $t = 0$, es λN_0, donde N_0 es el número de núcleos radiactivos presentes en $t = 0$. Puesto que $N_0 = 3.0 \times 10^{16}$ se tiene

$$R_0 = \lambda N_0 = (1.4 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1})(3.0 \times 10^{16})$$
$$= (4.2 \times 10^5 \text{decaimientos/s})\left(\frac{1 \text{ Ci}}{3.7 \times 10^{10} \text{ decaimientos/s}}\right)$$
$$= 11 \ \mu\text{Ci}$$

c) ¿Cuál es la actividad en becquerels después de que la muestra tiene 2.0×10^3 años de edad?

Solución Utilice la ecuación 44.8, así como el hecho de que $t = 2.0 \times 10^3$ años $= (2.0 \times 10^3 \text{ años})(3.15 \times 10^7 \text{ s/año}) = 6.3 \times 10^{10}$ s:

$$R = R_0 e^{-\lambda t}$$
$$= (4.2 \times 10^5 \text{ decaimientos/s}) e^{(1.4 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1})(6.3 \times 10^{10} \text{ s})}$$
$$= 1.7 \times 10^5 \text{ decaimientos/s} = 1.7 \times 10^5 \text{ Bq}$$

Ejemplo 44.5 La actividad del carbono

Una muestra radiactiva contiene 3.50 μg de $^{11}_{6}C$ puro, el cual tiene una vida media de 20.4 min. a) Determine el número de núcleos en la muestra en $t = 0$.

Solución La masa molar de $^{11}_{6}C$ es aproximadamente 11.0 g/mol, en consecuencia, 11.0 g contienen un número de Avogadro (6.02×10^{23}) de núcleos. Por tanto, 3.50 μg contienen N núcleos, donde

$$\frac{N}{6.02 \times 10^{23} \text{ núcleos/mol}} = \frac{3.50 \times 10^{-6} \text{ g}}{11.0 \text{ g/mol}}$$
$$N = 1.92 \times 10^{17} \text{ núcleos}$$

b) ¿Cuál es la actividad en becquerels de la muestra inicialmente y después de 8.00 h?

Solución Con $T_{1/2} = 20.4$ min $= 1\,224$ s, la constante de decaimiento es

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{1\,224 \text{ s}} = 5.66 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

En consecuencia, la actividad inicial de la muestra es

$$R_0 = \lambda N_0 = (5.66 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1})(1.92 \times 10^{17})$$
$$= 1.09 \times 10^{14} \text{ Bq}$$

Se emplea la ecuación 44.8 para encontrar la actividad en $t = 8.00$ h $= 2.88 \times 10^4$ s:

$$R = R_0 e^{-\lambda t} = (1.09 \times 10^{14} \text{ Bq}) e^{-(5.66 \times 10^{-4} \text{s}^{-1})(2.88 \times 10^4 \text{s})}$$
$$= 9.09 \times 10^6 \text{ Bq}$$

Una lista de actividad *versus* tiempo para dicha situación se proporciona en la tabla 44.2.

Ejercicio Calcule el número de núcleos radiactivos que quedan después de 8.00 h.

Respuesta 1.60×10^{10} núcleos

TABLA 44.2 Actividad *versus* tiempo para la muestra descrita en el ejemplo 44.5

t (h)	R (Bq)
0	1.09×10^{14}
1	1.41×10^{13}
2	1.84×10^{12}
3	2.39×10^{11}
4	3.12×10^{10}
5	4.06×10^{9}
6	5.28×10^{8}
7	6.88×10^{7}
8	9.09×10^{6}

EJEMPLO 44. **Un isótopo radiactivo del yodo**

Una muestra del isótopo ^{131}I, el cual tiene una vida media de 8.04 días, tiene una actividad de 5.0 mCi en el momento del embarque. Después de recibirla en un laboratorio médico, la actividad es de 4.2 mCi. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido entre las dos mediciones?

Solución Use la ecuación 44.8 en la forma

$$\frac{R}{R_0} = e^{-\lambda t}$$

Tomando el logaritmo natural de cada lado se obtiene

$$\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = -\lambda t$$

$$1) \qquad t = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$$

Para determinar λ use la ecuación 44.9:

$$2) \qquad \lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{8.04\,\text{días}}$$

La sustitución de la ecuación 2) en la 1) produce

$$t = -\left(\frac{8.04\ \text{días}}{0.693}\right)\ln\left(\frac{42\ \text{mCi}}{5.0\ \text{mCi}}\right) = 2.0\ \text{días}$$

44.6 LOS PROCESOS DE DECAIMIENTO

Como se estableció en la sección anterior, un núcleo radiactivo decae espontáneamente por medio de uno de tres procesos: decaimiento alfa, decaimiento beta o decaimiento gamma. Ahora se estudiarán estos tres procesos con mayor detalle.

Decaimiento alfa

Un núcleo que emite una partícula alfa ($^4_2$He) pierde dos protones y dos neutrones. Por tanto, el número atómico Z disminuye en 2, el número de masa A disminuye en 4 y el número de neutrones N disminuye en 2. El decaimiento se escribe como



$$^A_Z\text{X} \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\text{Y} + {}^4_2\text{He} \qquad \textbf{(44.10)}$$

Decaimiento alfa

donde X recibe el nombre de **núcleo padre** y Y el de **núcleo hijo**. Como una regla general en cualquier ecuación de decaimiento como ésta, 1) la suma de los números de masa A debe ser la misma en ambos lados de la ecuación y 2) la suma de los números atómicos Z debe ser la misma en ambos lados de la ecuación. Como ejemplos, ^{238}U y ^{226}Ra son emisores alfa y decaen de acuerdo con los esquemas



$$^{238}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + {}^4_2\text{He} \qquad \textbf{(44.11)}$$



$$^{226}_{88}\text{Ra} \longrightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^4_2\text{He} \qquad \textbf{(44.12)}$$

La vida media para el decaimiento del ^{238}U es de 4.47×10^9 años, y la correspondiente al decaimiento del ^{226}Ra es de 1.60×10^3 años. El decaimiento del ^{226}Ra se muestra en la figura 44.14.

Cuando un elemento cambia en otro, como ocurre en el decaimiento alfa, el proceso se llama **decaimiento espontáneo**. En cualquier decaimiento espontáneo el *momentum* y la energía relativista deben conservarse. Si llama M_X a la masa del núcleo padre, M_Y a la masa del núcleo hijo y M_α a la masa de la partícula alfa, puede definir la **energía de desintegración** Q como

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2 \qquad \textbf{(44.13)}$$

La energía de desintegración Q

La energía Q está en joules cuando las masas están en kilogramos y c es la rapidez de la luz, 3.00×10^8 m/s. Sin embargo, cuando las masas se expresan en la más conveniente unidad u, Q puede calcularse en MeV empleando la expresión

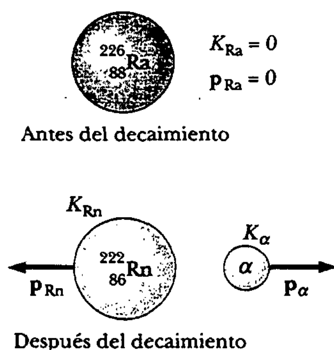


Figura 44.14 Decaimiento alfa del radio. El núcleo de radio está inicialmente en reposo. Después de que decae, el núcleo de radón tiene energía cinética K_{Rn} y *momentum* $\mathbf{p}_{Rn}$, y la partícula alfa tiene energía cinética K_α y *momentum* $\mathbf{p}_\alpha$.

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha) \times 931.494 \text{ MeV/u} \quad \textbf{(44.14)}$$

La energía de desintegración Q aparece en la forma de energía cinética en el núcleo hijo y la partícula alfa, y algunas veces se denomina como el valor Q de la reacción nuclear. En el caso del decaimiento del ^{226}Ra descrito en la figura 44.14, si el núcleo padre decae en reposo, la energía cinética de los productos es 4.87 MeV. La mayor parte de esta energía cinética se asocia con la partícula alfa ya que ésta es de mucho menos masa que el núcleo hijo ^{222}Rn. Es decir, puesto que el *momentum* debe conservarse, la partícula alfa más ligera retrocede con una rapidez mucho mayor que la del núcleo hijo. Generalmente, las partículas con menos masa llevan la mayor parte de la energía en los decaimientos nucleares.

Por último, es interesante notar que si uno supone que ^{238}U (o cualquier otro emisor alfa) decae emitiendo un protón o un neutrón, la masa de los productos de decaimiento sería mayor que la de los núcleos padre, correspondientes a valores de Q negativos. Estos valores negativos de Q indican que tales decaimientos propuestos no ocurren en forma espontánea.

EJEMPLO 44.7 La energía liberada cuando decae el radio

El núcleo de ^{226}Ra experimenta decaimiento alfa de acuerdo con la ecuación 44.12. Calcule el valor Q para este proceso. Considere que las masas son 226.025 402 u para el ^{226}Ra, 222.017 571 u para el ^{222}Rn, y 4.002 602 u para $^4_2$He, como se encuentran en la tabla A.3.

Solución Puede añadir 88 electrones a ambos lados de la reacción 44.12. Las diferencias en energías de enlace electrónico son despreciables cuando se comparan con el valor Q de los procesos de decaimiento nuclear. Entonces, utilice las masas de átomos neutros en la ecuación 44.14 para ver que

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha) \times 931.494 \text{ MeV/u}$$
$$= (226.025\,402 \text{ u} - 222.017\,571 \text{ u} - 4.002\,602 \text{ u}) \times 931.494 \text{ MeV/u}$$
$$= (0.005\,229 \text{ u}) \times (931.494 \text{ MeV/u}) = \boxed{4.87 \text{ MeV}}$$

Se deja como tarea (problema 57) mostrar que la energía cinética de la partícula alfa es aproximadamente 4.8 MeV, en tanto que el núcleo hijo en retroceso tiene sólo alrededor de 0.1 MeV.

Para comprender el mecanismo del decaimiento alfa imagine un sistema que consta de 1) la partícula alfa, ya formada como una entidad dentro del núcleo, y 2) el núcleo hijo que resultará cuando se emita la partícula alfa. La figura 44.15 muestra una gráfica de la energía potencial *versus* la distancia de separación r entre la partícula alfa y el núcleo hijo, donde la distancia marcada R es el alcance de la fuerza nuclear. La curva representa los efectos combinados de 1) la energía repulsiva de Coulomb, la cual proporciona el pico positivo para $r > R$, y 2) la fuerza atractiva nuclear, la cual ocasiona que la curva sea negativa para $r < R$. Como se vio en el ejemplo 44.7, la energía de desintegración Q es cercana a 5 MeV, la cual es la energía cinética aproximada de la partícula alfa, representada por la línea discontinua inferior en la figura 44.15.

De acuerdo con la física clásica, la partícula alfa está atrapada en un potencial de pozo. ¿Cómo, entonces, puede escapar alguna vez del núcleo? La respuesta a esta pregunta fue dada por primera vez por George Gamow (1904-1968) en 1928 e independientemente por R. W. Gurney y E. U. Condon en 1929, empleando mecánica cuántica. Brevemente, la visión de la mecánica cuántica es que siempre hay alguna probabilidad de que la partícula pueda efectuar efecto túnel a través de la barrera (véase la sección 41.7). Recuerde que la probabilidad de localizar la partícula depende de su función de onda ψ y de que la probabilidad de efecto túnel se mida mediante $|\psi|^2$. La figura 44.16 es un dibujo de la función de onda para una partícula de energía E que llega a una barrera rectangular de altura finita, una forma que se

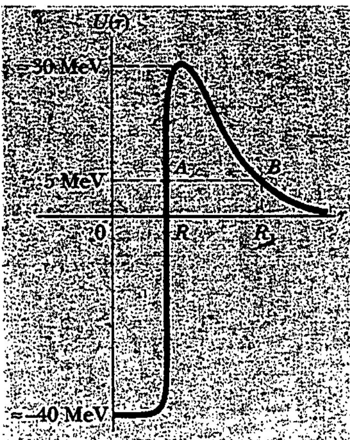


Figura 44.15 Energía potencial *versus* distancia de separación para un sistema que consta de una partícula alfa y un núcleo hijo. De manera clásica, la energía de la partícula alfa no es tan grande como para superar la barrera de energía, y así la partícula no sería capaz de escapar del núcleo. En realidad, la partícula alfa escapa mediante efecto túnel a través de la barrera.

asemeja a una barrera nuclear. Observe que la función de onda existe tanto en el interior como en el exterior de la barrera. Aunque la amplitud de la función de onda se reduce de manera considerable en el lado lejano de la barrera, su valor finito en esta región indica una pequeña pero finita probabilidad de que la partícula pueda penetrar la barrera. Afuera del alcance de la fuerza nuclear, la función ψ describe de manera correcta la probabilidad de que el núcleo decaerá. Aunque la probabilidad de decaimiento es constante en el tiempo, *el momento preciso de decaimiento no se puede predecir.* En general, la mecánica cuántica implica que el futuro es indeterminado. (Esto está en contraste con la mecánica clásica, donde la trayectoria de un objeto puede, en principio, calcularse con una precisión arbitrariamente elevada a partir del conocimiento preciso de sus coordenadas y velocidad iniciales y de las fuerzas que actúan sobre él.) Por tanto, las leyes fundamentales de la naturaleza son probabilísticas y, al parecer, Einstein estaba equivocado en su famoso enunciado, "Dios no juega a los dados".

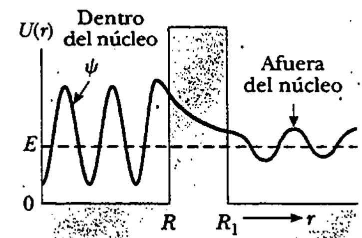


Figura 44.16 La energía potencial nuclear es modelada como una barrera rectangular —la región azul que se extiende de R a R_1—. La energía de la partícula alfa es E, la cual es menor que la altura de la barrera. De acuerdo con la mecánica cuántica, la partícula alfa tiene alguna oportunidad de realizar efecto túnel a través de la barrera, como está indicado mediante el tamaño finito de la función de onda para $r > R_1$.

El gato de Schrödinger y la probabilidad de decaimiento Un detector de radiación (véase la sección 45.6) puede emplearse para mostrar que un núcleo radiactivo decae al radiar una partícula en un momento particular y en una dirección particular. Para señalar los contrastes entre este resultado experimental y su función de onda, Erwin Schrödinger imaginó una caja con un gato adentro, una muestra radiactiva, un contador de radiación y un frasco de veneno. Cuando un núcleo en la muestra decae, el contador activa la administración de veneno letal al gato. La mecánica cuántica predice correctamente la probabilidad de encontrar al gato muerto cuando se abra la caja. Sin embargo, muchas preguntas surgen al considerar este intrigante experimento mental: Antes de que la caja sea abierta, ¿el gato tiene una función de onda que describe al gato como fraccionalmente muerto, con alguna oportunidad de estar vivo? ¿El acto de medir cambia el sistema de un estado probabilístico a un estado definido? Cuando una partícula emitida por un núcleo radiactivo se detecta en una ubicación particular, ¿la función de onda que describe la partícula cae a cero de manera instantánea en cualquier otra parte en el universo? ¿Existe una diferencia fundamental entre un sistema cuántico y un sistema macroscópico? Las respuestas a tales cuestionamientos básicamente se desconocen.

Pregunta sorpresa 44.5

En el decaimiento alfa la vida media del decaimiento desciende conforme asciende la energía del decaimiento. ¿Por qué ocurre esto?



Representación artística de la nave espacial *Pioneer 10*, al final de su vida útil, luego de 25 años de misión. La vista es del Sol y parte de la Vía Láctea. En los extremos de los dos largos brazos hay generadores termoeléctricos que crean electricidad a partir de la energía dada por ^{238}Pu conforme las partículas alfa que emite chocan con materiales en los alrededores. Al momento de su lanzamiento los generadores produjeron una potencia total de 160 W. Esta fuente de potencia radiactiva fue necesaria debido a que la gran distancia desde el Sol impedía el uso de paneles solares. *(Cortesía de la NASA Ames Home Page)*

Experimento sorpresa

Destape la cubierta de su detector de humo y vea si describe el elemento radiactivo que está en su interior. También puede ver una advertencia acerca de no desechar el detector en la basura. Mientras tiene el dispositivo abierto, también deberá verificar la batería.

El detector de humo Una aplicación salvavidas del decaimiento alfa se encuentra en el detector de humo casero mostrado en la figura 44.17. La mayoría de los detectores comunes utilizan un material radiactivo. El detector consiste de una cámara de ionización, un sensible detector de corriente y una alarma. Una débil fuente radiactiva (usualmente $^{241}_{95}$Am) ioniza el aire en la cámara del detector, creando partículas cargadas. Un voltaje se mantiene entre las placas dentro de la cámara, estableciendo una pequeña pero detectable corriente en el circuito externo. Mientras la corriente se mantenga, la alarma permanece desactivada. Sin embargo, si el humo ingresa a la cámara, los iones se unen a las partículas del humo. Las partículas más pesadas no son arrastradas tan fácilmente como lo hacen los iones más ligeros, lo cual provoca una disminución en la corriente del detector. El circuito externo percibe esta disminución en la corriente y activa la alarma.

Decaimiento beta

Cuando un núcleo radiactivo sufre decaimiento beta, el núcleo hijo contiene el mismo número de nucleones que el núcleo padre pero el número atómico cambia en 1, lo cual significa que el número de protones cambia:



$$^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + e^{-} \qquad \textbf{(44.15)}$$

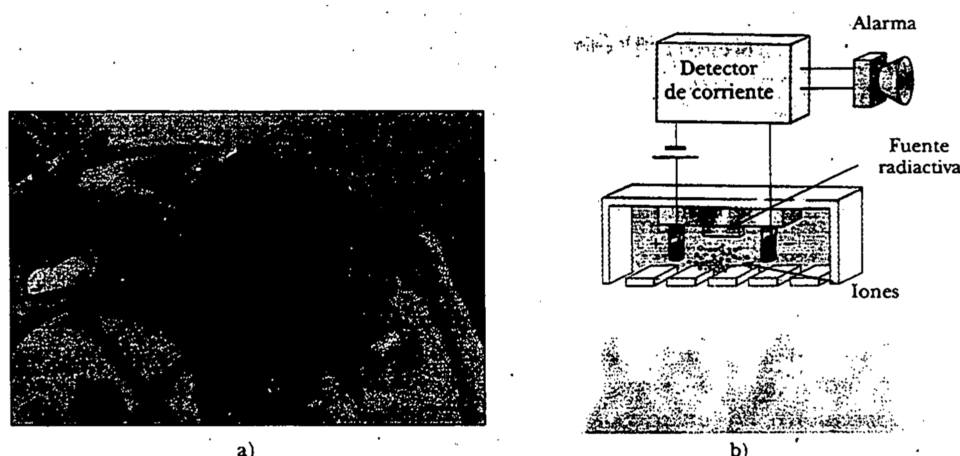


Figura 44.17 a) Un detector de humo usa decaimiento alfa para determinar si hay humo en el aire. b) El humo que entra en la cámara reduce la corriente detectada y provoca que suene la alarma. *(a, George Semple)*



$$^{A}_{Z}X \rightarrow {}_{Z-1}^{\ A}Y + e^{+} \qquad (44.16)$$

Decaimiento beta

donde, como se estudió en la sección 44.5, el símbolo e^- se usa para designar un electrón, e^+ para designar un positrón y el término general *partícula beta* para referirse a cualquiera de los dos. Como con el decaimiento alfa, tanto el número de nucleones como la carga total se conservan en el decaimiento beta. A partir del hecho de que A no cambia pero Z sí, se concluye que en el decaimiento beta, o un neutrón cambia a un protón (Ec. 44.15) o un protón cambia a un neutrón (Ec. 44.16). También es importante notar que el electrón o el positrón emitido en este decaimiento no está presente de antemano en el núcleo; se crea en el momento del decaimiento a partir de la energía en reposo del núcleo que decae.

Dos procesos de decaimiento beta típicos son



$$^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{14}_{7}N + e^{-} \qquad (44.17)$$



$$^{12}_{7}N \longrightarrow {}^{12}_{6}C + e^{+} \qquad (44.18)$$

Como se verá más adelante, *los decaimientos beta no son descritos por completo mediante estas expresiones*. En breve se darán razones para ello.

Considere la energía del sistema que experimenta decaimiento beta antes y después del decaimiento. Como con el decaimiento alfa, la energía debe conservarse. Se ha encontrado de manera experimental que las partículas beta a partir de un solo tipo de núcleo se emiten sobre un intervalo de energías continuo (Fig. 44.18). La energía cinética del sistema después del decaimiento es igual a la disminución en masa del sistema, es decir, el valor Q. Sin embargo, debido a que todos los núcleos que decaen en la muestra tienen la misma masa inicial, *el valor Q debe ser el mismo en cada decaimiento*. En vista de esto, ¿por qué las partículas emitidas tienen el intervalo de energías cinéticas mostrado en la figura 44.18? ¡La ley de la conservación de la energía parece violarse! Y esto se pone peor. Un análisis adicional de los procesos de decaimiento dados por las ecuaciones 44.15 y 44.16 muestra que ¡también se violan las leyes de conservación tanto del *momentum* angular (espín) como del *momentum* lineal!

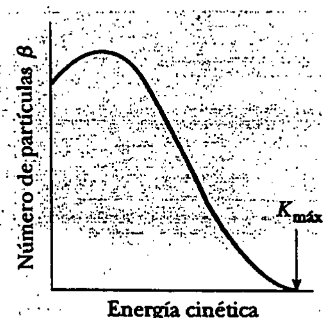


Figura 44.18 Curva de decaimiento beta típica. La máxima energía cinética observada por las partículas beta corresponde al valor Q para la reacción.

Después de gran cantidad de estudios experimentales y teóricos, Pauli, en 1930, propuso que debe estar presente una tercera partícula para llevarse la energía y el *momentum* "faltantes". Fermi nombró después a esta partícula **neutrino** (una partícula neutra pequeña), pues debía ser eléctricamente neutra y tener poca o ninguna masa. A pesar de que eludió la detección durante muchos años, el neutrino (símbolo ν), finalmente fue detectado de manera experimental en 1956. Tiene las siguientes propiedades:

Propiedades del neutrino

- Tiene carga eléctrica cero.
- Su masa es cero (en cuyo caso viaja a la rapidez de la luz) o muy pequeña; existe mucha evidencia experimental persuasiva reciente que sugiere que la masa del neutrino no es cero.
- Tiene un espín de $\frac{1}{2}$, el cual satisface la ley de la conservación del *momentum* angular en el decaimiento beta.
- Interactúa muy débilmente con la materia y, consecuentemente, es muy difícil de detectar.

Ahora se pueden escribir los procesos de decaimiento beta para el carbono-14 y el nitrógeno-12 (Ecs. 44.17 y 44.18) en su forma correcta:



$$^{14}_{6}\text{C} \longrightarrow {}^{14}_{7}\text{N} + e^- + \bar{\nu} \quad \textbf{(44.19)}$$



$$^{12}_{7}\text{N} \longrightarrow {}^{12}_{6}\text{C} + e^+ + \nu \quad \textbf{(44.20)}$$

donde el símbolo $\bar{\nu}$ representa al **antineutrino**, la antipartícula del neutrino. Un poco más adelante se estudiarán las antipartículas en el capítulo 46. Por ahora, basta decir que **un neutrino se emite en el decaimiento del positrón y un antineutrino se emite en el decaimiento del electrón.** Como con el decaimiento alfa, los decaimientos listados antes se analizan mediante la aplicación de las leyes de conservación, aunque deben emplearse expresiones relativistas para partículas beta porque su energía cinética es grande (por lo general 1 MeV) comparada con su energía en reposo de 0.511 MeV.

En la ecuación 44.19 el número de protones ha aumentado en uno y el número de neutrones ha disminuido en uno. Los procesos fundamentales del decaimiento e^- se escriben en términos de un neutrón cambiando en un protón del modo siguiente:



$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad \textbf{(44.21)}$$

El electrón y el antineutrino son expulsados del núcleo, con el resultado neto de que existe un protón de más y un neutrón de menos, consistente con los cambios en Z y $A - Z$. Un proceso similar ocurre en el decaimiento e^+, con un protón cambiando en un neutrón, un positrón y un neutrino.

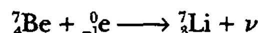
Un proceso que compite con el decaimiento e^+ es la **captura del electrón.** Éste ocurre cuando un núcleo padre captura uno de sus propios electrones orbitales y emite un neutrino. El producto final después del decaimiento es un núcleo cuya carga es $Z - 1$:

Captura del electrón



$$^{A}_{Z}\text{X} + {}^{0}_{-1}\text{e} \longrightarrow {}_{Z-1}^{\ \ \ A}\text{Y} + \nu \quad \textbf{(44.22)}$$

En la mayor parte de los casos es un electrón de la capa K el que se captura, y por esta razón al proceso se le denomina **captura K.** Un ejemplo de esto es la captura de un electrón por el $^{7}_{4}\text{Be}$:



$$^{7}_{4}\text{Be} + {}^{0}_{-1}\text{e} \longrightarrow {}^{7}_{3}\text{Li} + \nu$$

Ya que el neutrino es muy difícil de detectar, la captura del electrón por lo común se observa mediante los rayos X proporcionados como cascada descendente de electrones de capa superior para llenar los espacios vacíos creados en la capa K.

Finalmente, se especifican los valores Q para los procesos de decaimiento beta. Los valores Q para el decaimiento e^- y la captura del electrón están dados por $Q = (M_X - M_Y)c^2$, donde M_X y M_Y son las masas de átomos neutros. Los valores Q para el decaimiento e^+ están dados por $Q = (M_X - M_Y - 2m_e)c^2$. Dichas relaciones son útiles para determinar si un proceso es energéticamente posible.

Pregunta sorpresa 44.6

En el decaimiento beta la energía cinética del electrón o positrón emitido se encuentra en alguna parte dentro de un intervalo relativamente amplio de posibilidades. En el decaimiento alfa la energía cinética de la partícula alfa emitida puede tener sólo valores discretos. ¿Por qué existe esta diferencia?

Fechamiento con carbono

El decaimiento beta del ^{14}C (Ec. 44.19) se usa por lo común para fechar muestras orgánicas. Los rayos cósmicos en la atmósfera superior producen reacciones nucleares que crean ^{14}C. La proporción entre ^{14}C y ^{12}C en las moléculas de bióxido de carbono de la atmósfera terrestre tiene un valor constante de aproximadamente 1.3×10^{-12}. Los átomos de carbono en todos los organismos vivientes tienen esta misma proporción $^{14}C/^{12}C$ debido a que los organismos continuamente intercambian bióxido de carbono con sus alrededores. Sin embargo, cuando un organismo muere, ya no absorbe ^{14}C de la atmósfera, por lo que la proporción $^{14}C/^{12}C$ disminuye conforme el ^{14}C decae en una vida media de 5 730 años. Es, por tanto, posible medir la edad de un material al registrar su actividad de ^{14}C. Empleando esta técnica los científicos han podido identificar muestras de madera, carbón de leña, hueso y caparazón que vivieron hace 1 000 a 25 000 años. Este conocimiento ha ayudado a reconstruir la historia de los organismos vivos —incluso los humanos— durante este intervalo de tiempo.

Un ejemplo particularmente interesante es el fechamiento de los Pergaminos del Mar Muerto. Se trata de un grupo de manuscritos que fue descubierto por un pastor en 1947. La traducción mostró que eran documentos religiosos que incluían la mayor parte de los libros del Viejo Testamento. Debido a su importancia histórica y religiosa, los eruditos querían conocer su edad. El fechamiento con carbono aplicado al material en el cual estaban enrollados estableció su edad en aproximadamente 1 950 años.

EJEMPLO CONCEPTUAL **La edad del hombre de hielo**

En 1991 un turista alemán descubrió los restos bien preservados de un hombre, ahora conocido como el Hombre de hielo, atrapado en un glaciar en los Alpes italianos (Fig. 44.19). El fechamiento radiactivo con ^{14}C reveló que esta persona vivió hace aproximadamente 5 300 años. ¿Por qué los científicos fecharon la muestra usando ^{14}C, en lugar de ^{11}C, un emisor beta con una vida media de 20.4 min?

Solución Como el ^{14}C tiene una vida media de 5 730 años, la fracción de núcleos de ^{14}C restantes después de una vida media es tan alta como para permitir la medición de cambios exactos en la actividad de la muestra. El ^{11}C tiene una vida media muy corta, por lo que no es útil —su actividad disminuye hasta un valor muy pequeño que casi se desvanece respecto de la edad de la muestra, lo que hace imposible registrarla—.

Como una regla general, el isótopo elegido para fechar una muestra debería tener una vida media que sea del mismo orden de magnitud que la edad de la muestra. Si la vida media es mucho menor que la edad de la muestra, no quedará suficiente actividad para medir ya que casi toda la radiactividad original de los núcleos habrá decaído. Si la vida media es mucho mayor que la edad de la muestra, la cantidad de decaimiento que ha ocurrido desde que la muestra murió será demasiado pequeña para medir. Por ejemplo, si usted tiene un espécimen que se estima murió hace 50 años, ni el ^{14}C (5 730 años) ni el ^{11}C (20 min) son adecuados. Sin embargo, si usted conoce que su muestra contenía hidrógeno, usted puede medir la actividad de ^{3}H (tritio), un emisor beta que tiene una vida media de 12.3 años.



Figura 44.19 El Hombre de hielo, descubierto en 1991, cuando un glaciar italiano se derritió lo suficiente para exponer sus restos. Sus posesiones, particularmente sus herramientas, han arrojado luz sobre la forma en que la gente vivía en la Edad de Bronce. Se usó fechamiento con carbono-14 para determinar la época en que vivió esta persona. *(Paul Hanny/Gamma Liaison)*

EJEMPLO **Fechamiento radiactivo**

Un pedazo de 25.0 g de carbón de leña se encuentra en algunas ruinas de una ciudad antigua. La muestra indica una actividad R de 250 decaimientos/min del ^{14}C. ¿Cuánto tiempo tiene de haber muerto el árbol del cual proviene este carbón de leña?

Solución Primero, calcule la constante de decaimiento λ del ^{14}C, el cual tiene una vida media de 5 730 años.

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{(5\,730\text{ años})(3.15\times10^{7}\text{s/año})}$$

$$= 3.84\times10^{-12}\text{ s}^{-1}$$

El número de núcleos de ^{14}C puede calcularse en dos pasos. En primer lugar, el número de núcleos de ^{12}C en 25.0 g de carbón es

$$N(^{12}C) = \frac{6.02\times10^{23}\text{núcleos/mol}}{12.0\text{ g/mol}}(25.0\text{ g})$$

$$= 1.25\times10^{24}\text{núcleos}$$

Si se sabe que la proporción entre el ^{14}C y el ^{12}C en la muestra viva era de 1.3×10^{-12}, se ve que el número de núcleos de ^{14}C en 25.0 g *antes* del decaimiento fue

$$N_0(^{14}C) = (1.3\times10^{-12})(1.25\times10^{24}) = 1.6\times10^{12}\text{ núcleos}$$

Por tanto, la actividad inicial de la muestra fue

$$R_0 = N_0\lambda = (1.6\times10^{12}\text{ núcleos})(3.84\times10^{-12}\text{ s}^{-1})$$

$$= 6.14\text{ decaimientos/s} = 370\text{ decaimientos/min}$$

Ahora se utiliza la ecuación 44.8, la cual relaciona la actividad R a cualquier tiempo t con la actividad inicial R_0:

$$R = R_0e^{-\lambda t}$$

$$e^{-\lambda t} = \frac{R}{R_0}$$

Usando R = 250 decaimientos/min y R_0 = 370 decaimientos/min, se calcula t tomando el logaritmo natural en ambos lados de esta expresión:

$$-\lambda t = \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = \ln\left(\frac{250}{370}\right) = -0.39$$

$$t = \frac{0.39}{\lambda} = \frac{0.39}{3.84\times10^{-12}\text{ s}^{-1}}$$

$$= 1.0\times10^{11}\text{ s} = 3\,200\text{ años}$$

Decaimiento gamma

Muy a menudo, un núcleo que sufre decaimiento radiactivo se deja en un estado de energía excitado. El núcleo puede sufrir entonces un segundo decaimiento hasta un estado de energía inferior, tal vez hasta el estado base, emitiendo un fotón de alta energía:



$$^{A}_{Z}X^* \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma \qquad \textbf{(44.23)}$$

Decaimiento gamma

donde X* indica un núcleo en estado excitado. La vida media común de un estado nuclear excitado es de 10^{-10} s. Los fotones emitidos en un proceso de desexcitación de este tipo reciben el nombre de rayos gamma. Estos fotones tienen muy alta energía (1 MeV a 1 GeV) en relación con la energía de la luz visible (alrededor de 1 eV). Recuerde de las secciones 40.5 y 42.7 que la energía de un fotón emitido o absorbido por un átomo es igual a la diferencia de energía entre los dos estados electrónicos implicados en la transición. De modo similar, un fotón de rayos gamma tiene una energía hf que es igual a la diferencia de energía ΔE entre dos niveles de energía nuclear. Cuando un núcleo decae emitiendo un rayo gamma, el único cambio en el núcleo es que éste termina en un estado de energía inferior.

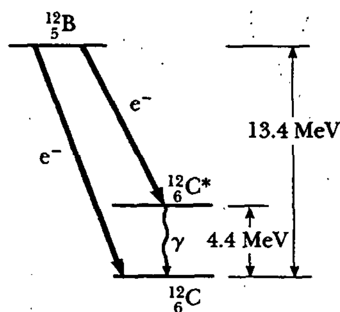


Figura 44.20 El núcleo ^{12}B experimenta decaimiento beta a cualquiera de dos niveles de ^{12}C: directamente al estado base o a un estado excitado. El decaimiento al estado excitado $^{12}C^*$ es seguido por decaimiento gamma al estado base.

Un núcleo puede alcanzar un estado excitado como consecuencia de una violenta colisión con otra partícula. Sin embargo, es más común que un núcleo esté en estado excitado después de que ha sufrido decaimiento alfa o beta. La siguiente secuencia de eventos representa una situación típica en la cual ocurre el decaimiento gamma:



$$^{12}_{5}B \longrightarrow {}^{12}_{6}C^* + e^- + \bar{\nu} \qquad \textbf{(44.24)}$$



$$^{12}_{6}C^* \longrightarrow {}^{12}_{6}C + \gamma \qquad \textbf{(44.25)}$$

La figura 44.20 muestra el esquema del decaimiento para ^{12}B, el cual sufre un decaimiento beta hacia cualquiera de dos niveles de ^{12}C. Puede 1) decaer directa-

TABLA 44.3 Diversos esquemas de decaimiento

Decaimiento alfa	${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$
Decaimiento beta (e^-)	${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}_{Z+1}^{A}Y + e^- + \bar{\nu}$
Decaimiento beta (e^+)	${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}_{Z-1}^{A}Y + e^+ + \nu$
Captura de electrón	${}^{A}_{Z}X + e^- \longrightarrow {}_{Z-1}^{A}Y + \nu$
Decaimiento gamma	${}^{A}_{Z}X^* \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$

mente hasta el estado base del ^{12}C emitiendo un electrón de 13.4 MeV, o 2) experimentar un decaimiento beta hasta un estado excitado de $^{12}C^*$ seguido por un decaimiento gamma hasta el estado base. Este último proceso produce la emisión de un electrón de 9.0 MeV y de un fotón de 4.4 MeV.

Los diversos caminos por medio de los cuales los núcleos radiactivos pueden experimentar decaimiento se resumen en la tabla 44.3.



RADIACTIVIDAD NATURAL

Los núcleos radiactivos por lo general se clasifican en dos grupos: 1) núcleos inestables encontrados en la naturaleza, los cuales dan lugar a **radiactividad natural**, y 2) núcleos inestables producidos en el laboratorio por medio de reacciones nucleares, los cuales exhiben **radiactividad artificial**.

Como se muestra en la tabla 44.4, hay tres series de núcleos radiactivos que ocurren naturalmente. Cada serie empieza con un isótopo radiactivo de larga vida específico cuya vida media es mayor que cualquiera de la de sus descendientes. Las tres series naturales empiezan con los isótopos ^{238}U, ^{235}U y ^{232}Th, y los correspondientes productos finales estables son tres isótopos del plomo: ^{206}Pb, ^{207}Pb y ^{208}Pb. La cuarta serie en la tabla 44.4 empieza con el ^{237}Np y tiene como su producto final estable al ^{209}Bi. El elemento ^{237}Np es un elemento *transuránico* (uno que tiene un número atómico mayor que el del uranio) no encontrado en la naturaleza. Este elemento tiene una vida media de "sólo" 2.14×10^6 años.

La figura 44.21 muestra los decaimientos sucesivos para la serie del ^{232}Th. Observe que el ^{232}Th experimenta primero decaimiento alfa hasta el ^{228}Ra. Luego, el ^{228}Ra experimenta dos decaimientos beta sucesivos hasta el ^{228}Th. La serie continúa y finalmente se ramifica cuando llega al ^{212}Bi. En este punto hay dos posibilidades de decaimiento. El final de la serie de decaimiento es el isótopo estable ^{208}Pb. La secuencia ilustrada en la figura 44.21 puede caracterizarse por una disminución en el número de masa, ya sea de 4 (para decaimiento alfa) o de 0 (para decaimientos beta o gamma). Las dos series del uranio son más complejas que la serie del ^{232}Th. Además, hay varios isótopos radiactivos que ocurren naturalmente, como el ^{14}C y el ^{40}K, que no son parte de ninguna de las series de decaimiento.

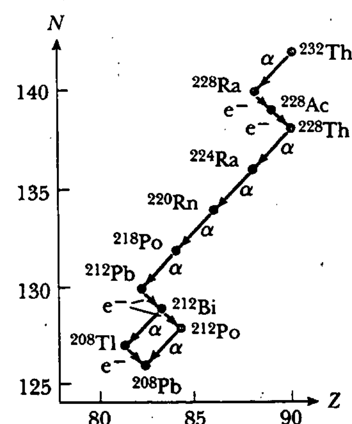


Figura 44.21 Decaimientos sucesivos para la serie ^{232}Th.

TABLA 44.4 Las cuatro series radiactivas

Serie		Isótopo de partida	Vida media (años)	Producto estable final
Uranio	Natural	${}^{238}_{92}U$	4.47×10^9	${}^{206}_{82}Pb$
Actinio	Natural	${}^{235}_{92}U$	7.04×10^8	${}^{207}_{82}Pb$
Torio	Natural	${}^{232}_{90}Th$	1.41×10^{10}	${}^{208}_{82}Pb$
Neptunio		${}^{237}_{93}Np$	2.14×10^6	${}^{209}_{83}Bi$

Gracias a estas series radiactivas, el ambiente se surte constantemente con elementos radiactivos que de otro modo habrían desaparecido hace mucho. Por ejemplo, como el Sistema Solar tiene aproximadamente 5×10^9 años de edad, el suministro de ^{226}Ra (cuya vida media es de sólo 1 600 años) se habría agotado por decaimiento radiactivo hace mucho si no fuera por las series radiactivas que empiezan con el ^{238}U.

REACCIONES NUCLEARES

Es posible cambiar la estructura de los núcleos bombardeándolos con partículas energéticas. Estos choques, los cuales cambian la identidad del núcleo blanco, se conocen como **reacciones nucleares**. Rutherford fue el primero en observarlas, en 1919, empleando fuentes radiactivas que ocurren naturalmente para las partículas que bombardean. Desde entonces, miles de reacciones nucleares se han observado después del desarrollo de los aceleradores de partículas con carga en la década de 1930. Con tecnología avanzada actual en aceleradores de partículas y detectores de partículas es posible alcanzar energías de partícula de al menos 1 000 GeV = 1 TeV. Estas partículas de alta energía se usan para crear nuevas partículas cuyas propiedades están ayudando a resolver los misterios del núcleo.

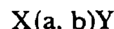
Considere una reacción en la cual un núcleo blanco X es bombardeado por una partícula a, lo que da como resultado un núcleo hijo Y y una partícula b:

Reacción nuclear



$$\text{a} + \text{X} \rightarrow \text{Y} + \text{b} \qquad \textbf{(44.26)}$$

Algunas veces esta reacción se escribe en la forma más compacta



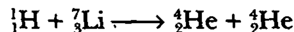
$$\text{X(a, b)Y}$$

En la sección 44.6 el valor Q, o energía de desintegración de un decaimiento radiactivo, se definió como la energía liberada durante el proceso de decaimiento. De igual modo, se define la **energía de reacción** Q asociada con una reacción nuclear como *la energía total liberada debido a la reacción*:

Energía de reacción Q

$$Q = (M_a + M_X - M_Y - M_b)c^2 \qquad \textbf{(44.27)}$$

Como un ejemplo, considere la reacción ^{7}Li(p, α)^{4}He. La notación p indica un protón, el cual es un núcleo de hidrógeno. Por ende, esta reacción se puede escribir en la forma expandida



$$^1_1\text{H} + {}^7_3\text{Li} \longrightarrow {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}$$

Reacción exotérmica
Reacción endotérmica

El valor Q para esta reacción es de 17.3 MeV. Una reacción de este tipo para la cual Q es positiva se llama **exotérmica**. Una reacción para la cual Q es negativa recibe el nombre de **endotérmica**. Una reacción endotérmica no ocurre a menos que la partícula que bombardea tenga una energía cinética mayor que Q. La energía mínima necesaria para que una reacción de este tipo ocurra se denomina **energía umbral**.

Energía umbral

Las reacciones nucleares deben obedecer la ley de la conservación del *momentum* lineal. Por lo general, la única fuerza que actúa sobre las partículas interactuantes es su fuerza mutua de interacción; es decir, no hay campos eléctricos acelerantes externos presentes cerca de las partículas que chocan.

Si en una reacción nuclear las partículas a y b son idénticas, de manera que X y Y son también necesariamente idénticas, la reacción se denomina **evento de dispersión**. Si la energía cinética se conserva como resultado de la reacción (esto es, si $Q = 0$), ésta se clasifica como *dispersión elástica*. Si la energía cinética no se conserva, $Q \neq 0$ y la reacción se denomina como *dispersión inelástica*. Dicha terminología es idéntica a la empleada al describir colisiones entre objetos macroscópicos (sección 9.4).

[illegible]

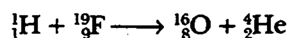
Reacción[a]	Valor Q medido (MeV)
$^{2}H(n, \gamma)^{3}H$	6.257 ± 0.004
$^{2}H(d, p)^{3}H$	4.032 ± 0.004
$^{6}Li(p, \alpha)^{3}H$	4.016 ± 0.005
$^{6}Li(d, p)^{7}Li$	5.020 ± 0.006
$^{7}Li(p, n)^{7}Be$	-1.645 ± 0.001
$^{7}Li(p, \alpha)^{4}He$	17.337 ± 0.007
$^{9}Be(n, \gamma)^{10}Be$	6.810 ± 0.006
$^{9}Be(\gamma, n)^{8}Be$	-1.666 ± 0.002
$^{9}Be(d, p)^{10}Be$	4.585 ± 0.005
$^{9}Be(p, \alpha)^{6}Li$	2.132 ± 0.006
$^{10}B(n, \alpha)^{7}Li$	2.793 ± 0.003
$^{10}B(p, \alpha)^{7}Be$	1.148 ± 0.003
$^{12}C(n, \gamma)^{13}C$	4.948 ± 0.004
$^{13}C(p, n)^{13}N$	-3.003 ± 0.002
$^{14}N(n, p)^{14}C$	0.627 ± 0.001
$^{14}N(n, \gamma)^{15}N$	10.833 ± 0.007
$^{18}O(p, n)^{18}F$	-2.453 ± 0.002
$^{19}F(p, \alpha)^{16}O$	8.124 ± 0.007

Tomado de C. W. Li, W. Whaling, W. A. Fowler y C. C. Lauritsen, *Phys. Rev.* 83:512, 1951.

[a] Los símbolos n, p, d, α y γ denotan al neutrón, protón, deuterón, partícula alfa y fotón, respectivamente.

Una lista de los valores de Q medidos para varias reacciones nucleares que incluyen núcleos ligeros se presenta en la tabla 44.5.

Además de la energía y el *momentum*, la carga total y el número total de nucleones debe conservarse en cualquier reacción nuclear. Por ejemplo, considere la reacción $^{19}F(p, \alpha)^{16}O$, la cual tiene un valor Q de 8.124 MeV. Tal reacción se muestra de manera más completa como



$$^{1}_{1}H + ^{19}_{9}F \longrightarrow ^{16}_{8}O + ^{4}_{2}He$$

El número total de nucleones antes de la reacción $(1 + 19 = 20)$ es igual al número total después de la reacción $(16 + 4 = 20)$. Además, la carga total $(Z = 10)$ es la misma antes y después de la reacción.

RESUMEN

Un núcleo está representado por medio del símbolo $^{A}_{Z}X$, donde A es el **número de masa** (el número total de nucleones) y Z es el **número atómico** (el número total de protones). El número total de neutrones en un núcleo es el **número de neutrones** N, donde $A = N + Z$. Los núcleos con el mismo valor Z pero diferentes valores de A y N son **isótopos** del mismo elemento.

Suponiendo que los núcleos son esféricos, su radio está dado por

$$r = r_0 A^{1/3} \tag{44.1}$$

donde $r_0 = 1.2$ fm.

Los núcleos son estables debido a la **fuerza nuclear** entre nucleones. Tal fuerza de corto alcance supera a la fuerza repulsiva de Coulomb a distancias aproximadamente menores a 2 fm y es independiente de la carga. Los núcleos ligeros son más estables cuando el número de protones que contienen es igual al número de neutrones. Los núcleos pesados son más estables cuando el número de neutrones que contienen es mayor que el número de protones. Los núcleos más estables tienen valores de Z y N que son pares.

Los núcleos tienen un *momentum* angular de espín intrínseco de magnitud $\sqrt{I(I+1)}\,\hbar$, donde I es el **número cuántico de espín nuclear**. El momento magnético de un núcleo se mide en términos del **magnetón nuclear** μ_n, donde

$$\mu_n \equiv \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05 \times 10^{-27}\ \text{J/T} \quad \textbf{(44.3)}$$

Cuando un momento magnético de espín nuclear se pone en un campo magnético externo, realiza precesión alrededor del campo con una frecuencia (la **frecuencia de precesión de Larmor**) que es proporcional a la magnitud del campo.

La diferencia entre la suma de las masas de un grupo de nucleones separados y la masa del núcleo compuesto que contiene a estos nucleones, cuando se multiplica por c^2, da la **energía de enlace** E_b del núcleo. Se calcula la energía de enlace del núcleo de un átomo de masa M_A empleando la expresión:

$$E_b\ (\text{MeV}) = (Zm_p + Nm_n - M_A) \times 931.494\ \text{MeV/u} \quad \textbf{(44.4)}$$

donde m_p es la masa del protón y m_n es la masa del neutrón.

El **modelo de la gota líquida** de la estructura nuclear considera a los nucleones como moléculas en una gota de líquido. Las tres principales contribuciones que influyen en la energía de enlace son efecto de volumen, el efecto de superficie y el efecto de la repulsión de Coulomb. La suma de tales contribuciones origina la **fórmula semiempírica de energía de enlace**:

$$E_b = C_1 A - C_2 A^{2/3} - C_3 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - C_4 \frac{(N-Z)^2}{A} \quad \textbf{(44.5)}$$

El **modelo de partícula independiente** supone que cada nucleón existe en una capa y sólo puede tener valores de energía discretos. La estabilidad de ciertos núcleos puede explicarse con este modelo.

Una sustancia radiactiva decae por medio de **decaimiento alfa, decaimiento beta** o **decaimiento gamma**. Una partícula alfa es el núcleo ^{4}He; una partícula beta es o un electrón (e^-) o un positrón (e^+); una partícula gamma es un fotón de alta energía.

Si un material radiactivo contiene N_0 núcleos radiactivos en $t = 0$, el número N de núcleos que quedan después de que ha transcurrido el tiempo t es

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad \textbf{(44.7)}$$

donde λ es la **constante de decaimiento**, un número igual a la probabilidad por segundo de que un núcleo decaerá. La **rapidez de decaimiento**, o **actividad**, de una sustancia radiactiva es

$$R = \left|\frac{dN}{dt}\right| = R_0 e^{-\lambda t} \quad \textbf{(44.8)}$$

donde $R_0 = N_0\lambda$ es la actividad en $t = 0$. La **vida media** $T_{1/2}$ se define como el tiempo que se requiere para que la mitad de un número dado de núcleos radiactivos decaiga, donde

$$T_{1/2} = \frac{0.693}{\lambda} \quad \textbf{(44.9)}$$

En un decaimiento alfa, un núcleo de helio es expulsado del núcleo padre con una energía cinética determinada. Un núcleo que sufre decaimiento beta emite o un electrón (e^-) y un antineutrino ($\bar{\nu}$) o un positrón (e^+) y un neutrino (ν). El electrón o positrón es expulsado con un rango de energías. En la **captura del electrón** el núcleo de un átomo absorbe uno de sus propios electrones y emite un neutrino. En el decaimiento gamma, un núcleo en un estado excitado decae hasta su estado base y emite un rayo gamma.

Las **reacciones nucleares** pueden ocurrir cuando un núcleo blanco X es bombardeado por una partícula a, lo que produce un núcleo hijo Y y una partícula b:



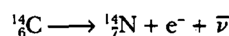
$$a + X \rightarrow Y + b \qquad \textbf{(44.26)}$$

La energía liberada en una reacción de este tipo, llamada **energía de reacción** Q, es

$$Q = (M_a + M_X - M_Y - M_b)c^2 \qquad \textbf{(44.27)}$$

PREGUNTAS

1. ¿Por qué los núcleos son inestables?
2. El momento magnético de un protón realiza precesión con una frecuencia ω_p en presencia de un campo magnético. Si la intensidad del campo magnético se duplica, ¿qué ocurre con la frecuencia de precesión?
3. Explique por qué los núcleos que están muy afuera de la línea de estabilidad en la figura 44.3 tienden a ser inestables.
4. ¿Por qué casi todos los isótopos que ocurren naturalmente se encuentran sobre la línea $N = Z$ en la figura 44.3?
5. Considere dos núcleos pesados X y Y que tienen números de masa similares. Si X tiene la energía de enlace más alta, ¿cuál de los núcleos tiende a ser más inestable?
6. Analice las diferencias entre el modelo de la gota líquida y el modelo de partícula independiente del núcleo.
7. ¿Cuántos valores de I_z son posibles para $I = 5/2$? ¿Para $I = 3$?
8. En la resonancia magnética nuclear, ¿cómo el aumento del valor de la constante del campo magnético cambia la frecuencia del campo de radiofrecuencia que excita una transición particular?
9. De entre los modelos de la gota líquida o de partícula independiente, ¿cuál sería más apropiado para predecir el comportamiento de un núcleo en una reacción de fisión? ¿Cuál tendría más éxito en la predicción del momento magnético de un núcleo determinado? ¿Cuál podría explicar mejor el espectro de rayos γ de un núcleo excitado?
10. Si un núcleo tiene una vida media de un año, ¿esto significa que decaerá completamente después de dos años? Explique.
11. ¿Qué fracción de una muestra radiactiva ha decaído después de que han transcurrido dos vidas medias?
12. Se preparan dos muestras de los mismos núclidos radiactivos. La muestra A tiene dos veces la actividad inicial de la muestra B. ¿Cómo se compara la vida media de A con la vida media de B? Después de que cada una ha pasado cinco vidas medias, ¿cuál es la proporción de sus actividades?
13. Explique por qué las vidas medias de núcleos radiactivos son esencialmente independientes de la temperatura.
14. El núcleo radiactivo $^{226}_{88}Ra$ tiene una vida media de aproximadamente 1.6×10^3 años. En vista de que el Sistema Solar tiene una edad de casi 5 mil millones de años, ¿por qué se sigue encontrando este núcleo en la naturaleza?
15. ¿Por qué el electrón está implicado en la reacción



$$^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{14}_{7}N + e^- + \bar{\nu}$$

escrito como e^-, en tanto que el electrón implicado en la reacción



$$^{7}_{4}Be + {}^{0}_{-1}e \longrightarrow {}^{7}_{3}Li + \nu$$

se escribe como $^{0}_{-1}e$?

16. Un neutrón libre sufre decaimiento beta con una vida media de aproximadamente 15 min. ¿Puede un protón libre sufrir un decaimiento similar?
17. Explique cómo puede usted fechar con carbono la edad de una muestra.
18. ¿Cuál es la diferencia entre un neutrino y un fotón?
19. ¿La Q en la ecuación 44.27 representa la cantidad (masa final-masa inicial)c^2 o representa la cantidad (masa inicial-masa final)c^2?
20. Emplee las ecuaciones 44.19 a 44.21 para explicar por qué el neutrino debe tener un espín de $\frac{1}{2}$.
21. Si un núcleo como ^{226}Ra inicialmente en reposo sufre decaimiento alfa, ¿cuál tiene más energía cinética después del decaimiento, la partícula alfa o el núcleo hijo?
22. ¿Puede un núcleo emitir partículas alfa que tengan diferentes energías? Explique.
23. Explique por qué muchos núcleos pesados sufren decaimiento alfa pero no emiten espontáneamente neutrones o protones.
24. Si una partícula alfa y un electrón tienen la misma energía cinética, ¿cuál sufre la mayor desviación cuando atraviesa un campo magnético?
25. Si una película se mantiene en una caja de madera, las partículas alfa de una fuente radiactiva afuera de la caja no pueden velar la película pero las partículas beta sí pueden hacerlo. Explique.
26. Tome cualquier proceso de decaimiento beta y muestre que el neutrino debe tener carga cero.

27. Suponga que podría demostrarse que la intensidad de los rayos cósmicos en la superficie de la Tierra era mucho mayor hace 10 000 años. ¿Cómo afectaría esta diferencia lo que en la actualidad se acepta como valores válidos de fechamiento con carbono de la edad de muestras antiguas de materia alguna vez viva?
28. ¿Por qué el fechamiento con carbono puede proporcionar estimaciones precisas de material muy viejo?
29. El elemento X tiene varios isótopos. ¿Qué tienen estos isótopos en común? ¿En qué difieren?
30. Explique las principales diferencias entre rayos alfa, beta y gamma.
31. ¿Cuántos protones hay en el núcleo de $^{222}_{86}Rn$? ¿Cuántos neutrones? ¿Cuántos electrones orbitales hay en el átomo neutro?

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** = use computadora para resolver el problema = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Nota: Las tablas 44.1 y 44.6 serán útiles en muchos de estos problemas. Una lista más completa de masas atómicas se proporciona en la tabla A.3 en el apéndice A.

Sección 44.1 Algunas propiedades de los núcleos

1. ¿Cuál es el orden de magnitud del número de protones en su cuerpo? ¿Del número de neutrones? ¿Del número de electrones?
2. **Problema de repaso** Carbono simplemente ionizado se acelera a través de 1 000 V y pasa al interior de un espectrómetro de masas para determinar los isótopos presentes (véase el capítulo 29). La magnitud del campo magnético en el espectrómetro es 0.200 T. a) Determine los radios orbitales de los isótopos ^{12}C y ^{13}C cuando atraviesan el campo. b) Muestre que la proporción de los radios puede escribirse en la forma

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

y verifique que sus radios del inciso a) concuerdan con esto.
3. Una partícula α ($Z = 2$, masa 6.64×10^{-27} kg) se acerca hasta 1.00×10^{-14} m de un núcleo de carbono ($Z = 6$). ¿Cuáles son a) la máxima fuerza de Coulomb sobre la partícula α, b) la aceleración de la partícula α en este punto y c) la energía potencial de la partícula α en este punto?
4. En un experimento de dispersión de Rutherford se disparan partículas alfa que tienen energía cinética de 7.70 MeV hacia un núcleo de oro. a) Use conservación de energía para determinar la distancia de máximo acercamiento entre la partícula alfa y el núcleo de oro. Suponga que el núcleo permanece en reposo. b) Calcule la longitud de onda de De Broglie para la partícula alfa de 7.70 MeV y compárela con la distancia obtenida en el inciso a). c) Con base en esta comparación, ¿por qué es más adecuado tratar a la partícula alfa como una partícula y no como una onda en el experimento de dispersión de Rutherford?
5. a) Emplee métodos de energía para calcular la distancia de máxima aproximación de un choque frontal entre una partícula alfa que tiene una energía inicial de 0.500 MeV y un núcleo de oro (^{197}Au) en reposo. (Suponga que el núcleo de oro permanece en reposo durante el choque.) b) ¿Qué rapidez inicial mínima debe tener la partícula alfa para conseguir un acercamiento de 300 fm?
6. ¿Cuánta energía (en unidades de MeV) debe tener una partícula α para alcanzar la superficie de un núcleo de oro ($Z = 79$, $A = 197$)?
7. Encuentre el radio de a) un núcleo de $^{4}_{2}He$ y b) un núcleo de $^{238}_{92}U$.
8. Encuentre el núcleo que tiene un radio aproximadamente igual a la mitad del radio de uranio $^{238}_{92}U$.
9. Una estrella que comienza su vida con una masa del doble de la del Sol se espera que colapse, combinando sus protones y electrones para formar una estrella de neutrones. Dicha estrella podría considerarse como un núcleo atómico gigantesco. Si una estrella de $2 \times 1.99 \times 10^{30}$ kg de masa se colapsa en neutrones ($m_n = 1.67 \times 10^{-27}$ kg), ¿cuál sería su radio? (Suponga que $r = r_0A^{1/3}$.)
10. **Problema de repaso** ¿Cuál sería la fuerza gravitacional entre dos bolas de golf (cada una con 4.30 cm de diámetro), separadas 1.00 m, si estuviesen hechas de materia nuclear?
11. De acuerdo con la tabla A.3, identifique los núcleos estables que corresponden a los números mágicos dados por la ecuación 44.2.
12. Para los núcleos estables en la tabla A.3 identifique el número de núcleos estables con Z par, N par; Z par, N impar; Z impar, N par; y Z impar, N impar.
13. Construya un diagrama como en la figura 44.4 para el caso en que I es igual a a) 5/2 y b) 4.

Sección 44.2 Resonancia magnética nuclear y visualización por resonancia magnética

14. La frecuencia de precesión de Larmor es

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{2\mu B}{h}$$

Calcule la frecuencia de ondas de radio a la cual ocurrirá absorción de resonancia para a) neutrones libres en un campo magnético de 1.00 T, b) protones libres en un campo magnético de 1.00 T, y c) protones libres en el campo magnético de la Tierra en un punto donde la intensidad del campo es de 50.0 μT.

TABLA 44.6 Algunas masas atómicas

Elemento	Masa atómica (u)	Elemento	Masa atómica (u)
$^{4}_{2}He$	4.002 602	$^{27}_{13}Al$	26.981 538
$^{7}_{3}Li$	7.016 003	$^{30}_{15}P$	29.978 538
$^{9}_{4}Be$	9.012 174	$^{40}_{20}Ca$	39.962 591
$^{10}_{5}B$	10.012 936	$^{42}_{20}Ca$	41.958 767
$^{12}_{6}C$	12.000 000	$^{43}_{20}Ca$	42.958 767
$^{13}_{6}C$	13.003 355	$^{56}_{26}Fe$	55.934 940
$^{14}_{7}N$	14.003 074	$^{64}_{30}Zn$	63.929 144
$^{14}_{7}N$	15.000 108	$^{64}_{29}Cu$	63.929 599
$^{15}_{8}O$	15.003 065	$^{93}_{41}Nb$	92.906 376
$^{17}_{8}O$	16.999 132	$^{197}_{79}Au$	196.966 543
$^{18}_{8}O$	17.999 160	$^{202}_{80}Hg$	201.970 617
$^{18}_{9}F$	18.000 937	$^{216}_{84}Po$	216.001 889
$^{20}_{10}Ne$	19.992 435	$^{220}_{86}Rn$	220.011 369
$^{23}_{11}Na$	22.989 770	$^{234}_{90}Th$	234.043 593
$^{13}_{12}Mg$	22.994 124	$^{238}_{92}U$	238.050 784

Sección 44.3 Energía de enlace y fuerzas nucleares

15. Calcule la energía de enlace por nucleón para a) ^{2}H, b) ^{4}He, c) ^{56}Fe y d) ^{238}U.

16. El pico de la curva de estabilidad ocurre en el ^{56}Fe. Por esto el hierro es prominente en el espectro del Sol y las estrellas. Demuestre que el ^{56}Fe tiene una energía de enlace superior por nucleón que sus vecinos ^{55}Mn y ^{59}Co. Compare sus resultados con la figura 44.8.

WEB 17. Núcleos que tienen el mismo número de masa reciben el nombre de *isobaros.* El isótopo $^{139}_{57}La$ es estable. Un isobaro radiactivo $^{139}_{59}Pr$, se localiza bajo la línea de núcleos estables en la figura 44.3 y decae por emisión e^{+}. Otro isobaro radiactivo de ^{139}La, $^{139}_{55}Cs$, decae por emisión e^{-} y se localiza sobre la línea de núcleos estables en la figura 44.3. a) ¿Cuál de estos tres isobaros tiene la proporción neutrón-protón más alta? b) ¿Cuál tiene la mayor energía de enlace por nucleón? c) ¿Cuál esperaría usted que sea más pesado, el ^{139}Pr o el ^{139}Cs?

18. Dos núcleos que tienen el mismo número de masa se conocen como *isobaros.* Calcule la diferencia en la energía de enlace por nucleón para los isobaros $^{23}_{11}Na$ y $^{23}_{12}Mg$. ¿Cómo explica usted la diferencia?

WEB 19. Un par de núcleos para los cuales $Z_1 = N_2$ y $Z_2 = N_1$ reciben el nombre de isobaros espejo (los números atómicos y de neutrones son intercambiables). Las mediciones de energía de enlace en estos núcleos pueden emplearse para obtener evidencia de la independencia de la carga de las fuerzas nucleares (esto es, las fuerzas nucleares protón-protón, protón-neutrón y neutrón-neutrón son iguales). Calcule la diferencia de la energía de enlace para los dos isobaros espejo $^{15}_{8}O$ y $^{15}_{7}N$.

20. La energía requerida para construir una esfera cargada uniformemente de carga total Q y radio R es $U = 3k_eQ^2/5R$, donde k_e es la constante de Coulomb (véase el problema 67). Suponga que un núcleo de ^{40}Ca está compuesto por 20 protones distribuidos de manera uniforme en un volumen esférico. a) ¿Cuánta energía se requiere para contrarrestar la repulsión electrostática dada por la ecuación anterior? (*Sugerencia:* calcule primero el radio de un núcleo de ^{40}Ca.) b) Calcule la energía de enlace ^{40}Ca. c) Explique qué puede usted concluir al comparar el resultado del inciso b) con el del inciso a).

21. Calcule la energía mínima requerida para quitar un neutrón de un núcleo de $^{43}_{20}Ca$.

Sección 44.4 Modelos nucleares

22. a) En el modelo de la gota líquida de la estructura nuclear, ¿por qué el término del efecto de la superficie $-C_2A^{2/3}$ tiene un signo negativo? b) La energía de enlace del núcleo aumenta cuando crece la proporción volumen-superficie. Calcule esta proporción tanto para formas esféricas como para cúbicas y explique cuál es más plausible para los núcleos.

23. Empleando la gráfica en la figura 44.8 estime cuánta energía se libera cuando un núcleo de número de masa 200 se divide en dos núcleos cada uno con número de masa 100.

24. a) Emplee la ecuación 45.5 para calcular la energía de enlace del $^{56}_{26}Fe$. b) ¿Con qué porcentaje contribuye cada uno de los cuatro términos a la energía de enlace?

Sección 44.5 Radiactividad

25. Una muestra radiactiva contiene 1.00×10^{15} átomos y tiene una actividad de 6.00×10^{11} Bq. ¿Cuál es su vida media?

26. La vida media del ^{131}I es de 8.04 días. Durante cierto día, la actividad de una muestra de yodo-131 es de 6.40 mCi. ¿Cuál es su actividad 40.2 días después?

WEB **27.** Una muestra recién preparada de cierto isótopo radiactivo tiene una actividad de 10.0 mCi. Después de 4.00 h, su actividad es 8.00 mCi. a) Encuentre la constante de decaimiento y la vida media. b) ¿Cuántos átomos del isótopo estaban contenidos en la muestra recién preparada? c) ¿Cuál es la actividad de la muestra 30.0 h después de que está preparada?

28. ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que 90.0% de la radiactividad de una muestra de $^{72}_{33}$As desaparezca, cuando se mide mediante su actividad? La vida media del $^{72}_{33}$As es de 26 h.

29. El isótopo radiactivo ^{198}Au tiene una vida media de 64.8 h. Una muestra que contiene este isótopo tiene una actividad inicial ($t = 0$) de 40.0 μCi. Calcule el número de núcleos que decaen en el intervalo de tiempo entre $t_1 =$ 10.0 h y $t_2 = 12.0$ h.

30. Un núcleo radiactivo tiene una vida media $T_{1/2}$. Una muestra que contiene estos núcleos tiene una actividad inicial R_0. Calcule el número de núcleos que decaen en el intervalo de tiempo entre los tiempos t_1 y t_2.

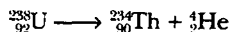
31. Determine la actividad de 1.00 g de ^{60}Co. La vida media del ^{60}Co es 5.27 años.

Sección 44.6 Los procesos de decaimiento

32. Identifique el núclido o partícula (X) faltante:

a) X $\rightarrow$ $^{65}_{28}$Ni + γ
b) $^{215}_{84}$Po $\rightarrow$ X + α
c) X $\rightarrow$ $^{55}_{26}$Fe + e$^+$ + ν
d) $^{109}_{48}$Cd + X $\rightarrow$ $^{109}_{47}$Ag + ν
e) $^{14}_{11}$Na + $^4_2$He $\rightarrow$ X + $^{17}_{8}$O

33. Encuentre la energía liberada en el decaimiento alfa



$$^{238}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

Usted encontrará útiles los siguientes valores de masa:

$$M(^{238}_{92}\text{U}) = 238.050\,784 \text{ u}$$
$$M(^{234}_{90}\text{Th}) = 234.043\,593 \text{ u}$$
$$M(^{4}_{2}\text{He}) = 4.002\,602 \text{ u}$$

34. Un espécimen vivo en equilibrio con la atmósfera contiene un átomo de ^{14}C (vida media = 5 730 años) por cada 7.7×10^{11} átomos de carbono estables. Una muestra arqueológica de madera (celulosa, $C_{12}H_{22}O_{11}$) contiene 21.0 mg de carbono. Cuando la muestra se pone dentro de un contador beta blindado cuya eficiencia de conteo es de 88.0%, se acumulan 837 conteos en una semana. Suponiendo que el flujo de rayos cósmicos y la atmósfera terrestre no han cambiado de manera apreciable desde que la muestra se formó, encuentre la edad de la muestra.

35. Un núcleo ^{3}H en un decaimiento beta se transforma en ^{3}He creando un electrón y un antineutrino de acuerdo con la reacción



$$^{3}_{1}\text{H} \longrightarrow {}^{3}_{2}\text{He} + e^- + \bar{\nu}$$

Emplee la tabla A.3 para determinar la energía total liberada en esta reacción.

36. Determine cuáles decaimientos pueden ocurrir espontáneamente:

a) $^{40}_{20}$Ca $\rightarrow$ e$^+$ + $^{40}_{19}$K
b) $^{98}_{44}$Ru $\rightarrow$ $^4_2$He + $^{94}_{42}$Mo
c) $^{144}_{60}$Nd $\rightarrow$ $^4_2$He + $^{140}_{58}$Ce

37. El núcleo $^{15}_{8}$O decae mediante la captura del electrón. Escriba a) el proceso nuclear básico y b) el proceso de decaimiento que se refiere a los átomos neutros. c) Determine la energía del neutrino. Descarte el retroceso del átomo hijo.

Sección 44.7 Radiactividad natural

38. Una muestra de roca contiene trazas de ^{238}U, ^{235}U, ^{232}Th, ^{208}Pb, ^{207}Pb y ^{206}Pb. Un análisis cuidadoso muestra que la proporción entre la cantidad de ^{238}U y ^{206}Pb es 1.164. a) Suponga que la roca originalmente no contiene plomo y determine la edad de la roca. b) ¿Cuáles deben ser las proporciones entre el ^{235}U y el ^{207}Pb, y entre el ^{232}Th y el ^{208}Pb de modo que revelen la misma edad de la roca? Ignore las pequeñas cantidades de productos de decaimiento intermedios en las cadenas de decaimiento. Note que esta forma de fechamiento múltiple produce datos geológicos confiables.

39. Ponga el símbolo del isótopo correcto en cada cuadro abierto en la figura P44.39, la cual muestra las secuencias de decaimientos que comienzan con uranio 235 y terminan con el isótopo estable de plomo 207.

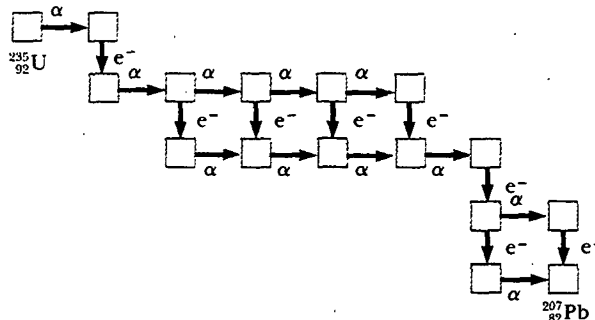


Figura P44.39

40. *Contaminación de aire dentro de una habitación.* El uranio se presenta de manera natural en las rocas y el suelo. En un paso de su serie de decaimiento radiactivo, el ^{238}U produce el gas químicamente inerte radón-222, con una vida media de 3.82 días. El radón se filtra a través del suelo para mezclarse en la atmósfera, por lo común haciendo radiactivo al aire con una actividad de 0.3 pCi/L. En las casas el ^{222}Rn puede ser un serio contaminante, el cual se acumula para alcanzar actividades mucho mayores en espacios cerrados. Si la radiactividad del radón excede los 4 pCi/L, la Agencia de Protección Ambiental de Estados Unidos sugiere tomar medidas para reducirlo mediante la reducción de la infiltración del aire a partir del suelo. a) Convierta la actividad 4 pCi/L a unidades de becquerel por metro cúbico. b) ¿Cuántos átomos de ^{222}Rn hay en un metro cúbico de aire que despliega esta actividad? c) ¿Qué fracción de la masa del aire constituye el radón?

41. El isótopo de radón más común es el ^{222}Rn, el cual tiene una vida media de 3.82 días. a) ¿Qué fracción de los nú-

cleos que estuvieron en la Tierra hace una semana ahora han decaído? b) ¿Qué fracción de los que existieron hace un año? c) En vista de estos resultados, explique por qué el radón constituye un problema, contribuyendo significativamente a la exposición de radiación de fondo.

Sección 44.8 Reacciones nucleares

42. La reacción $^{27}_{13}Al(\alpha, n)^{30}_{15}P$, lograda en 1934, es la primera conocida en la cual el núcleo producto es radiactivo. Calcule el valor de Q de esta reacción.

WEB **43.** El oro natural sólo tiene un isótopo, $^{197}_{79}Au$. Si se irradia oro natural mediante un flujo de neutrones lentos, se emiten partículas e^-. a) Escriba las ecuaciones de reacción. b) Calcule la energía máxima de las partículas beta emitidas. La masa del $^{198}_{80}Hg$ es 197.966 743 u.

44. Identifique las partículas desconocidas X y X′ en las siguientes reacciones nucleares:

a) $X + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{24}_{12}Mg + ^{1}_{0}n$

b) $^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{90}_{38}Sr + X + 2^{1}_{0}n$

c) $2^{1}_{1}H \rightarrow ^{2}_{1}H + X + X'$

45. Un haz de protones de 6.61 MeV incide sobre un blanco de $^{27}_{13}Al$. Aquellos que colisionan producen la reacción



$$p + ^{27}_{13}Al \longrightarrow ^{27}_{14}Si + n$$

(El $^{27}_{14}Si$ tiene una masa de 26.986 721 u.) Ignorando cualquier retroceso del núcleo producto determine la energía cinética de los neutrones emigrantes.

46. a) Suponga que $^{10}_{5}B$ es golpeado por una partícula alfa, liberando un protón y un núcleo producto en la reacción. ¿Cuál es el núcleo producto? b) Una partícula alfa y un núcleo producto se producen cuando $^{13}_{6}C$ es golpeado por un protón. ¿Cuál es el núcleo producto?

47. Empleando los valores Q de las reacciones apropiadas de la tabla 44.5 calcule las masas del ^{8}Be y del ^{10}Be en unidades de masa atómica hasta cuatro decimales.

48. Determine el valor Q asociado con la fisión espontánea de ^{236}U en los fragmentos ^{90}Rb y ^{143}Cs, los cuales tienen masas de 89.914 811 u y 142.927 220 u, respectivamente. Las masas de las otras partículas involucradas en la reacción se brindan en el apéndice A.3.

PROBLEMAS ADICIONALES

49. Considere una muestra radiactiva. Determine la proporción entre el número de átomos que han decaído durante la primera mitad de su vida media y el número de átomos que han decaído durante la segunda mitad de su vida media.

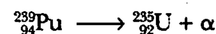
50. Un método de producir neutrones para uso experimental es bombardear $^{7}_{3}Li$ con protones. Los neutrones son emitidos de acuerdo con la reacción



$$^{1}_{1}H + ^{7}_{3}Li \longrightarrow ^{7}_{4}Be + ^{1}_{0}n$$

¿Cuál es la energía cinética mínima que debe tener el protón incidente si esta reacción ocurriera? Puede usar el resultado del problema 70.

51. Un subproducto de algunos reactores de fisión es el isótopo $^{239}_{94}Pu$, un emisor alfa que tiene una vida media de 24 120 años:



$$^{239}_{94}Pu \longrightarrow ^{235}_{92}U + \alpha$$

Considere una muestra de 1.00 kg de $^{239}_{94}Pu$ puro en $t = 0$. Calcule a) el número de núcleos de $^{239}_{94}Pu$ presentes en $t = 0$, y b) la actividad inicial en la muestra. c) ¿Cuánto tiempo tiene que almacenarse la muestra si un nivel de actividad "seguro" es 0.100 Bq?

52. a) La masa atómica de ^{57}Co es 56.936 294 u. ¿El ^{57}Co puede decaer mediante emisión e^+? Explique. b) ¿El ^{14}C puede decaer por medio de emisión e^-? Explique. c) Si cualquiera de las respuestas es sí, ¿cuál es el intervalo de energías cinéticas disponibles para la partícula beta?

53. a) Encuentre el radio del núcleo del $^{12}_{6}C$ b) Determine la fuerza de repulsión entre un protón en la superficie de un núcleo de $^{12}_{6}C$ y los restantes cinco protones. c) ¿Cuánto trabajo (en MeV) tiene que hacerse para vencer esta repulsión electrostática con el fin de poner el último protón dentro del núcleo? d) Repita los incisos a), b) y c) para el $^{238}_{92}U$.

54. La actividad de una muestra radiactiva se midió durante 12 h con la siguiente rapidez de conteo neta:

Tiempo (h)	Rapidez de conteo (conteos/min)
1.00	3 100
2.00	2 450
4.00	1 480
6.00	910
8.00	545
10.0	330
12.0	200

a) Grafique el logaritmo de la rapidez de conteo como función del tiempo. b) Determine la constante de desintegración y la vida media de los núcleos radiactivos en la muestra. c) ¿Qué rapidez de conteo esperaría usted para la muestra en $t = 0$? d) Suponiendo que la eficacia del instrumento de conteo sea igual a 10.0%, calcule el número de átomos radiactivos en la muestra en $t = 0$.

55. a) ¿Por qué el decaimiento beta $p \rightarrow n + e^+ + \nu$ está prohibido para un protón libre? b) ¿Por qué la misma reacción es posible si el protón está ligado a un núcleo? Por ejemplo, ocurre la siguiente reacción:



$$^{13}_{7}N \longrightarrow ^{13}_{6}C + e^+ + \nu$$

c) ¿Cuánta energía se libera en la reacción dada en el inciso b)? [$m(e^+) = 0.000\ 549$ u, $M(^{13}C) = 13.003\ 355$ u, $M(^{13}N) = 13.005\ 738$ u.]

56. En un pedazo de roca de la Luna, el contenido de ^{87}Rb se estima en 1.82×10^{10} átomos por gramo de material, y el contenido de ^{87}Sr se encuentra igual a 1.07×10^{9} átomos por gramo. a) Calcule la edad de la roca. b) ¿Podría el material en la roca realmente ser mucho más viejo? ¿Qué suposición está implícita al usar el método de fechamiento radiactivo? (El decaimiento relevante es $^{87}Rb \rightarrow ^{87}Sr + e^-$. La vida media del decaimiento es 4.75×10^{10} años.)

WEB 57. El decaimiento de un núcleo inestable por emisión alfa se representa mediante la ecuación 44.10. La energía de desintegración Q dada por la ecuación 44.13 debe ser compartida por la partícula alfa y el núcleo hijo con el fin de conservar tanto la energía como el *momentum* en el proceso de decaimiento. a) Muestre que Q y K_α, la energía cinética de la partícula alfa, se relacionan por medio de la expresión

$$Q = K_\alpha\left(1 + \frac{M_\alpha}{M}\right)$$

donde M es la masa del núcleo hijo. b) Emplee el resultado del inciso a) para encontrar la energía de la partícula alfa emitida en el decaimiento de ^{226}Ra. (Véase el ejemplo 44.7 para el cálculo de Q.)

58. El núcleo del ^{145}Pm decae por emisión alfa. a) Determine los núcleos hijo. b) Con los valores dados en la tabla A.3, determine la energía liberada en este decaimiento. c) ¿Qué fracción de esta energía se lleva la partícula alfa cuando el retroceso del núcleo hijo se toma en cuenta?

59. Cuando, después de una reacción o perturbación de cualquier tipo, un núcleo se deja en un estado excitado, puede regresar a su estado normal (base) mediante la emisión de un fotón (o varios fotones) de rayos gamma. Este proceso se ilustra mediante la ecuación 44.23. El núcleo emisor debe retroceder para conservar tanto la energía como el *momentum*. a) Muestre que la energía de retroceso del núcleo es

$$E_r = \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}$$

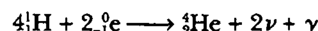
donde ΔE es la diferencia de energía entre los estados excitado y base de un núcleo de masa M. b) Calcule la energía de retroceso del núcleo de ^{57}Fe cuando decae por emisión gamma desde el estado excitado de 14.4 keV. Para este cálculo considere la masa igual a 57 u. (*Sugerencia*: cuando escriba la ecuación para la conservación de la energía emplee $(Mv)^2/2M$ para la energía cinética del núcleo en retroceso. También suponga que $hf \ll Mc^2$ y use el desarrollo del binomio.)

60. Después de una súbita liberación de radiactividad del reactor nuclear de Chernobyl en el accidente de 1986, la radiactividad de la leche en Polonia se elevó a 2 000 Bq/L debido a yodo-131, con vida media de 8.04 días. El yodo radiactivo es particularmente dañino, pues la glándula tiroides concentra yodo. El accidente de Chernobyl provocó un incremento mensurable en cáncer de tiroides entre niños de Bielorrusia. a) Con fines de comparación encuentre la actividad de la leche debida al potasio. Suponga que 1 L de leche contiene 2.00 g de potasio, del cual 0.011 7% es el isótopo ^{40}K que tiene una vida media de 1.28×10^9 años. b) ¿Después de cuánto tiempo la actividad debida al yodo caería bajo la debida al potasio?

61. Los europeos nombraron una cierta dirección en el cielo entre los cuernos de Tauro, el toro. En el día que ellos llamaron 4 de julio de 1054 d.C., una brillante luz apareció en dicho lugar. Los europeos no dejaron registros vivos de la supernova, la cual pudo ser vista a plena luz del día durante algunas jornadas. La luz se desvaneció un poco, pero siguió siendo visible durante años, opacándose durante un tiempo con la vida media de 77.1 días del radiactivo cobalto-56 que se había creado en la explosión. a) Los restos de la estrella ahora forman la Nebulosa del Cangrejo. En ella, el cobalto-56 ahora ha disminuido ¿a qué fracción de su actividad original? b) Suponga que un americano de la etnia llamada Anasazi realizó con carbón un dibujo de la supernova. El carbono-14 en el carbón, ¿ahora ha decaído a qué fracción de su actividad original?

62. Una teoría de la astrofísica nuclear propone que todos los elementos pesados, como el uranio, se formaron en explosiones de supernova que terminaron con la vida de estrellas de gran masa. Si supone que en el momento de la explosión habían iguales cantidades de ^{235}U y ^{238}U, ¿hace cuánto la(s) estrella(s) que explotó(aron) liberó(aron) los elementos que formaron la Tierra? La proporción actual de ^{235}U/^{238}U es de 0.007 25. Las vidas medias de ^{235}U y ^{238}U son 0.704×10^9 años y 4.47×10^9 años.

63. Una vez que se determinó que el Sol había existido durante cientos de millones de años, pero antes de que se descubriera la física nuclear, los científicos no podían explicar por qué el Sol ha continuado quemándose durante un periodo tan largo. Por ejemplo, si fuese fuego de carbón, se habría consumido en alrededor de 3 000 años. Suponga que el Sol, cuya masa es de 1.99×10^{30} kg, originalmente se componía por completo de hidrógeno y que su potencia total de salida es de 3.77×10^{26} W. a) Si el mecanismo de generación de energía del Sol es la transformación de hidrógeno en helio por medio de la reacción neta



$$4\,^1_1\text{H} + 2\,^0_{-1}\text{e} \longrightarrow \,^4_2\text{He} + 2\nu + \gamma$$

calcule la energía (en joules) proporcionada por esta reacción. b) Determine cuántos átomos de hidrógeno constituyen al Sol. Considere la masa de un átomo de hidrógeno igual a 1.67×10^{-27} kg. c) Suponiendo que la potencia total de salida permanece constante, ¿cuánto tiempo transcurrirá antes de que todo el hidrógeno se convierta en helio y el Sol muera? El tiempo de vida del Sol, proyectado en la actualidad, es de más o menos 10 mil millones de años, pues sólo el hidrógeno en un centro relativamente pequeño está disponible como combustible. Sólo en el centro existen temperaturas y densidades tan elevadas como para que la reacción de fusión sea autosustentable.

64. a) Un método de producción de neutrones para uso experimental consiste en bombardear núcleos ligeros con partículas alfa. En un ordenamiento particular, partículas alfa emitidas por polonio inciden sobre núcleos de berilio:



$$^4_2\text{He} + \,^9_4\text{Be} \longrightarrow + \,^{12}_6\text{C} + \,^1_0\text{n}$$

¿Cuál es el valor Q? b) Los neutrones también se producen a menudo por medio de pequeños aceleradores de partículas. En un diseño, deuterones acelerados en un generador Van de Graaff bombardean a otros núcleos de deuterio:



$$^2_1\text{H} + \,^2_1\text{H} \longrightarrow \,^3_2\text{He} + \,^1_0\text{n}$$

¿La reacción es exotérmica o endotérmica? Calcule su valor Q.

65. **Problema de repaso** Considere el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, con el electrón en el estado base. El campo magnético en el núcleo producido por el electrón orbital tiene un valor de 12.5 T (véase el capítulo 30, problema 1). El protón puede tener su momento magnético alineado en cualquiera de dos direcciones perpendiculares al plano de la órbita del electrón. Debido a la interacción del momento magnético del protón con el campo magnético del electrón, habrá una diferencia en energía entre los estados con las dos diferentes orientaciones del momento magnético del protón. Encuentre dicha diferencia de energía en eV.

66. Muchos radioisótopos tienen importantes aplicaciones industriales, médicas y de investigación. Uno de éstos es el ^{60}Co, el cual tiene una vida media de 5.27 años y decae por la emisión de una partícula beta (energía de 0.31 MeV) y dos fotones gamma (energías de 1.17 MeV y 1.33 MeV). Un científico desea preparar una fuente sellada de ^{60}Co que tendrá una actividad de 10.0 Ci después de 30.0 meses de uso. a) ¿Cuál es la masa inicial de ^{60}Co requerida? b) ¿A qué rapidez la fuente emitirá energía después de 30.0 meses?

67. **Problema de repaso** Considere un modelo del núcleo en el cual la carga positiva (Ze) se distribuye uniformemente a través de una esfera de radio R. Integrando la densidad de energía, $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, sobre todo el espacio, muestre que la energía electrostática puede escribirse

$$U = \frac{3Z^2e^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

68. El estado base del $^{93}_{43}$Ic (masa molar, 92.910 2 g/mol) decae por la captura del electrón y emisiones e^+ hasta niveles de energía del núcleo hijo (masa molar en el estado base, 92.906 8 g/mol) a 2.44 MeV, 2.03 MeV, 1.48 MeV y 1.35 MeV. a) ¿Para cuáles de estos niveles se permiten los decaimientos de captura del electrón y e^+? b) Identifique el núcleo hijo y dibuje el esquema de decaimiento, asumiendo que todos los estados excitados se desexcitan por decaimiento γ directo hasta el estado base.

69. Neutrones libres tienen una vida media característica de 10.4 min. ¿Qué fracción de un grupo de neutrones libres con energía cinética de 0.040 0 eV decaerá antes de recorrer una distancia de 10.0 km?

70. Cuando la reacción nuclear representada por la ecuación 44.26 es endotérmica, la energía de desintegración Q es negativa. Para que esta reacción proceda, la partícula incidente debe tener una energía mínima denominada energía umbral, E_{th}. Cierta fracción de la energía de la partícula incidente se transfiere al núcleo compuesto para conservar el *momentum*. En consecuencia, E_{th} debe ser mayor que Q. a) Muestre que

$$E_{th} = -Q\left(1 + \frac{M_a}{M_X}\right)$$

b) Calcule la energía de umbral de la partícula alfa incidente en la reacción



$$^4_2\text{He} + ^{14}_7\text{N} \longrightarrow ^{17}_8\text{O} + ^1_1\text{H}$$

71. *Determinación del estudiante de la vida media del ^{137}Ba.* El isótopo radiactivo del bario ^{137}Ba tiene una vida media relativamente corta y puede extraerse con facilidad de una solución que contiene cesio radiactivo (^{137}Cs). Este isótopo de bario se emplea por lo común en un ejercicio de laboratorio universitario para demostrar la ley de decaimiento radiactivo. Los datos presentados en la figura P44.71 fueron obtenidos por estudiantes universitarios empleando equipo experimental modesto. Determine la vida media para el decaimiento del ^{137}Ba empleando sus datos.

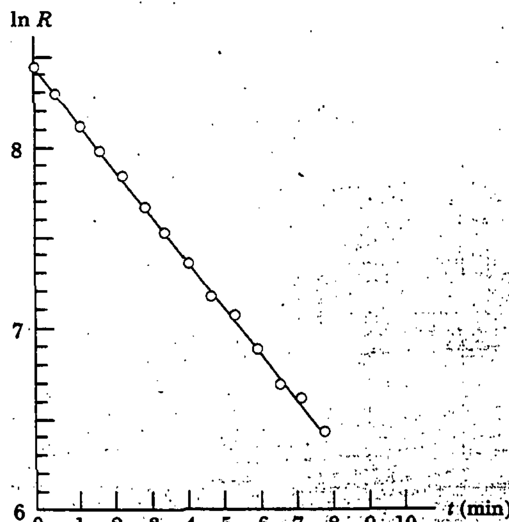


Figura P44.71

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

44.1 Dentro de un agrupamiento vertical los puntos representan núcleos que tienen el mismo número atómico, de modo que todos ellos deben representar al mismo elemento. Como el número de neutrones varía dentro de un agrupamiento vertical, cada punto debe significar un isótopo del elemento.

44.2 c). Los isótopos son núcleos que contienen diferente número de neutrones, de modo que las masas atómicas no son iguales. Los momentos magnéticos de espín también son diferentes en una familia de isótopos porque los neutrones tienen un momento magnético. El comportamiento químico está gobernado por los electrones. Los isótopos de un elemento dado tienen las mismas propiedades químicas porque todos ellos contienen similar número de electrones.

44.3 La energía de enlace nuclear por nucleón es aproximadamente constante, pues la fuerza nuclear es una fuerza de corto alcance. Consecuentemente, un nucleón dado

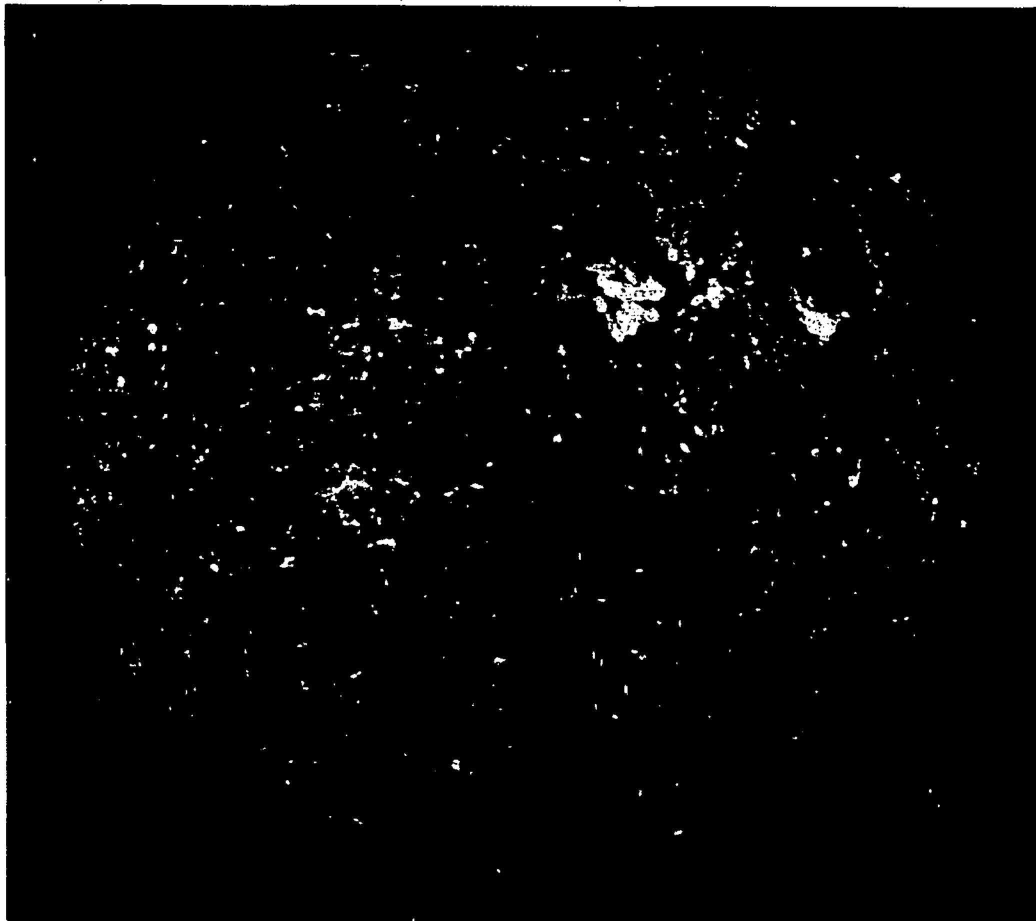
interactúa sólo con sus vecinos más cercanos en lugar de hacerlo con todos los otros nucleones en el núcleo. No importa cuántos nucleones estén presentes, atraer uno hacia afuera implica separarlo sólo de sus vecinos más cercanos. La energía para hacer esto, por tanto, es casi independiente de cuántos nucleones estén presentes. La fuerza eléctrica que enlaza a los electrones en un átomo al núcleo es una fuerza de largo alcance y, por ende, cada electrón interactúa con todos los protones en el núcleo. Más protones en el núcleo, por tanto, significan una intensa atracción electrón-núcleo. Como resultado, la energía necesaria para remover un electrón del átomo varía con el número atómico.

44.4 No. El negativo de la pendiente de una gráfica energía potencial *versus* posición es fuerza. Para distancias de separación de nucleones menores a 1 fm, ambas pendientes en la figura 44.9 son negativas, por tanto, la fuerza es positiva, lo cual significa que las partículas se repelen entre ellas. De 1 fm a 3 fm, la pendiente es positiva, lo que indica una fuerza atractiva (de muy corto alcance). Si una tangente a la gráfica fuese vertical a algún punto, la fuerza tendría que ser infinita —una imposibilidad física—.

44.5 La figura 44.15 muestra que cuanto mayor sea la energía de la partícula alfa, más delgada será la barrera de potencial. La barrera delgada se traduce en una alta probabilidad de escape. La mayor probabilidad de escape se traduce en una tasa de decaimiento más rápida, lo cual aparece como una vida media más corta.

44.6 En el decaimiento alfa sólo existen dos productos —la partícula alfa y el núcleo hijo—. También existen dos principios de conservación involucrados —energía y *momentum* lineal—. En consecuencia, la partícula alfa debe ser expulsada con una energía discreta para satisfacer ambos principios de conservación. Existe un pequeño número de energías discretas de partícula alfa, de modo que al núcleo hijo se le puede dejar en varios estados excitados, pero las energías permitidas de la partícula alfa no son continuas.

En el decaimiento beta se tienen los mismos dos principios de conservación, pero tres productos —la partícula beta, el núcleo hijo y el neutrino—. Existen muchas maneras para que la energía se pueda dividir entre las tres partículas para satisfacer los dos principios de conservación y, en consecuencia, la partícula beta se emite a lo largo de un intervalo continuo de energías.





ACERTIJO

Casi todo sobre la Tierra obtiene su energía del Sol. Las plantas usan la luz solar para fabricar carbohidratos, los cuales son una fuente de energía para los animales. El viento sopla debido al calor solar sobre la atmósfera. Los automóviles son impulsados mediante combustibles fósiles, los cuales, en esencia, almacenan energía solar. Todas estas cosas obtienen su energía del Sol, pero: ¿Cuál es la fuente de la energía del Sol? *(European Space Agency/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.)*

capítulo

45

Fisión y fusión nucleares

En el presente capítulo se estudian principalmente las dos formas mediante las cuales puede obtenerse energía de las reacciones nucleares: la fisión, en la cual un gran núcleo se divide (o fisiona) en dos núcleos más pequeños, y la fusión, donde dos pequeños núcleos se funden para formar uno más grande. En cualquier caso hay una liberación de energía que puede emplearse con fines destructivos (bombas) o bien constructivos (como en la producción de energía eléctrica). También se examinan las maneras en que interactúan la radiación con la materia y se analizan varios dispositivos utilizados para detectar radiación. El capítulo concluye con un análisis de algunas aplicaciones industriales y biológicas de la radiación.

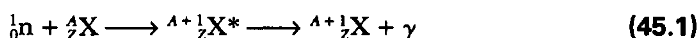
INTERACCIONES QUE INVOLUCRAN NEUTRONES

Con el fin de entender la fisión nuclear y la física de los reactores nucleares, primero se debe entender cómo interactúan los neutrones con los núcleos. Debido a su carga neutral, los neutrones no se someten a las fuerzas de Coulomb y, en consecuencia, no interactúan eléctricamente con los electrones. Por tanto, puesto que cualquier pieza de materia está compuesta de electrones orbitando núcleos atómicos pequeños, la materia se manifiesta bastante "abierta" a los neutrones libres.

En general, la rapidez de reacciones inducidas por neutrones aumenta conforme disminuye la energía cinética del neutrón. Los neutrones libres experimentan decaimiento beta con un tiempo de vida media de casi 10 min. Sin embargo, una vez que los neutrones libres entran en la materia, muchos de ellos son absorbidos por los núcleos atómicos y son estabilizados del decaimiento mediante la fuerza nuclear de otros nucleones.

Un **neutrón rápido** (energía mayor que aproximadamente 1 MeV) que viaja a través de la materia se somete a muchos eventos de dispersión con los núcleos. En cada evento el neutrón cede una parte de su energía cinética a un núcleo. Una vez que la energía del neutrón es suficientemente baja, existe una alta probabilidad de que el neutrón sea capturado por un núcleo, un evento que se acompaña por la emisión de un rayo gamma. Dicha **captura del neutrón** se puede escribir

Captura del neutrón



$$^{1}_{0}n + ^{A}_{Z}X \longrightarrow ^{A+1}_{Z}X^* \longrightarrow ^{A+1}_{Z}X + \gamma \qquad \textbf{(45.1)}$$

Una vez que el neutrón se captura, el núcleo $^{A+1}_{Z}X^*$ está en un estado excitado durante un tiempo muy corto antes de que experimente decaimiento gamma. Además, el núcleo producto $^{A+1}_{Z}X^*$ por lo común es radiactivo y decae por emisión beta.

La rapidez de captura de neutrones conforme los neutrones atraviesan cualquier muestra depende de cuáles átomos estén contenidos en ella y de la energía del neutrón incidente. Además, la rapidez de captura también depende del tipo de átomos en la muestra. En algunos materiales y para neutrones rápidos, predominan los choques elásticos. Los materiales en los que ocurre esto reciben el nombre de **moderadores** porque frenan (o moderan) de manera muy efectiva los originalmente energéticos neutrones. La interacción de neutrones con la materia aumenta con la energía decreciente del neutrón, porque un neutrón frenado pasa más tiempo en la vecindad de los núcleos blanco. Un buen moderador deberá estar compuesto de núcleos que tienen baja tendencia a capturar neutrones rápidos. Los núcleos moderadores deberían ser de baja masa, de modo que se transfiera a ellos más energía cinética en las colisiones elásticas. Por tal razón los materiales en los que abunda el hidrógeno, como la parafina y el agua, son buenos moderadores para neutrones.

Moderador

Pregunta sorpresa 45.1

¿Cuál sería la partícula blanco ideal en un moderador de neutrón si usted estuviese intentando detener por completo a los neutrones incidentes?

Neutrón térmico

Tarde o temprano muchos de los neutrones que bombardean un moderador se vuelven **neutrones térmicos,** lo cual significa que están en equilibrio térmico con el material moderador. Su energía cinética promedio a temperatura ambiente es, a partir de la ecuación 21.4,

$$K_{\text{prom}} = \tfrac{3}{2}k_B T \approx \tfrac{3}{2}k_B(300\ \text{K}) \approx 0.04\ \text{eV}$$

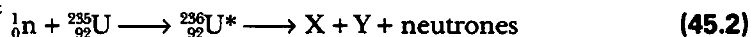
la cual corresponde a una rapidez cuadrática media (rms) del neutrón de casi 2 800 m/s. Los neutrones térmicos tienen una distribución de magnitudes de velocidad, al igual que las moléculas en un recipiente de gas (véase el capítulo 21). Un neutrón de alta energía, aquel en el cual la energía es de varios MeV, se *termaliza* (es decir, alcanza K_{prom}) en menos de 1 ms cuando incide sobre un moderador. Tales neutrones térmicos tienen una probabilidad muy alta de ser capturados por los núcleos moderadores.

FISIÓN NUCLEAR

Como se vio en la sección 44.3, la **fisión** nuclear ocurre cuando un núcleo pesado, como el ^{235}U, se divide en dos núcleos más pequeños. En una reacción de este tipo **la masa combinada de los núcleos hijo es menor que la masa del núcleo padre,** y la diferencia en masa se llama **masa defecto.** La fisión se inicia cuando un núcleo pesado captura un neutrón térmico. Al multiplicar la masa defecto por c^2 se obtiene el valor numérico de la energía liberada. La energía se libera porque la energía de enlace por nucleón de los núcleos hijo es de aproximadamente 1 MeV mayor que la del núcleo padre (véase la Fig. 44.8).

La fisión nuclear fue observada por primera vez en 1938 por Otto Hahn (1879-1968) y Fritz Strassman (n. 1902) siguiendo algunos estudios básicos efectuados por Fermi. Después de bombardear uranio ($Z = 92$) con neutrones, Hahn y Strassman descubrieron entre los productos de reacción dos elementos de masa media, bario y lantanio. Poco después Lise Meitner (1878-1968) y su sobrino Otto Frisch (1904-1979) explicaron lo que había sucedido. El núcleo de uranio se había dividido en dos fragmentos casi iguales después de absorber un neutrón. Tal suceso fue de considerable interés para los físicos que intentaban entender el núcleo, pero tuvo consecuencias incluso de más largo alcance. Las mediciones mostraron que alrededor de 200 MeV de energía se liberaban en cada evento de fisión, y este hecho afectó el curso de la historia.

La fisión de ^{235}U por neutrones térmicos puede representarse por la ecuación

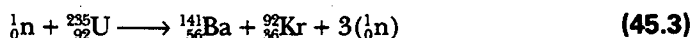


$${}^{1}_{0}\text{n} + {}^{235}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{236}_{92}\text{U}^{*} \longrightarrow \text{X} + \text{Y} + \text{neutrones} \qquad \textbf{(45.2)}$$

Fisión

donde el ^{236}U* es un estado excitado intermedio que dura alrededor de 10^{-12} s antes de partirse en núcleos X y Y, los cuales reciben el nombre de **fragmentos de fisión.** En toda ecuación de fisión hay muchas combinaciones de X y Y que satisfacen los requerimientos de conservación de energía y carga. Con uranio, por ejemplo, hay cerca de 90 núcleos hijo que pueden formarse.

La fisión también resulta en la producción de varios neutrones, normalmente dos o tres. En promedio, alrededor de 2.5 neutrones se liberan por evento. Una reacción de fisión común para el uranio es



$${}^{1}_{0}\text{n} + {}^{235}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{92}_{36}\text{Kr} + 3({}^{1}_{0}\text{n}) \qquad \textbf{(45.3)}$$

Fisión de ^{235}U

El rompimiento del núcleo de uranio puede compararse con lo que ocurre con una gota de agua cuando se le añade un exceso de energía. (Recuerde el modelo de la gota líquida del núcleo descrito en la sección 44.4.) Inicialmente, todos los átomos en la gota tienen alguna energía, pero ésta no es tan grande como para romper la gota. Sin embargo, si se añade suficiente energía para poner a vibrar la gota, ésta

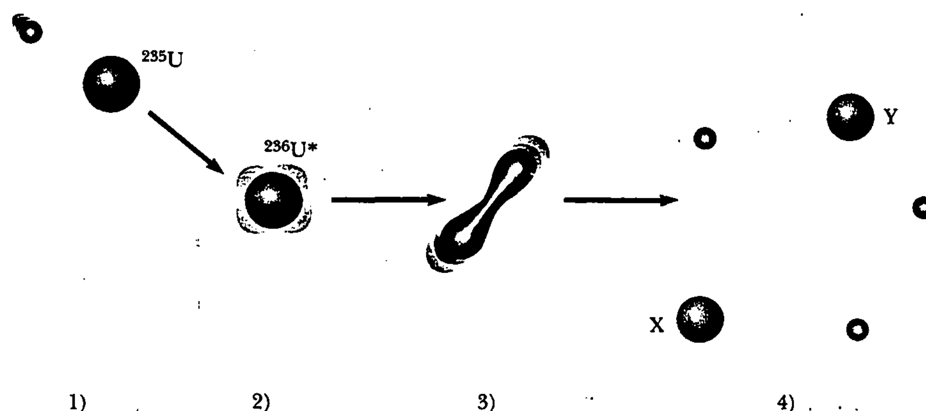


Figura 45.1 Evento de fisión nuclear según lo describe el modelo de la gota líquida del núcleo.

se alarga y comprime hasta que la amplitud de vibración se vuelve lo bastante grande para hacer que la gota se rompa. En el núcleo de uranio ocurre un proceso similar (Fig. 45.1):

Estado 1. El núcleo de ^{235}U captura un neutrón térmico.
Estado 2. Esta captura da lugar a la formación de ^{236}U*, y el exceso de energía de este núcleo hace que experimente violentas oscilaciones.
Estado 3. El núcleo de ^{236}U* se distorsiona en forma considerable, y la fuerza de repulsión entre protones en las dos mitades de lo que parece una pesa de mancuerna tiende a incrementar la distorsión.
Estado 4. El núcleo se divide en dos fragmentos y durante el proceso emite varios neutrones.

Pregunta sorpresa 45.2

¿Qué de lo siguiente es cierto para el etapa 3 de un evento de fisión de ^{235}U en relación con las etapas 1 y 2? (Remítase a la Fig. 45.1.) a) Tanto la fuerza nuclear como la fuerza electrostática son más pequeñas. b) Ambas fuerzas son más grandes. c) La fuerza nuclear es más grande y la fuerza electrostática es más pequeña. d) La fuerza nuclear es más pequeña y la fuerza electrostática es más grande.

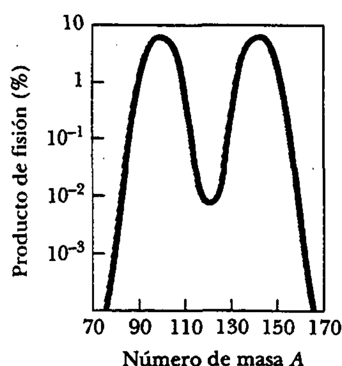


Figura 45.2 Distribución de productos de fisión *versus* número de masa para la fisión de ^{235}U bombardeado con neutrones térmicos. Advierta que la escala de la ordenada es logarítmica.

La figura 45.2 es una gráfica de la distribución de productos de fisión *versus* el número de masa A. Los productos más probables tienen números de masa $A \approx 140$ y $A \approx 95$, los cuales caen a la izquierda de la línea de estabilidad en la figura 44.3, lo que significa que contienen más neutrones que protones. **Dichos fragmentos, como son inestables debido a su exceso de neutrones, liberan casi instantáneamente dos o tres neutrones.** Los fragmentos que tienen valores de A distintos de 140 y 95, pero todavía ricos en neutrones, decaen hacia núcleos más estables a través de una sucesión de decaimientos de e^-, emitiendo rayos gamma en el proceso.

Calcule la energía de desintegración Q liberada en un proceso de fisión típico. En la figura 44.8 se observa que la energía de enlace por nucleón se acerca a 7.2 MeV en núcleos pesados ($A \approx 240$) y a 8.2 MeV aproximadamente en núcleos de masa intermedia, lo cual significa que los nucleones en los fragmentos de fisión están enlazados más estrechamente y, en consecuencia, tienen menos masa que los nucleones en el núcleo padre. Tal reducción en la masa por nucleón aparece como energía liberada cuando ocurre la fisión. La cantidad de energía liberada es (8.2 −

7.2) MeV por nucleón. Suponiendo un total de 240 nucleones, se encuentra que la energía liberada por evento de fisión es

$$Q = (240\,\text{núcleos})\left(8.2\frac{\text{MeV}}{\text{núcleos}} - 7.2\frac{\text{MeV}}{\text{núcleos}}\right) = 240\,\text{MeV}$$

Ésta es una cantidad muy grande de energía en relación con la cantidad liberada en procesos químicos. Por ejemplo, la energía liberada en la combustión de una molécula de octano utilizada en motores de gasolina ¡es alrededor de un millonésimo de la energía liberada en un solo evento de fisión!

Pregunta sorpresa 45.3

Si un núcleo pesado se fuese a fisionar en dos núcleos hijo, éstos serían inestables. ¿Por qué?

Pregunta sorpresa 45.4

¿Cuáles de las siguientes son posibles reacciones de fisión?

a) $^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \rightarrow ^{140}_{54}Xe + ^{94}_{38}Sr + 2(^{1}_{0}n)$
b) $^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \rightarrow ^{132}_{50}Sn + ^{101}_{42}Mo + 3(^{1}_{0}n)$
c) $^{1}_{0}n + ^{239}_{94}Pu \rightarrow ^{127}_{53}I + ^{93}_{41}Nb + 3(^{1}_{0}n)$

EJEMPLO **La energía liberada en la fisión del ^{235}U**

Calcule la energía liberada cuando 1.00 kg de ^{235}U se fisiona, tomando la energía de desintegración por evento igual a Q = 208 MeV.

Solución Se necesita conocer el número de núcleos en 1.00 kg de uranio. Puesto que $A = 235$, se sabe que la masa molar de este isótopo es 235 g/mol. Por tanto, el número de núcleos en la muestra es

$$N = \left(\frac{6.02\times10^{23}\,\text{núcleos /mol}}{235\,\text{g/mol}}\right)(1.00\times10^{3}\,\text{g})$$
$$= 2.56\times10^{24}\,\text{núcleos}$$

De manera que la energía de desintegración total es

$$E = NQ = (2.56\times10^{24}\,\text{núcleos})\left(208\frac{\text{MeV}}{\text{núcleos}}\right)$$
$$= 5.32\times10^{26}\,\text{Mev}$$

Puesto que 1 MeV equivale a 4.45×10^{-20} kWh, se encuentra que $E = 2.37\times10^{7}$ kWh. ¡Es una energía suficiente para mantener encendido un foco eléctrico de 100 W durante 30 000 años! Si la energía en 1 kg de ^{235}U fuese liberada súbitamente, equivaldría a detonar alrededor de 20 000 toneladas de TNT.

REACTORES NUCLEARES

En la sección anterior aprendió que, cuando se fisiona el ^{235}U, se emiten un promedio de 2.5 neutrones por evento. Los neutrones pueden a su vez provocar la fisión de otros núcleos, y existe la posibilidad de que produzcan una reacción en cadena (Fig. 45.3). Los cálculos muestran que si la reacción en cadena no se controla (es decir, si el proceso no ocurre lentamente), podría producir una violenta explosión que liberaría una enorme cantidad de energía. Éste es el principio que está detrás del primer tipo de bomba nuclear que se hizo explotar en 1945, una reacción de fisión descontrolada. Sin embargo, cuando la reacción se controla, se le puede dar un uso menos destructivo a la energía liberada. En Estados Unidos, por ejemplo, cerca del 20% de la electricidad generada cada año proviene de plantas de potencia nuclear, y la potencia nuclear se usa de manera extensiva en muchos países, incluyendo Francia, Japón y Alemania.

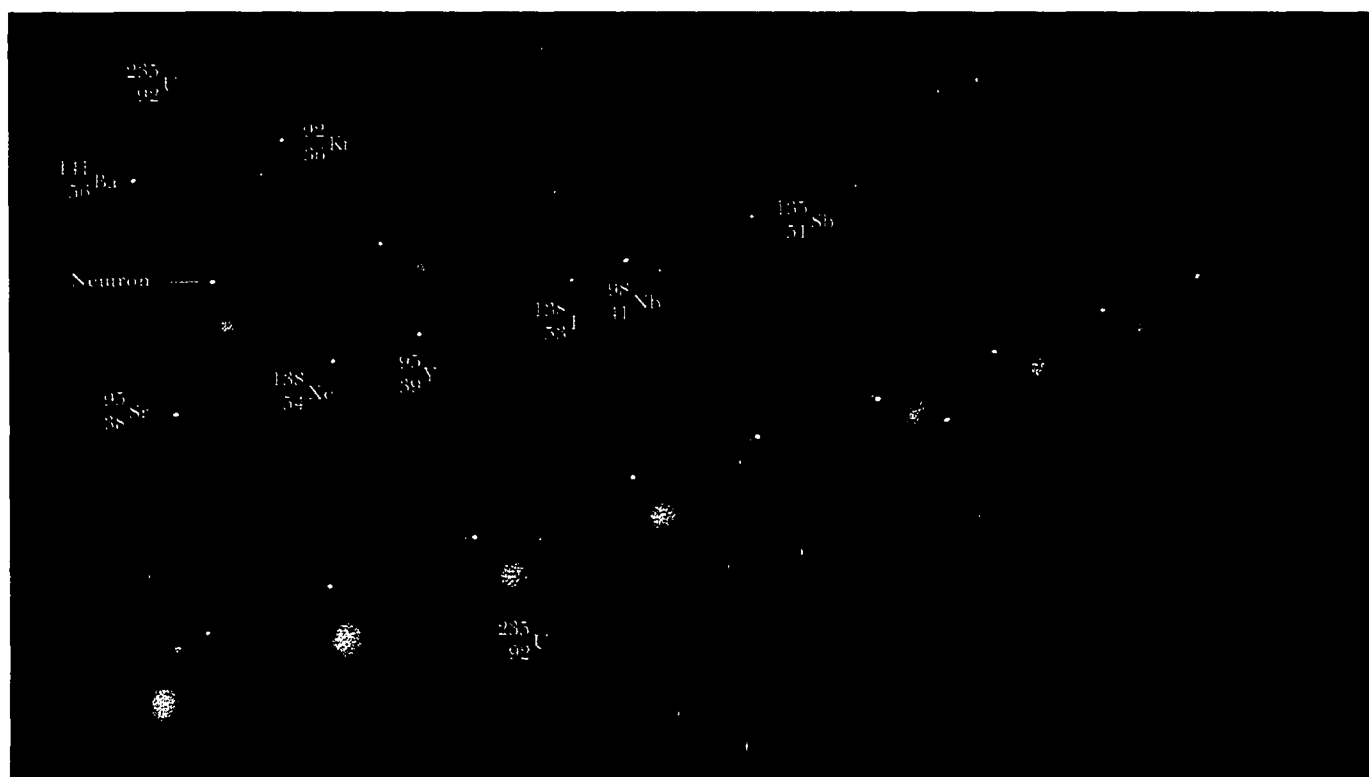


Figura 45.3 Reacción nuclear en cadena iniciada por la captura de un neutrón.

Reacción en cadena

Un reactor nuclear es un sistema diseñado para mantener lo que se llama **reacción en cadena autosostenida.** Se trata de un importante proceso que fue logrado por primera vez en 1942 por Enrico Fermi y su equipo en la Universidad de Chicago, con uranio natural como combustible.[1] La mayor parte de los reactores en operación en la actualidad también usan uranio como combustible. Sin embargo, el uranio natural contiene sólo cerca de 0.7% del isótopo ^{235}U, y el restante 99.3% es ^{238}U. Este hecho es importante para la operación de un reactor porque el ^{238}U casi nunca se fisiona. En vez de ello tiende a absorber neutrones, produciendo neptunio y plutonio. Por tal razón los combustibles de reactores deben *enriquecerse* en forma artificial para contener al menos un pequeño porcentaje de ^{235}U.

Constante de reproducción

Con el propósito de alcanzar la reacción en cadena autosostenida, uno de los neutrones emitidos en cada fisión de ^{235}U, en promedio, debe ser capturado por otro núcleo de ^{235}U y provocar que el núcleo se fisione. Un parámetro útil para describir el nivel de operación del reactor es la **constante de reproducción** K, definida como **número promedio de neutrones de cada evento de fisión que ocasiona otro evento de fisión.** Como se ha visto, K puede tener un valor promedio de 2.5 en la fisión del uranio. Sin embargo, en la práctica K es menor que esto debido a varios factores que se estudian en los párrafos siguientes.

Una reacción en cadena autosostenida se consigue cuando $K = 1$. En estas condiciones se dice que el reactor será **crítico.** Cuando $K < 1$, el reactor es subcrítico y la

[1] Aunque el reactor de Fermi fue el primer reactor nuclear que se produjo, existe evidencia de que una reacción de fisión natural pudo haberse sostenido a sí misma por quizá cientos de miles de años en un depósito de uranio en Gabón, África Occidental. Véase G. Cowan, "A Natural Fission Reactor", *Sci. Am.* 235(5):36, 1976.

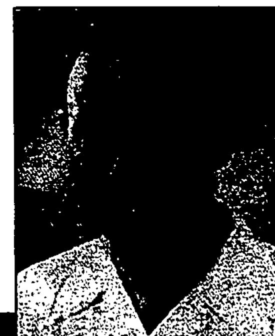
reacción se extingue. Cuando $K > 1$, el reactor será supercrítico y ocurre una reacción incontrolable. En un reactor nuclear empleado para entregar potencia a una empresa eléctrica es necesario mantener un valor de K ligeramente mayor que la unidad.

En cualquier reactor una fracción de los neutrones producidos en la fisión escapa del núcleo antes de inducir otros eventos de fisión. Si la fracción de fuga es demasiado grande, el reactor no operará. La pérdida porcentual es grande si el reactor es muy pequeño debido a que la fuga es una función de la relación entre el área de la superficie y el volumen. Por consiguiente, una característica fundamental del diseño de un reactor es una óptima proporción área de la superficie-volumen.

Los neutrones liberados en eventos de fisión son muy energéticos, con energías cinéticas del orden de 2 MeV. Ya que la probabilidad de captura de un neutrón se incrementa al disminuir la energía, es necesario frenar tales neutrones hasta energías térmicas para permitir que sean capturados y produzcan fisión de otros núcleos de ^{235}U (véase el ejemplo 9.8). Los neutrones energéticos son frenados por una sustancia moderadora que rodea el combustible.

En el primer reactor nuclear que fue construido (Fig. 45.4) Fermi colocó ladrillos de grafito (carbono) entre los elementos del combustible. Los núcleos de carbono tienen casi 12 veces más masa que los neutrones, pero después de varias colisiones con núcleos de carbono, un neutrón se ha frenado lo suficiente para aumentar su probabilidad de fisión con ^{235}U. En este diseño el moderador es carbono; la mayoría de los reactores modernos usan agua como moderador.

En el proceso de frenado los neutrones pueden ser capturados por núcleos que no se fisionan. El evento más común de este tipo es la captura neutrónica por el ^{238}U, el cual constituye más del 90% del uranio en los elementos de combustible. La probabilidad de la captura de un neutrón por el ^{238}U es muy alta cuando los neutrones tienen altas energías cinéticas, y muy baja cuando tienen energías cinéticas bajas. De tal modo, el frenado de los neutrones mediante el moderador sirve al propósito secundario de hacerlos disponibles para la reacción con ^{235}U y reducir las oportunidades de que sean capturados por el ^{238}U.



[illegible] su teoría del decaimiento beta, la teoría del electrón libre de metales y el desarrollo del primer reactor de fisión en el mundo, en 1942. Fermi fue verdaderamente un talentoso físico teórico y experimental. También fue bien conocido por su habilidad de presentar la física en una forma clara y excitante. "Cualquier cosa que la naturaleza tenga reservada para la humanidad, por desagradable que pueda parecer, debe ser aceptada por los hombres, pues la ignorancia nunca es mejor que el conocimiento." *(National Accelerator Laboratory)*



Figura 45.4 Representación artística del primer reactor nuclear del mundo. Debido a secretos de guerra, existen pocas fotografías del reactor terminado, el cual fue compuesto de capas de grafito moderador intercaladas con uranio. Una reacción en cadena autosostenida se logró por primera vez el 2 de diciembre de 1942. Un comunicado del éxito fue telefoneado de inmediato a Washington con este mensaje: "El navegante italiano ha desembarcado en el Nuevo Mundo y encontró a los nativos muy amigables." El histórico evento tuvo lugar en un improvisado laboratorio en las canchas de tenis bajo las instalaciones del Stagg Field de la Universidad de Chicago, y el navegante italiano fue Enrico Fermi. *(Cortesía de Chicago Historical Society)*

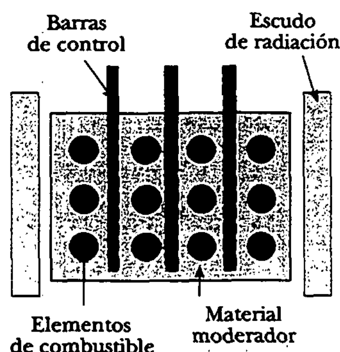


Figura 45.5 Sección transversal de la parte central de un reactor mostrando las barras de control, los elementos de combustible que contienen combustible enriquecido y el material moderador, todo rodeado por un escudo de radiación.

Control del nivel de potencia

Es posible para un reactor alcanzar la etapa crítica ($K = 1$) después de que se minimizan todas las pérdidas de neutrones que acaban de describirse. Sin embargo, se necesita un método de control para mantener un valor de K cerca de la unidad. Si K aumenta arriba de este valor, la energía interna producida en la reacción fundiría al reactor.

El diseño básico de la parte central de un reactor nuclear se presenta en la figura 45.5. Los elementos de combustible están compuestos de uranio que se ha enriquecido en el isótopo ^{235}U. Para controlar el nivel de potencia se insertan barras de control en el núcleo del reactor. Las barras están hechas de materiales, como el cadmio, que son muy eficientes al absorber neutrones. Ajustando el número y posición de estas barras de control en el núcleo del reactor, el valor K puede variarse y puede conseguirse cualquier nivel de potencia dentro del intervalo de diseño del reactor.

Varios tipos de sistemas de reactores convierten la energía cinética de los fragmentos de fisión en energía eléctrica. El reactor más común en uso en Estados Unidos es el reactor de agua presurizada (Fig. 45.6), y se examinará este tipo porque sus partes principales son comunes a todos los diseños de reactor. Los eventos de fisión en el núcleo del reactor elevan las temperaturas del agua contenida en el circuito primario (cerrado) y la mantienen a alta presión para evitar que hierva. (Esta agua sirve también como moderador.) El agua caliente se bombea a través de un intercambiador de calor, donde la energía interna del agua se transfiere al agua contenida en el circuito secundario. El agua caliente en el circuito secundario se convierte en vapor, el cual impulsa un sistema turbina-generador para crear energía eléctrica. El agua en el circuito secundario está aislada del agua en el circuito primario para evitar la contaminación del agua secundaria y el vapor por núcleos radiactivos del núcleo del reactor.

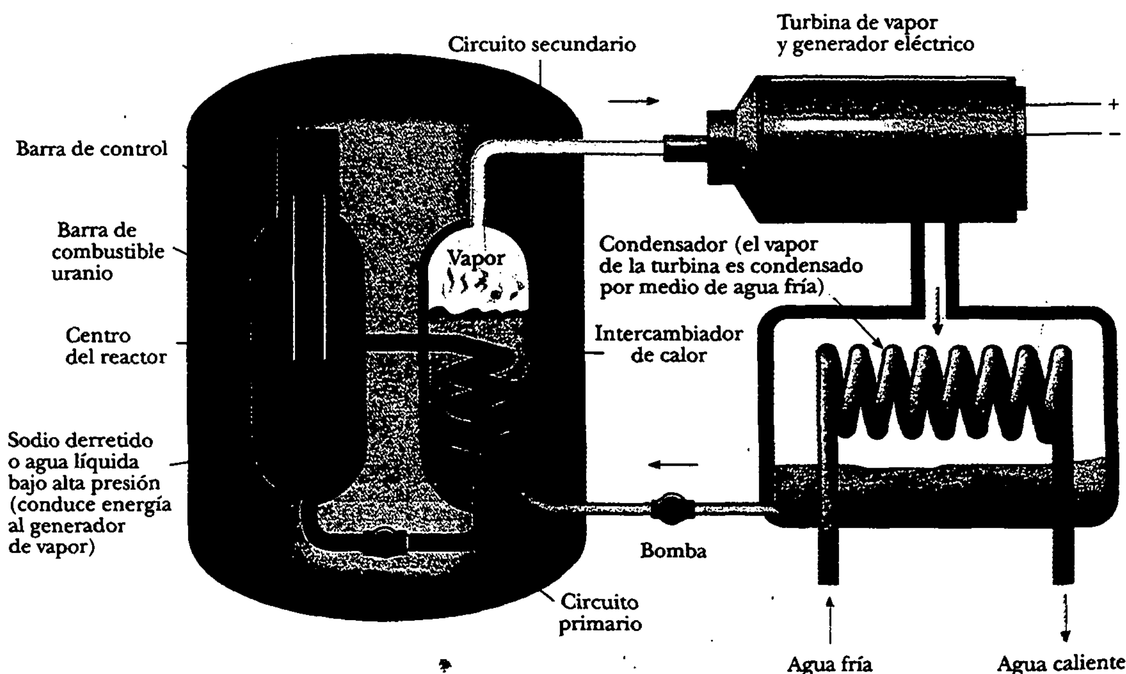


Figura 45.6 Componentes principales de un reactor de agua presurizada.

Seguridad y disposición de desechos

El casi desastre de 1979 en la planta nuclear de Three Mile Island en Pennsylvania, y el accidente de 1986 en el reactor de Chernobyl en Ucrania legítimamente enfocaron la atención en la seguridad en los reactores. El accidente en Three Mile Island fue el resultado de una inadecuada instrumentación en el cuarto de control y pobre entrenamiento en la respuesta ante las emergencias. No hubieron lesionados o impactos a la salud detectables a partir de dicho evento, aun cuando más de un tercio del combustible se derritió.

Por desgracia éste no fue el caso en Chernobyl, donde la actividad de los materiales liberados inmediatamente después del accidente totalizaron alrededor de 12×10^{18} Bq y propiciaron la evacuación de 116 000 personas. Al menos 237 personas sufrieron de aguda enfermedad por radiación y casi 800 niños contrajeron posteriormente cáncer de tiroides a partir de la ingestión de yodo radiactivo en la leche de vacas que comieron pasto contaminado. Una conclusión de una conferencia internacional que estudió el accidente de Ucrania fue que "la principal causa del accidente de Chernobyl fue la coincidencia de varias deficiencias en el diseño físico del reactor y en el diseño del sistema de apagado así como una violación de procedimientos". La mayor parte de las deficiencias se han atendido en plantas de diseño similar en Rusia y países vecinos de la antigua Unión Soviética.

No hay plantas del tipo Chernobyl en Estados Unidos. Muchas plantas de dicho país son del tipo agua presurizada, como antes se señaló.

Los reactores comerciales logran seguridad a través de diseño cuidadoso y rígidos protocolos de operación, y es sólo cuando estas variables se comprometen que los reactores representan un peligro. La exposición a la radiación y los riesgos potenciales a la salud asociados con ella se controlan mediante tres capas de contención. El combustible y los productos de la fisión radiactiva son contenidos dentro del recipiente del reactor. Si este recipiente se rompiera, el edificio del reactor actuaría como una segunda estructura contenedora para prevenir que el material radiactivo contamine al ambiente. Por último, las instalaciones del reactor deben estar en una zona remota para proteger al público general de la exposición a la radiación que escapase del edificio del reactor.



Brillo azul de radiación emitido por un elemento de combustible de un reactor en Oak Ridge National Laboratory. El brillo se produce cuando partículas energéticas se mueven a través del agua más rápido que la rapidez de la luz en dicho medio. *(U.S. Department of Energy/Photo Researchers, Inc.)*

Una preocupación continua acerca de los reactores de fisión nuclear es la disposición segura del material radiactivo cuando el núcleo se reemplaza. Tal material de desecho contiene isótopos altamente radiactivos de larga vida que deben almacenarse durante largo tiempo de tal manera que no haya posibilidad de contaminación ambiental. En la actualidad los métodos más prometedores parecen ser sumergir los desperdicios radiactivos en contenedores a prueba de agua y enterrarlos en profundas minas de sal.

El transporte del combustible del reactor y los desperdicios del mismo poseen riesgos adicionales de seguridad. Los accidentes durante el transporte del combustible nuclear podrían exponer al público a niveles letales de radiación. El Departamento de Energía de Estados Unidos requiere estrictas pruebas de rompimiento de todos los contenedores usados para transportar materiales nucleares. Quienes los fabrican deben demostrar que sus contenedores nunca se romperán, aun en choques a alta rapidez.

Las publicaciones de seguridad asociadas con los reactores de potencia nuclear son complejas y con frecuencia emotivas. Todas las fuentes de energía tienen riesgos asociados. En cada caso se deben ponderar los riesgos contra los beneficios y la disponibilidad de la fuente de energía.

FUSIÓN NUCLEAR

En el capítulo 44 se encontró que la energía de enlace de los núcleos ligeros ($A < 20$) es mucho más pequeña que la energía de enlace para los núcleos pesados. Lo

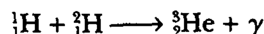
anterior sugiere un proceso que es el inverso de la fisión. Como se vio en la sección 39.8, cuando dos núcleos ligeros se combinan para formar un núcleo más pesado, el proceso se conoce como **fusión** nuclear. Ya que la masa del núcleo final es menor que las masas combinadas de los núcleos originales, hay una pérdida de masa acompañada de una liberación de energía.

Dos ejemplos de dichas reacciones de fusión liberadoras de energía son:



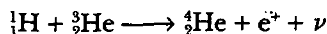
$$^{1}_{1}\text{H} + ^{1}_{1}\text{H} \longrightarrow ^{2}_{1}\text{H} + e^{+} + \nu$$

y

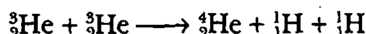


$$^{1}_{1}\text{H} + ^{2}_{1}\text{H} \longrightarrow ^{3}_{2}\text{He} + \gamma$$

Esta segunda reacción es seguida por una fusión hidrógeno-helio o una fusión helio-helio:



$$^{1}_{1}\text{H} + ^{3}_{2}\text{He} \longrightarrow ^{4}_{2}\text{He} + e^{+} + \nu$$



$$^{3}_{2}\text{He} + ^{3}_{2}\text{He} \longrightarrow ^{4}_{2}\text{He} + ^{1}_{1}\text{H} + ^{1}_{1}\text{H}$$

Éstas son las reacciones básicas en el **ciclo protón-protón,** el cual se cree es uno de los ciclos básicos por medio de los cuales se genera la energía en el Sol y en otras estrellas en las que abunda el hidrógeno. La mayor parte de la producción de energía ocurre en el interior del Sol, donde la temperatura es aproximadamente de 1.5×10^{7} K. Como se verá después, se requieren temperaturas así de altas para impulsar estas reacciones, y por ello reciben el nombre de **reacciones de fusión termonucleares.** La bomba de (fusión) hidrógeno, que explotó por primera vez en 1952, es un ejemplo de una reacción de fusión termonuclear descontrolada. Ésta usa una bomba de fisión como "disparador" para crear las altas temperaturas necesarias para la fusión.

Reacción termonuclear

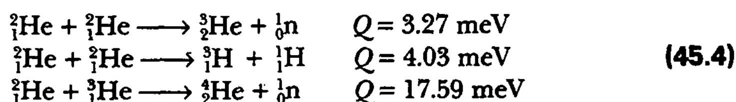
Todas las reacciones en el ciclo protón-protón son exotérmicas. Una visión general del ciclo es que se combinan cuatro protones para formar una partícula alfa y dos positrones, al tiempo que liberan 25 MeV de energía.

Reacciones de fusión

La enorme cantidad de energía liberada en las reacciones de fusión sugiere la posibilidad de aprovechar dicha energía con propósitos útiles. Numerosos esfuerzos se realizan en la actualidad para desarrollar un reactor termonuclear sostenido y controlable —un reactor de potencia de fusión. La fusión controlada por lo común se denomina fuente de energía final debido a la disponibilidad de su fuente de combustible: agua. Por ejemplo, si se usara deuterio como combustible, de un galón de agua se podría extraer 0.12 g de él a un costo de aproximadamente cuatro centavos de dólar. Dichas tarifas harían que los costos de combustible, incluso de un reactor ineficiente, fueran casi insignificantes. Una ventaja adicional de los reactores de fusión es que, comparados con otros, forman pocos subproductos radiactivos. Para el ciclo protón-protón, por ejemplo, el producto final es seguro, helio no radiactivo. Desafortunadamente, un reactor termonuclear que pueda entregar una salida de potencia neta distribuida a lo largo de un intervalo de tiempo razonable aún no es realidad, y se deben resolver muchas dificultades antes de que pueda construirse un dispositivo exitoso.

La energía del Sol se basa, en parte, en un conjunto de reacciones en las cuales el hidrógeno se convierte en helio. Por desgracia, la interacción protón-protón no es adecuada para usarse en un reactor de fusión debido a que el evento requiere presiones y densidades muy altas. El proceso funciona en el Sol debido sólo a la alta densidad en extremo de protones en el interior solar.

Las reacciones que parecen ser más prometedoras para un reactor de potencia de fusión involucran deuterio $^{2}_{1}$H y tritio $^{3}_{1}$H:



$$\begin{aligned} ^{2}_{1}\text{He} + ^{2}_{1}\text{He} &\longrightarrow ^{3}_{2}\text{He} + ^{1}_{0}\text{n} \qquad Q = 3.27 \text{ meV} \\ ^{2}_{1}\text{He} + ^{2}_{1}\text{He} &\longrightarrow ^{3}_{1}\text{H} + ^{1}_{1}\text{H} \qquad Q = 4.03 \text{ meV} \\ ^{2}_{1}\text{He} + ^{3}_{1}\text{He} &\longrightarrow ^{4}_{2}\text{He} + ^{1}_{0}\text{n} \qquad Q = 17.59 \text{ meV} \end{aligned} \tag{45.4}$$

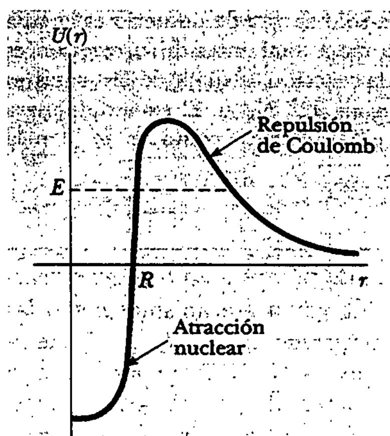


Figura 45.7 Energía potencial como función de la distancia de separación entre dos deuterones. La fuerza repulsiva de Coulomb domina a intervalos largos, y la fuerza nuclear domina a intervalos cortos, donde R es del orden de 1 fm. Si se desprecia el efecto túnel, para experimentar fusión los dos deuterones requieren una energía E más grande que la altura de la barrera.

Como se señaló antes, el deuterio está disponible en cantidades casi ilimitadas en lagos y océanos y su extracción es muy económica. El tritio, sin embargo, es radiactivo ($T_{1/2}$ = 12.3 años) y experimenta decaimiento beta a ^{3}He. Por tal razón el tritio no viene de manera natural en ningún grado considerable y debe producirse de manera artificial.

Uno de los principales problemas en la obtención de energía a partir de la fusión nuclear es el hecho de que la fuerza de repulsión de Coulomb entre dos núcleos cargados debe superarse antes de que éstos puedan fundirse. La energía potencial como función de la distancia de separación entre dos deuterones (núcleos de deuterio, cada uno con carga $+e$) se observa en la figura 45.7. La energía potencial es positiva en la región $r > R$, donde domina la fuerza repulsiva de Coulomb ($R \approx 1$ fm), y negativa en la región $r < R$, donde domina la fuerza nuclear. El problema fundamental entonces es brindar a los dos núcleos suficiente energía cinética para vencer esta fuerza repulsiva, lo cual puede conseguirse calentando el combustible a temperaturas muy altas (hasta alrededor de 10^8 K, tan grande como la temperatura interior del Sol). A estas altas temperaturas los átomos están ionizados y el sistema se compone de una colección de electrones y núcleos, conocida comúnmente como *plasma*.

Se requieren altas temperaturas para superar la gran barrera de Coulomb

EJEMPLO **La fusión de dos deuterones**

La separación entre dos deuterones debe ser alrededor de 1.0×10^{-14} m para que la fuerza nuclear supere la fuerza repulsiva de Coulomb. a) Calcule la altura del potencial de barrera debida a la fuerza repulsiva.

Solución La energía potencial asociada con dos cargas separadas por una distancia r es, a partir de la ecuación 25.13,

$$U = k_e \frac{q_1 q_2}{r}$$

donde k_e es la constante de Coulomb. En el caso de dos deuterones $q_1 = q_2 = +e$, de modo que

$$U = k_e \frac{e^2}{r} = \left(8.99 \times 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\right) \frac{(1.60 \times 10^{-19}\,\text{C})^2}{1.0 \times 10^{-14}\,\text{m}}$$

$$= 2.3 \times 10^{-14}\,\text{J} = 0.14\,\text{MeV}$$

b) Estime la temperatura requerida para que un deuterón supere el potencial de barrera, suponiendo una energía de $\frac{3}{2}k_B T$ por deuterón (donde k_B es la constante de Boltzmann).

Solución Puesto que la energía de Coulomb total del par es 0.14 MeV, la energía de Coulomb por deuterón es 0.07 MeV = 1.1×10^{-14} J. Dejando esta energía igual a la energía promedio por deuterón se obtiene

$$\tfrac{3}{2}k_B T = 1.1 \times 10^{-14}\,\text{J}$$

Resolviendo para T se tiene

$$T = \frac{2(1.1 \times 10^{-14}\,\text{J})}{3(1.38 \times 10^{-23}\,\text{J/K})} = 5.3 \times 10^8\,\text{K}$$

La temperatura calculada es demasiado alta porque las partículas en el plasma tienen una distribución de rapidez maxwelliana, y, por tanto, algunas reacciones de fusión son causadas por partículas en el extremo de alta energía de esta

distribución. Más aún, incluso aquellas partículas que no tienen energía suficiente para superar la barrera tienen alguna probabilidad de efecto túnel a través de aquélla. Cuando se consideran estos efectos, una temperatura de "sólo" 4×10^8 K parece adecuada para fundir los dos deuterones.

c) Encuentre la energía liberada en la reacción deuterio-deuterio



$$^2_1H + ^2_1H \longrightarrow ^3_1H + ^1_1H$$

Solución La masa de un solo átomo de deuterio es igual a 2.014 102 u. Por tanto, la masa total antes de la reacción es 4.028 204 u. Después de la reacción la suma de las masas es 3.016 049 u + 1.007 825 u = 4.023 874 u. El exceso de masa es 0.004 33 u, equivalente a 4.03 MeV, como se notó en la ecuación 45.4.

Temperatura de encendido crítica

La temperatura a la cual la rapidez de generación de potencia en cualquier reacción de fusión es mayor que la rapidez de pérdida (debida a mecanismos como las pérdidas por radiación) se llama **temperatura de encendido crítica** T_{encend}. La temperatura para la reacción deuterio-deuterio (D-D) es de 4×10^8 K. De acuerdo con la relación $E \approx k_B T$, dicha temperatura es equivalente a alrededor de 35 keV. Lo anterior indica que la temperatura de encendido crítica para la reacción deuterio-tritio (D-T) es de casi 4.5×10^7 K, o sólo 4 keV. Una gráfica de la potencia generada $\mathcal{P}_{gen}$ por fusión *versus* temperatura para las dos reacciones se muestra en la figura 45.8. La línea recta verde representa la potencia perdida $\mathcal{P}_{perdida}$ por medio del mecanismo de radiación conocido como **radiación de frenado.** En este importante mecanismo de pérdida de energía la radiación (fundamentalmente rayos X) se emite como consecuencia de las colisiones electrón-ion dentro del plasma. Las intersecciones de la línea $\mathcal{P}_{perdida}$ con las curvas $\mathcal{P}_{gen}$ proporcionan las temperaturas de encendido críticas.

Tiempo de confinamiento

Además de los requerimientos de alta temperatura hay otros dos parámetros críticos que determinan si un reactor termonuclear tendrá éxito o no: la **densidad de iones** n y el **tiempo de confinamiento** τ, que es el lapso en que los iones se mantienen a $T > T_{encend}$. El físico británico J. D. Lawson ha demostrado que la densidad de iones y el tiempo de confinamiento deben ser, ambos, suficientemente grandes para asegurar que se libere más energía de fusión que la cantidad requerida para elevar la temperatura del plasma. En particular, el **criterio de Lawson** establece que una salida de energía neta es posible en las siguientes condiciones:

Criterio de Lawson

$$n\tau \geq 10^{14}\ \text{s/cm}^3 \qquad \text{(D-T)}$$
$$n\tau \geq 10^{16}\ \text{s/cm}^3 \qquad \text{(D-D)} \qquad \textbf{(45.5)}$$

Una gráfica de $n\tau$ *versus* temperatura para reacciones D-T y D-D se proporciona en la figura 45.9. Se hace referencia al producto $n\tau$ como **número de Lawson** de una reacción.

Se llegó al criterio de Lawson comparando la energía requerida para calentar un plasma dado con la energía generada por el proceso de fusión.[2] La energía E_{in} requerida para elevar la temperatura del plasma es proporcional a la densidad de iones n, la cual se puede expresar como $E_{in} = C_1 n$, donde C_1 es alguna constante. La energía generada por el proceso de fusión es proporcional a $n^2\tau$, o $E_{gen} = C_2 n^2 \tau$.

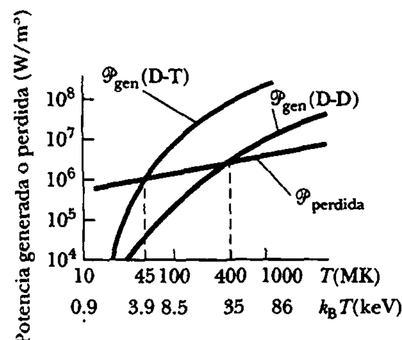


Figura 45.8 Potencia generada *versus* temperatura para fusiones deuterio-deuterio (D-D) y deuterio-tritio (D-T). La línea verde representa la pérdida de potencia como función de la temperatura. Cuando la tasa de generación excede la tasa de pérdida, tiene lugar el encendido.

[2] El criterio de Lawson ignora la energía necesaria para establecer el intenso campo magnético utilizado para confinar el plasma caliente. Se espera que esta energía sea casi 20 veces mayor que la energía requerida para elevar la temperatura del plasma. Por ende, es necesario tener un sistema de recuperación de energía magnética o emplear imanes superconductores.

Ello puede entenderse reconociendo que la energía de fusión liberada es proporcional tanto a la rapidez a la cual chocan los iones interactuantes ($\propto n^2$) como al tiempo de confinamiento τ. La energía neta se produce cuando $E_{gen} > E_{in}$. Cuando las constantes C_1 y C_2 se calculan para diferentes reacciones, la condición de que $E_{gen} \geq E_{in}$ conduce al criterio de Lawson.

En resumen, los tres requisitos fundamentales de un reactor de potencial termonuclear exitoso son

Requisitos para un reactor de potencia de fusión

- La temperatura del plasma debe ser muy alta —alrededor de 4.5×10^7 K para la reacción D-T y 4×10^8 K para la reacción D-D.
- La densidad de iones debe ser alta. Es necesario tener una alta densidad de núcleos interactuantes para aumentar la rapidez de colisiones entre las partículas.
- El tiempo de confinamiento del plasma debe ser largo. Con el propósito de cumplir con el criterio de Lawson, el producto $n\tau$ debe ser grande. Para un valor dado de n, la probabilidad de fusión entre dos partículas crece cuando τ aumenta.

Los esfuerzos actuales se orientan a alcanzar el criterio de Lawson a temperaturas que excedan T_{encend}. Aunque se han alcanzado las densidades de plasma mínimas requeridas, el problema del tiempo de confinamiento es más difícil. ¿Cómo puede el plasma confinarse a 10^8 K durante 1 s? Las dos técnicas básicas que se están investigando son el confinamiento magnético y el confinamiento inercial.

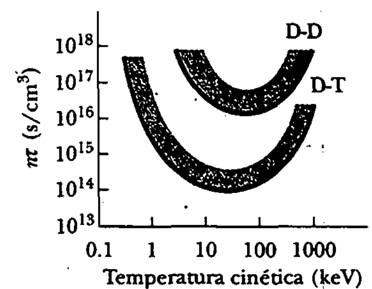


Figura 45.9 El número de Lawson $n\tau$ versus temperatura para las reacciones de fusión D-T y D-D. Las regiones sobre las curvas coloreadas representan condiciones favorables para la fusión.

Confinamiento magnético

Muchos experimentos de plasma relacionados con la fusión emplean **confinamiento magnético** para contener el plasma. Un dispositivo toroidal llamado **tokamak,** desarrollado primero en Rusia, se muestra en la figura 45.10a. Una combinación de dos campos magnéticos se usa para confinar y estabilizar el plasma: 1) un intenso campo toroidal producido por la corriente en los devanados toroidales que rodean una cámara de vacío con forma de dona y 2) un campo "poloidal" más débil producido por la corriente toroidal. Además de confinar el plasma, la corriente toroidal se usa para elevar su temperatura. Las líneas de campo magnético helicoidal resultantes forman espirales alrededor del plasma y evitan que toque las paredes de la cámara al vacío. (Si el plasma entra en contacto con las paredes, su temperatura se reduce, e impurezas pesadas salpicadas de las paredes "lo envenenan" y llevan grandes pérdidas de potencia.)

Uno de los principales descubrimientos en el confinamiento magnético durante la década de 1980 fue en el área de la entrada de energía auxiliar para alcanzar temperaturas de encendido. Los experimentos han mostrado que la inyección de un haz de partículas neutras energéticas dentro del plasma es un método muy eficiente para elevarlo hasta temperaturas de encendido (5 a 10 keV). La entrada de energía por medio de radiofrecuencias probablemente será necesaria para plasmas de tamaño de un reactor.

web Para mayor información visite el Laboratorio de física de plasma de Princeton en: **www.pppl.gov**

Cuando estuvo funcionando, el reactor de prueba de fusión Tokamak (TFTR, por sus siglas en inglés, Fig. 45.10b) en Princeton reportó temperaturas de ion centrales de 510 millones de grados Celsius, más de 30 veces más altas que las del centro del Sol. Los valores de $n\tau$ en el TFTR para la reacción D-T están bastante arriba de 10^{13} s/cm³ y se acercan al valor requerido por el criterio de Lawson. En 1991 se alcanzaron tasas de reacción de 6×10^{17} fusiones D-T por segundo alcanzados en el JET Tokamak en Abington, Inglaterra.

Una de las nuevas generaciones de experimentos de fusión es el experimento nacional toroide esférico (NSTX, por sus siglas en inglés) mostrado en la figura 45.10c. En lugar del plasma con forma de dona de un tokamak, el NSTX produce un plasma esférico que tiene un agujero que pasa por su centro. La mayor ventaja de la configuración esférica es su capacidad de confinar al plasma a una presión muy elevada en un campo magnético dado. Este logro podría conducir al desarrollo de reactores de fusión más pequeños y económicos.

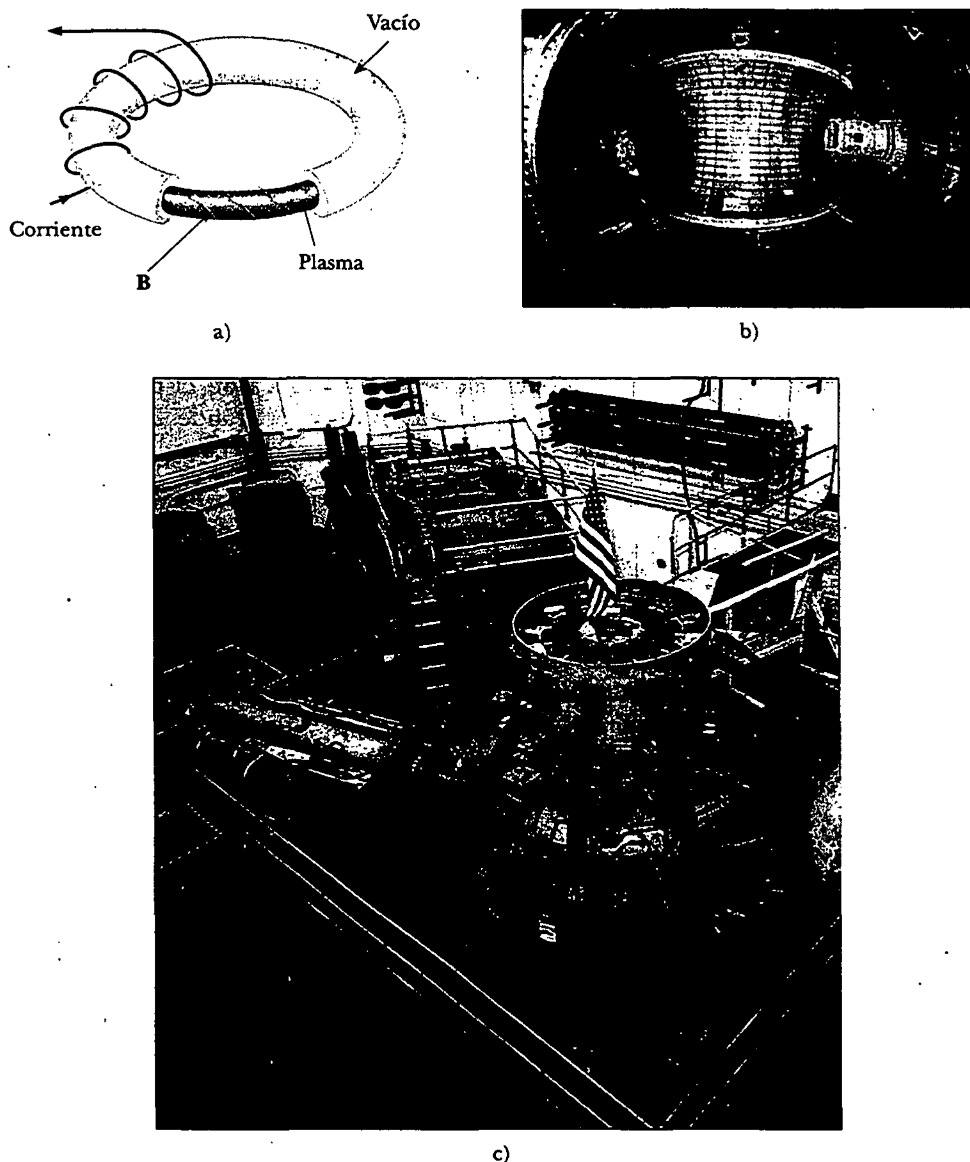


Figura 45.10 a) Diagrama de un tokamak usado en el esquema de confinamiento magnético. b) Vista interior de la recientemente cerrada cámara de vacío del reactor de prueba de fusión Tokamak (TFTR, por sus siglas en inglés) en el laboratorio de física de plasma en Princeton. *(Cortesía de Princeton Plasma Physics Laboratory)* c) El experimento nacional toroide esférico (NSTX, por sus siglas en inglés) que comenzó a funcionar en marzo de 1999. *(Cortesía de Princeton University)*

Un esfuerzo de colaboración internacional que involucra cuatro grandes programas de fusión se lleva a cabo en la actualidad para construir un reactor de fusión llamado ITER (por sus siglas en inglés: Reactor experimental termonuclear internacional). Dicha instalación está diseñada para abordar los restantes temas tecnológicos y científicos que establecerán la factibilidad de la potencia de fusión. El diseño está completado (Fig. 45.11), y las negociaciones del sitio y la construcción siguen desarrollándose. Si el dispositivo planeado trabaja como se espera, el número Lawson para el ITER será seis veces mayor que el del actual poseedor del récord, el JT-60U tokamak de Japón. El ITER producirá 1.5 GW de potencia, y el contenido de energía de las partículas alfa dentro del reactor será tan intenso que continuará la reacción de fusión, permitiendo que las fuentes de energía auxiliares se apaguen

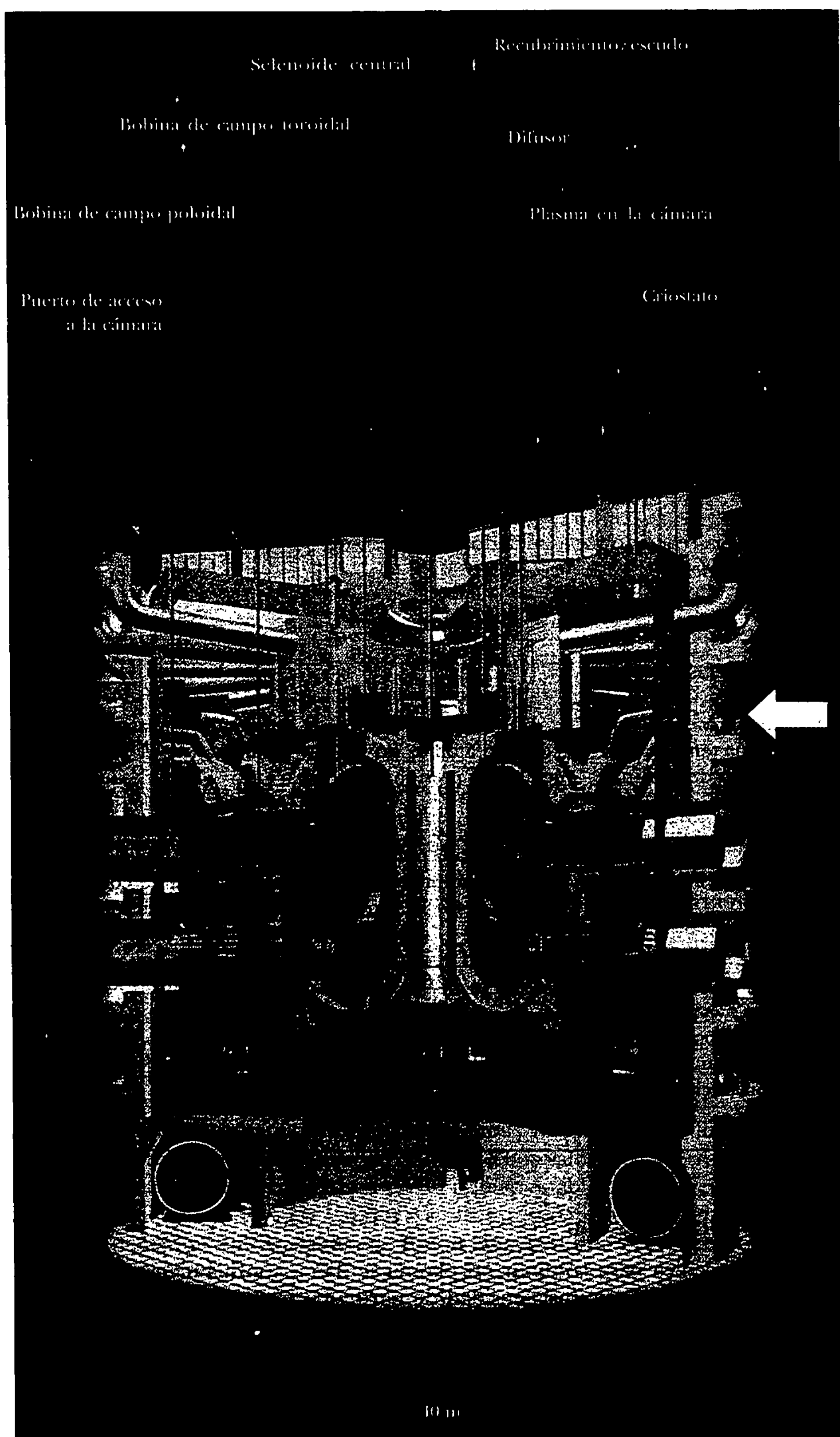
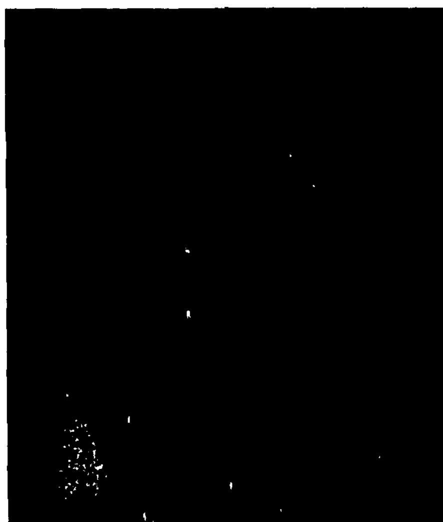


Figura 45.11 Corte transversal con un diagrama del ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor). Advierta el tamaño del reactor en comparación con el de una persona (*flecha*). *(Cortesía de ITER)*



Durante la operación del reactor de prueba de fusión Tokamak, la descarga de plasma era monitoreada usando un sistema óptico que mostraba el interior de la cámara de vacío. Esta vista de un plasma de deuterio de alta temperatura muestra un cinturón de radiación brillante en primer plano. *(Cortesía de Princeton Plasma Physics Laboratory)*

una vez que la reacción haya iniciado. Tal estado de quemado sostenido se menciona como *encendido.*

EJEMPLO **Dentro de un reactor de fusión**

En 1998 el JT-60U tokamak de Japón funcionaba con una densidad de plasma D-T de 4.8×10^{13} cm^{-3} a una temperatura (en unidades de energía) de 16.1 keV. Era capaz de confinar este plasma dentro de un campo magnético durante 1.1 s. a) ¿Lo anterior cumple los criterios de Lawson?

Solución La ecuación 45.5 dice que para un plasma D-T, el número Lawson $n\tau$ debe ser más grande que 10^{14} s/cm^3. Para el JT–60U,

$$n\tau = (4.8 \times 10^{13}\ \text{cm}^{-3})(1.1\ \text{s}) = 5.3 \times 10^{13}\ \text{s/cm}^3$$

lo cual está cerca de alcanzar los criterios de Lawson. De hecho, los científicos registraron una ganancia de potencia de 1.25, lo que indica que el reactor estaba funcionando ligeramente arriba del punto de ruptura y estaba produciendo más energía de la necesaria para mantener al plasma.

b) ¿Cómo se compara la densidad del plasma con la densidad de átomos en un gas ideal cuando el gas está a temperatura y presión ambientes?

Solución La densidad de átomos en una muestra de gas ideal está dada por N_A/V_m, donde N_A es el número de Avogadro y V_m es el volumen molar de un gas ideal en condiciones estándar, 2.24×10^{-2} m^3/mol. Por ende, la densidad del gas es

$$\frac{N_A}{V_m} = \frac{6.02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol}}{2.24 \times 10^{-2}\ \text{m}^3/\text{mol}} = 2.7 \times 10^{25}\ \text{átomos/m}^3$$

Esto es más de 500 000 veces mayor que la densidad del plasma en el reactor.

Confinamiento inercial

La segunda técnica para confinar un plasma se llama **confinamiento inercial** y usa un blanco D-T que tiene una densidad de partículas muy alta. En este esquema el tiempo de confinamiento es muy corto (por lo común de 10^{-11} a 10^{-9} s), por lo que, debido a su propia inercia, las partículas no tienen oportunidad para moverse apreciablemente a partir de sus posiciones iniciales. De este modo, el criterio de Lawson puede satisfacerse combinando una alta densidad de partículas con un breve tiempo de confinamiento.

La fusión láser es la forma más común de confinamiento inercial. Una pequeña pastilla D-T, de alrededor de 1 mm de diámetro, es golpeada en forma simultánea por varios haces láser enfocados de alta intensidad, lo que produce un gran pulso de energía de entrada que hace que la superficie de la píldora de combustible se

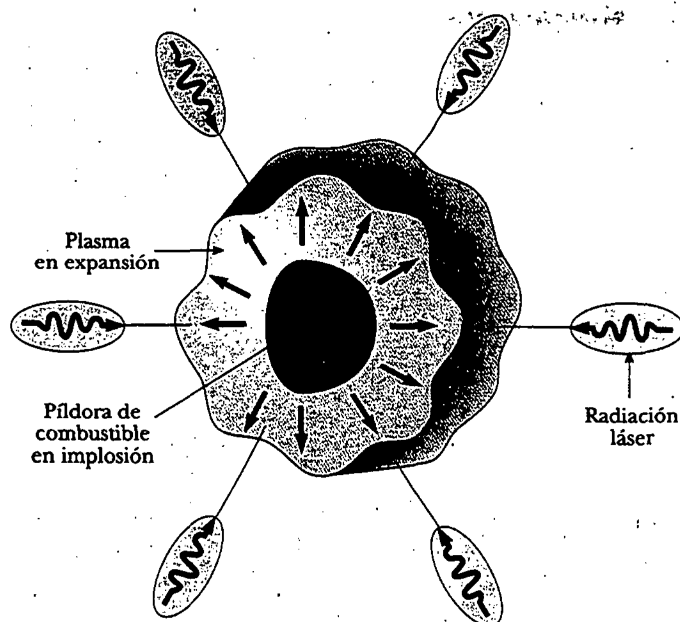


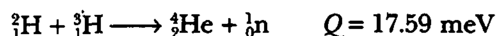
Figura 45.12 En el confinamiento inercial una píldora de combustible D-T se funde cuando es golpeada simultáneamente por varios haces láser de alta intensidad.

evapore (Fig. 45.12). Las partículas que escapan producen una fuerza de reacción de tercera ley sobre el núcleo de la píldora, originando una fuerte onda de choque compresiva que se mueve hacia el interior. Tal onda de choque aumenta la presión y densidad del núcleo y produce un correspondiente incremento de temperatura. Cuando la temperatura del núcleo alcanza la temperatura de encendido, ocurren las reacciones de fusión.

Dos de los laboratorios de fusión láser más adelantados en Estados Unidos son la instalación Omega en la Universidad de Rochester en Nueva York, y la instalación Nova en el Lawrence Livermore National Laboratory, en California. La instalación Omega enfoca 24 haces láser sobre el blanco y la instalación Nova utiliza 10 haces. La figura 45.13a presenta la cámara del blanco en Nova; y la figura 45.13b, las diminutas píldoras esféricas D-T utilizadas. Nova es capaz de inyectar una potencia de 2×10^{14} W dentro de una píldora D-T de 0.5 mm y ha alcanzado valores de $n\tau \approx 5 \times 10^{14}$ s/cm^3 y temperaturas de ion de 5.0 keV. Estos valores se acercan a los requeridos para el encendido D-T. Se trata de un avance estable que ha llevado al Departamento de Energía de Estados Unidos y a otros grupos a planear una instalación nacional que incluirá un dispositivo de fusión láser con una energía de entrada en el intervalo de 5-10 MJ.

Diseño del reactor de fusión

En la reacción de fusión D-T mostrada en la figura 45.14,



$$ {}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \longrightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n} \qquad Q = 17.59 \text{ meV} $$

la partícula alfa transporta 20% de la energía y el neutrón 80%, o alrededor de 14 MeV. Como las partículas alfa están cargadas, son absorbidas sobre todo por el plasma; esto provoca que aumente la temperatura del plasma. En contraste, los neutrones de 14 MeV, que son eléctricamente neutros, atraviesan el plasma y deben ser

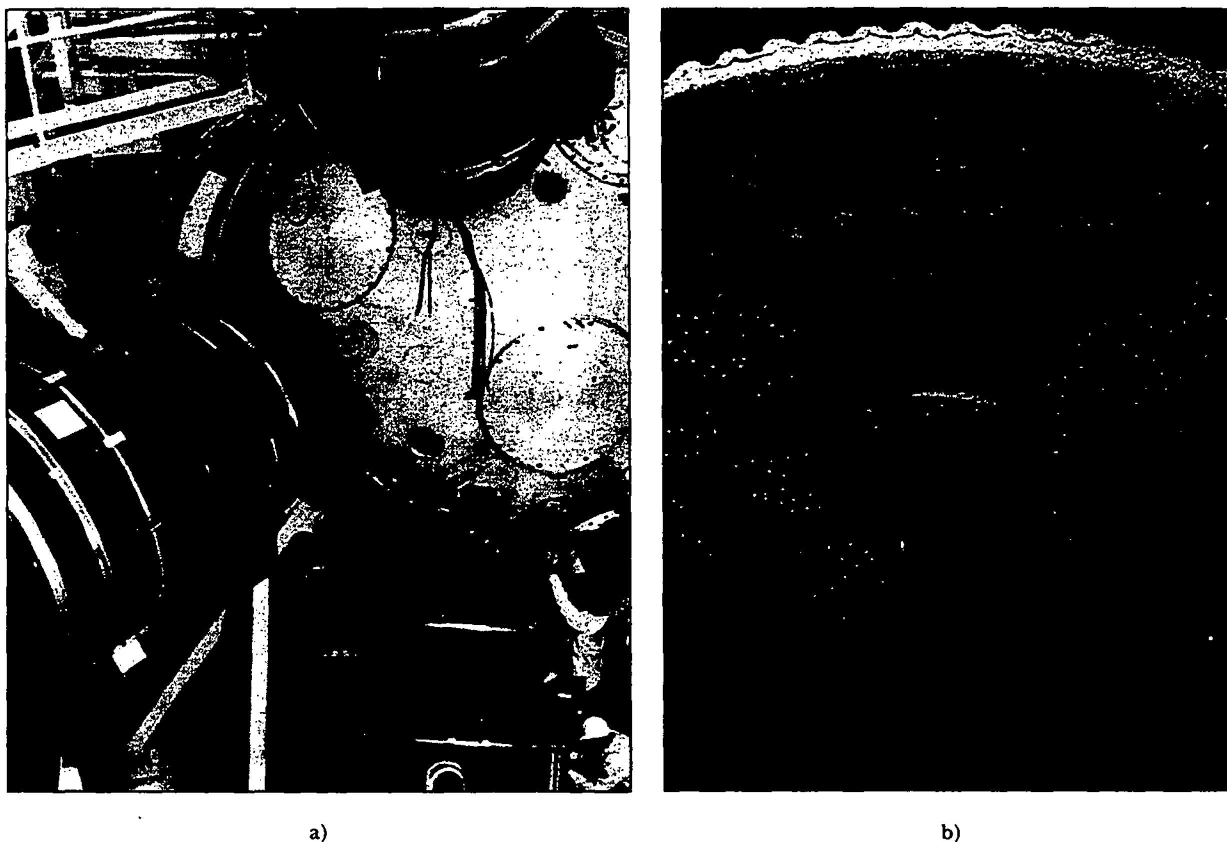


Figura 45.13 a) La cámara del blanco de la instalación láser Nova en Lawrence Livermore Laboratory. *(Cortesía de University of California Lawrence Livermore National Laboratory y el Departamento de Energía de Estados Unidos)* b) Cascarones plásticos esféricos usados para contener combustible D-T muestran apiñamiento sobre una moneda. Los cascarones tienen superficies muy suaves y aproximadamente 100 nm de espesor. *(Cortesía de Los Álamos National Laboratory)*

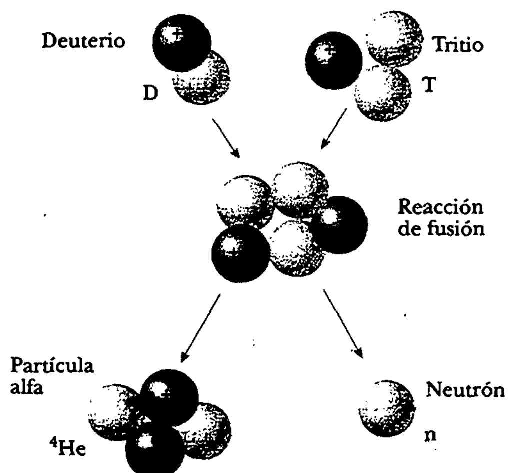
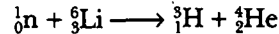


Figura 45.14 Fusión deuterio-tritio. Ochenta por ciento de la energía liberada está en el neutrón de 14 MeV.

absorbidos en un material que cubre los contornos para extraer su gran energía cinética y generar energía eléctrica.

Un esquema consiste en usar litio metálico fundido como el material absorbente de neutrones y hacer circular el litio en un circuito de intercambio de calor cerrado para producir vapor e impulsar turbinas como en una central eléctrica convencional. La figura 45.15 muestra un diagrama de un reactor de este tipo. Se estima que un manto de litio de alrededor de un metro de espesor capturará casi el 100% de los neutrones de la fusión de una pequeña píldora D-T.

La captura de neutrones mediante litio se describe con la reacción



$$^1_0\text{n} + {}^6_3\text{Li} \longrightarrow {}^3_1\text{H} + {}^4_2\text{He}$$

donde las energías cinéticas del tritio cargado ^3_1H y las partículas alfa se convierten en energía interna en el litio fundido. Una ventaja adicional del empleo del litio como el medio de transferencia de energía es que el tritio producido se puede separar del litio y regresarse como combustible al reactor.

Ventajas y problemas de la fusión

Ventajas de la fusión

Si la potencia de la fusión se puede aprovechar alguna vez, ofrecerá varias ventajas sobre la potencia generada por la fisión: 1) bajo costo y abundancia de combustible (deuterio), 2) imposibilidad de accidentes incontrolables, y 3) muchísimo menor peligro de radiación. Algunos de los problemas y desventajas que se prevén incluyen 1) escasez de litio, 2) suministro limitado de helio, necesario para enfriar los imanes superconductores empleados para producir intensos campos de confinamiento y 3) daño estructural y radiactividad inducida provocados por el bombardeo de neutrones. Si estos problemas y los factores de diseño en ingeniería pueden resolverse, la fusión nuclear puede convertirse en una fuente de energía factible a mediados del siglo XXI.

Áreas problema y desventajas de la fusión

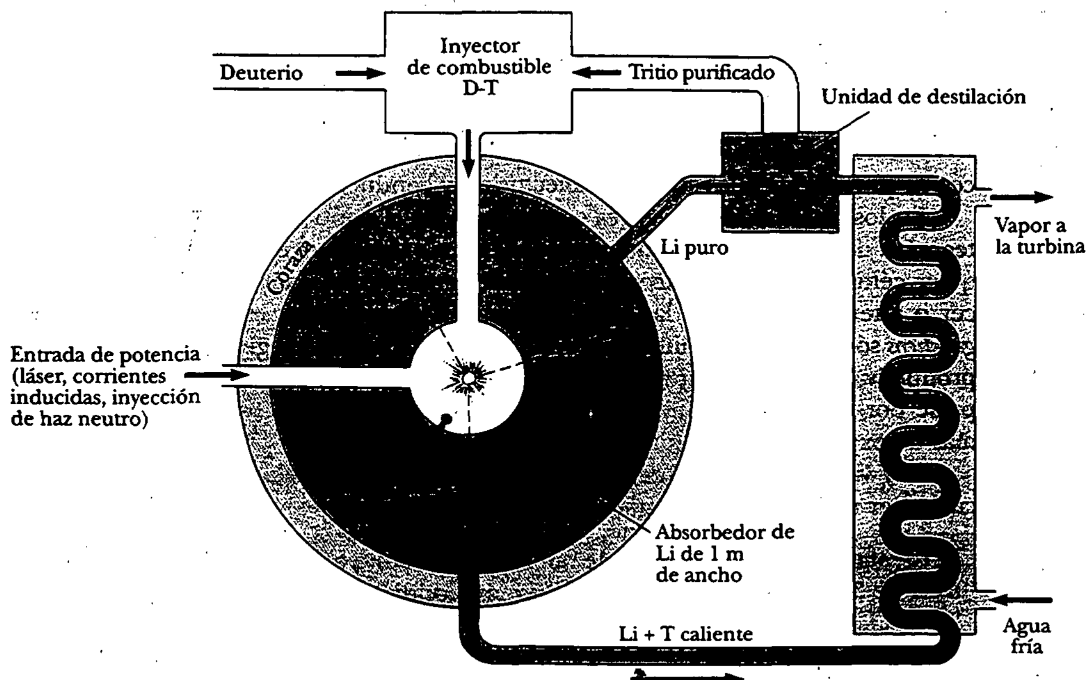


Figura 45.15 Diagrama de un reactor de fusión.

Sección opcional

DAÑO POR RADIACIÓN EN LA MATERIA

En el capítulo 34 aprendió que la radiación electromagnética está en todo el entorno en forma de ondas de radio, microondas, ondas luminosas, etcétera. En esta sección se apuntará a las formas de radiación que pueden causar serios daños conforme atraviesan la materia, lo cual incluye radiación resultante de procesos radiactivos y radiación en forma de partículas energéticas como los neutrones y protones. Son formas a las que en ésta y las próximas dos secciones se hace referencia cuando se usa la palabra *radiación*.

El grado y tipo de daño dependen de varios factores, incluyendo el tipo y energía de la radiación y las propiedades de la materia. Los metales empleados en las estructuras de los reactores nucleares pueden debilitarse seriamente por altos flujos de neutrones energéticos, ya que estos flujos por lo común conducen a la fatiga metálica. El daño en estas situaciones es en la forma de desplazamientos atómicos, lo que origina con frecuencia alteraciones mayores de las propiedades del material. Los materiales también pueden ser dañados por radiación electromagnética, como los rayos gamma o X, éstos no desplazan los átomos en un material, en vez de eso les "arrancan" electrones que de esa forma se convierten en iones. Por ejemplo, defectos llamados centros de color se producen en cristales inorgánicos irradiándolos con rayos X. Un centro de color estudiado con amplitud se ha identificado como un electrón atrapado en una vacante de un ion Cl^-.

El daño por radiación en organismos se debe sobre todo a efectos de ionización en las células. El funcionamiento normal de una célula puede interrumpirse cuando se forman iones altamente reactivos como consecuencia de la radiación ionizante. Por ejemplo, el hidrógeno y el radical hidroxilo OH^- producidos a partir de moléculas de agua son capaces de inducir reacciones químicas que llegan a romper enlaces en proteínas y otras moléculas vitales. Además, la radiación ionizante llega a afectar de manera directa a moléculas vitales removiendo electrones de su estructura. Grandes dosis de radiación son especialmente peligrosas porque el daño de un gran número de moléculas en una célula puede causar la muerte de la célula. Si bien la muerte de una sola célula suele no ser un problema, la muerte de muchas células puede producir un daño irreversible para el organismo. Las células que se dividen rápidamente, como las del tracto digestivo, los órganos reproductores y los folículos capilares, son especialmente susceptibles. Además, las células que sobreviven a la radiación pueden volverse defectuosas. Estas células defectuosas son capaces de producir células aún más defectuosas y conducir a cáncer.

En los sistemas biológicos es común separar el daño de la radiación en dos categorías: daño somático y daño genético. El *daño somático* es el que se asocia con cualquier célula del cuerpo excepto las reproductoras. Este daño puede producir cáncer o alterar seriamente las características de organismos específicos. Los *daños genéticos* sólo afectan a células reproductivas. Los daños a los genes en las células reproductivas pueden llevar a descendencia anormal. Desde luego, uno debe preocuparse por los efectos de tratamientos de diagnóstico, como los rayos X y otras formas de exposición a la radiación.

Hay varias unidades que se emplean para cuantificar la cantidad, o dosis, de cualquier radiación que interactúa con una sustancia.

El roentgen

El roentgen (R) es la cantidad de radiación ionizante que produce una carga eléctrica de 3.33×10^{-10} C en 1 cm^3 de aire en condiciones estándar.

De manera equivalente, el roentgen es la cantidad de radiación que aumenta la energía de 1 kg de aire por 8.76×10^{-3} J.

Para la mayor parte de las aplicaciones el roentgen se ha sustituido por el rad (acrónimo de *radiation absorbed dose*: dosis de radiación absorbida):

Un **rad** es la cantidad de radiación que aumenta la energía de 1 kg de material absorbente en 1×10^{-2} J.

El rad

A pesar de que el rad es una unidad física perfectamente correcta, no es la mejor unidad para medir el grado de daño biológico producido por radiación, ya que el daño no sólo depende de la dosis sino también del tipo de radiación. Por ejemplo, una dosis dada de partículas alfa ocasiona cerca de 10 veces más daño biológico que una dosis igual de rayos X. El factor eficacia biológica relativa (**RBE,** por sus siglas en inglés) para un tipo dado de radiación es **el número de rad de radiación X o radiación gamma que produce el mismo daño biológico que 1 rad de la radiación que se está usando.** Los factores RBE para diferentes tipos de radiación se presentan en la tabla 45.1. Los valores son sólo aproximados, ya que varían con la energía de la partícula y con la forma del daño. El factor RBE debe considerarse sólo una guía de primera aproximación a los efectos reales de la radiación.

Por último, el **rem** (siglas en inglés de: radiación equivalente en el hombre) es el producto de la dosis en rad y del factor RBE:

$$\text{Dosis en rem} \equiv \text{dosis en rad} \times \text{RBE} \quad \textbf{(45.6)}$$

De acuerdo con esta definición, 1 rem de cualesquiera dos radiaciones produce la misma cantidad de daño biológico. Según la tabla 45.1, se ve que una dosis de 1 rad de neutrones rápidos representa una dosis efectiva de 10 rem, pero 1 rad de radiación gamma es equivalente a una dosis de sólo 1 rem.

La radiación de bajo nivel de fuentes naturales, como los rayos cósmicos y las rocas y el suelo radiactivos, entrega a cada persona una dosis de aproximadamente 0.13 rem/año; tal radiación se denomina *radiación de fondo.* Es importante notar que la radiación de fondo varía con la geografía, con los factores principales como altitud (exposición a rayos cósmicos) y geología (gas radón liberado por algunas formaciones rocosas, depósitos de minerales naturalmente radiactivos).

El límite superior de la dosis de radiación recomendado por el gobierno de Estados Unidos (además de la radiación de fondo) es casi de 0.5 rem/año. Muchas ocupaciones implican exposiciones de radiación mucho más altas, por lo que se ha establecido un límite superior de 5 rem/año para la exposición combinada de todo el cuerpo. Son permisibles límites superiores más altos para ciertas partes del cuerpo, como las manos y los antebrazos. Una dosis de 400 a 500 rem dan lugar a una tasa de mortalidad cercana a 50% (lo que significa que la mitad de la gente expuesta a este nivel de radiación muere). La forma más peligrosa de exposición es la ingestión

TABLA 45.1 Factores RBE para varios tipos de radiación

Radiación	Factor RBE
Rayos X y rayos gamma	1.0
Partículas beta	1.0-1.7
Partículas alfa	10-20
Neutrones térmicos	4-5
Neutrones rápidos y protones	10
Iones pesados	20

[a]RBE = eficacia biológica relativa.

Sección opcional

DAÑO POR RADIACIÓN EN LA MATERIA

En el capítulo 34 aprendió que la radiación electromagnética está en todo el entorno en forma de ondas de radio, microondas, ondas luminosas, etcétera. En esta sección se apuntará a las formas de radiación que pueden causar serios daños conforme atraviesan la materia, lo cual incluye radiación resultante de procesos radiactivos y radiación en forma de partículas energéticas como los neutrones y protones. Son formas a las que en ésta y las próximas dos secciones se hace referencia cuando se usa la palabra *radiación*.

El grado y tipo de daño dependen de varios factores, incluyendo el tipo y energía de la radiación y las propiedades de la materia. Los metales empleados en las estructuras de los reactores nucleares pueden debilitarse seriamente por altos flujos de neutrones energéticos, ya que estos flujos por lo común conducen a la fatiga metálica. El daño en estas situaciones es en la forma de desplazamientos atómicos, lo que origina con frecuencia alteraciones mayores de las propiedades del material. Los materiales también pueden ser dañados por radiación electromagnética, como los rayos gamma o X, éstos no desplazan los átomos en un material, en vez de eso les "arrancan" electrones que de esa forma se convierten en iones. Por ejemplo, defectos llamados centros de color se producen en cristales inorgánicos irradiándolos con rayos X. Un centro de color estudiado con amplitud se ha identificado como un electrón atrapado en una vacante de un ion Cl^-.

El daño por radiación en organismos se debe sobre todo a efectos de ionización en las células. El funcionamiento normal de una célula puede interrumpirse cuando se forman iones altamente reactivos como consecuencia de la radiación ionizante. Por ejemplo, el hidrógeno y el radical hidroxilo OH^- producidos a partir de moléculas de agua son capaces de inducir reacciones químicas que llegan a romper enlaces en proteínas y otras moléculas vitales. Además, la radiación ionizante llega a afectar de manera directa a moléculas vitales removiendo electrones de su estructura. Grandes dosis de radiación son especialmente peligrosas porque el daño de un gran número de moléculas en una célula puede causar la muerte de la célula. Si bien la muerte de una sola célula suele no ser un problema, la muerte de muchas células puede producir un daño irreversible para el organismo. Las células que se dividen rápidamente, como las del tracto digestivo, los órganos reproductores y los folículos capilares, son especialmente susceptibles. Además, las células que sobreviven a la radiación pueden volverse defectuosas. Estas células defectuosas son capaces de producir células aún más defectuosas y conducir a cáncer.

En los sistemas biológicos es común separar el daño de la radiación en dos categorías: daño somático y daño genético. El *daño somático* es el que se asocia con cualquier célula del cuerpo excepto las reproductoras. Este daño puede producir cáncer o alterar seriamente las características de organismos específicos. Los *daños genéticos* sólo afectan a células reproductivas. Los daños a los genes en las células reproductivas pueden llevar a descendencia anormal. Desde luego, uno debe preocuparse por los efectos de tratamientos de diagnóstico, como los rayos X y otras formas de exposición a la radiación.

Hay varias unidades que se emplean para cuantificar la cantidad, o dosis, de cualquier radiación que interactúa con una sustancia.

El roentgen

El roentgen (R) es la cantidad de radiación ionizante que produce una carga eléctrica de 3.33×10^{-10} C en 1 cm^3 de aire en condiciones estándar.

De manera equivalente, el roentgen es la cantidad de radiación que aumenta la energía de 1 kg de aire por 8.76×10^{-3} J.

Para la mayor parte de las aplicaciones el roentgen se ha sustituido por el rad (acrónimo de *radiation absorbed dose*: dosis de radiación absorbida):

Un rad es la cantidad de radiación que aumenta la energía de 1 kg de material absorbente en 1×10^{-2} J.

El rad

A pesar de que el rad es una unidad física perfectamente correcta, no es la mejor unidad para medir el grado de daño biológico producido por radiación, ya que el daño no sólo depende de la dosis sino también del tipo de radiación. Por ejemplo, una dosis dada de partículas alfa ocasiona cerca de 10 veces más daño biológico que una dosis igual de rayos X. El factor eficacia biológica relativa (**RBE,** por sus siglas en inglés) para un tipo dado de radiación es **el número de rad de radiación X o radiación gamma que produce el mismo daño biológico que 1 rad de la radiación que se está usando.** Los factores RBE para diferentes tipos de radiación se presentan en la tabla 45.1. Los valores son sólo aproximados, ya que varían con la energía de la partícula y con la forma del daño. El factor RBE debe considerarse sólo una guía de primera aproximación a los efectos reales de la radiación.

Por último, el **rem** (siglas en inglés de: radiación equivalente en el hombre) es el producto de la dosis en rad y del factor RBE:

$$\text{Dosis en rem} \equiv \text{dosis en rad} \times \text{RBE} \tag{45.6}$$

De acuerdo con esta definición, 1 rem de cualesquiera dos radiaciones produce la misma cantidad de daño biológico. Según la tabla 45.1, se ve que una dosis de 1 rad de neutrones rápidos representa una dosis efectiva de 10 rem, pero 1 rad de radiación gamma es equivalente a una dosis de sólo 1 rem.

La radiación de bajo nivel de fuentes naturales, como los rayos cósmicos y las rocas y el suelo radiactivos, entrega a cada persona una dosis de aproximadamente 0.13 rem/año; tal radiación se denomina *radiación de fondo.* Es importante notar que la radiación de fondo varía con la geografía, con los factores principales como altitud (exposición a rayos cósmicos) y geología (gas radón liberado por algunas formaciones rocosas, depósitos de minerales naturalmente radiactivos).

El límite superior de la dosis de radiación recomendado por el gobierno de Estados Unidos (además de la radiación de fondo) es casi de 0.5 rem/año. Muchas ocupaciones implican exposiciones de radiación mucho más altas, por lo que se ha establecido un límite superior de 5 rem/año para la exposición combinada de todo el cuerpo. Son permisibles límites superiores más altos para ciertas partes del cuerpo, como las manos y los antebrazos. Una dosis de 400 a 500 rem dan lugar a una tasa de mortalidad cercana a 50% (lo que significa que la mitad de la gente expuesta a este nivel de radiación muere). La forma más peligrosa de exposición es la ingestión

[illegible] tipos de radiación

Radiación	Factor RBE
Rayos X y rayos gamma	1.0
Partículas beta	1.0-1.7
Partículas alfa	10-20
Neutrones térmicos	4-5
Neutrones rápidos y protones	10
Iones pesados	20

[a]RBE = eficacia biológica relativa.

o la inhalación de isótopos radiactivos, en especial de aquellos elementos que el cuerpo retiene y concentra, como el ^{90}Sr. En algunos casos una dosis de 1 000 rem puede originarse a partir de la ingestión de 1 mCi de material radiactivo.

Sección opcional

DETECTORES DE RADIACIÓN

Se han desarrollado varios dispositivos para detectar radiación. Éstos se usan para numerosos propósitos, incluido el diagnóstico médico, mediciones de fechamiento radiactivo, la medición de la radiación de fondo y la medición de la masa, energía y *momentum* de partículas creadas en reacciones nucleares de alta energía.

Cámara de iones

En una **cámara de iones** (Fig. 45.16) se generan pares electrón-ion por el paso de radiación a través de un gas para producir una señal eléctrica. Dos placas en la cámara se mantienen a diferentes potenciales eléctricos conectándolas a un suministro de voltaje. La placa positiva atrae electrones, en tanto que la negativa atrae iones positivos, lo que produce un pulso de corriente que es proporcional al número de pares electrón-ion producidos cuando una partícula radiactiva entra a la cámara. Cuando la cámara de iones se utiliza tanto para detectar la presencia de una partícula radiactiva como para medir su energía, recibe el nombre de **contador proporcional.**

Contador Geiger

El **contador Geiger** (Fig. 45.17) es quizá la forma más común de cámara de iones empleada para detectar radiactividad. Puede considerarse el prototipo de todos los contadores que usan la ionización de un medio como el proceso de detección básico. Está compuesto por un tubo metálico cilíndrico lleno con gas a baja presión y un delgado alambre electrodo a lo largo del eje del tubo. El alambre se mantiene a un alto potencial eléctrico positivo (alrededor de 10^3 V) respecto del tubo. Cuando una partícula de alta energía que resulta, por ejemplo, de un decaimiento radiactivo entra al tubo a través de una delgada ventana en un extremo, parte de los áto-

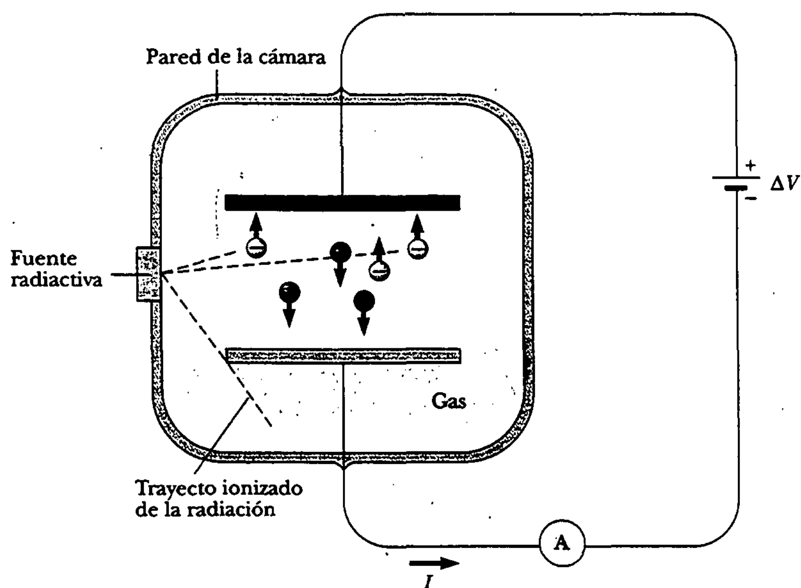
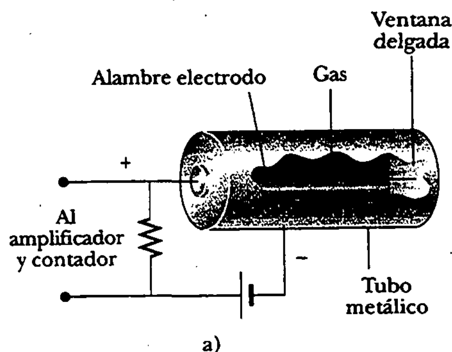


Figura 45.16 Diagrama simplificado de una cámara de iones. La fuente radiactiva crea electrones y iones positivos que son colectados por las placas cargadas. La corriente establecida en el circuito externo es proporcional a la energía cinética de una partícula radiactiva si la partícula se detiene en la cámara.



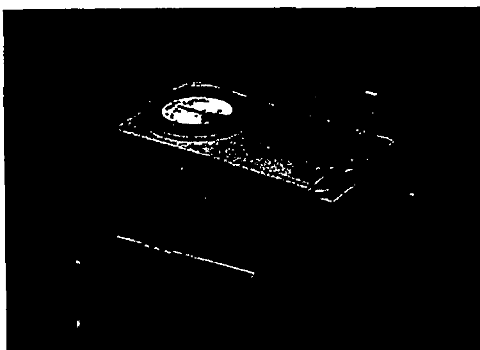


Figura 45.17 a) Diagrama de un contador Geiger. El voltaje entre el alambre electrodo y el tubo metálico por lo común es de aproximadamente 1 000 V. b) Un contador Geiger. *(David Rogers)*

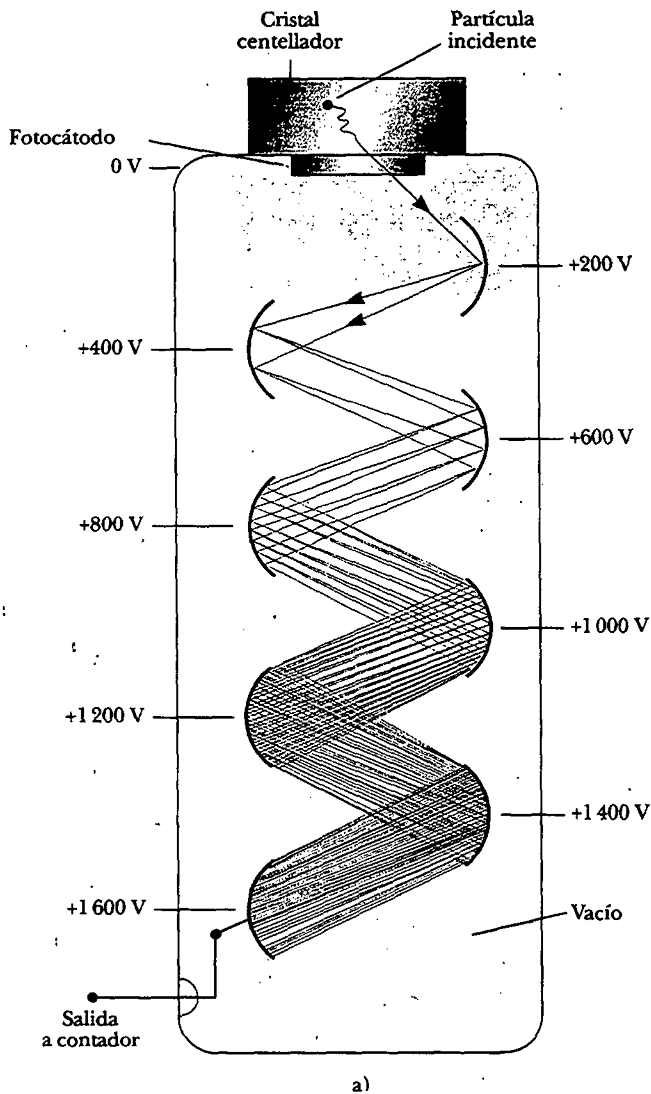
mos del gas se ionizan. Los electrones removidos de estos átomos son atraídos hacia el alambre electrodo, y en el proceso ionizan a otros átomos en su camino. Dicha ionización secuencial produce un *alud* de electrones que genera un pulso de corriente. Después de que se amplifica el pulso puede usarse para activar un contador eléctrico o alimentar a un altavoz que hace un ruido ligero cada vez que se detecta una partícula. En tanto que un contador Geiger detecta con facilidad la presencia de una partícula radiactiva, la energía perdida por ésta en el contador *no* es proporcional al pulso de corriente que produce. De tal modo, un contador Geiger no puede utilizarse para medir la energía de una partícula radiactiva.

Detector de diodo semiconductor

Un **detector de diodo semiconductor** es en esencia una unión *p-n* polarizada inversamente. Recuerde de la sección 43.7 que una unión *p-n* deja pasar corriente sin dificultad cuando está polarizada directamente y obstruye una corriente en condiciones de polarización inversa. Cuando una partícula energética pasa por la unión, los electrones son excitados hasta la banda de conducción y se forman hoyos en la banda de valencia. El campo eléctrico interno barre los electrones hacia el lado positivo (n) de la unión y los hoyos hacia el lado negativo (p). Este movimiento de electrones y hoyos crea un pulso de corriente que se mide con un contador electrónico. En un dispositivo común la duración del pulso es aproximadamente de 10^{-8} s.

Contador de destellos

Un **contador de destellos** suele usar un material sólido o líquido cuyos átomos son excitados con facilidad por la radiación. Éstos emiten fotones de luz visible cuando regresan a su estado base. Los materiales comunes empleados como centelladores son cristales transparentes de yoduro de sodio y ciertos plásticos. Si un material de este tipo se une a un extremo de un dispositivo llamado tubo **fotomultiplicador** (FM), como se observa en la figura 45.18, los fotones emitidos por el centellador pueden convertirse en una señal eléctrica. El tubo FM está compuesto por numerosos electrodos, llamados *dinodos*, cuyos potenciales eléctricos se incrementan en sucesión a lo largo de la longitud del tubo. Entre la parte superior del tubo y el material centellador se encuentra una placa llamada fotocátodo. Cuando los fotones que dejan el centellador golpean la placa, se emiten electrones (por medio del efecto fotoeléctrico). Cuando uno de estos electrones emitidos incide en el primer dinodo, el electrón tiene suficiente energía cinética para arrancar varios electrones más de la superficie del dinodo. Cuando tales electrones se aceleran hasta el segundo dinodo, se arrancan muchos más electrones y, en consecuencia, ocurre un proceso de multiplicación. El resultado final es 1 millón o más de electrones incidiendo en el último dinodo. Por consiguiente, una partícula que llega al centellador produce un pulso eléctrico mensurable a la salida del tubo FM, y este pulso se envía a su vez a un contador electrónico.



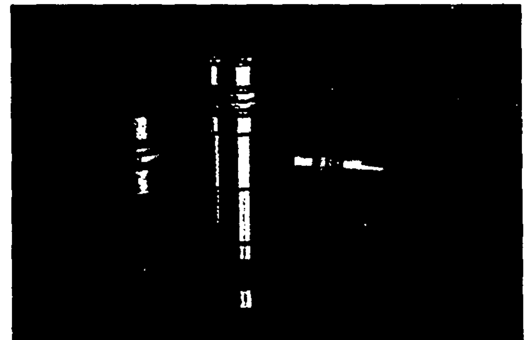


Figura 45.18 a) Diagrama de un contador de destellos conectado a un tubo fotomultiplicador. b) El yoduro de sodio en estos cristales centelladores emite destellos cuando una partícula energética los atraviesa, algo parecido a la forma en que la atmósfera emite destellos cuando un meteoro la atraviesa.

Tanto el centellador como el detector de diodo semiconductor son mucho más sensibles que un contador Geiger, debido fundamentalmente a la densidad más alta del medio detector. Ambos sirven también para medir la energía de partículas si éstas se detienen en el detector.

Detector de traza

Los **detectores de traza** son diversos dispositivos que se utilizan para ver directamente las trayectorias de partículas cargadas. Las partículas de alta energía producidas en los aceleradores de partículas pueden tener energías que varían de 10^9 a 10^{12} eV. Por tanto, no se pueden detener y su energía no se puede medir con los pequeños detectores ya mencionados. En vez de eso la energía y el *momentum* de estas partículas energéticas se determinan a partir de la curvatura de su trayectoria en un campo magnético de magnitud y dirección conocidos.

Una **emulsión fotográfica** es el ejemplo más simple de un detector de traza. Una partícula cargada ioniza los átomos en una capa de la emulsión. La trayectoria de la partícula corresponde a una familia de puntos en los cuales han ocurrido cam-

bios químicos en la emulsión. Cuando la emulsión se revela, las trayectorias de las partículas se vuelven visibles.

Cámara de niebla

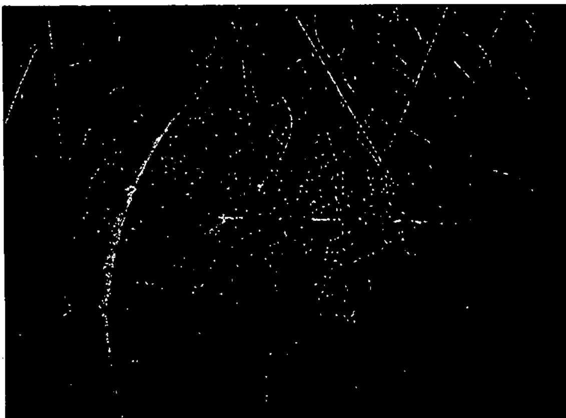
Una **cámara de niebla** contiene un gas que se ha superenfriado justo abajo de su punto de condensación usual. Una partícula radiactiva energética que atraviesa al gas lo ioniza a lo largo de la trayectoria de la partícula. Tales iones sirven como centros de condensación del gas superenfriado. La trayectoria puede verse a simple vista y es posible fotografiarla. Un campo magnético puede aplicarse para determinar las cargas de las partículas radiactivas, así como su *momentum* y energía.

Cámara de burbujas

Un dispositivo llamado **cámara de burbujas,** inventado en 1952 por D. Glaser, utiliza un líquido (casi siempre hidrógeno líquido) mantenido cerca de su punto de ebullición. Los iones producidos por las partículas cargadas entrantes dejan trayectorias de burbujas, las cuales pueden fotografiarse (Fig. 45.19). Ya que la densidad del medio de detección de una cámara de burbujas es mucho más alta que la densidad del gas en una cámara de niebla, la cámara de burbujas tiene una sensibilidad mucho más alta.

Una **cámara de chispas** es un dispositivo de conteo que está compuesta por un arreglo de placas paralelas conductoras y es capaz de grabar un registro de trayectoria tridimensional. Las placas con número par están conectadas a tierra y las de número impar se mantienen a un elevado potencial (alrededor de 10 kV). Los espacios entre las placas contienen un gas inerte a presión atmosférica. Cuando una partícula cargada pasa por la cámara, los átomos del gas se ionizan, lo que produce una gran corriente y una serie visible de chispas a lo largo de la trayectoria de la partícula. Estas chispas pueden fotografiarse o detectarse electrónicamente y enviarse a una computadora para la reconstrucción de la trayectoria y la determinación de la masa, el *momentum* y la energía de la partícula.





a) b)

Figura 45.19 a) Fotografía de cámara de burbujas, coloreada artificialmente, mostrando trazas de partículas que han pasado a través de la cámara. *(Photo Researchers, Inc./Science Photo Library)* b) Esta investigadora está estudiando una fotografía de trazas de partículas tomada en una cámara de burbujas en Fermilab. Las trazas curvas son producidas por partículas cargadas que se mueven a través de la cámara en presencia de un campo magnético aplicado. Las partículas con carga negativa se desvían en una dirección, mientras que las partículas con carga positiva se desvían en la dirección opuesta. *(Dan McCoy/Rainbow)*

Los **detectores de neutrones** son más difíciles de construir que los detectores de partículas cargadas, ya que los neutrones no interactúan eléctricamente con los átomos cuando atraviesan la materia. Los neutrones rápidos, sin embargo, pueden detectarse llenando una cámara de iones con gas hidrógeno y detectando la ionización producida mediante protones de retroceso de alta rapidez generados en las colisiones neutrón-protón. Los neutrones térmicos con energías menores de 1 MeV no transfieren suficiente energía a los protones para que se detecten de este modo; sin embargo, se detectan usando una cámara de iones llena con gas BF_3. En tal caso los núcleos de boro se desintegran durante la captura de neutrones, emitiendo partículas alfa que, debido a su carga, se detectan sin dificultad en la cámara de iones.

Sección opcional



USOS DE LA RADIACIÓN

Las aplicaciones de la física nuclear se han extendido considerablemente en la industria, medicina y biología. Incluso un breve análisis de todas las posibilidades llenaría un libro completo, y mantener actualizado tal libro requeriría varias revisiones cada año. Aquí se presentan unas cuantas de estas aplicaciones y las teorías subyacentes que las respaldan.

Trazado

Los trazadores radiactivos se usan para seguir el recorrido de compuestos químicos que participan en diversas reacciones. Uno de los más valiosos usos de los trazadores radiactivos está en la medicina. Por ejemplo, el yodo, un nutriente necesario para el cuerpo humano, se obtiene en mayor grado a través de la ingestión de sal yodada y mariscos. Para evaluar el desempeño de la tiroides el paciente bebe una cantidad muy pequeña de yoduro de sodio radiactivo, el cual contiene ^{131}I, un isótopo del yodo producido de modo artificial (el isótopo natural, no radiactivo, es el ^{127}I). Dos horas después la cantidad de yodo en la glándula tiroides se determina midiendo la intensidad de la radiación en el área del cuello. La cantidad de ^{131}I que todavía se encuentra en la tiroides es una medida de cuán bien está funcionando la glándula.

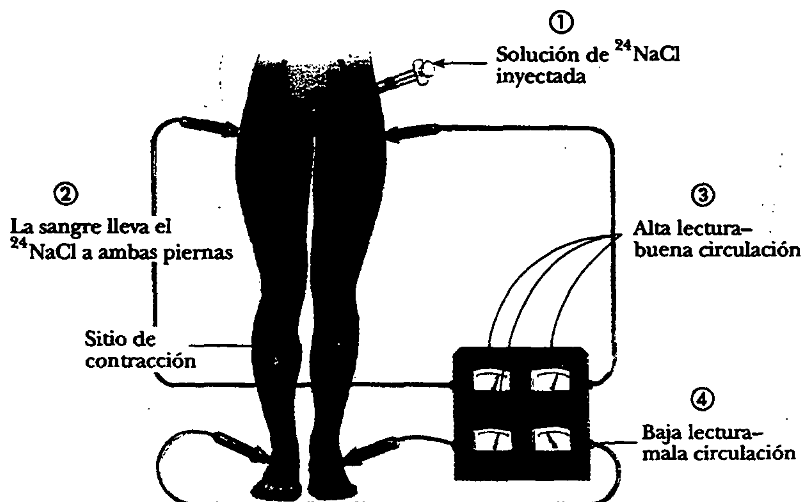


Figura 45.20 Una técnica de trazado para determinar la condición del sistema circulatorio humano.

Un segundo empleo médico se indica en la figura 45.20. Una solución que contiene sodio radiactivo se inyecta en una vena de la pierna, y el tiempo que le toma al radioisótopo llegar a otra parte del cuerpo se detecta con un contador de radiación. El tiempo transcurrido es una buena indicación de la presencia o ausencia de obstrucciones en el sistema circulatorio.

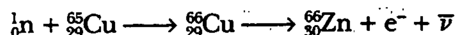
La técnica de trazadores también es útil en la investigación agrícola. Suponga que se va a determinar el mejor método para fertilizar una planta. Cierto elemento en el fertilizador, como el nitrógeno, puede *etiquetarse* (identificarse) con uno de sus isótopos radiactivos. El fertilizador se dispersa después sobre un grupo de plantas, rociándolo sobre el suelo para un segundo grupo y rastrillándolo en el suelo para un tercero. Después se usa un contador Geiger para rastrear el nitrógeno a través de los tres grupos.

Las técnicas de trazado radiactivo son tan amplias como el propio ingenio humano. Las aplicaciones presentes varían de la verificación de la absorción de flúor en los dientes y la revisión de la contaminación en equipo procesador de alimentos por medio de limpiadores, hasta monitorear el deterioro dentro del motor de un automóvil. En el último caso se utiliza un material radiactivo en la fabricación de los anillos de los pistones, y se revisa la radiactividad del aceite para determinar el grado de desgaste de los mismos.

Análisis de materiales

Durante siglos un método estándar para identificar elementos en una muestra de material ha sido el análisis químico, el cual implica determinar cómo reacciona un material ante diversos compuestos químicos. Un segundo método es el análisis espectral, el cual utiliza el hecho de que, cuando está excitado, cada elemento emite su propio conjunto característico de longitudes de ondas electromagnéticas. Dichos métodos ahora se complementan con una tercera técnica, el **análisis de activación de neutrones.** Tanto los métodos químicos como los espectrales tienen la desventaja de que una muestra bastante grande de un elemento debe destruirse para el análisis. Además, cantidades extremadamente pequeñas de un elemento pueden no detectarse por cualesquiera de estos métodos. El análisis de activación de neutrones tiene una ventaja sobre los otros dos métodos en ambos aspectos.

Cuando el material se irradia con neutrones, los núcleos en el material absorben los neutrones y se transforman en diferentes isótopos, la mayor parte de los cuales son radiactivos. Por ejemplo, el ^{65}Cu absorbe un neutrón para convertirse en ^{66}Cu, mismo que sufre decaimiento beta:



$$ {}^{1}_{0}n + {}^{65}_{29}Cu \longrightarrow {}^{66}_{29}Cu \longrightarrow {}^{66}_{30}Zn + e^{-} + \bar{\nu} $$

La presencia de cobre puede deducirse ya que se sabe que el ^{66}Cu tiene una vida media de 5.1 min y decae con la emisión de partículas beta que tienen energías máximas de 2.63 y 1.59 MeV. También se emite en el decaimiento del ^{66}Cu un rayo gamma de 1.04 MeV. Examinando la radiación emitida por una sustancia después de que se ha expuesto a la radiación de neutrones, es posible detectar cantidades extremadamente pequeñas de un elemento en dicha sustancia.

El análisis de activación de neutrones se usa de forma rutinaria en muchas industrias, por ejemplo en la aviación comercial para verificar que el equipaje de la aerolínea no tenga explosivos ocultos (Fig. 45.21). El siguiente ejemplo de uso no rutinario es de interés. Napoleón murió en la isla de Santa Elena en 1821, supuestamente por causas naturales. Con el paso de los años han surgido sospechas de que su muerte no fue del todo natural. Después de su fallecimiento su cabeza fue rapada y mechones de su pelo se vendieron como *souvenirs*. En 1961 la cantidad de arsénico en una muestra de su cabello se midió por medio de análisis de activación de neutrones, y se encontraron cantidades inusualmente grandes de arsénico. (El análisis de activación es tan sensible que se podrían analizar piezas muy pequeñas

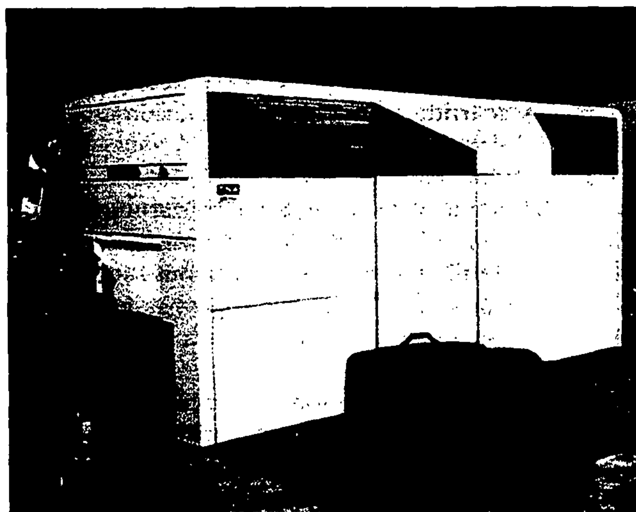


Figura 45.21 Este detector de bombas irradia el equipaje con neutrones. Si adentro existen explosivos ocultos, los químicos dentro de los materiales explosivos se vuelven radiactivos y pueden ser detectados con facilidad. La vida media de la radiación resultante es tan corta que no hay peligro para el personal de seguridad que remueve el equipaje para inspecciones ulteriores. *(Shahn Kermani/Gamma Liaison)*

de un solo cabello.) Los resultados mostraron que a Napoleón se le administró arsénico irregularmente. De hecho, el patrón de concentración de arsénico correspondió a las fluctuaciones en la severidad de la enfermedad de Napoleón, según se determinó a partir de los registros históricos.

Los historiadores de arte usan análisis de activación de neutrones para detectar falsificaciones. Los pigmentos usados en las pinturas han cambiado a través de la historia, y los pigmentos nuevos y viejos reaccionan de manera diferente a la activación de neutrones. El método incluso puede revelar obras de arte ocultas tras las pinturas existentes.



Figura 45.22 Esta gran máquina se está configurando para enviar una dosis de radiación de ^{60}Co en un esfuerzo por destruir un tumor canceroso. Las células cancerosas son especialmente susceptibles para este tipo de terapia porque tienden a dividirse con más frecuencia que las células del tejido sano cercano. *(Science/Visuals Unlimited)*

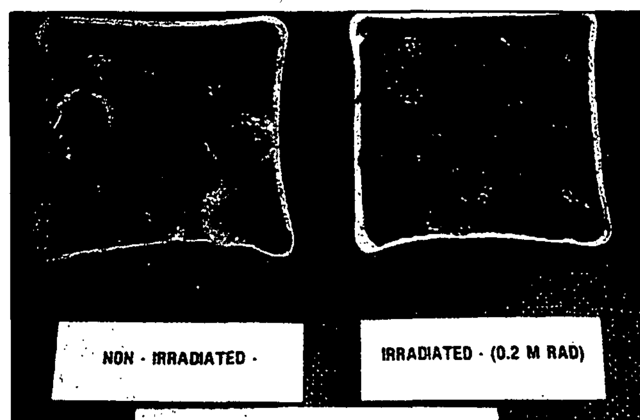


Figura 45.23 Las fresas irradiadas a la derecha *no* se han vuelto radiactivas. La radiación ha matado o incapacitado las esporas de moho que han invadido las fresas de la izquierda. *(Consejo para Ciencia y Tecnología Agrícola)*

Otra técnica de análisis que saca provecho de la radiactividad es la **emisión de rayos X inducida por fotones** (PIXE, por sus siglas en inglés). Se trata de un proceso que usa fotones de rayos X para excitar los electrones más internos de un átomo en el material que habrá de ser analizado. Cuando los electrones caen de regreso de sus estados excitados proporcionan espectros característicos que se pueden evaluar para revelar los tipos de elementos presentes.

Terapia de radiación

Como la radiación causa más daño a las células que se dividen con rapidez (como se estudió en la sección 45.5), es útil en tratamientos contra el cáncer porque las células del tumor se dividen con extrema rapidez. Se utilizan varios mecanismos para entregar radiación a un tumor. En algunos casos se usa un estrecho haz de rayos X o radiación de una fuente como el ^{60}Co, como se muestra en la figura 45.22. En otras situaciones delgadas agujas radiactivas llamadas *semillas* se implantan en el tejido canceroso. El isótopo radiactivo ^{151}I se usa para tratar el cáncer de la tiroides.

Conservación de alimentos

Se está encontrando un creciente uso de la radiación como medio para conservar alimentos, porque la exposición a altos niveles radiactivos puede destruir o incapacitar bacterias y esporas de moho (Fig. 45.23). La comida conservada de esta forma puede colocarse en un recipiente cerrado (para mantenerlo alejado de nuevos agentes contaminantes) y almacenarse durante largos periodos.

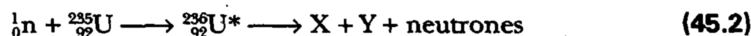
RESUMEN

La probabilidad de que los neutrones sean capturados cuando se mueven a través de la materia por lo general aumenta con la energía decreciente de los mismos. Un **neutrón térmico** es un neutrón con movimiento lento que tiene una alta probabilidad de ser capturado por un núcleo en un **evento de captura de neutrón:**

$$ {}^{1}_{0}\text{n} + {}^{A}_{Z}\text{X} \longrightarrow {}^{A+1}_{Z}\text{X} + \gamma \qquad (45.1) $$



La **fisión nuclear** ocurre cuando un núcleo muy pesado, como el ^{235}U, se divide en dos **fragmentos de fisión** más pequeños. Los neutrones térmicos pueden crear fisión en el ^{235}U:



$$^{1}_{0}\text{n} + {}^{235}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{236}_{92}\text{U}^* \longrightarrow \text{X} + \text{Y} + \text{neutrones} \qquad \textbf{(45.2)}$$

donde X y Y son los fragmentos de fisión, y el ^{236}U es un estado excitado intermedio. En promedio, 2.5 neutrones se liberan por evento de fisión. Los fragmentos se someten luego a una serie de decaimientos beta y gamma hasta convertirse en diversos isótopos estables. La energía liberada por evento de fisión es de alrededor de 200 MeV.

La **constante de reproducción** K es el número promedio de neutrones liberados en cada evento de fisión que produce otro evento. En un reactor de fisión es necesario mantener $K \approx 1$. El valor de K es afectado por factores como la geometría del reactor, la energía media del neutrón y la probabilidad de captura del neutrón. Las energías de los neutrones se regulan con un material moderador para frenar neutrones energéticos y, consecuentemente, aumentar la probabilidad de captura neutrónica por otros núcleos de ^{235}U. El nivel de potencia del reactor se ajusta con barras de control hechas de un material que es muy eficiente al absorber neutrones.

En la **fusión nuclear** dos núcleos ligeros se funden para formar un núcleo más pesado y liberar energía. El principal obstáculo en la obtención de energía útil a partir de la fusión es la gran fuerza repulsiva de Coulomb entre los núcleos cargados a pequeñas distancias de separación. Debe suministrarse suficiente energía a las partículas para vencer esta barrera de Coulomb. La temperatura requerida para producir la fusión es del orden de 10^8 K, y a esta temperatura toda la materia se presenta como plasma.

En un reactor de fusión la temperatura del plasma debe alcanzar la **temperatura crítica de encendido**, la temperatura a la cual la potencia generada por las reacciones de fusión superan la pérdida de potencia en el sistema. La reacción de fusión más prometedora es la D-T, la cual tiene una temperatura de encendido crítica de aproximadamente 4.5×10^7 K. Dos parámetros críticos implicados en el diseño del reactor de fusión son la **densidad de iones** n y el **tiempo de confinamiento** τ, el tiempo que las partículas interactuantes deben mantenerse a $T > T_{\text{encend}}$. El **criterio de Lawson** establece que para la reacción D-T, $n\tau \geq 10^{14}$ s/cm^3.

PREGUNTAS

1. Explique la función de un moderador en un reactor de fisión.
2. ¿Por qué el agua es mejor blindaje contra neutrones que el plomo o el acero?
3. Analice las ventajas y desventajas de los reactores de fisión desde el punto de vista de seguridad, contaminación y recursos. Haga una comparación con la potencia generada a partir del quemado de combustibles fósiles.
4. ¿Por qué un reactor de fusión produciría menos desechos radiactivos que un reactor de fisión?
5. El criterio de Lawson establece que el producto de la densidad de iones y el tiempo de confinamiento debe ser mayor que cierto número antes de que pueda ocurrir un paro en la reacción de fusión. ¿Por qué estos dos parámetros determinan el resultado?
6. ¿Por qué la temperatura requerida para la fusión D-T es menor que la necesaria para la fusión D-D? Estime la importancia relativa de la repulsión de Coulomb y la atracción nuclear en cada caso.
7. ¿Qué factores hacen que una reacción de fusión sea difícil de lograr?
8. Analice las similitudes y diferencias entre la fusión y la fisión.
9. Describa las ventajas y desventajas de la potencia de fusión desde el punto de vista de seguridad, contaminación y recursos.
10. Estudie tres de los principales problemas asociados con el desarrollo de un reactor de fusión controlado.
11. Describa dos técnicas que se están persiguiendo con el fin de obtener potencia de una fusión nuclear.
12. Si dos muestras radiactivas tienen la misma actividad medida en curies, ¿necesariamente producirán el mismo daño en un medio? Explique.
13. ¿Por qué un radiólogo debe ser muy cuidadoso respecto de las dosis de rayos X cuando trata a una mujer embarazada?
14. El diseño de un tubo FM podría sugerir que cualquier número de dinodos puede emplearse para amplificar una señal débil. ¿Qué factores supone usted que limitarían la amplificación en este dispositivo?
15. *Y rápido, y rápido más allá de la comprensión*
    Da la vuelta a la belleza de la Tierra y su poder.

Los cielos arden en alternancia
Con profunda y gélida y lluviosa noche.
En poderosas corrientes espumosas el océano
Sube desde el fondo insondable de las rocas.
Con rocas y mar acomete el movimiento
En una carrera celestial siempre rápida.
Y la tempestad con ráfagas violentas en una contienda
Del mar a la tierra, de la tierra al mar.
En ira ellos forjan una cadena alrededor de nosotros
De profundísimo significado, energía.
Hay flamas de un desastre de rayos
Antes del trueno, en su camino.
Pero todos Tus siervos honran, Maestro,
El bondadoso orden de Tu día.

Johann Wolfgang von Goethe escribió esta canción del arcángel en *Fausto* medio siglo antes de que se reconociera la ley de conservación de la energía. Muy a menudo los estudiantes encuentran conveniente pensar en una lista de varias "formas de energía", desde la cinética a la nuclear, Argumente a favor o en contra de la visión que dichas líneas de poesía hacen acerca de una referencia obvia o indirecta a toda forma de energía.

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante ☐ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** ☐ = use computadora para resolver el problema ☐ = Física interactiva ☐ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 45.2 Fisión nuclear

1. Encuentre la energía liberada en la reacción de fisión



$$ {}^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \longrightarrow {}^{98}_{40}Zr + {}^{135}_{52}Te + 3({}^{1}_{0}n) $$

Las masas atómicas de los productos de fisión son: ${}^{98}_{40}Zr$, 97.912 0 u; ${}^{135}_{52}Te$, 134.908 7 u.

2. El estroncio 90 es un producto de fisión particularmente peligroso del ^{235}U porque es radiactivo y sustituye al calcio en los huesos. ¿Qué otros productos de fisión directos lo acompañarían en la fisión inducida de neutrones del ^{235}U? (*Nota:* Esta reacción puede liberar dos, tres o cuatro neutrones libres.)

WEB 3. Registre las reacciones nucleares requeridas para producir ^{233}U a partir de ^{232}Th bajo bombardeo de neutrones rápidos.

4. Registre las reacciones nucleares requeridas para producir ^{239}Pu a partir del ^{238}U bombardeado por neutrones rápidos.

5. a) Encuentre la energía liberada en la siguiente reacción de fisión:



$$ {}^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \longrightarrow {}^{141}_{56}Ba + {}^{92}_{36}Kr + 3({}^{1}_{0}n) $$

Las masas requeridas son

$$ M({}^{1}_{0}n) = 1.008\ 665\ u $$
$$ M({}^{235}_{92}U) = 235.043\ 924\ u $$
$$ M({}^{141}_{56}Ba) = 140.913\ 9\ u $$
$$ M({}^{92}_{36}Kr) = 91.897\ 3\ u $$

b) ¿Qué fracción de la masa inicial del sistema emite?

6. Una central de potencia de fisión nuclear típica produce alrededor de 1.00 GW de potencia eléctrica. Suponga que la planta tiene una eficiencia total de 40.0% y que cada fisión libere 200 MeV de energía. Calcule la masa de ^{235}U consumida cada día.

7. **Problema de repaso.** Suponga que uranio enriquecido que contiene 3.40% del isótopo fisionable ${}^{235}_{92}U$ se emplea como combustible de un barco. El agua ejerce un arrastre friccionante promedio de 1.00×10^5 N sobre el barco. ¿Qué distancia puede recorrer el barco por kilogramo de combustible? Suponga que la energía liberada por evento de fisión es de 208 MeV y que el motor del barco tiene una eficiencia de 20.0%.

Sección 45.3 Reactores nucleares

8. Para minimizar la fuga de neutrones de un reactor, la proporción área de la superficie/volumen debe ser un mínimo. Para un volumen dado V calcule esta proporción para a) una esfera, b) un cubo y c) un paralelepípedo de dimensiones $a \times a \times 2a$. d) ¿Cuál de estas formas tendría la fuga mínima? ¿Cuál tendría la fuga máxima?

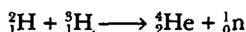
WEB 9. Se ha estimado que hay un orden de 10^9 tons de uranio natural disponible en concentraciones que exceden 100 partes por millón, de las cuales 0.7% es ^{235}U. Si todas las necesidades de energía del mundo (7×10^{12} J/s) fueran a proporcionarse por medio de la fisión del ^{235}U, ¿cuánto durarían estas reservas? (Esta estimación de reservas de uranio fue tomada de K. S. Deffeyes and I. D. MacGregor, *Sci. Am.* 242:66, 1980.)

10. Si la constante de reproducción (factor de multiplicación de neutrón) es 1.000 25 para una reacción en cadena en un reactor de fisión, y el tiempo promedio entre fisiones sucesivas es 1.20 ms, ¿en qué factor incrementará la rapidez de reacción en 1 min?

11. Un gran reactor de potencia nuclear produce alrededor de 3 000 MW de potencia en su núcleo. Tres meses después de que se apaga un reactor, la potencia del núcleo producto de los subproductos radiactivos es de 10.0 MW. Suponiendo que cada emisión entrega 1.00 MeV de energía a la potencia, encuentre la actividad en becquerels tres meses después de que se apaga el reactor.

Sección 45.4 Fusión nuclear

12. a) Si se construyera un generador de fusión para generar 3.00 GW de potencia, determine la rapidez de combustible quemado en gramos por hora si se recurre a la reacción D-T. b) Haga lo mismo para la reacción D-D suponiendo que los productos de reacción se dividen igualmente entre (n, ^{3}He) y (p, ^{3}H).
13. Dos núcleos que tienen números atómicos Z_1 y Z_2 se aproximan uno al otro con una energía total E. a) Suponga que se fusionarán en forma espontánea si se aproximan hasta una distancia de 1.00×10^{-14} m. Encuentre el valor mínimo de E que se requiere para producir fusión, en términos de Z_1 y Z_2. b) Calcule la energía mínima por fusión de las reacciones D-D y D-T (la primera y tercera reacciones en la ecuación 45.4).
14. **Problema de repaso.** Considere la reacción de fusión deuterio-tritio con el núcleo de tritio en reposo:



$$^2_1H + ^3_1H \longrightarrow ^4_2He + ^1_0n$$

a) Suponga que los núcleos reactantes se fusionarán espontáneamente si sus superficies se tocan. A partir de la ecuación 44.1 determine la distancia de máximo acercamiento requerida entre sus centros. b) ¿Cuál es la energía potencial de Coulomb (en eV) a esta distancia? c) Suponga que el deuterón se dispara directo a un núcleo de tritio originalmente estacionario con la suficiente energía para alcanzar la distancia requerida de máximo acercamiento. ¿Cuál es la rapidez común de los núcleos de deuterio y tritio cuando se tocan, en términos de la rapidez inicial del deuterón v_i? (*Sugerencia:* En este punto los dos núcleos tienen una rapidez común igual a la rapidez del centro de masa.) d) Use métodos de energía para encontrar la mínima energía inicial del deuterón requerida para lograr la fusión. e) ¿Por qué la reacción de fusión de hecho ocurre a energías de deuterón mucho más bajas que las calculadas en la parte d)?

WEB 15. Para entender por qué la contención del plasma es necesaria, considere la rapidez a la cual un plasma no confinado se perdería. a) Estime la rapidez rms de deuterones en un plasma a 4.00×10^8 K. b) Estime el orden de magnitud del tiempo que un plasma permanecería en un cubo de 10 cm si no se tomaran medidas para contenerlo.

16. De todo el hidrógeno en los océanos, 0.030 0% de la masa es deuterio. Los océanos tienen un volumen de 317 millones de millas cúbicas. a) Si todo el deuterio en los océanos se fusionara en $^4_2$He, ¿cuántos joules de energía se liberarían? b) El consumo de energía mundial es aproximadamente de 7.00×10^{12} W. Si el consumo fuera 100 veces mayor, ¿cuántos años duraría la energía calculada en el inciso a)?
17. Se ha señalado que los reactores de fusión son seguros en cuanto a la explosión porque nunca hay suficiente energía en el plasma para hacer mucho daño. a) En 1992 el reactor TFTR tenía una temperatura de iones de 4.0×10^8 K, una densidad de iones de 2.0×10^{13} cm^{-3} y un tiempo de confinamiento de 1.4 s. Calcule la cantidad de energía almacenada en el plasma del reactor TFTR. b) ¿Cuántos kilogramos de agua podrían hervirse con esta gran energía? (El volumen del plasma del reactor TFTR es alrededor de 50 m^3.)
18. **Problemas de repaso.** Con el fin de confinar un plasma estable, la densidad de energía magnética en el campo magnético (Ec. 32.14) debe ser mayor que la presión $2nk_BT$ del plasma por un factor de al menos 10. En lo que sigue, suponga un tiempo de confinamiento $\tau = 1.00$ s. a) Empleando el criterio de Lawson determine la densidad de iones requerida para la reacción D-T. b) A partir del criterio de temperatura de encendido determine la presión de plasma requerida. c) Determine la magnitud del campo magnético requerido para contener el plasma.
19. Encuentre el número de núcleos ^{6}Li y el número de núcleos ^{7}Li presentes en 2.00 kg de litio. (La abundancia natural de ^{6}Li es 7.5%; el restante es ^{7}Li.)
20. Una antigua predicción para el futuro era la de tener energía suministrada por un reactor de fusión que disociara las moléculas en la basura en átomos separados y luego ionizara los átomos. Este material sería puesto a través de un espectrómetro de masas gigante, así que sería una fuente nueva de elementos puros isotópicamente —la mina del futuro. Suponiendo una masa atómica promedio de 56, y una carga promedio de 26 (estimación alta considerando todos los materiales orgánicos), a una corriente de haz de 1.00 MA, ¿cuánto tardaría el procesamiento de 1.00 ton métrica de basura?

(Opcional)

Sección 45.5 Daño por radiación en la materia

21. **Problema de repaso.** Un edificio se contaminó por accidente con radiactividad. El material de más larga vida en el edificio es estroncio 90. (El $^{90}_{38}$Sr tiene una masa atómica de 89.907 7 u, y su vida media es de 29.1 años.) Si inicialmente 5.00 kg de esta sustancia estaba distribuida de manera uniforme por todo el edificio (una situación muy improbable) y el nivel de seguridad es menor que 10.0 conteos/min, ¿cuánto tiempo será inseguro el edificio?
22. **Problema de repaso.** Una fuente radiactiva particular produce 100 mrad de rayos gamma de 2 MeV por hora a una distancia de 1.00 m. a) ¿Cuánto tiempo podría estar parada una persona a esta distancia antes de acumular una dosis intolerable de 1 rem? b) Suponiendo que la fuente radiactiva es puntual, ¿a qué distancia la persona recibiría una dosis de 10.0 mrad/h?
23. Suponga que un técnico de rayos X efectúa un promedio de 8 radiografías al día y recibe una dosis de 5 rem/año como consecuencia. a) Estime la dosis en rem por radiografía tomada. b) ¿Cómo se compara la exposición del técnico con la radiación de fondo de bajo nivel?
24. Cuando los rayos gamma inciden sobre la materia, la intensidad del rayo gamma que atraviesa al material varía con la profundidad x cuando $I(x) = I_0e^{-\mu x}$, donde μ es el coeficiente de absorción e I_0 es la intensidad de la radiación en la superficie del material. Para rayos gamma de 0.400 MeV en plomo, el coeficiente de absorción es 1.59 cm^{-1}. a) Determine el "semiespesor" para el plomo —es decir, el espesor del plomo que absorbería la mitad de los rayos gamma incidentes. b) ¿Qué espesor reduciría la radiación por un factor de 10^4?

WEB 25. Un "inteligente" técnico decide calentar algo de agua para su café con una máquina de rayos X. Si la máquina produce 10.0 rad/s, ¿cuánto tardará en elevar la temperatura de una taza de agua en 50.0°C?

26. **Problema de repaso.** El daño al cuerpo por una alta dosis de rayos gamma no se debe a la cantidad de energía absorbida, sino que se presenta debido a la naturaleza ionizante de la radiación. Para ilustrar esto calcule el aumento en la temperatura del cuerpo que resultaría si una dosis "letal" de 1 000 rad fuera absorbida estrictamente como energía interna. Considere el calor específico del tejido vivo como 4 186 J/kg · °C.

27. El tecnecio 99 se emplea en ciertos procedimientos de diagnóstico médico. Si 1.00×10^{-8} g de ^{99}Tc se inyecta a un paciente de 60.0 kg y la mitad de los rayos gamma de 0.140 MeV son absorbidos en el cuerpo, determine la dosis de radiación total recibida por el paciente.

28. El estroncio 90 proveniente de las pruebas de bombas atómicas sigue encontrándose en la atmósfera. Cada decaimiento de ^{90}Sr libera 1.1 MeV de energía en los huesos de una persona en la que el estroncio ha sustituido al calcio. Si una persona de 70.0 kg recibe 1.00 ng de ^{90}Sr de leche contaminada, calcule la rapidez de dosis absorbida (en J/kg) en un año. Suponga que la vida media del ^{90}Sr es de 29.1 años.

(Opcional)

Sección 45.6 Detectores de radiación

29. En un tubo Geiger el voltaje entre los electrodos es por lo común de 1.00 kV y el pulso de corriente descarga un capacitor de 5.00 pF. a) ¿Cuál es la amplificación de energía de este dispositivo para un electrón de 0.500 MeV? b) ¿Cuántos electrones se precipitan a partir del electrón inicial?

30. En un tubo Geiger el voltaje entre los electrodos es ΔV y el pulso de corriente descarga un capacitor de capacitancia C. a) ¿Cuál es la amplificación de energía de este dispositivo para un electrón de energía E? b) ¿Cuántos electrones se precipitan a partir del electrón inicial?

31. En cierto tubo fotomultiplicador existen siete dinodos, los cuales tienen potenciales de 100, 200, 300, . . .,700 V. La energía promedio requerida para liberar un electrón de la superficie de un dinodo es 10.0 eV. Suponga que sólo un electrón incide y que el tubo funciona con 100% de eficiencia. a) ¿Cuántos electrones se liberan en el primer dinodo? b) ¿Cuántos electrones se colectan por el último dinodo? c) ¿Cuál es la energía disponible en el contador?

32. a) Su abuela le vuelve a contar a usted cómo, cuando era una niña pequeña, su padre, tías y tíos hacían sonar continuamente la puerta de celosía cuando corrían entre la casa y el patio trasero. El intervalo de tiempo entre golpes variaba en forma aleatoria, pero la rapidez de golpeteo promedio permanecía constante a 38.0/h desde el amanecer al atardecer todos los días de verano. Si la rapidez de golpeteo caía súbitamente a cero, los niños habrían encontrado un nido con ratones de campo bebés o se habrían involucrado en algún otro conflicto que requiriese la intervención de adultos. ¿Cuánto tiempo después del último golpe de la puerta de celosía esperaría un padre prudente y atento antes de dejar su trabajo para ir a ver a los niños? Explique su razonamiento. b) Un estudiante desea medir la vida media de una sustancia radiactiva usando una pequeña muestra. Los clics de su contador Geiger están espaciados en forma aleatoria en el tiempo. El contador registra 372 conteos durante un intervalo de 5.00 min, y 337 conteos durante los siguientes 5.00 min. La rapidez de fondo promedio es de 15 conteos/min. Encuentre el valor más probable para la vida media. c) Estime la incertidumbre en la determinación de la vida media. Explique su razonamiento.

(Opcional)

Sección 45.7 Usos de la radiación

33. Durante la construcción de un componente de un motor de acero, se incluye hierro radiactivo (^{59}Fe) en la masa total de 0.200 kg. La componente se coloca en un motor de prueba cuando la actividad debida a este isótopo es 20.0 μCi. Después de un periodo de prueba de 1 000 h, se elimina el aceite del motor y se encuentra que contiene suficiente ^{59}Fe para producir 800 desintegraciones/min/L de aceite. El volumen total de aceite en el motor es de 6.50 L. Calcule la masa total gastada del componente del motor por hora de operación. (La vida media del ^{59}Fe es 45.1 días.)

34. En algún momento en su pasado o futuro usted puede encontrarse en un hospital que tenga un explorador PET. El acrónimo se emplea para *tomografía por emisión de positrón.* En el procedimiento un elemento radiactivo que experimenta decaimiento e^+ se introduce en su cuerpo. El equipo detecta los rayos gamma que resultan de una aniquilación de pares cuando el positrón emitido encuentra un electrón en su tejido corporal. Suponga que usted recibe una inyección de glucosa que contiene un orden de 10^{10} átomos de ^{14}O. Suponga que el oxígeno está distribuido de manera uniforme a través de 2 L de sangre luego de 5 min. ¿Cuál será el orden de magnitud de la actividad de los átomos de oxígeno en 1 cm^3 de la sangre?

35. Usted desea encontrar cuántos átomos de ^{65}Cu se encuentran en una pequeña muestra de material. Para este fin bombardea la muestra con neutrones de manera que asegure que un orden de 1% de estos núcleos de cobre absorba un neutrón. Después de la activación usted interrumpe el flujo de neutrones y luego usa un detector muy eficiente para monitorear la radiación gamma que proviene de la muestra. Suponga que una mitad de los núcleos de ^{66}Cu emiten un rayo gamma de 1.04 MeV en sus decaimientos. (La otra mitad de los núcleos activados decaen directamente al estado base de ^{66}Ni.) Si después de 10 min (dos vidas medias) usted detecta 10^4 MeV de energía de fotón a 1.04 MeV, a) ¿alrededor de cuántos átomos de ^{65}Cu hay en la muestra? b) Suponga que la muestra contiene cobre natural. Refiérase a las abundancias isotópicas listadas en la tabla A.3 y estime la masa total del cobre en la muestra.

36. Cuando un material de interés es irradiado por neutrones, átomos radiactivos son producidos continuamente y algunos decaen de acuerdo con sus características vidas medias. a) Si una especie de un núcleo radiactivo es producido a una rapidez constante R y su decaimiento es

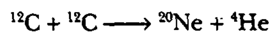
gobernado por la ley de decaimiento radiactivo convencional, muestre que el número de átomos radiactivos acumulados después de un tiempo de irradiación t es

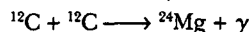
$$N = \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

b) ¿Cuál es el número máximo de átomos radiactivos que se pueden producir?

PROBLEMAS ADICIONALES

37. Las detonaciones de carbono son poderosas reacciones nucleares que separan en forma temporal los núcleos dentro de estrellas de mayor masa en etapas avanzadas de su existencia. Estas explosiones son producidas por fusión de carbono, el cual requiere una temperatura de aproximadamente 6×10^8 K para superar la intensa repulsión coulombiana entre los núcleos de carbono. a) Estime la barrera de energía repulsiva a la fusión usando la temperatura de encendido requerida para la fusión de carbono. (En otras palabras, ¿cuál es la energía cinética promedio para un núcleo de carbono a 6×10^8 K?) b) Calcule la energía (en MeV) liberada en cada una de estas reacciones de "quemado de carbono":





c) Calcule la energía (en kWh) entregada cuando 2.00 kg de carbono se fusionan completamente de acuerdo con la primera reacción.

38. La bomba atómica lanzada sobre Hiroshima el 6 de agosto de 1945 liberó 5×10^{13} J de energía (equivalente a 12 000 toneladas de TNT). Estime a) el número de núcleos de $^{235}_{92}U$ fisionados y b) la masa de este $^{235}_{92}U$.

39. Compare la pérdida de masa fraccional en una típica reacción de fisión ^{235}U con la pérdida de masa fraccional en la fusión D-T.

40. **Problema de repaso.** Considere un núcleo en reposo, el cual después se parte de manera espontánea en dos fragmentos de masas m_1 y m_2. Muestre que la fracción de la energía cinética total que transporta m_1 es

$$\frac{K_1}{K_{tot}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

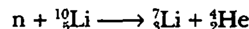
y la fracción que transporta m_2 es

$$\frac{K_2}{K_{tot}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

suponiendo que se pueden ignorar las correcciones relativistas. (*Nota:* Si el núcleo padre se estaba moviendo antes del decaimiento, entonces m_1 y m_2 siguen dividiendo la energía cinética como se muestra, siempre y cuando todas las velocidades se midan en el marco de referencia del centro de masa, en el cual el *momentum* total del sistema es cero.)

41. La vida media del tritio es de 12.3 años. Si el reactor de fusión TFTR contiene 50.0 m^3 de tritio a una densidad igual a 2.00×10^{14} iones/cm^3, ¿cuántos curies de tritio están en el plasma? Compare este valor con un inventario de fisión (el suministro estimado de material fisionable) de 4×10^{10} Ci.

42. **Problema de repaso.** Un neutrón muy lento (con rapidez aproximadamente igual a cero) puede iniciar la reacción



Si la partícula alfa se aleja con una rapidez de 9.30×10^6 m/s, calcule la energía cinética del núcleo de litio. Emplee fórmulas no relativistas.

43. **Problema de repaso.** Una planta de potencia nuclear funciona utilizando la energía liberada en la fisión nuclear para convertir agua a 20°C en vapor a 400°C. Teóricamente, ¿cuánta agua podría convertirse en vapor mediante la fisión completa de 1.00 g de ^{235}U a 200 MeV/fisión?

44. **Problema de repaso.** Una planta de potencia nuclear funciona utilizando la energía liberada en la fisión nuclear para convertir agua líquida a T_c en vapor a T_h. Teóricamente, ¿cuánta agua podría convertirse en vapor mediante la fisión completa de una masa m de ^{235}U a 200 MeV/fisión?

45. Casi 1 de cada 3 300 moléculas de agua contiene un átomo de deuterio. a) Si todos los núcleos de deuterio en 1 litro de agua se fusionaron en pares de acuerdo con la reacción D-D $^2H + ^2H \rightarrow ^3He + n + 3.27$ MeV, ¿cuánta energía en joules se libera? b) La combustión de la gasolina produce cerca de 3.40×10^7 J/L. Compare la energía obtenible a partir de la fusión del deuterio en un litro de agua con la energía liberada por la combustión de 1 litro de gasolina.

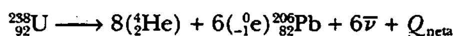
46. El emisor alfa polonio 210 ($^{210}_{84}Po$) se usa en una fuente de energía nuclear en una nave espacial. Determine la salida de potencia inicial de la fuente de energía si ésta contiene 0.155 kg de ^{210}Po. Suponga que la eficiencia de conversión de la energía del decaimiento radiactivo en energía eléctrica es de 1.00%.

47. Cierta central nucleoeléctrica genera 3.065 GW de potencia nuclear para producir 1.000 GW de potencia eléctrica. De la energía de desecho, 3.0% se expulsa a la atmósfera y el resto se envía a un río. Una ley estatal requiere que el agua del río no se caliente más de 3.50°C cuando regrese a su cauce. a) Determine la cantidad de agua de enfriamiento necesaria (en kg/h y m^3/h) para enfriar la planta. b) Si la fisión genera 7.80×10^{10} J/g de ^{235}U, determine la rapidez de quemado de combustible (en kg/h) del ^{235}U.

48. **Problema de repaso.** La primera bomba nuclear fue una fisionante de masa de plutonio 239, hecha explotar en el banco de pruebas Trinity, antes de lanzarla el 16 de julio de 1945 en Alamogordo, Nuevo México. Enrico Fermi estaba a 14 km de distancia, yaciendo sobre el suelo y viendo en dirección contraria a la bomba. Después de que todo el cielo había resplandecido con increíble brillantez, Fermi se levantó y comenzó a tirar bolitas de papel al piso. Éstas primero cayeron a sus pies en el calmo y silencioso aire. Cuando la onda de choque pasó, casi 40 s después de la explosión, el papel entonces en vuelo saltó casi 5 cm lejos del piso cero. a) Suponga que

la onda de choque en el aire se propagó de igual manera en todas direcciones sin absorción. Encuentre el cambio en el volumen de una esfera de 14 km de radio conforme ésta se expande 5 cm. b) Encuentre el trabajo $P\,\Delta V$ realizado por el aire en esta esfera sobre la siguiente capa de aire más alejada del centro. c) Suponga que la onda de choque conduce el orden de un décimo de la energía de la explosión. Realice una estimación del orden de magnitud del rendimiento de la bomba. d) Una tonelada de trinitrotolueno (TNT) en explosión libera 4.2 GJ de energía. ¿Cuál fue el orden de magnitud de la energía de la prueba Trinity en toneladas equivalentes de TNT? El amanecer reveló la nube de hongo. El conocimiento intuitivo de Fermi acerca del rendimiento de la bomba concordó con lo determinado días después mediante el análisis de mediciones elaboradas.

49. El uranio natural debe ser procesado para producir uranio enriquecido en ^{235}U para bombas y plantas de potencia. El procesamiento produce una gran cantidad de ^{238}U como subproducto casi puro. Debido a su alta densidad de masa se usa en piezas de artillería para su blindaje. a) Encuentre la dimensión del lado de un cubo de ^{238}U de 70.0 kg. (Consulte la tabla 1.5.) b) El isótopo ^{238}U tiene una larga vida media de 4.47×10^9 años. Tan pronto como un núcleo decae, comienza una serie relativamente rápida de 14 pasos, los cuales, juntos, constituyen la reacción neta



$$^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow 8(^4_2\mathrm{He}) + 6(^{\;0}_{-1}\mathrm{e})^{206}_{82}\mathrm{Pb} + 6\bar{\nu} + Q_{\text{neta}}$$

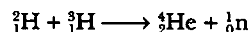
Encuentre la energía de decaimiento neto. (Consulte la tabla A.3.) c) Proporcione argumentos de que una muestra radiactiva de rapidez de decaimiento R y liberación de energía Q por decaimiento tiene una potencia de salida $\mathcal{P} + QR$. d) Considere una pieza de artillería blindada con un recubrimiento de 70.0 kg de ^{238}U. Encuentre su potencia de salida debida a la radiactividad del uranio y sus hijos. Suponga que la coraza es lo suficientemente vieja para que los hijos hayan alcanzado cantidades de estado estable. Exprese la potencia en joules por año. e) Suponga que un soldado de 17 años de edad y 70.0 kg de masa trabaja en un arsenal donde se almacenan muchas piezas de artillería de ese tipo. Si su exposición a la radiación es limitada a 5.00 rem por año, encuentre la tasa a la cual puede absorber la energía de radiación, en joules por año. Suponga un factor RBE promedio de 1.10.

50. Un neutrón de 2.0 MeV se emite en un reactor de fisión. Si pierde la mitad de su energía cinética en cada colisión con un átomo moderador, ¿cuántas colisiones debe sufrir para convertirse en un neutrón térmico (con una energía de 0.039 eV)?

WEB 51. Suponiendo que el deuterón y el tritio están en reposo cuando se fusionan de acuerdo con $^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + \mathrm{n} + 17.6$ MeV, determine la energía cinética adquirida por el neutrón.

52. Una cápsula sellada que contiene el radiofármaco fósforo 32 ($^{32}_{15}$P), un emisor e$^-$, se implanta dentro del tumor de un paciente. La energía cinética promedio de las partículas beta es 700 keV. Si la actividad inicial es 5.22 MBq, determine la dosis absorbida durante un periodo de 10.0 días. Suponga que las partículas beta son completamente absorbidas en 100 g de tejido. (*Sugerencia:* Encuentre el número de partículas beta emitidas.)

53. a) Calcule la energía (en kilowatt/horas) liberada si 1.00 kg de ^{239}Pu sufre fisión completa y la energía liberada por evento de fisión es 200 MeV. b) Calcule la energía (en electronvolts) liberada en la fusión D-T:



$$^2_1\mathrm{H} + {}^3_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n}$$

c) Calcule la energía (en kilowatt/horas) liberada si 1.00 kg de deuterio experimenta fusión de acuerdo con esta reacción. d) Calcule la energía (en kilowatt/hora) liberada por la combustión de 1.00 kg de carbón si cada reacción $C + O_2 \rightarrow CO_2$ produce 4.20 eV. e) Liste las ventajas y desventajas de cada uno de estos métodos de generación de energía.

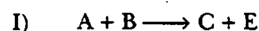
54. El Sol radia energía a la rapidez de 3.77×10^{26} W. Suponga que la reacción neta



$$4(^1_1\mathrm{H}) + 2(^{\;0}_{-1}\mathrm{e}) \longrightarrow {}^4_2\mathrm{He} + 2\nu + \gamma$$

toma en cuenta toda la energía liberada. Calcule el número de protones fusionados por segundo.

55. Considere las dos reacciones nucleares



I) $\quad A + B \longrightarrow C + E$



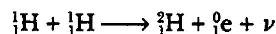
II) $\quad C + D \longrightarrow F + G$

a) Muestre que la energía de desintegración neta para estas dos reacciones ($Q_{\text{neta}} = Q_{\text{I}} + Q_{\text{II}}$) es idéntica a la energía de desintegración de la reacción neta

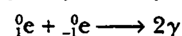


$$A + B + D \longrightarrow E + F + G$$

b) Una cadena de reacciones en el ciclo protón-protón en el interior del Sol es



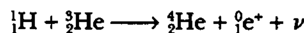
$$^1_1\mathrm{H} + {}^1_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^2_1\mathrm{H} + {}^0_1\mathrm{e} + \nu$$



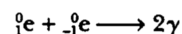
$$^0_1\mathrm{e} + {}^{\;0}_{-1}\mathrm{e} \longrightarrow 2\gamma$$



$$^1_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^3_2\mathrm{He} + \gamma$$



$$^1_1\mathrm{H} + {}^3_2\mathrm{He} \longrightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^0_1\mathrm{e}^+ + \nu$$



$$^0_1\mathrm{e} + {}^{\;0}_{-1}\mathrm{e} \longrightarrow 2\gamma$$

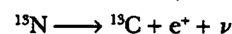
Con base en el inciso a), ¿cuál es Q_{neta} para esta secuencia?

56. Suponga que el blanco en un reactor de fusión láser es una esfera de hidrógeno sólido que tiene un diámetro de 1.50×10^{-4} m y una densidad de 0.200 g/cm^3. Suponga también que la mitad de los núcleos son ^{2}H y la mitad ^{3}H. a) Si 1.00% de un pulso láser de 200 kJ se entrega a esta esfera, ¿qué temperatura alcanza la esfera? b) Si todo el hidrógeno se "quema" de acuerdo con la reacción D-T, ¿cuántos joules de energía se liberan?

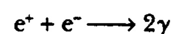
57. El ciclo del carbono, propuesto primero por Hans Bethe en 1939, es otro ciclo mediante el cual se libera energía en estrellas conforme el hidrógeno se convierte en helio. El ciclo del carbono requiere temperaturas más altas que el ciclo protón-protón. La serie de reacciones es



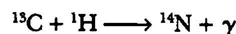
$$^{12}\mathrm{C} + {}^1\mathrm{H} \longrightarrow {}^{13}\mathrm{N} + \gamma$$



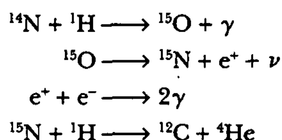
$$^{13}\mathrm{N} \longrightarrow {}^{13}\mathrm{C} + \mathrm{e}^+ + \nu$$



$$\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \longrightarrow 2\gamma$$



$$^{13}\mathrm{C} + {}^1\mathrm{H} \longrightarrow {}^{14}\mathrm{N} + \gamma$$



$$^{14}N + ^1H \longrightarrow ^{15}O + \gamma$$
$$^{15}O \longrightarrow ^{15}N + e^+ + \nu$$
$$e^+ + e^- \longrightarrow 2\gamma$$
$$^{15}N + ^1H \longrightarrow ^{12}C + ^4He$$

a) Si el ciclo protón-protón requiere una temperatura de 1.5×10^7 K, estime por proporción la temperatura requerida para el ciclo de carbono. b) Calcule el valor Q de cada etapa en el ciclo del carbono y la energía total liberada. c) ¿Considera usted que la energía que se llevan los neutrinos se deposita en la estrella? Explique.

58. Cuando los fotones atraviesan la materia, la intensidad I del haz (medida en watts por metro cuadrado) disminuye exponencialmente de acuerdo con

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

donde I_0 es la intensidad del haz incidente, e I es la intensidad del haz que acaba de atravesar un espesor x del material. La constante μ se conoce como el *coeficiente de absorción lineal*, y su valor depende del material absorbente y de la longitud de onda del haz de fotones. Esta dependencia de la longitud de onda (o energía) permite impedir el paso de longitudes de onda indeseables de un haz de rayos X de amplio espectro. a) Dos haces de rayos X de longitudes de onda λ_1 y λ_2 e intensidades incidentes iguales pasa a través de la misma placa metálica. Muestre que la proporción entre las intensidades del haz emergente es

$$\frac{I_2}{I_1} = e^{-[\mu_2 - \mu_1]x}$$

b) Calcule la proporción de intensidades que emergen de una placa de aluminio de 1.00 mm de espesor si el haz incidente contiene intensidades iguales de rayos X de 50 pm y 100 pm. Los valores de μ para el aluminio a estas dos longitudes de onda son $\mu_1 = 5.4$ cm^{-1} a 50 pm y $\mu_2 = 41.0$ cm^{-1} a 100 pm. c) Repita para una placa de aluminio de 10.0 mm de espesor.

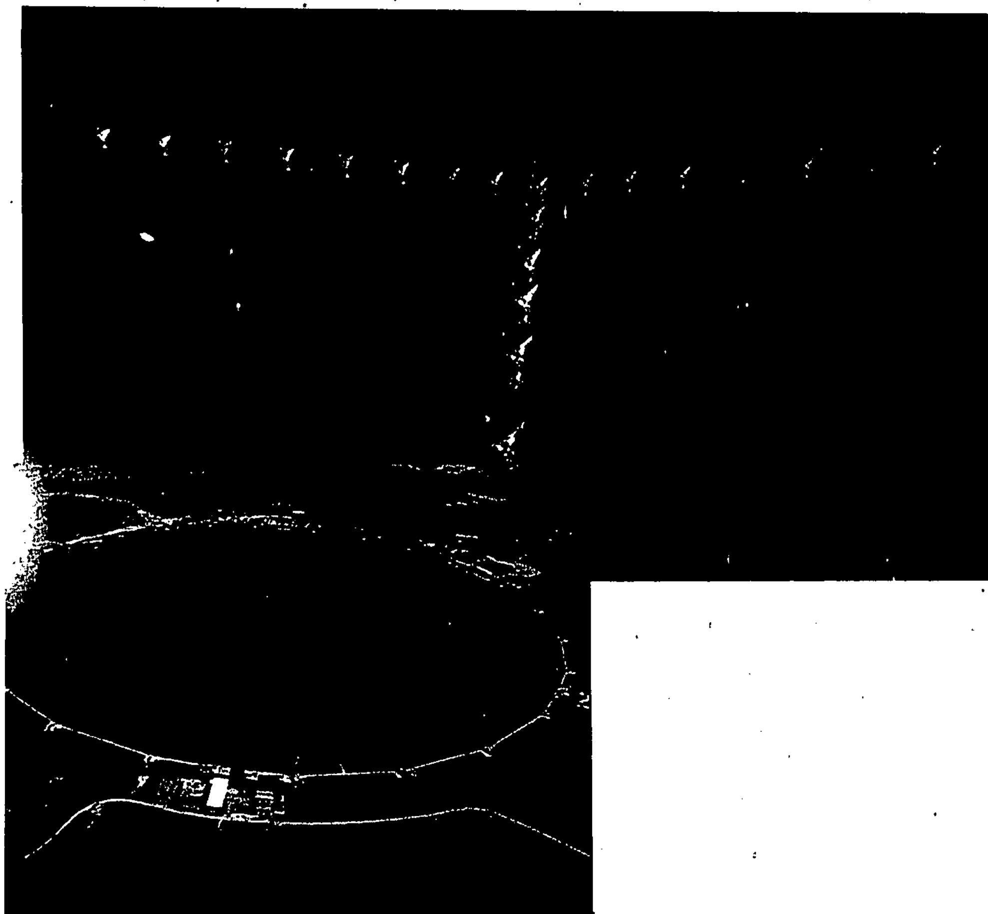
RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

45.1 Un protón u otro neutrón. Como aprendió en el capítulo 9, durante una colisión elástica la máxima energía cinética es transferida cuando los objetos que colisionan tienen la misma masa (véase el ejemplo 9.8). En consecuencia, un neutrón pierde toda su energía cinética cuando choca frontalmente con un protón, el cual tiene más o menos la misma masa que el neutrón, o con otro neutrón.

45.2 a). Ambas fuerzas disminuyen con la separación creciente. Sin embargo, ya que la fuerza nuclear (atractiva) es una fuerza de muy corto alcance, cae mucho más rápido que la fuerza electrostática (repulsiva) entre protones. Como la fuerza atractiva se vuelve pequeña mucho más rápido que la fuerza repulsiva, los núcleos se fisionan.

45.3 De acuerdo con la figura 44.3, la proporción N/Z aumenta con la Z creciente. Como resultado, cuando un núcleo pesado se fisiona con dos núcleos ligeros, éstos tienden a tener demasiados neutrones. Esto conduce a inestabilidad, y los núcleos regresan a la línea de estabilidad mediante ulteriores procesos de decaimiento que reducen el número de protones.

45.4 Las reacciones a) y b), porque en ambos casos los valores Z y A equilibran los dos lados de las ecuaciones. En la reacción c), $Z_{\text{izquierda}} = Z_{\text{derecha}}$ pero $A_{\text{izquierda}} \neq A_{\text{derecha}}$.



ACERTIJO

Tanto el acelerador de partículas circular en el Fermilab como el radiotelescopio con forma de Y llamado *Arreglo muy largo* son, en cierto sentido, "máquinas de tiempo". Son dispositivos que permiten retroceder en el tiempo y comprender mejor cómo se veía el universo poco después de que fue creado. ¿Cómo es esto posible? ¿Cómo eran las cosas entonces? *(Arriba, cortesía de Fermilab Visual Media Services; abajo, cortesía de NRAO/AUI, foto de Dave Finley)*

capítulo 46

Física de partículas y cosmología

En el capítulo final del libro se examinan las diversas partículas subatómicas conocidas y las interacciones fundamentales que gobiernan su comportamiento. También se estudia la teoría actual de las partículas elementales, en la cual toda materia se construye a partir de sólo dos familias de partículas, quarks y leptones. Por último, se analiza cómo el esclarecimiento de dichos modelos podrían ayudar a los científicos a entender el nacimiento y la evolución del universo.

La palabra *átomo* proviene del griego *atomos*, que significa "indivisible". Los antiguos griegos creían que los átomos eran los constituyentes indivisibles de la materia; es decir, se les consideraba como partículas elementales. Sin embargo, los experimentos en la década de 1890 y la primera parte del siglo XX mostraron que éste no era el caso, y después de 1932 los físicos suponían a toda la materia compuesta de tres partículas constituyentes: electrones, protones y neutrones. A partir de 1940 se descubrieron muchas "nuevas" partículas en experimentos que incluyeron colisiones de alta energía entre partículas conocidas. La característica de estas nuevas partículas es ser muy inestables y tener vidas medias muy cortas, que oscilan entre 10^{-6} y 10^{-23} s. Hasta ahora se han catalogado más de 300 de estas partículas.

Hasta la década de 1960, los físicos estaban sorprendidos por la gran cantidad y variedad de partículas subatómicas que se estaban descubriendo. Se preguntaban si las partículas no tenían relación sistemática que las conectara, o si estaba surgiendo un patrón que les proporcionaría una mejor comprensión de la elaborada estructura en el mundo subatómico. Durante los últimos 40 años se han construido muchos aceleradores de partículas de alta energía por todo el mundo, con los que es posible observar choques de partículas muy energéticas en condiciones de laboratorio controladas y ver el mundo subatómico en su más fino detalle. En estos años los físicos han realizado enormes avances en el conocimiento de la estructura de la materia al reconocer que todas las partículas salvo los electrones, fotones y unas cuantas otras están conformadas de partículas más pequeñas llamadas quarks. Los protones y neutrones, por ejemplo, en realidad no son elementales sino sistemas de quarks estrechamente enlazados.

LAS FUERZAS FUNDAMENTALES EN LA NATURALEZA

Como aprendió en la sección 5.1, todos los fenómenos naturales pueden describirse por medio de cuatro fuerzas fundamentales que actúan entre partículas. En orden de intensidad decreciente, existen la fuerza nuclear, la fuerza electromagnética, la fuerza débil y la fuerza gravitacional.

La fuerza nuclear, como se mencionó en el capítulo 44, representa el pegamento que mantiene unidos a los nucleones. Es de muy corto alcance y es despreciable para separaciones mayores que aproximadamente 10^{-15} m (casi el tamaño del núcleo). La fuerza electromagnética, la cual une átomos y moléculas para formar la materia ordinaria, tiene alrededor de 10^{-2} veces la intensidad de la fuerza nuclear. Es una fuerza de largo alcance que disminuye en magnitud con el cuadrado inverso de la separación entre las partículas interactuantes. La fuerza débil es una fuerza de corto alcance que tiende a producir inestabilidad en ciertos núcleos. Es responsable para los procesos de decaimiento o la conversión de un neutrón en un protón, y su intensidad es sólo alrededor de 10^{-5} veces la de la fuerza nuclear. Por último, la fuerza gravitacional es una fuerza de largo alcance que tiene una intensidad de sólo aproximadamente 10^{-39} veces la de la fuerza nuclear. Aunque esta interacción familiar es la fuerza que mantiene unidos a los planetas, estrellas y galaxias, su efecto sobre partículas elementales es despreciable.

En física moderna, las interacciones entre partículas a menudo se describen en función del intercambio o la emisión continua y la absorción de entidades llamadas **partículas de campo** o **partículas de intercambio**. En el caso de la interacción electromagnética, por ejemplo, las partículas de campo son fotones. En el lenguaje de

Interacción	Intensidad relativa	Alcance de fuerza	Partícula de campo mediadora
Nuclear	1	Corto (≈1 fm)	Gluón
Electromagnética	10^{-2}	∞	Fotón
Débil	10^{-5}	Corto (≈10^{-3} fm)	Bosones $W^{\pm}$, Z^0
Gravitacional	10^{-39}	∞	Gravitón

la física moderna se dice que la fuerza electromagnética es *mediada* por fotones, y los fotones son las partículas de campo del campo electromagnético. Del mismo modo, la fuerza nuclear es mediada por partículas de campo llamadas *gluones* (llamados así porque mantienen a los nucleones unidos). La fuerza débil es mediada por partículas de campo llamadas *bosones* W y Z, y la fuerza gravitacional es mediada por partículas de campo llamadas *gravitones*. Dichas interacciones así como sus alcances e intensidades relativas, se resumen en la tabla 46.1.

POSITRONES Y OTRAS ANTIPARTÍCULAS

En los años 20 del siglo XX Paul Dirac desarrolló una descripción mecánico-cuántica relativista para el electrón que explicaba con éxito el origen del espín del electrón y su momento magnético. No obstante, su teoría tenía un gran problema: su ecuación de onda relativista requería soluciones que correspondían a estados de energía negativos, y si los estados de energía negativos existían, se esperaría que un electrón en el estado de energía positiva efectuaría una transición rápida a uno de estos estados, emitiendo un fotón en el proceso.

Dirac evitó este problema postulando que todos los estados de energía negativos estaban llenos. Aquellos electrones que ocupan tales estados de energía negativos se dice que están en el *mar de Dirac* y no son directamente observables porque el principio de exclusión de Pauli no les permite reaccionar a fuerzas externas. Sin embargo, si uno de dichos estados de energía negativos está vacío, deja un hoyo en el mar de estados llenos, y éste puede reaccionar a las fuerzas externas y, consecuentemente, es observable. La manera en que un hoyo reacciona a fuerzas externas es similar a la manera en que un electrón reacciona a la misma fuerza, excepto que el primero tiene una carga positiva —es la *antipartícula* del electrón—.



[illegible] en 1933. *(Cortesía de AIP Emilio Segrè Visual Archives)*

La profunda implicación de esta teoría es que *para cada partícula existe una antipartícula*. La antipartícula para una partícula cargada tiene la misma masa que la partícula, pero carga opuesta. Por ejemplo, la antipartícula del electrón (llamada ahora *positrón*, como se hizo notar en la sección 44.5) tiene una energía en reposo de 0.511 MeV y una carga positiva de 1.60×10^{-19} C.

El positrón fue observado en forma experimental por Carl Anderson (1905-1991) en 1932, y en 1936 fue galardonado con el premio Nobel por este resultado. Anderson descubrió el positrón mientras examinaba trayectorias creadas por partículas similares al electrón, de carga positiva, en una cámara de niebla (Fig. 46.1). (Estos primeros experimentos empleaban rayos cósmicos —fundamentalmente protones energéticos que atraviesan el espacio interestelar— para iniciar reacciones de alta energía del orden de varios GeV.) Con el propósito de discriminar entre cargas positivas y negativas Anderson colocó la cámara de niebla en un campo magnético, provocando que las cargas en movimiento siguieran trayectorias curvas. Anderson notó que algunas trayectorias similares a las del electrón se desviaban en una dirección que correspondía a una partícula con carga positiva.



Figura 46.1 La primera fotografía de la traza de un positrón. La traza de la partícula se puede ver entrando a la imagen alrededor de la posición de las 7 horas y se curva hacia arriba y a la izquierda. *(Cortesía de Archives, California Institute of Technology.)*

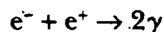
Pregunta sorpresa 46.1

a) ¿Cuál es la dirección del campo magnético externo en la figura 46.1, hacia adentro o hacia afuera del plano de la página? b) La línea horizontal es el borde de una hoja de plomo. ¿Por qué la curva es más cerrada sobre el plomo que abajo de él?

A partir del descubrimiento de Anderson el positrón se ha observado en una gran cantidad de experimentos. La fuente más común de positrones es la **producción de pares**. En tal proceso un fotón de rayos gamma con energía suficientemente alta interactúa con un núcleo y se crea un par electrón-positrón a partir del fotón. (El núcleo es necesario para satisfacer el principio de conservación de *momentum*.) Ya que la energía en reposo total del par electrón-positrón es $2m_ec^2 = 1.02$ MeV (donde m_e es la masa del electrón), el fotón debe tener al menos esa gran energía para crear un par electrón-positrón. De forma que la energía electromagnética en forma de rayo gamma se convierte en energía en reposo acorde con la famosa relación de Einstein $E_R = mc^2$. Si el fotón de rayo gamma tiene energía en exceso de la energía en reposo del electrón y el positrón, el exceso aparece como energía cinética de las dos partículas. La figura 46.2 muestra trayectorias de pares electrón-positrón creados por rayos gamma de 300 MeV que inciden en una lámina de plomo.

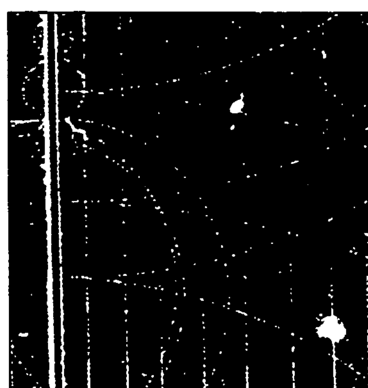
La creación de energía en reposo a partir de otras formas de energía es un proceso general y ocurre en otras situaciones además de la producción de pares. En secciones ulteriores de este capítulo se mostrará cómo se puede aplicar este proceso para entender el intercambio de partículas de campo entre partículas que interactúan.

El proceso inverso también puede ocurrir. En las condiciones apropiadas, un electrón y un positrón pueden aniquilarse entre sí para producir dos fotones de rayos gamma que tienen una energía combinada de al menos 1.02 MeV:

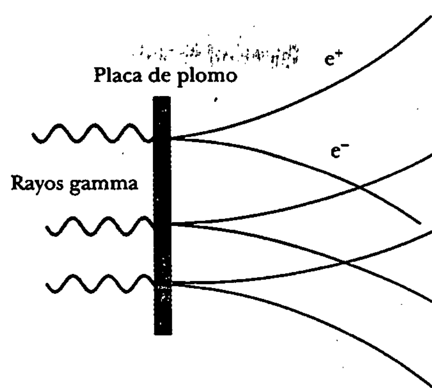


$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$$

Dado que el *momentum* inicial del sistema electrón-positrón es aproximadamente cero, en este proceso se necesitan dos rayos gamma que viajen en direcciones opuestas para conservar el *momentum*. Si toda la energía del sistema se transformase en un fotón, el *momentum* del sistema sería mayor —el *momentum* no se conservaría—. Dos fotones se pueden mover en direcciones opuestas con el resultado de que el *momen-*



a)



b)

Figura 46.2 a) Trazas en una cámara de burbujas, de un par electrón-positrón producido por rayos gamma de 300 MeV que inciden sobre una lámina de plomo. *(Cortesía de Lawrence Berkeley Laboratory, University of California)* b) Eventos pertinentes de producción de pares. Los positrones se desvían hacia arriba y los electrones hacia abajo debido a que la dirección del campo magnético aplicado es hacia adentro de la página.

tum del sistema electrón-positrón permanece pequeño e igual al del sistema antes de la aniquilación. En forma ocasional, un protón y un antiprotón también se aniquilan entre sí para producir dos fotones de rayos gamma.

Prácticamente cada partícula elemental conocida tiene una antipartícula distintiva. Entre las excepciones están el fotón y el pión neutro (π^0). Después de la construcción de los aceleradores de alta energía en la década de 1950 se descubrieron muchas otras antipartículas. Éstas incluyeron el antiprotón descubierto por Emilio Segrè (1905-1989) y Owen Chamberlain (n. 1920) en 1955, y el antineutrino, el cual se descubrió poco después.

La aniquilación electrón-positrón se usa en la técnica de diagnóstico médico conocida como *tomografía de emisión de positrón* (PET, por sus siglas en inglés). Al paciente se le inyecta una solución de glucosa que contiene una sustancia radiactiva que decae mediante emisión de positrón, y el material es transportado por la sangre a través del cuerpo. Un positrón emitido durante un evento de decaimiento en uno de los núcleos radiactivos en la solución de glucosa se aniquila con un electrón en el tejido circundante, lo cual resulta en dos fotones de rayo gamma emitidos en direcciones opuestas. Un detector gamma que rodea al paciente detecta la fuente de los fotones y, con la ayuda de una computadora, despliega una imagen de los sitios en los cuales se acumula la glucosa. (La glucosa se metaboliza rápidamente en los tumores cancerosos y se acumula en dichos puntos, proporcionando una intensa señal para un sistema detector de PET.) Las imágenes de un explorador PET pueden indicar una amplia variedad de desórdenes en el cerebro, incluyendo el mal de Alz-



Fotografía de cámara de burbujas de trazas de electrón (verde) y positrón (rojo) producidas por rayos gamma energéticos. Las trazas muy curvadas en la parte superior se deben al electrón y el positrón en un par electrón-positrón que se doblan en direcciones opuestas en el campo magnético. *(Lawrence Berkeley Laboratory/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.)*

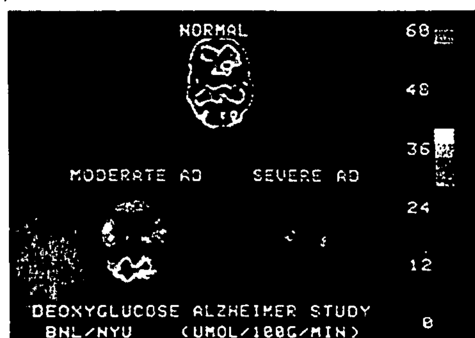


Figura 46.3 Imágenes PET del cerebro de un anciano sano y de pacientes que sufren el mal de Alzheimer. Las regiones más claras contienen elevadas concentraciones de glucosa radiactiva, lo que indica altas tasas metabólicas y, por tanto, aumento de la actividad cerebral. *(Dr. Monty de León/New York University Medical Center y National Institute on Aging)*

heimer (Fig. 46.3). Además, como la glucosa se metaboliza de manera más rápida en las áreas activas del cerebro, un explorador PET indica qué áreas del cerebro están implicadas en las actividades en que el paciente se involucra en el momento de la exploración, como el uso del lenguaje, música y visión.

MESONES Y EL PRINCIPIO DE LA FÍSICA DE PARTÍCULAS

Los físicos a la mitad de la década de 1930 tenían una visión bastante simple de la estructura de la materia. Los bloques constituyentes eran el protón, el electrón y el neutrón. Otras tres partículas se conocían o se postularon en ese tiempo: el fotón, el neutrino y el positrón. Las seis partículas se consideraron los constituyentes fundamentales de la materia. Sin embargo, con esta descripción maravillosamente simple del mundo, nadie podía proporcionar una respuesta a la siguiente importante pregunta: En vista del hecho de que los protones en cualquier núcleo deben repelerse con fuerza entre sí debido a sus cargas semejantes, ¿cuál es la naturaleza de la fuerza que mantiene unido al núcleo? Los científicos se dieron cuenta que esta misteriosa fuerza debe ser mucho más intensa que cualquiera encontrada en la naturaleza hasta ese momento. Ésta es la fuerza nuclear que se analiza en la sección 44.3 y se examina a partir de su perspectiva histórica en los siguientes párrafos.[1]


[illegible] los mesones. Esta fotografía, donde se le muestra en su trabajo, fue tomada en 1950, en su cubículo en la Universidad de Columbia. *(UPI/Corbis-Bettman)*

La primera teoría para explicar la naturaleza de la fuerza nuclear fue propuesta en 1935 por el físico japonés Hideki Yukawa —esfuerzo que le mereció obtener el premio Nobel—. Para comprender la teoría de Yukawa recuerde la introducción de las partículas de campo en la sección 46.1; la cual estableció que cada fuerza fundamental está mediada por una partícula de campo intercambiada entre las partículas interactuantes. Yukawa empleó esta idea para explicar la fuerza nuclear, proponiendo la existencia de una nueva partícula cuyo intercambio entre los nucleones en el núcleo produce la fuerza nuclear. Estableció que el alcance de la fuerza es inversamente proporcional a la masa de esta partícula y predijo que la masa sería alrededor de 200 veces la masa del electrón. (La partícula predicha por Yukawa *no* es el gluón mencionado en la sección 46.1, el cual no tiene masa y se considera en la actualidad como la partícula de campo de la fuerza nuclear.) Como la nueva partícula tendría una masa entre la del electrón y la del protón, se le llamó **mesón** (del griego *meso*, "medio").

Con el propósito de sustentar las predicciones de Yukawa los físicos empezaron una investigación experimental del mesón, estudiando rayos cósmicos que ingresan a la atmósfera terrestre. En 1937 Carl Anderson y sus colaboradores descubrieron una partícula de 106 MeV/c^2 de masa, casi 207 veces la masa del electrón. Se creyó que éste era el mesón de Yukawa. Sin embargo, experimentos subsecuentes mostraron que la partícula interactuaba muy débilmente con la materia y, por tanto, no podría ser la partícula de campo de la fuerza nuclear. La incomprensible situación inspiró a varios teóricos a proponer que hay dos mesones con masas ligeramente diferentes iguales a casi 200 veces la del electrón —uno que había sido descubierto por Anderson y el otro, todavía sin descubrir, predicho por Yukawa—. Idea que fue

[1] La fuerza nuclear que se estudió en el capítulo 44, y continúa analizándose aquí, originalmente se llamó fuerza (interacción) fuerte. Una vez que la teoría de quarks (sección 46.9) fue establecida, la frase fuerza (interacción) fuerte fue reservada para la fuerza entre quarks. En adelante se seguirá esta convención —la fuerza (interacción) fuerte ocurre entre quarks, y la fuerza nuclear ocurre entre nucleones—. La fuerza nuclear es un resultado secundario de la fuerza (interacción) fuerte, como se describirá en la sección 46.10. Sin embargo, debe estar preparado; debido a este desarrollo histórico de los nombres para dichas fuerzas, puede usted encontrar en otros libros que se hace referencia a la fuerza nuclear como fuerza (interacción) fuerte.

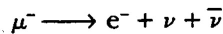
confirmada en 1947 con el descubrimiento del **mesón pi** (π), o simplemente **pión**. La partícula descubierta por Anderson en 1937, la cual en un principio se creyó que era el mesón de Yukawa, en realidad no es un mesón. (En la sección 46.4 se estudiarán los requisitos para que una partícula sea un mesón.) En lugar de eso, sólo interviene en las interacciones débil y electromagnética, y ahora se le llama **muón** (μ).

El pión viene en tres variedades, que corresponden a tres estados de carga: π^+, π^- y π^0. Las partículas π^+ y π^- (π^- es la antipartícula de π^+) tienen masas de 139.6 MeV/c^2, en tanto que el π^0 tiene una masa de 135.0 MeV/c^2. Existen dos muones: μ^- y su antipartícula μ^+.

Los piones y los muones son partículas muy inestables. Por ejemplo, el π^-, el cual tiene una vida media promedio de 2.6×10^{-8} s, decae a un muón y un antineutrino. El muón, que tiene un tiempo de vida medio de 2.2 μs, decae después en un electrón, un neutrino y un antineutrino:



$$\pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu} \qquad \textbf{(46.1)}$$



$$\mu^- \longrightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$$

Advierta que para partículas sin carga (así como para algunas partículas cargadas, como el protón), una barra sobre el símbolo indica una antipartícula, como en el decaimiento beta (véase la sección 44.6).

La interacción entre dos partículas puede representarse en un diagrama simple, conocido como **diagrama de Feynman**, desarrollado por el físico estadounidense Richard P. Feynman. La figura 46.4 es un diagrama de este tipo para la interacción electromagnética entre dos electrones. Un diagrama de Feynman es una gráfica cualitativa del tiempo sobre el eje vertical *versus* el espacio en el eje horizontal. Es cualitativa en el sentido de que el valor real del tiempo y el espacio no son importantes, pero la apariencia total de la gráfica proporciona una representación del proceso. La evolución en el tiempo del proceso se puede aproximar partiendo de la parte baja del diagrama y moviendo sus ojos hacia arriba.

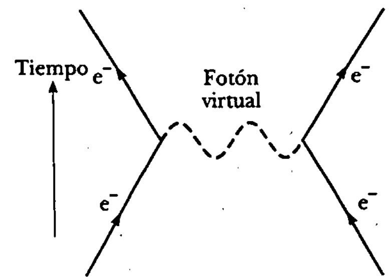


Figura 46.4 Diagrama de Feynman que representa un fotón que media la fuerza electromagnética entre dos electrones.

En el caso simple de la interacción electrón-electrón en la figura 46.4, un fotón (la partícula de campo) media la fuerza electromagnética entre los electrones. Note que la interacción completa está representada en el diagrama como si estuviese ocurriendo en un solo punto en el tiempo. En consecuencia, las trayectorias de los electrones aparecen como experimentando un cambio discontinuo en la dirección en el momento de interacción. Esto es diferente de las trayectorias *reales*, las que estarían curvadas debido al intercambio continuo de un gran número de partículas de campo. Éste es otro aspecto de la naturaleza cualitativa de los diagramas de Feynman.



[illegible] Feynman con su hijo, Carl, después de ganar el premio Nobel de Física en 1965. El premio fue compartido por Feynman, Julián Schwinger y Sin Itiro Tomonaga. *(UPI Telephotos)*

En la interacción electrón-electrón, el fotón, el cual transfiere energía y *momentum* de un electrón al otro, recibe el nombre de *fotón virtual* porque desaparece durante la interacción sin haber sido detectado. Los fotones virtuales no violan la ley de la conservación de la energía debido a que tienen un tiempo de vida Δt muy corto, de modo que la incertidumbre de la energía $\Delta E \approx \hbar/2\,\Delta t$ del sistema constituido por dos electrones y el fotón es mayor que la energía del fotón.

Considere a continuación un pión que media la fuerza nuclear entre un protón y un neutrón, como en el modelo de Yukawa (Fig. 46.5a). Uno puede razonar que la energía en reposo ΔE_R necesaria para crear un pión de masa m_π está dada por la ecuación de Einstein $\Delta E_R = m_\pi c^2$. Como con el fotón de la figura 46.4, la existencia misma del pión violaría la conservación de la energía si la partícula existiera durante un tiempo mayor que $\Delta t \approx \hbar/2\,\Delta E_R$ (de acuerdo con el principio de incertidumbre), donde ΔE_R es la energía en reposo del pión y Δt es el tiempo que tarda el pión en transferirla de un nucleón al otro. Por tanto,

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{2\,\Delta E_R} = \frac{\hbar}{2 m_\pi c^2} \qquad \textbf{(46.2)}$$

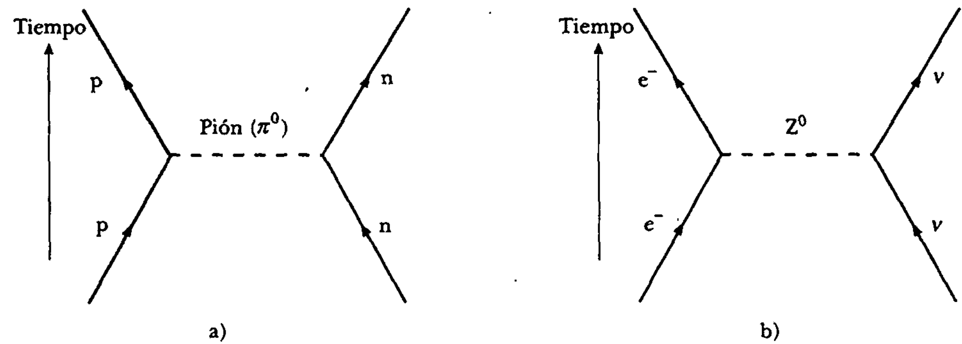


Figura 46.5 a) Diagrama de Feynman donde se representan un protón y un neutrón interactuando vía la fuerza nuclear con un pión que media la fuerza. b) Diagrama de Feynman para un electrón y un neutrino que interactúan vía la fuerza débil, con un bosón Z^0 como mediador de la fuerza.

Ya que el pión no puede viajar más rápido que la rapidez de la luz, la distancia máxima d que puede recorrer en un tiempo Δt es $c\,\Delta t$. En consecuencia,

$$d = c\,\Delta t \approx \frac{\hbar}{2m_\pi c} \tag{46.3}$$

A partir de la tabla 46.1 se sabe que el alcance de la fuerza nuclear es aproximadamente 1×10^{-15} m. Empleando este valor para d en la ecuación 46.3 se calcula que la energía en reposo del pión es igual a

$$m_\pi c^2 \approx \frac{\hbar c}{2d} = \frac{(1.05 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{2(1 \times 10^{-15}\,\text{m})}$$

$$= 1.6 \times 10^{-11}\,\text{J} \approx 100\,\text{MeV}$$

Esto es del mismo orden de magnitud que las masas observadas de los piones, lo cual aumenta la confianza en el modelo de partícula de campo.

El concepto que se acaba de describir es bastante revolucionario. En efecto, afirma que un sistema de dos nucleones puede cambiar en dos nucleones más un pión, siempre que regrese a su estado original en un tiempo muy corto. (Recuerde que éste es el viejo modelo histórico en el cual se supone que el pión es la partícula de campo de la fuerza nuclear; tenga en mente que el gluón es de hecho la partícula de campo de los modelos actuales, como se estudiará en breve.) Los físicos a menudo señalan que un nucleón sufre *fluctuaciones* cuando emite y absorbe piones. Como se ha visto, dichas fluctuaciones son consecuencia de una combinación de mecánica cuántica (a través del principio de incertidumbre) y relatividad especial (a través de la relación masa-energía de Einstein: $E_R = mc^2$).

En esta sección se han analizado las partículas de campo que originalmente se propusieron para mediar la fuerza nuclear (piones) y las que median la fuerza electromagnética (fotones). El gravitón, la partícula de campo para la fuerza gravitacional, aún no se ha observado. Las partículas $W^\pm$ y Z^0, que median la fuerza débil, fueron descubiertas en 1983 por el físico italiano Carlo Rubbia (n. 1934) y sus colaboradores empleando un colisionador protón-antiprotón. Rubbia y Simón van der Meer (n. 1925), ambos del Laboratorio Europeo para Física de Partículas (CERN, por sus siglas en inglés), compartieron el premio Nobel de física en 1984 por el descubrimiento de las partículas $W^\pm$ y Z^0 y el desarrollo del colisionador protón-antiprotón. La figura 46.5b presenta un diagrama de Feynman para una interacción débil mediada por un bosón Z^0.

Pregunta sorpresa 46.2

¿Qué le dicen a usted los intervalos infinitos de las interacciones electromagnética y gravitacional acerca de las masas del fotón y el gravitón?

CLASIFICACIÓN DE PARTÍCULAS

Todas las partículas diferentes a las partículas de campo pueden clasificarse en dos categorías amplias: hadrones y leptones, según las interacciones en las cuales intervienen. La tabla 46.2 proporciona un resumen de las propiedades de algunas de dichas partículas.

Hadrones

Las partículas que interactúan por medio de la fuerza nuclear se denominan **hadrones**. Las dos clases de hadrones, *mesones* y *bariones*, se distinguen por sus masas y espines.

Los **mesones** tienen todos espín cero o entero (0 o 1). Como se indicó en la sección 46.3, el nombre viene de la expectativa de que la masa del mesón propuesto por Yukawa estaría entre las masas del electrón y el protón. Varias masas de mesones en efecto caen en dicho intervalo, aunque también existen mesones con masas mayores que las del protón.

Se sabe que todos los mesones decaen finalmente en electrones, positrones, neutrinos y fotones. Los piones son los mesones más ligeros que se conocen; tienen masas de aproximadamente 1.4×10^2 MeV/c^2, y los tres piones —π^+, π^- y π^0— tienen un espín de 0. (Esto indica que la partícula descubierta por Anderson en 1937, el muón, no es un mesón; el muón tiene espín $\frac{1}{2}$. Pertenece a la clasificación *leptón*, la cual se describe enseguida.)

Los **bariones**, la segunda clase de hadrones, tienen masas iguales o mayores que la masa del protón (el nombre *barión* significa "pesado" en griego) y su espín siempre es un valor no entero ($\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$). Los protones y los neutrones son bariones, como muchas otras partículas. Exceptuando al protón, todos los bariones decaen de modo tal que los productos finales incluyen un protón. Por ejemplo, el barión llamado hiperón Ξ decae en barión Λ^0 en alrededor de 10^{-10} s. El Λ^0 decae después en un protón y en un π^- en cerca de 3×10^{-10} s.

En la actualidad se cree que los hadrones no son partículas elementales sino que están compuestos por unidades más elementales llamadas quarks, como se verá en la sección 46.9.

Leptones

Los **leptones** (del griego *leptos* que significa "pequeño" o "ligero") son un grupo de partículas que no interactúan mediante la fuerza nuclear. Todos los leptones tienen espines de $\frac{1}{2}$. Mientras los hadrones tienen tamaño y estructura, los leptones parecen ser verdaderamente elementales, lo cual significa que no tienen estructura y son parecidos a partículas puntuales.

Muy diferente al caso de los hadrones, el número de leptones conocidos es pequeño. En la actualidad los científicos creen que sólo existen seis leptones: el electrón, el muón, el tau y un neutrino asociado con cada uno:

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

El leptón tau, descubierto en 1975, tiene casi el doble de masa que el protón. El neutrino asociado con el tau aún no se ha observado en el laboratorio. Cada uno de los seis leptones tiene una antipartícula.

Categoría	Nombre de la partícula	Símbolo	Antipartícula	Masa (MeV/c^2)	B	L_e	L_μ	L_τ	S	Tiempo de vida (s)	Modo de decaimiento principal[a]
Leptones	Electrón	e^-	e^+	0.511	0	+1	0	0	0	Estable	
	Electrón neutrino	ν_e	$\bar{\nu}_e$	$<7 \times 10^{-6}$	0	+1	0	0	0	Estable	
	Muón	μ^-	μ^+	105.7	0	0	+1	0	0	2.20×10^{-6}	$e^-\bar{\nu}_e\nu_\mu$
	Muón neutrino	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	<0.3	0	0	+1	0	0	Estable	
	Tau	τ^-	τ^+	1 784	0	0	0	+1	0	$<4 \times 10^{-13}$	$\mu^-\bar{\nu}_\mu\nu_\tau$, $e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau$
	Tau neutrino	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	<30	0	0	0	+1	0	Estable	
Hadrones											
Mesones	Pión	π^+	π^-	139.6	0	0	0	0	0	2.60×10^{-8}	$\mu^+\nu_\mu$
		π^0	Ella misma	135.0	0	0	0	0	0	0.83×10^{-16}	2γ
	Kaón	K^+	K^-	493.7	0	0	0	0	+1	1.24×10^{-8}	$\mu^+\nu_\mu$, $\pi^+\pi^0$
		K^0_S	$\bar{K}^0_S$	497.7	0	0	0	0	+1	0.89×10^{-10}	$\pi^+\pi^-$, $2\pi^0$
		K^0_L	$\bar{K}^0_L$	497.7	0	0	0	0	+1	5.2×10^{-8}	$\pi^\pm e^\mp\bar{\nu}_e$, $3\pi^0$ $\pi^\pm \mu^\mp\bar{\nu}_\mu$
	Eta	η	Ella misma	548.8	0	0	0	0	0	$<10^{-18}$	2γ, 3π
		η'	Ella misma	958	0	0	0	0	0	2.2×10^{-21}	$\eta\pi^+\pi^-$
Bariones	Protón	p	$\bar{p}$	938.3	+1	0	0	0	0	Estable	
	Neutrón	n	$\bar{n}$	939.6	+1	0	0	0	0	920	$pe^-\bar{\nu}_e$
	Lambda	Λ^0	$\bar{\Lambda}^0$	1 115.6	+1	0	0	0	−1	2.6×10^{-10}	$p\pi^-$, $n\pi^0$
	Sigma	Σ^+	$\bar{\Sigma}^-$	1 189.4	+1	0	0	0	−1	0.80×10^{-10}	$p\pi^0$, $n\pi^+$
		Σ^0	$\bar{\Sigma}^0$	1 192.5	+1	0	0	0	−1	6×10^{-20}	$\Lambda^0\gamma$
		Σ^-	$\bar{\Sigma}^+$	1 197.3	+1	0	0	0	−1	1.5×10^{-10}	$n\pi^-$
	Xi	Ξ^0	$\bar{\Xi}^0$	1 315	+1	0	0	0	−2	2.9×10^{-10}	$\Lambda^0\pi^0$
		Ξ^-	Ξ^+	1 321	+1	0	0	0	−2	1.64×10^{-10}	$\Lambda^0\pi^-$
	Omega	Ω^-	Ω^+	1 672	+1	0	0	0	−3	0.82×10^{-10}	$\Xi^0\pi^0$, Λ^0K^-

[a] Las notaciones en esta columna como $p\pi^-$, $n\pi^0$ significan dos posibles modos de decaimiento. En este caso los dos decaimientos posibles son $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ y $\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0$.

Los estudios actuales indican que los neutrinos tienen una masa pequeña, pero no cero. Si tienen masa, no pueden viajar a la rapidez de la luz. Además, existen tantos neutrinos que su masa combinada puede ser suficiente para causar que toda la materia en el universo termine por colapsarse en un único punto, ¡el cual podría entonces explotar y crear un universo completamente nuevo! Esta posibilidad se analizará con más detalle en la sección 46.12.

LEYES DE CONSERVACIÓN

En el capítulo 44 aprendió que las leyes de conservación son importantes para comprender por qué ciertos decaimientos y reacciones nucleares ocurren y otros no. En general, las leyes de la conservación de la energía, *momentum* lineal, *momentum* angular y carga eléctrica proporcionan un conjunto de reglas que todos los procesos deben seguir. Varias nuevas leyes de conservación son importantes en el estudio de partículas elementales. Aunque las dos que se describen aquí no tienen fundamento teórico, son sostenidas por abundantes evidencias empíricas.

Número de bariones

La ley de la conservación del número de bariones dice que siempre que se crea un barión en una reacción nuclear o decaimiento, también se crea un antibarión. Este esquema puede cuantificarse asignando a cada partícula un número cuántico, el **número bariónico,** del modo siguiente: $B = +1$ para todos los bariones, $B = -1$ para todos los antibariones y $B = 0$ para todas las demás partículas. Así, la **ley de conservación del número bariónico** establece que **siempre que ocurre una reacción nuclear o decaimiento, la suma de los números bariónicos antes del proceso debe ser igual a la suma de los números bariónicos después del proceso.**

Conservación del número bariónico

Si el número bariónico se conserva absolutamente, el protón debe ser totalmente estable. Si no fuera por la ley de conservación del número bariónico, el protón podría decaer en un positrón y un pión neutro. Sin embargo, tal decaimiento nunca se ha observado. En el presente, se puede decir que el protón tiene una vida media de al menos 10^{33} años (la edad estimada del universo es sólo de 10^{10} años). Sin embargo, en una teoría reciente, los físicos predijeron que el protón es inestable. De acuerdo con esta teoría, el número de bariones no se conserva de manera absoluta.

EJEMPLO Verificación del número bariónico

Determine si las siguientes reacciones pueden ocurrir con base en la ley de conservación del número de bariones:

a) $p + n \rightarrow p + p + n + \bar{p}$; b) $p + n \rightarrow p + p + \bar{p}$

Solución a) El lado izquierdo de la ecuación da un número total de bariones de $1 + 1 = 2$. El lado derecho da un número total de bariones de $1 + 1 + 1 + (-1) = 2$. De tal modo, el número bariónico se conserva y la reacción puede ocurrir (siempre que el protón incidente tenga suficiente energía para que la conservación de la energía se satisfaga).

b) El lado izquierdo de la ecuación produce un número total de bariones de $1 + 1 = 2$. Sin embargo, el lado derecho da $1 + 1 + (-1) = 1$. Ya que el número de bariones no se conserva, la reacción no puede ocurrir.

EJEMPLO **Detección de decaimiento de protones**

Las mediciones tomadas en la instalación de detección de neutrinos Super Kamiokande (Fig. 46.6) indican que la vida media de los protones es de al menos 10^{33} años. Estime cuánto tiempo se debería observar, en promedio, para percibir el decaimiento de un protón en un vaso con agua.

Solución Estime que un vaso contiene alrededor de $\frac{1}{4}$L, o 250 g, de agua. El número de moléculas de agua es

$$\frac{(250\,\text{g})(6.02\times10^{23}\,\text{moléculas/mol})}{18\,\text{g/mol}} = 8.4\times10^{24}\,\text{moléculas}$$

Cada molécula de agua contiene un protón en cada uno de sus dos átomos de hidrógeno más ocho protones en su átomo de oxígeno. En consecuencia, el vaso de agua contiene 8.4×10^{25} protones. La constante de decaimiento está proporcionada por la ecuación 44.9:

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{10^{33}\,\text{años}} = 6.9\times10^{-34}\,\text{años}^{-1}$$

Ésta es la probabilidad de que cualquier protón decaerá en un año. La probabilidad de que cualquier protón en el vaso con agua decaerá en el intervalo de un año es (ecuaciones 44.6 y 44.8)

$$R = (8.4\times10^{25})(6.9\times10^{-34}\,\text{años}^{-1}) = 5.8\times10^{-8}\,\text{años}^{-1}$$

Así que se debe observar el vaso de agua durante $1/R \approx$ ¡17 millones de años!

Ejercicio La instalación de neutrinos Super Kamiokande contiene 50 000 toneladas de agua. Estime el tiempo promedio entre decaimientos detectados del protón si la vida media es de 10^{33} años.

Respuesta Aproximadamente 1 año.

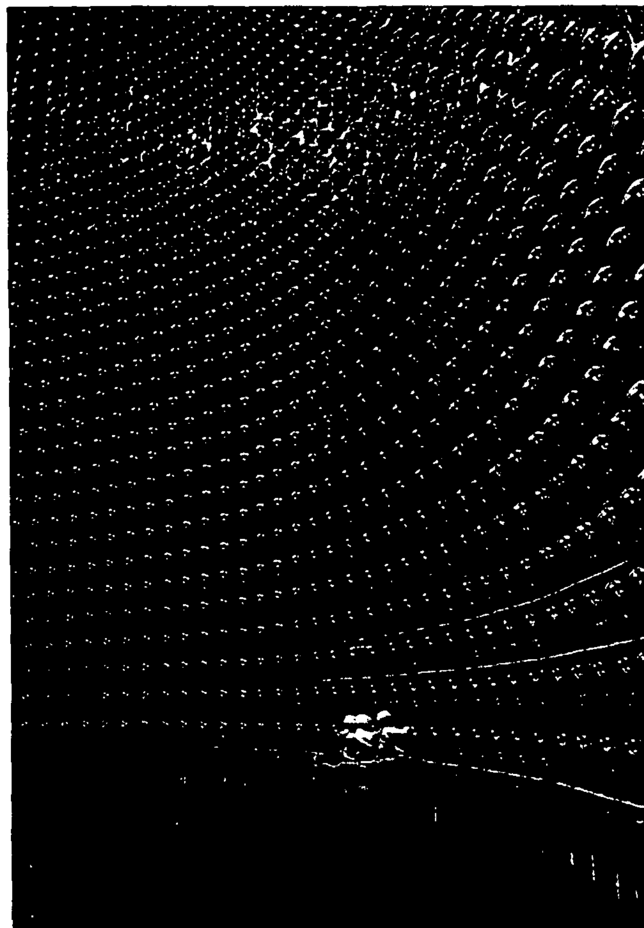


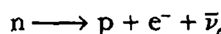
Figura 46.6 Este detector en la instalación de neutrinos Super Kamiokande, en Japón, se usa para estudiar fotones y neutrinos. Contiene 50 000 toneladas de agua altamente purificada y 13 000 fotomultiplicadores. La fotografía fue tomada mientras el detector se estaba llenando. Los técnicos utilizan una balsa para limpiar los fotodetectores antes de que éstos sean sumergidos. *(Cortesía de KRR [Institute for Cosmic Ray Research], Universidad de Tokio)*

Número de leptones

Conservación del número de leptones

Hay tres leyes de conservación que involucran a los números de leptones, una para cada variedad de leptón. La **ley de conservación del número leptónico del electrón** establece que, siempre que ocurre una reacción nuclear o decaimiento, **la suma de los números de leptones del electrón antes del proceso debe ser igual a la suma de los números de leptones del electrón después del proceso.**

Al electrón y al neutrino del electrón se les asigna un número de leptón de electrón $L_e = +1$; a los antileptones e^+ y $\bar{\nu}_e$ se les asigna un número de leptón del electrón $L_e = -1$ y todas las otras partículas tienen $L_e = 0$. Por ejemplo, considere el decaimiento del neutrón:



$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Antes del decaimiento el número leptónico del electrón es $L_e = 0$; después del decaimiento es $0 + 1 + (-1) = 0$. De tal modo, se conserva el número leptónico del electrón. (El número bariónico también debe conservarse, desde luego, y lo hace: antes del decaimiento $B = +1$, y después del decaimiento $B = +1 + 0 + 0 = +1$.)

De modo similar, cuando un decaimiento involucra muones, el número leptónico del muón L_μ se conserva. A μ^- y ν_μ se les asigna un número leptónico de muón $L_\mu = +1$; a los antimuones μ^+ y al muón antineutrino $\bar{\nu}_\mu$ se les asignan números leptónicos de muón $L_\mu = -1$; y todas las otras partículas tienen $L_\mu = 0$.

Por último, el número leptónico del tau L_τ se conserva con asignaciones similares para el leptón τ, su neutrino y otras partículas.

Ejemplo — Verificación de números leptónicos

Determine cuál de los siguientes esquemas de decaimiento puede ocurrir, con base en la ley de la conservación del número leptónico a) $\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$; b) $\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \nu_e$.

Solución a) Ya que este decaimiento involucra tanto a un muón como a un electrón, L_μ y L_e deben conservarse. Antes del decaimiento, $L_\mu = +1$ y $L_e = 0$. Después del decaimiento, $L_\mu = 0 + 0 + 1 = +1$, y $L_e = +1 + (-1) + 0 = 0$. De tal manera, ambos números se conservan y con esta base el decaimiento es posible.

b) Antes del decaimiento, $L_\mu = 0$ y $L_e = 0$. Después del decaimiento, $L_\mu = -1 + 1 + 0 = 0$, pero $L_e = 0 + 0 + 1 = 1$. De este modo, el decaimiento no es posible porque el número leptónico del electrón no se conserva.

Ejercicio Determine si el decaimiento $\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ puede ocurrir.

Respuesta No, porque L_μ es +1 antes del decaimiento y 0 después.

Pregunta sorpresa 46.3

Un científico afirma que ha observado el decaimiento de un electrón en dos neutrinos de electrón. ¿Es esto creíble?

PARTÍCULAS EXTRAÑAS Y EXTRAÑEZA

Muchas partículas descubiertas en la década de 1950 fueron producidas por la interacción de piones con protones y neutrones en la atmósfera. Un grupo de éstas —las partículas kaón (K), lambda (Λ) y sigma (Σ)— exhibían propiedades inusuales cuando eran creadas y cuando decaían; en consecuencia, se denominaron ***partículas extrañas.***

Una propiedad inusual de las partículas extrañas es que siempre se producían en pares. Por ejemplo, cuando un pión choca contra un protón, un resultado muy probable es la producción de dos partículas extrañas neutras (Fig. 46.7):



$$\pi^- + p \longrightarrow K^0 + \Lambda^0$$

Sin embargo, la reacción $\pi^- + p \longrightarrow K^0 + n^0$, en la cual sólo una de las partículas finales es extraña, nunca ocurrió, aun cuando no se había violado ninguna de las leyes de conservación conocida y la energía del pión era suficiente para iniciar la reacción.

La segunda característica peculiar de las partículas extrañas es que, aunque se producen en reacciones que involucran la interacción nuclear a una alta rapidez, no decaen en partículas que interactúan por medio de la fuerza nuclear a una rapidez muy alta. En vez de ello decaen muy lentamente, lo cual es característico de la interacción débil. Sus vidas medias están en el intervalo de 10^{-10} s a 10^{-8} s, mientras la mayor parte de las otras partículas que interactúan mediante la fuerza nuclear tienen tiempos de vida del orden de 10^{-23} s.

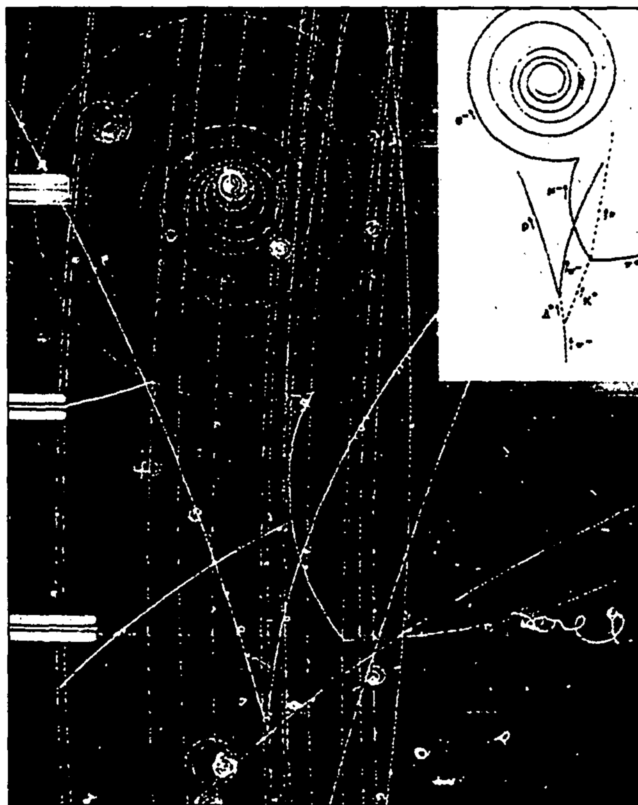


Figura 46.7 Esta fotografía de cámara de burbujas muestra muchos eventos, y el recuadro es un dibujo de las trazas identificadas. Las partículas extrañas Λ^0 y K^0 se forman en el fondo mientras una partícula π^- interactúa con un protón en la reacción $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$. (Note que las partículas neutras no dejan traza, como se indica con las líneas discontinuas en el recuadro.) Luego la Λ^0 decae en la reacción $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$, y la K^0 decae en la reacción $K^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. *(Cortesía de Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, Photographic Services)*

Para explicar estas propiedades inusuales de las partículas extrañas se introdujo un nuevo número cuántico S denominado **extrañeza** junto con una ley de conservación. Los números de extrañeza de algunas partículas se proporcionan en la tabla 46.2. La producción de partículas extrañas en pares se explica asignando $S = +1$ a una de las partículas, $S = -1$ a la otra y $S = 0$ a todas las partículas no extrañas. La **ley de conservación de la extrañeza** establece que **siempre que ocurre una reacción nuclear o decaimiento, la suma de los números de extrañeza antes del proceso debe ser igual a la suma de los números de extrañeza después del proceso.**

Conservación de los números de extrañeza

La rapidez de decaimiento lento de partículas extrañas puede explicarse suponiendo que las interacciones nuclear y electromagnética obedecen la ley de la conservación de extrañeza, pero no la interacción débil. Ya que el decaimiento de una partícula extraña implica la pérdida de una partícula extraña, viola la conservación de la extrañeza y, en consecuencia, procede lentamente por medio de la interacción débil.

EJEMPLO ¿Se conserva la extrañeza?

a) Use la ley de conservación de la extrañeza para determinar si ocurre la reacción $\pi^0 + n \rightarrow K^+ + \Sigma^-$.

Solución A partir de la tabla 46.2 se ve que la extrañeza inicial es $S = 0 + 0 = 0$. Ya que la extrañeza del K^+ es $S = +1$ y la

extrañeza de Σ^- es $S = -1$, la extrañeza del producto final es $+1 - 1 = 0$. Por tanto, la extrañeza se conserva y la reacción se permite.

b) Muestre que la reacción $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$ no conserva la extrañeza.

Solución Antes: $S = 0 + 0 = 0$; después: $S = 0 + (-1) = -1$. Por consiguiente, no se conserva la extrañeza.

Ejercicio Muestre que la reacción $p + \pi^- \rightarrow K^0 + \Lambda^0$ obedece la ley de conservación de la extrañeza.



CREACIÓN DE PARTÍCULAS Y MEDICIÓN DE SUS PROPIEDADES

El desconcertante arreglo de las entradas en la tabla 46.2 lo deja a uno clamando por tierra firme. Por ejemplo, es natural preguntar acerca de una entrada para una partícula (Σ^0) que existe durante 10^{-20} s y tiene una masa de 1 192.5 MeV/c^2. ¿Cómo es posible detectar una partícula que existe sólo durante 10^{-20} s? Más aún, ¿cómo puede medirse su masa cuando existe durante tan corto tiempo? Si un atributo estándar de una partícula es algún tipo de permanencia o estabilidad, ¿en qué sentido una entidad tan efímera es una partícula? En esta sección se responden tales cuestiones y se explica cómo se producen las partículas elementales y se miden sus propiedades.

La mayoría de las partículas elementales son inestables y es muy raro que se creen en la naturaleza, durante lluvias de rayos cósmicos. Sin embargo, en el laboratorio se crean grandes cantidades de dichas partículas, en colisiones controladas entre partículas de alta energía y un blanco adecuado. Las partículas incidentes deben tener energía muy alta, y toma considerable tiempo que los campos electromagnéticos aceleren a las partículas a tales energías. Por tanto, el haz incidente por lo general está conformado con partículas cargadas estables, como los electrones o protones. Además, los blancos deben ser simples y estables, y el blanco más simple, hidrógeno, sirve magníficamente como blanco (el protón) y como detector.

La figura 46.7 documenta un evento típico en el cual una cámara de burbujas sirve tanto como fuente como detector. Muchas trazas paralelas de piones negativos son visibles ingresando a la fotografía desde la parte inferior. Como muestran las leyendas en el dibujo inserto, uno de los piones ha golpeado un protón estacionario en el hidrógeno y produjo dos partículas extrañas, Λ^0 y K^0, de acuerdo con la reacción



$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$$

Ninguna partícula extraña deja traza, pero su ulterior decaimiento en partículas cargadas se puede ver en la figura 46.7. Un campo magnético dirigido hacia adentro del plano de la página provoca que la traza de cada partícula cargada se curve, y a partir de la medición de la curvatura se pueden determinar la carga de la partícula y su *momentum* lineal. Si se conocen la masa y el *momentum* de la partícula incidente, entonces por lo común es posible calcular la masa, energía cinética y rapidez de la partícula producto a partir de las leyes de conservación del *momentum* y la energía. Finalmente, combinando una rapidez de la partícula producto con la longitud de la traza que deja, se puede calcular la vida de la partícula. La figura 46.7 muestra que en ocasiones se puede usar esta técnica de tiempo de vida incluso para una partícula neutra, la cual no deja traza. Mientras se conozcan el origen y el destino de la traza perdida, así como la rapidez de la partícula, se puede inferir la longitud de la traza perdida y así determinar el tiempo de vida de la partícula neutra.

Partículas resonantes

Con técnicas experimentales ingeniosas y mucho esfuerzo, es posible medir longitudes de trazas tan cortas como 10^{-6} m, lo cual significa que se pueden medir vidas tan

breves como 10^{-16} s para partículas de alta energía que viajan a casi la rapidez de la luz. Se llega a este resultado suponiendo que una partícula en decaimiento viaja 1 μm a una rapidez de 0.99c en el marco de referencia del laboratorio, produciendo una vida de $\Delta t_{\text{lab}} = 1 \times 10^{-6}$ m/0.99 $c \approx 3.4 \times 10^{-15}$ s. Sin embargo, éste no es el resultado final, porque se deben tomar en cuenta los efectos relativistas de la dilatación del tiempo. Ya que el tiempo de vida propio Δt_p, según se mide en el marco de referencia de la partícula en decaimiento, es más corto que el valor del marco del laboratorio Δt_{lab} por un factor de $\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ (véase la Ec. 39.7), se calcula el tiempo de vida propio:

$$\Delta t_p = \Delta t_{\text{lab}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = (3.4\times10^{-15}\,\text{s})\sqrt{1-\frac{(0.99c)^2}{c^2}} = 4.8\times10^{-16}\,\text{s}$$

Por desgracia, aun con la ayuda de Einstein, la mejor respuesta que se puede obtener con el método de la longitud de traza está alejada a muchos órdenes de magnitud de tiempos de vida de 10^{-20} s. ¿Cómo, entonces, se puede detectar la presencia de partículas que existen durante intervalos de tiempo como 10^{-20} s? Como se verá pronto, para tales partículas de vida corta, conocidas como **partículas resonantes**, todo lo que se puede hacer es inferir sus masas, sus tiempos de vida y su existencia misma a partir de los datos de sus productos en decaimiento.

Considere este proceso de detección en detalle, examinando el caso de la partícula resonante llamada delta más (Δ^+), la cual tiene una masa de 1 232 MeV/c^2 y un tiempo de vida de casi 10^{-23} s, incluso más corto que la partícula de vida más corta listada en la tabla 46.2. Dicha partícula se produce en la reacción



$$e^- + p \rightarrow e^- + \Delta^+ \qquad \textbf{(46.4)}$$

seguida en 10^{-23} s por el decaimiento



$$\Delta^+ \rightarrow \pi^+ + n \qquad \textbf{(46.5)}$$

Puesto que el tiempo de vida de Δ^+ es tan corto, la partícula no deja traza mensurable en una cámara de burbujas. Por tanto, parece imposible distinguir las reacciones dadas en las ecuaciones 46.4 y 46.5 a partir de la reacción



$$e^- + p \rightarrow e^- + \pi^+ + n \qquad \textbf{(46.6)}$$

en la cual los reactantes de la ecuación 46.4 decaen directamente a e^-, π^+ y n, sin el paso intermedio en el cual se produce una Δ^+. Sin embargo, no es imposible distinguir entre estas dos posibilidades. Si existe una partícula Δ^+, tiene una energía en reposo distintiva, la cual debe provenir de la energía cinética de las partículas incidentes. Si se imagina disparando electrones con energía cinética creciente a protones, al final proporcionará suficiente energía al sistema para crear la partícula Δ^+. Lo anterior es muy similar a disparar fotones de energía creciente a un átomo hasta que usted los dispara con la suficiente energía para excitar al átomo a un estado cuántico mayor. De hecho, la partícula Δ^+ es un estado excitado del protón, al cual se le puede comprender mediante la teoría de quarks estudiada en la sección 46.9. Después de que la partícula Δ^+ se ha formado, su energía en reposo se convierte en las energías del pión y el neutrón salientes. La ecuación 39.26 se puede resolver para la energía en reposo de la partícula Δ^+ en términos de su energía cinética y su *momentum* lineal:

$$(m_{\Delta^+}c^2)^2 = E_{\Delta^+}{}^2 - p_{\Delta^+}{}^2c^2 = E_{\Delta^+}{}^2 - (\mathbf{p}_{\Delta^+})^2c^2$$

Cuando la partícula Δ^+ decae en un pión y un neutrón, la conservación de la energía y el *momentum* requiere que

$$E_{\Delta^+} = E_{\pi^+} + E_n \qquad \mathbf{p}_{\Delta^+} = \mathbf{p}_{\pi^+} + \mathbf{p}_n$$

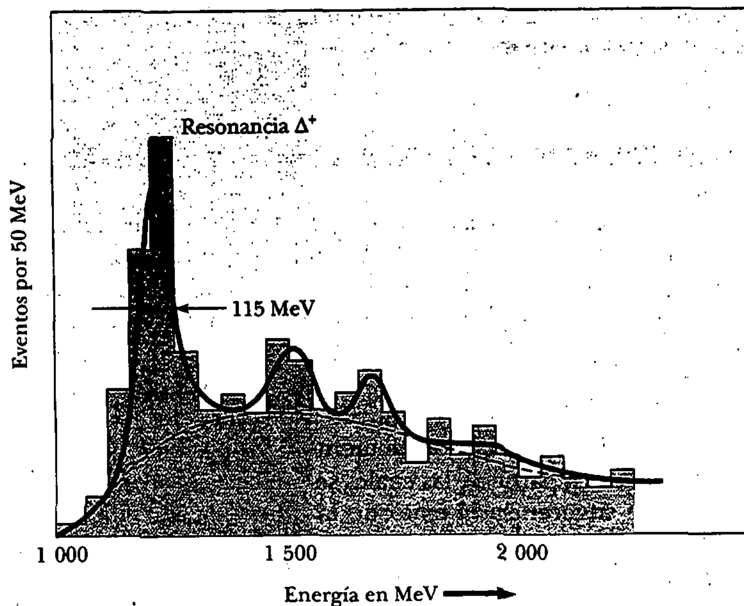


Figura 46.8 Evidencia experimental de la existencia de la partícula Δ^+. El pico definido a 1 232 MeV fue producido por eventos en los cuales se formó una Δ^+ y rápidamente decayó a una π^+ y un neutrón.

Por ende, la energía en reposo de la partícula Δ^+ se puede expresar en términos de las energías y los *momentum* de las partículas salientes, todas las cuales se pueden medir en la fotografía de cámara de burbujas:

$$(m_{\Delta^+}c^2)^2 = (E_{\pi^+} + E_n)^2 - (\mathbf{p}_{\pi^+} + \mathbf{p}_n)^2c^2$$

Cualesquiera piones y neutrones que provienen del decaimiento de una partícula Δ^+ deben tener energías y *momentum* que combinen en esta ecuación para proporcionar la energía en reposo de la partícula Δ^+. Los piones y neutrones que vienen de la reacción de la ecuación 46.6 tendrán una variedad de energías y *momentum* sin patrón particular, ya que la energía de los reactivos se puede dividir en muchas maneras entre las tres partículas salientes en esta reacción. A la energía en la cual se puede crear la energía en reposo de la partícula Δ^+, ocurren muchas reacciones, como se evidencia por las combinaciones propias de energía y *momentum* ya descritas.

Para demostrar la existencia de la partícula Δ^+ se analiza un gran número de eventos en los cuales se producen *un π^+ y un neutrón. Luego el número de eventos* en un intervalo de energía dado se grafica *versus* la energía. Siguiendo este procedimiento se obtiene una curva de poca variación que tiene un pico definido sobreimpuesto, el cual representa la energía del electrón incidente a la cual fue creada la energía en reposo de la partícula Δ^+, lo que revela la existencia de la partícula.

La figura 46.8 es una gráfica experimental para la partícula Δ^+. La curva discontinua se produce por eventos directos en los cuales no se creó ninguna Δ^+ (véase la Ec. 46.6). El pico definido a 1 232 MeV fue producido por todos los eventos en los cuales se formó una Δ^+ y decayó a un pión y un neutrón. Por tanto, la energía en reposo de la partícula Δ^+ es 1 232 MeV. Los picos correspondientes a las dos partículas resonantes con masas mayores que las de la partícula Δ^+ también se pueden ver en la figura 46.8.

Gráficas como las de la figura 46.8 pueden decir no sólo la masa de una partícula de vida corta sino también su tiempo de vida. El ancho del pico de resonancia y la relación de incertidumbre $\Delta E\, \Delta t \approx \hbar/2$ se usan para inferir el tiempo de vida Δt de la partícula. El ancho medido de 115 MeV en la figura 46.8 conduce a un tiempo de vida de 0.57×10^{-23} s para la partícula Δ^+. En este tiempo de vida increíble-

mente corto, una partícula Δ^+ que se mueve a la rapidez límite c viaja sólo 10^{-15} m, lo cual es más o menos un diámetro molecular.

DESCUBRIMIENTO DE PATRONES EN LAS PARTÍCULAS



Murray Gell-Mann recibió el premio Nobel en 1969 por sus estudios teóricos en relación con las partículas subatómicas. *(Cortesía de Michael R. Dressler)*

Una de las herramientas empleadas por los científicos es la detección de patrones en los datos, patrones que contribuyen a la comprensión de la naturaleza. Uno de los mejores ejemplos del uso de esta herramienta es el desarrollo de la tabla periódica, la cual proporciona una comprensión fundamental del comportamiento químico de los elementos. La tabla periódica explica cómo se pueden formar más de 100 elementos a partir de tres partículas —el electrón, el protón y el neutrón—. El número de partículas observadas y resonancias apreciadas por los físicos de partículas incluso es mayor que el número de elementos. ¿Es posible que exista un pequeño número de entidades a partir de las cuales se pueden construir todos los elementos? Tomando como sugerencia el éxito de la tabla periódica, a continuación se explora la búsqueda histórica de patrones entre las partículas.

Se han propuesto muchos esquemas de clasificación para agrupar las partículas en familias. Considere por ejemplo los bariones listados en la tabla 46.2. Tales partículas se consideran como pertenecientes a un grupo con base en el hecho de que todas tienen espines $\frac{1}{2}$. Si se grafica la extrañeza *versus* la carga para estos bariones empleando un sistema de coordenadas inclinado, como en la figura 46.9a, se observa un patrón fascinante: seis de los bariones forman un hexágono, en tanto que los dos restantes están en su centro.

Como un segundo ejemplo considere los nueve mesones siguientes de espín cero listados en la tabla 46.2: π^+, π^0, π^-, K^+, K^0, K^-, η, η' y la antipartícula $\overline{K}^0$. La figura 46.9b es una gráfica de extrañeza *versus* carga para esta familia. También aquí emerge un patrón hexagonal. En tal caso las partículas sobre el perímetro del hexágono se oponen a sus antipartículas, y las tres restantes (las cuales forman su pro-

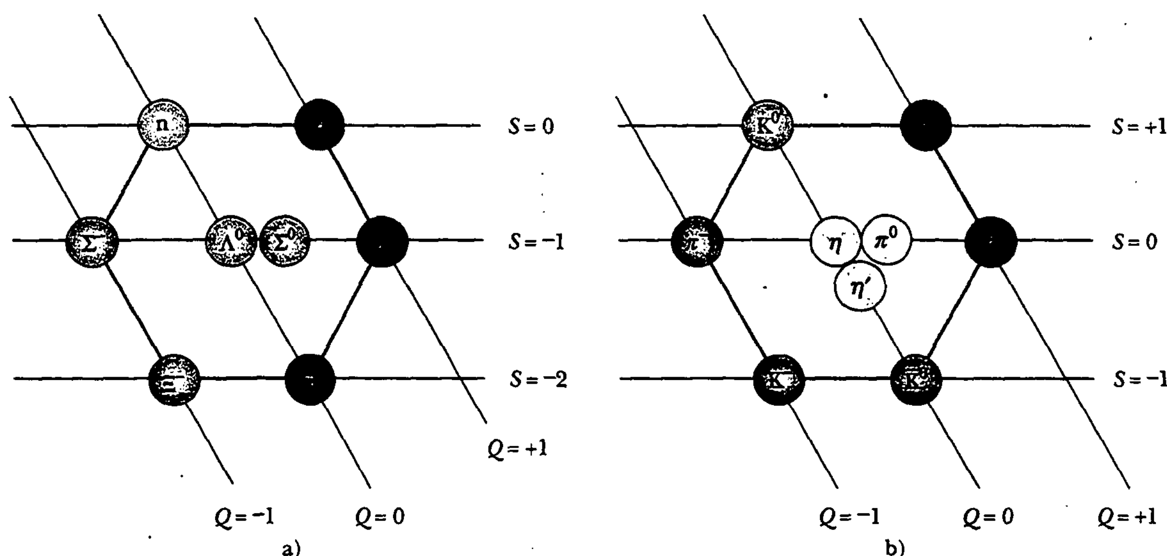


Figura 46.9 a) Patrón hexagonal del camino de ocho vías para los ocho bariones de $\frac{1}{2}$ espín. Esta gráfica de extrañeza *versus* carga usa un eje inclinado para el número de carga Q y un eje horizontal para la extrañeza S. b) Patrón del camino de ocho vías para los nueve mesones de espín cero.



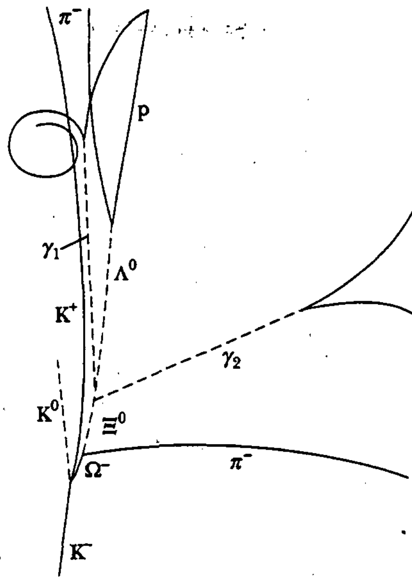


Figura 46.10 Descubrimiento de la partícula Ω^-. La partícula K^- en la parte baja de la fotografía colisiona con un protón para producir la primera partícula Ω^- detectada más otras dos partículas. *(Cortesía de Brookhaven National Laboratory.)*

pia antipartícula) están en el centro del hexágono. Éstos y otros patrones simétricos relacionados fueron desarrollados de manera independiente en 1961 por Murray Gell-Mann y Yuval Ne'eman. Gell-Mann llamó a los patrones **camino de ocho vías**, en honor al trayecto de ocho vías que, en el budismo, conduce al nirvana.

Los grupos de bariones y mesones pueden exhibirse en muchos otros patrones simétricos dentro del marco del camino de ocho vías. Por ejemplo, la familia de bariones de espín $\frac{3}{2}$ contiene diez partículas arregladas en un patrón similar al de los pinos en una mesa de boliche. Después de que se propuso este patrón, se presentó un punto vacío en el mismo, el cual corresponde a una partícula que nunca se ha observado. Gell-Mann predijo que la partícula faltante, la cual denominó omega menos (Ω^-) debía tener espín $\frac{3}{2}$, carga -1, extrañeza -3 y energía en reposo $\approx$1 680 MeV. Poco después, en 1964, científicos en el Brookhaven National Laboratory, mediante cuidadosos análisis de fotografías de cámara de burbujas (Fig. 46.10), encontraron la partícula faltante y confirmaron todas sus propiedades predichas.

La predicción de la partícula faltante a partir del camino de ocho vías tiene mucho en común con la predicción de los elementos faltantes en la tabla periódica. Siempre que una vacante ocurre en un patrón organizado de información, los experimentadores tienen una guía para sus investigaciones.

QUARKS: AL FIN

Como habrá notado, los leptones parecen ser las verdaderas partículas elementales debido a que sólo existen unos cuantos tipos y no tienen tamaño mensurable o estructura interna. Los hadrones, en cambio, son partículas complejas que tienen tamaño y estructura. La existencia de los patrones de carga —extrañeza del camino de ocho vías— sugiere que los hadrones tienen subestructura. Además, se sabe que existen cientos de tipos de hadrones y que muchos decaen en otros hadrones.

El modelo original de quarks

En 1963 Gell-Mann y George Zweig propusieron, cada uno por su lado, un modelo para la subestructura de los hadrones. De acuerdo con su modelo, todos los hadrones eran sistemas compuestos de dos o tres constituyentes fundamentales llamados **quarks**. (Gell-Mann tomó prestada la palabra *quark* del pasaje "Three quarks for Muster Mark" del *Finnegans Wake* de James Joyce.) El modelo tenía tres tipos de quarks, designados por los símbolos u, d y s. A éstos se les daban los nombres arbitrarios **up** (arriba), **down** (abajo) y **strange** (extraño). Los diversos tipos de quarks se denominan **flavors** (sabores). La figura 46.11 es una representación artística de las composiciones de quarks de distintos hadrones.

Una propiedad inusual de los quarks es que tienen cargas electrónicas fraccionarias. Los quarks u, d y s tienen cargas de $+2e/3$, $-e/3$ y $-e/3$, respectivamente. Éstas y otras propiedades de los quarks y los antiquarks se proporcionan en la tabla 46.3. Advierta que los quarks tienen espín $\frac{1}{2}$, lo cual significa que todos los quarks son **fermiones**, definidos como cualquier partícula que tiene espín semientero. Como se muestra en la tabla 46.3, asociado con cada quark está un antiquark de carga opuesta, número de bariones y extrañeza.

La composición de todos los hadrones conocidos cuando Gell-Mann y Zweig presentaron sus modelos podía especificarse de manera completa mediante tres simples reglas:

- Un mesón consiste de un quark y un antiquark, dándole un número bariónico 0, como se requiere.
- Un barión está compuesto por tres quarks.
- Un antibarión se compone de tres antiquarks.

Se hace referencia a la teoría proporcionada por Gell-Mann y Zweig como el *modelo original de quark.*

Pregunta sorpresa 46.4

Se han visto una ley de conservación del número de leptones y una ley de conservación del número de bariones. ¿Por qué no hay una ley de la conservación del número de mesones? (*Sugerencia:* imagine que crea pares partícula-antipartícula a partir de energía, y céntrese en la creación de un par quark-antiquark.)

Encanto y otros desarrollos

Aunque el modelo de quark original tuvo mucho éxito en la clasificación de partículas dentro de familias, había algunas discrepancias entre las predicciones del modelo y cierta rapidez de decaimiento experimental. En consecuencia, varios físicos propusieron un cuarto sabor de quark en 1967. Argumentaban que si existían cuatro tipos de leptones (como se pensaba en ese tiempo), entonces debía haber también cuatro sabores de quarks debido a la simetría fundamental en la naturaleza. Al cuarto quark, designado c, se le asignó una propiedad llamada ***charm*** (encanto). Un quark *encantado* tendría carga $+2e/3$, tal como tiene el quark arriba, pero su encanto lo distinguiría de los otros tres quarks. Ello introduce un nuevo número cuántico C, el cual representa el encanto. El nuevo quark tendría encanto $C = +1$, su antiquark tendría encanto $C = -1$ y todos los restantes quarks tendrían $C = 0$. El encanto, al igual que la extrañeza, se conserva en las interacciones nucleares y electromagnéticas, mas no en las interacciones débiles.

La evidencia de que existe el quark encantado comenzó a acumularse en 1974, cuando un mesón pesado denominado partícula J/Ψ (o simplemente Ψ), fue descubierto de manera independiente por dos grupos: uno dirigido por Burton Richter (n. 1931) en el Stanford Linear Accelerator (SLAC) y el otro conducido por Sa-

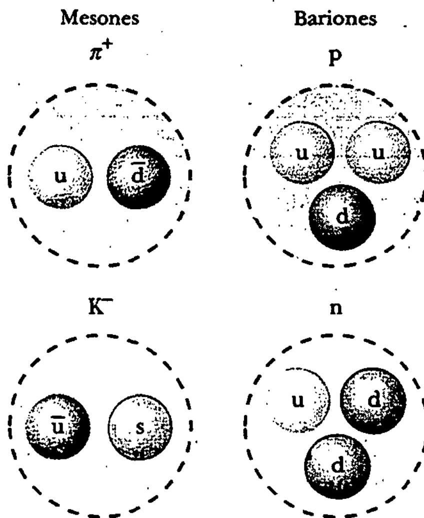


Figura 46.11 Composición de quarks de dos mesones y dos bariones.

muel Ting (n. 1936) en el Brookhaven National Laboratory. En 1976 Richter y Ting fueron galardonados con el premio Nobel por este trabajo. La partícula J/Ψ no encajaba en el modelo de tres quarks; en lugar de ello tenía las propiedades de una combinación del quark encantado propuesto y de su antiquark ($c\bar{c}$). Era mucha más masa que otros mesones conocidos ($\sim$3 100 MeV/c^2) y su vida era mucho más larga que los correspondientes tiempos de vida de las partículas que interactúan mediante la fuerza nuclear. Rápidamente se descubrieron mesones relacionados, correspondientes a combinaciones de quarks tales como $\bar{c}d$ y $c\bar{d}$, las cuales tenían

TABLA 46.3 Propiedades de quarks y antiquarks

Quarks

Nombre	Símbolo	Espín	Carga	Número bariónico	Extrañeza	Encanto	Inferioridad	Superioridad
Arriba	u	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
Abajo	d	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
Extraño	s	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}$	−1	0	0	0
Encanto	c	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	+1	0	0
Inferior	b	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	+1	0
Superior	t	$\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}e$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	+1

Antiquarks

Nombre	Símbolo	Espín	Carga	Número bariónico	Extrañeza	Encanto	Inferioridad	Superioridad
Anti-arriba	$\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
Anti-abajo	$\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0
Anti-extraño	$\bar{s}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	+1	0	0	0
Anti-encanto	$\bar{c}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	−1	0	0
Anti-inferior	$\bar{b}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	−1	0
Anti-superior	$\bar{t}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	−1

TABLA 46.4 [illegible]

		b		c		s		d		u	
	b	Υ^-	($\bar{b}$b)								
	c	B_c^+	($\bar{b}$c)	J/Ψ	($\bar{c}$c)						
Quarks	s	B_s^0	($\bar{b}$s)	D_s^-	($\bar{c}$s)	η, η'	($\bar{s}$s)	$\bar{K}_0$	($\bar{d}$s)	K^-	($\bar{u}$s)
	d	B^0	($\bar{b}$d)	D^-	($\bar{c}$d)	K^0	($\bar{s}$d)	π^0, η, η'	($\bar{d}$d)	π^-	($\bar{u}$d)
	u	B^+	($\bar{b}$u)	$\bar{D}^0$	($\bar{c}$u)	K^+	($\bar{s}$u)	π^+	($\bar{d}$u)	π^0, η, η'	($\bar{u}$u)

Tomado de D. Kestenbaum, "Physicists Find the Last of the Mesons", *Science* 280:35, 1998.
[a] El quark superior no forma mesones porque decae demasiado rápido.

grandes masas y largos tiempos de vida. La existencia de estos nuevos mesones proporcionaron firme evidencia para el cuarto sabor de quark.

En 1975 investigadores de la Universidad de Stanford reportaron fuerte evidencia del leptón tau (τ), de 1 784 MeV/c^2 de masa. Éste fue el quinto tipo de leptón, el cual condujo a los físicos a proponer que podían existir más sabores de quarks, con base en argumentos similares a aquellos que condujeron al descubrimiento del quark encantado. Estos descubrimientos llevaron a modelos de quarks más elaborados, y a la predicción de dos nuevos quarks, **superior** (t) [*top*, por su inicial en inglés] e **inferior** (b) [*bottom*, por su inicial en inglés]. (Algunos físicos prefieren *verdad* y *belleza*.) Para distinguir estos quarks de los otros los números cuánticos denominados *superioridad* e *inferioridad* (con valores permitidos +1, 0, −1) se asignaron a todos los quarks y antiquarks (véase la tabla 46.3). En 1977 investigadores del Fermi National Laboratory, dirigidos por León Lederman (n. 1922), informaron el descubrimiento de un nuevo mesón de gran masa Υ^- cuya composición se considera que es b$\bar{b}$, el cual proporciona evidencia para el quark inferior. En marzo de 1995 investigadores del Fermilab anunciaron el descubrimiento del quark superior (supuestamente el último de los quarks por encontrar) con una masa de 173 GeV/c^2.

La tabla 46.4 lista las composiciones de quarks de mesones formados a partir de quarks arriba, abajo, extraño, encanto e inferior. El mesón formado por la combinación del antiquark inferior y el quark encanto $\bar{b}$c fue el último en ser encontrado. Fue descubierto en 1998.[2] La tabla 46.5 muestra las combinaciones de quarks para los bariones listados en la tabla 46.2. Note que sólo dos sabores de quarks, u y d, es-

TABLA 46.5 [illegible]

Partícula	Composición de quarks
p	uud
n	udd
Λ^0	uds
Σ^+	uus
Σ^0	uds
Σ^-	dds
Ξ^0	uss
Ξ^-	dss
Ω^-	sss

[2] Para información acerca del descubrimiento del mesón B_C^+, léase D. Kestenbaum, "Physicists Find the Last of the Mesons", *Science* 280:35, 1998.

TABLA 46.6 [illegible] y sus energías en reposo y cargas

Partícula	Energía en reposo	Carga
Quarks		
u	360 MeV	$+\frac{2}{3}e$
d	360 MeV	$-\frac{1}{3}e$
c	1 500 MeV	$+\frac{2}{3}e$
s	540 MeV	$-\frac{1}{3}e$
t	173 GeV	$+\frac{2}{3}e$
b	5 GeV	$-\frac{1}{3}e$
Leptones		
e^-	511 keV	$-e$
μ^-	105.7 MeV	$-e$
τ^-	1 784 MeV	$-e$
ν_e	<7 eV	0
ν_μ	<0.3 MeV	0
ν_τ	<30 MeV	0

tán contenidos en todos los hadrones encontrados en la materia ordinaria (protones y neutrones).

Tal vez usted se pregunte si alguna vez terminará el descubrimiento de las partículas elementales. ¿Cuántos "bloques constitutivos" de la materia existen en realidad? En el presente los físicos creen que las partículas fundamentales en la naturaleza son seis quarks y seis leptones, junto con sus antipartículas. La tabla 46.6 enumera sus energías en reposo y sus cargas.

A pesar de muchos grandes esfuerzos experimentales, no se ha observado ningún quark aislado. Los físicos creen ahora que los quarks están confinados en forma permanente dentro de partículas ordinarias debido a una fuerza excepcionalmente (interacción) fuerte que les impide escapar, llamada (de manera apropiada) **fuerza (interacción) fuerte**[3] (la estudiada en la sección 46.10). Tal fuerza aumenta con la distancia de separación, la cual es similar a la fuerza ejercida por un resorte estirado. Un autor describió su gran magnitud del modo siguiente:[4]

> Los quarks son esclavos,... unidos como prisioneros encadenados que realizan trabajos forzados... Cualquier cerrajero puede romper la cadena entre dos prisioneros, pero ninguno es tan experto como para romper las cadenas de gluones entre los quarks. Los quarks seguirán siendo esclavos por siempre.

46.10 QUARKS MULTICOLOREADOS

Poco después de que se propuso el concepto de quarks, los científicos se dieron cuenta de que ciertas partículas tenían composiciones de quarks que violaban el principio de exclusión aplicado a los quarks. En la sección 42.6 se aplicó el principio de exclusión a los electrones en los átomos. Sin embargo, el principio es más ge-

---

[3] Como un recordatorio, el significado original del término *fuerza (interacción) fuerte* fue el de una fuerza atractiva de corto alcance entre nucleones, a la cual en este texto se le ha llamado *fuerza nuclear*. Como se estudiará en la sección 46.10, la fuerza nuclear entre nucleones es un efecto secundario de la fuerza (interacción) fuerte entre quarks.

[4] H. Fritzsch, *Quarks, The Stuff of Matter*, Londres, Allen & Lane, 1983.

neral, y se aplica a todas las partículas que tienen espín semientero ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, y así sucesivamente), a los cuales se les llama fermiones en forma colectiva, como se hizo notar en la sección anterior. Porque todos los quarks son fermiones con espines de $\frac{1}{2}$, se espera que cumplan el principio de exclusión. Un ejemplo de una partícula que parece violar el principio de exclusión es el barión Ω^- (sss), que contiene tres quarks extraños con espines paralelos, dando un espín total de $\frac{3}{2}$. Los tres quarks tienen el mismo número cuántico de espín, en violación del principio de exclusión. Otros ejemplos de bariones que tienen quarks idénticos con espines paralelos son el Δ^{++} (uuu) y el Δ^- (ddd).

Para resolver este problema se sugirió que los quarks poseían una propiedad adicional llamada **carga de color**, que no se debe confundir con el color asociado con la luz visible. Esta propiedad es similar en muchos aspectos a la carga eléctrica, sólo que ocurre en tres variedades en lugar de dos. Los colores asignados a los quarks son rojo, verde y azul, y los antiquarks tienen los colores antirrojo, antiverde y antiazul. En consecuencia, los colores rojo, verde y azul sirven como "números cuánticos" para el color del quark. Para satisfacer el principio de exclusión los tres quarks en cualquier barión deben tener colores diferentes. Los tres colores se "neutralizan" a blanco, como las cargas eléctricas + y – se neutralizan a carga neta cero. El quark y el antiquark en cualquier mesón deben ser de un color y el correspondiente anticolor. El resultado es que los bariones y los mesones son siempre incoloros (o blancos). Por tanto, desaparece la aparente violación del principio de exclusión en el barión Ω^- ya que los tres quarks en la partícula tienen diferentes colores.

Note que la nueva propiedad de color incrementa el número de quarks por un factor de tres, pues cada uno de los seis quarks viene en tres colores. Aunque el concepto de color en el modelo de quark fue concebido originalmente para satisfacer el principio de exclusión, proporcionó también una mejor teoría para explicar ciertos resultados experimentales. Por ejemplo, la teoría modificada predice de manera correcta el tiempo de vida del mesón π^0.

La teoría de cómo interactúan los quarks entre sí se denomina **cromodinámica cuántica** (QCD, por sus siglas en inglés), en paralelismo con el nombre *electrodinámica cuántica* (la teoría de interacción entre cargas eléctricas). En la QCD se dice que cada quark lleva una carga de color, en analogía con la carga eléctrica. La fuerza (interacción) fuerte entre quarks a menudo se denomina **fuerza de color**. Por ende, los términos *fuerza* (interacción) *fuerte* y *fuerza de color* se usan de manera indistinta.

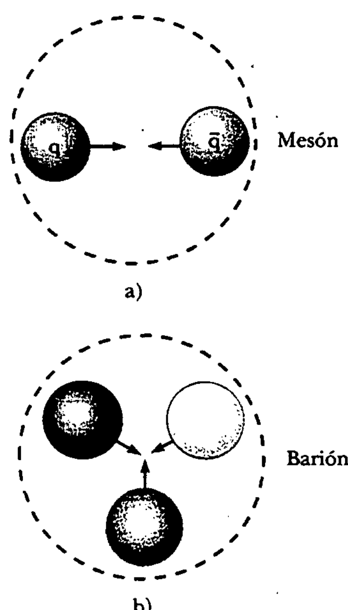


Figura 46.12 a) Un quark rojo es atraído a un quark antirrojo para formar un mesón cuya estructura de quark es ($q\bar{q}$). b) Tres quarks de diferentes colores se atraen entre ellos para formar un barión.

En la sección 46.1 se estableció que la interacción nuclear entre hadrones es mediada por partículas de campo sin masa denominadas **gluones** (semejantes a los fotones de la fuerza electromagnética). Sin embargo, como se estudiará con mayor detalle dentro de poco, la fuerza nuclear es de hecho un efecto secundario de la fuerza (interacción) fuerte entre quarks, de modo que los gluones son en realidad mediadores de la fuerza (interacción) fuerte. Primero se investigará ésta como el efecto primario y luego se investigará cómo los gluones también median la fuerza nuclear. Cuando un quark emite o absorbe un gluón, el color del quark puede cambiar. Por ejemplo, un quark azul que emite un gluón puede llegar a convertirse en un quark rojo, y el quark rojo que absorbe este gluón se transforma en un quark azul.

La fuerza de color entre los quarks es similar a la fuerza eléctrica entre cargas: colores similares se repelen y colores opuestos se atraen. En consecuencia, dos quarks rojos se repelen entre sí, pero un quark rojo será atraído por un quark antirrojo. La atracción entre quarks de color opuesto para formar un mesón ($q\bar{q}$) se indica en la figura 46.12a. Quarks coloreados de manera diferente también se atraen entre sí, aunque con menor intensidad que con colores opuestos de quarks y antiquarks. Por ejemplo, un cúmulo de quarks rojo, azul y verde se atraerán unos a otros para formar un barión, como se indica en la figura 46.12b. De este modo, cada barión contiene tres quarks de tres colores diferentes.

Aunque la fuerza nuclear entre dos hadrones sin color es despreciable a grandes separaciones, la fuerza (interacción) fuerte neta entre sus quarks constitutivos

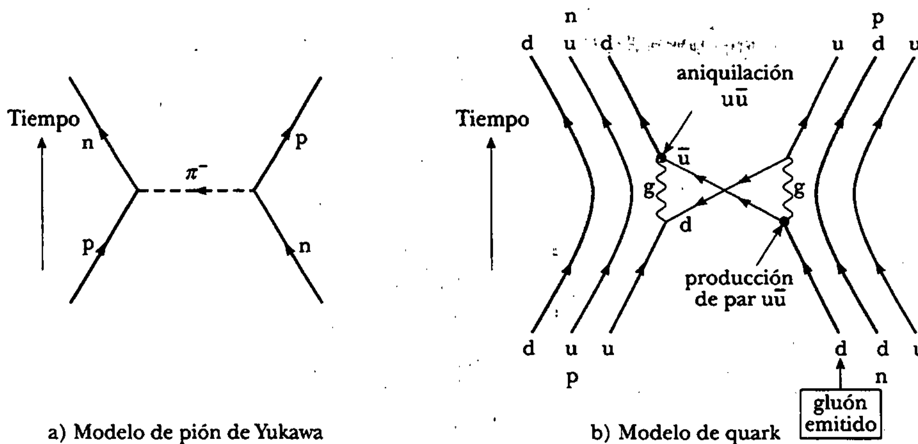


Figura 46.13 a) Interacción nuclear entre un protón y un neutrón explicada en términos del modelo de intercambio de pión de Yukawa. Debido a que el pión conduce carga, el protón y el neutrón activan identidades. b) La misma interacción explicada en términos de quarks y gluones. Advierta que el par de quark ($\bar{u}$d) intercambiado forma un mesón π^-.

no es exactamente cero a separaciones pequeñas. La fuerza fuerte residual es la fuerza nuclear que enlaza a los protones y neutrones para formar núcleos. Es similar a la fuerza entre dos dipolos eléctricos. Cada dipolo tiene carga eléctrica neutra. Sin embargo, un campo eléctrico rodea los dipolos, debido a la separación de las cargas positiva y negativa (véase la sección 23.6). Como resultado, ocurre una fuerza eléctrica entre los dipolos, aunque más débil que la fuerza entre cargas individuales.

De acuerdo con la QCD, se puede dar una explicación más elemental de la fuerza nuclear en términos de quarks y gluones. La figura 46.13a muestra la interacción nuclear entre un neutrón y un protón mediante el pión de Yukawa, en este caso un π^-. Tal dibujo difiere de la figura 46.5a, en la cual la partícula de campo es un π^0; por tanto, no hay transferencia de carga desde un nucleón al otro. En la figura 46.13a el pión cargado conduce carga desde un nucleón al otro, de modo que los nucleones cambian identidades —el protón se vuelve un neutrón y el neutrón se transforma en un protón—.

Ahora observe la misma interacción desde el punto de vista del modelo de quarks, mostrado en la figura 46.13b. En este diagrama de Feynman el protón y el neutrón están representados por sus quarks constitutivos. Cada quark en el neutrón y protón está emitiendo y absorbiendo gluones de manera continua. La energía de un gluón puede resultar en la creación de pares quark-antiquark. Lo anterior es similar a la creación de pares electrón-positrón en la producción de pares, la cual se investigó en la sección 46.2. Cuando el neutrón y el protón se aproximan a 1 fm entre sí, estos gluones y quarks se pueden intercambiar entre los dos nucleones, y tales intercambios producen la fuerza nuclear. La figura 46.13b bosqueja una posibilidad para el proceso mostrado en la figura 46.13a. Un quark abajo en el neutrón a la derecha emite un gluón (representado por la línea ondulada marcada como g en el lado derecho). La energía del gluón se transforma entonces para crear un par $u\bar{u}$. El quark u permanece dentro del nucleón (el cual ahora ha cambiado a un protón), y el quark d en retroceso y el antiquark $\bar{u}$ se transmiten al protón en el lado izquierdo del diagrama. Aquí el $\bar{u}$ aniquila un quark u dentro del protón (con la creación de un gluón), y el d es capturado. Por tanto, el efecto neto es cambiar un quark u a un quark d, y cambiar el protón a la izquierda a un neutrón.

Conforme el quark d y el antiquark $\bar{u}$ en la figura 46.13b se transfieren entre los nucleones, d y $\bar{u}$ intercambian gluones entre ellos y se pueden considerar como enlazados entre sí por medio de la fuerza (interacción) fuerte. Si se regresa a la tabla 46.4, se ve que esta combinación es un π^- —¡la partícula de campo de Yukawa!—.

Por consiguiente, el modelo de quark de interacciones entre nucleones concuerda con el modelo de intercambio de pión.

EL MODELO ESTÁNDAR

Los científicos creen ahora que existen tres clasificaciones de partículas verdaderamente elementales: leptones, quarks y partículas de campo. Las tres partículas después se clasifican como **fermiones** (quarks y leptones) o como **bosones** (partículas de campo). Advierta que los quarks y leptones tienen espín $\frac{1}{2}$ y, por tanto, son fermiones, mientras que las partículas de campo tienen espín 1 o mayor y son bosones.

Recuerde de la sección 46.1 que se cree que la fuerza débil es mediada por los bosones W^+, W^- y Z^0. Se dice que estas partículas tienen *carga débil* del mismo modo que un quark tiene carga de color. Así, cada partícula elemental puede tener masa, carga eléctrica, carga de color y carga débil. Desde luego, una o más de éstas podría ser cero.

En 1979 Sheldon Glashow (n. 1932), Abdus Salam (1926-1996) y Steven Weinberg (n. 1933) ganaron el premio Nobel por desarrollar una teoría que unifica las interacciones electromagnética y débil. Esta **teoría electrodébil** postula que las interacciones débil y electromagnética tienen la misma intensidad cuando las partículas involucradas tienen energías muy altas. Así, las dos interacciones se ven como dos manifestaciones diferentes de una sola interacción electrodébil unificada. La teoría hace muchas predicciones concretas, pero tal vez la más espectacular es la predicción de las masas de las partículas W y Z en alrededor de 82 GeV/c^2 y 93 GeV/c^2, respectivamente —predicciones que son confirmadas por los experimentos—.

La combinación de la teoría electrodébil y la QCD para la interacción fuerte es referida a una física de altas energías conocida como **Modelo estándar**. Aunque los detalles del Modelo estándar son complejos, sus ingredientes esenciales pueden resumirse con la ayuda de la figura 46.14. (El Modelo estándar en la actualidad no incluye la fuerza gravitacional; sin embargo, en la figura 46.14 se incluye la gravedad porque los físicos esperan en algún momento incorporar esta fuerza dentro de una teoría unificada.) Este diagrama muestra que los quarks participan en todas las fuerzas fundamentales y que los leptones participan en todas, excepto la fuerza (interacción) fuerte.

El Modelo estándar no responde todas las preguntas. Una pregunta importante que aún falta por responder es por qué, de los dos mediadores de la interacción

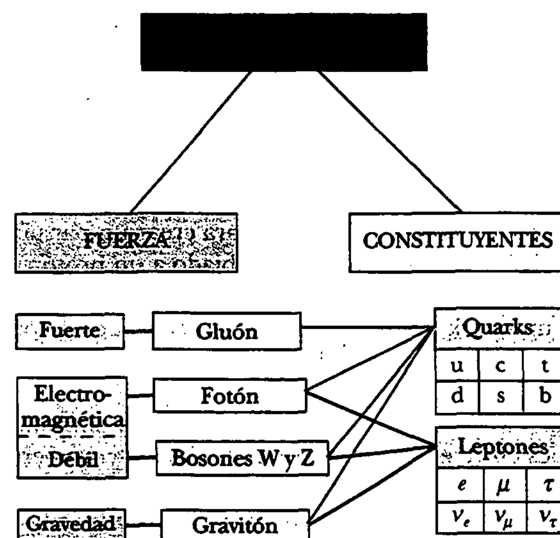
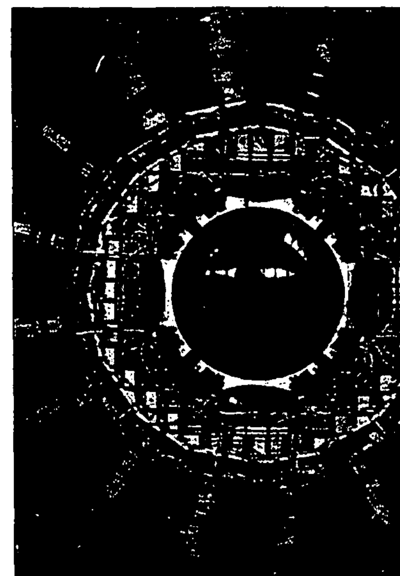


Figura 46.14 **Modelo estándar de física de partículas**

electrodébil, el fotón no tiene masa mientras los bosones W y Z sí la tienen. Debido a esta diferencia de masa, las fuerzas electromagnética y débil son muy distintas a bajas energías, pero se vuelven similares a energías muy altas, a las cuales la energía en reposo es despreciable en relación con la energía total. El comportamiento cuando se va de las bajas a las altas energías se denomina *rompimiento de simetría* porque las fuerzas son similares, o simétricas, a altas energías pero son muy diferentes a bajas energías. Las energías en reposo diferentes de cero de los bosones W y Z plantean la pregunta del origen de las masas de las partículas. Para resolver este problema se ha propuesto una partícula hipotética llamada **bosón de Higgs**, el cual proporciona un mecanismo para el rompimiento de la simetría electrodébil. El Modelo estándar modificado para incluir el mecanismo de Higgs proporciona una explicación lógicamente acorde con la naturaleza de gran masa de los bosones W y Z. Desafortunadamente, el bosón de Higgs aún no se ha encontrado, aunque los físicos saben que su energía en reposo debe ser menor que 1 TeV. Con el propósito de determinar si existe el bosón de Higgs, dos quarks de al menos 1 TeV de energía deben chocar, pero los cálculos muestran que esto requiere inyectar 40 TeV de energía en el volumen de un protón.

Los científicos están convencidos de que, debido a la limitada energía disponible en los aceleradores convencionales que utilizan blancos fijos, es necesario construir aceleradores de haces que colisionen denominados **colisionadores**. El concepto de colisionadores es directo. Partículas con masas iguales y energías cinéticas iguales, que viajan en direcciones opuestas en un anillo acelerador, chocan frontalmente para producir la reacción requerida y formar nuevas partículas. Debido a que el *momentum* total de las partículas interactuantes es cero, toda su energía cinética está disponible para la reacción. El Gran colisionador electrón-positrón (LEP, por sus siglas en inglés) en el CERN (Fig. 46.15) y el Colisionador lineal de Stanford producen colisiones tanto de electrones como de positrones. El Super sincrotrón de protones en el CERN acelera protones y antiprotones hasta energías de 270 GeV, mientras que el acelerador de protones de energías más altas del mundo, el Tevatrón, en el Fermi National Laboratory, en Illinois, produce protones a casi 1 000 GeV (1 TeV). El Supercolisionador superconductor (SSC, por sus siglas en inglés), el cual



Un técnico trabaja en uno de los detectores de partículas del CERN, el centro europeo para física de partículas cerca de Ginebra, Suiza. Los electrones y positrones acelerados a una energía de 50 GeV colisionan en un túnel circular de 2 km de circunferencia, localizado a 100 m bajo el piso. *(David Parker/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.)*



Figura 46.15 Una vista del interior del túnel del Gran colisionador electrón-positrón (LEP, por sus siglas en inglés), el cual tiene 27 km de circunferencia. *(Cortesía del CERN)*

se construyó en Texas, era un acelerador diseñado para producir protones de 20 TeV en un anillo de 52 millas de circunferencia. Después de mucho debate en el Congreso de Estados Unidos, y una inversión de casi 2 000 millones de dólares, el proyecto del SSC fue cancelado por el Departamento de Energía de dicho país en octubre de 1993. El CERN espera que hacia el año 2005 se complete la construcción del Gran colisionador de hadrones (LHC, por sus siglas en inglés), un colisionador protón-protón que proporcionará una energía del centro de masa de 14 TeV y permitirá investigación de la física del bosón de Higgs. El acelerador se construirá en el mismo túnel de 27 km de circunferencia que ahora alberga al Colisionador LEP, y muchos países esperan participar en el proyecto.

web
Visite la página del Consejo Europeo de Investigación Nuclear (ahora llamado Laboratorio Europeo para Física de Partículas) en
www.CERN.ch
La red mundial de información (World Wide Web) fue inventada en el CERN en 1991, como un medio para que los físicos pudiesen compartir datos fácilmente.

Luego del éxito de la teoría electrodébil, los científicos intentaron combinarla con la QCD en una **gran teoría de unificación** (GUT, por sus siglas en inglés). En este modelo la fuerza electrodébil surge con la fuerza (interacción) fuerte para formar una gran fuerza unificada. Una versión de la teoría considera a los leptones y quarks como miembros de la misma familia que puede cambiar una en otra mediante el intercambio de una partícula de campo apropiada.

LA CONEXIÓN CÓSMICA

En esta sección se describe una de las más fascinantes teorías de toda la ciencia —la teoría del Big Bang de la creación del universo— y la evidencia experimental que la respalda. Dicha teoría cosmológica establece que el universo tuvo un principio y, además, que fue tan catastrófico que es imposible mirar más atrás de él. De acuerdo con esta teoría, el universo explotó a partir de una singularidad infinitamente densa hace 15 a 20 mil millones de años. Los primeros minutos después del Big Bang vieron energía tan elevada que se cree que las cuatro interacciones de la física se unificaron y toda la materia quedó contenida en una "sopa de quarks" indiferenciada.

La evolución de las cuatro fuerzas fundamentales desde el Big Bang hasta el presente se muestra en la figura 46.16. Durante los primeros 10^{-43} s (la época ultracaliente, $T \sim 10^{32}$ K), se presume que las fuerzas (interacciones) fuerte, electrodébil y gravitacional se unieron para formar una fuerza completamente unificada. En los primeros 10^{-35} s que siguieron al Big Bang (la época caliente, $T \sim 10^{29}$ K), la gravedad se escapó de esta unificación en tanto que las fuerzas (interacciones) fuerte y

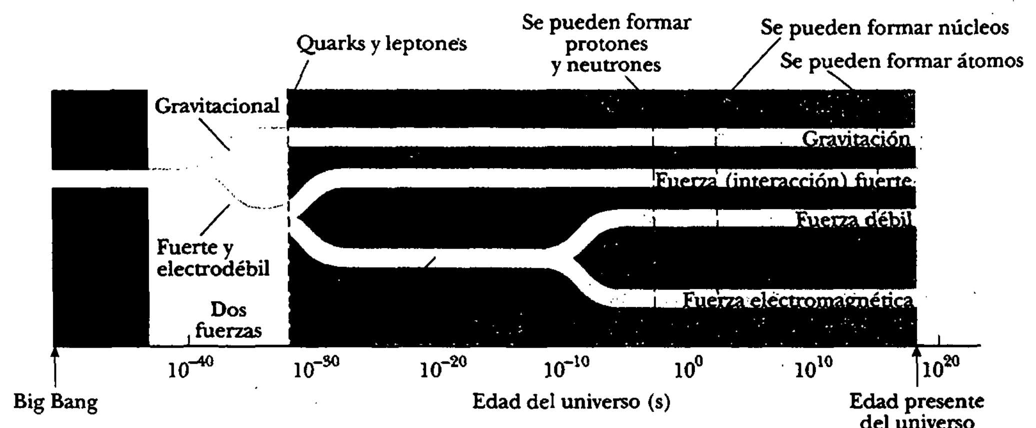


Figura 46.16 Breve historia del universo, desde el Big Bang al presente. Las cuatro fuerzas se vuelven distinguibles durante los primeros nanosegundos. Después de esto todos los quarks se combinaron para formar partículas que interactúan vía la fuerza nuclear. Sin embargo, los leptones permanecieron separados y hasta la fecha existen como partículas observables individuales.

electrodébil permanecieron como una, descrita por una gran teoría de unificación. Éste fue un periodo en que las energías de las partículas eran tan grandes (> 10^{16} GeV) que existieron las partículas de gran masa, así como los quarks, leptones y sus antipartículas. Luego, después de 10^{-35} s, el universo se expandió con rapidez y se enfrió (la época tibia, $T \sim 10^{29}$ a 10^{15} K), las fuerzas (interacciones) fuerte y electrodébil se separaron y el esquema de la gran unificación se rompió. Conforme el universo se enfriaba, la fuerza electrodébil se dividió en la fuerza débil y la fuerza electromagnética alrededor de 10^{-10} s después del Big Bang.

Luego de unos cuantos minutos los protones se condensaron a partir de la sopa caliente. Durante media hora el universo experimentó detonaciones termonucleares, explotando como una bomba de hidrógeno y produciendo la mayor parte de los núcleos de helio que existen en la actualidad. El universo continuó expandiéndose y su temperatura cayó. Hasta alrededor de 700 000 años después del Big Bang, el universo fue dominado por la radiación. La radiación energética evitó que la materia formara átomos de hidrógeno aislados, ya que las colisiones ionizarían de manera instantánea cualquier átomo que se formase. Los fotones experimentaron continuas dispersiones Compton a partir de un vasto número de electrones libres, lo que dio como resultado un universo que es opaco a la radiación. Cuando el universo tenía alrededor de 700 000 años de edad, se expandió y enfrió hasta cerca de 3 000 K, y los protones podían ligar electrones para formar átomos de hidrógeno neutros. Debido a las energías cuantizadas de los átomos, las longitudes de onda de radiación más lejana no fueron absorbidas por átomos que fueron absorbidos, y el universo de pronto se volvió transparente para los fotones. La radiación dejó de dominar al universo y grupos de materia neutra crecieron de manera estable —primero átomos, luego moléculas, nubes de gas, estrellas y finalmente galaxias—.

Observación de la radiación proveniente de la bola de fuego primordial

En 1965 Arno A. Penzias (n. 1933) y Robert W. Wilson (n. 1936) de Bell Laboratories probaban un sensible receptor de microondas e hicieron un descubrimiento sorprendente. Una molesta señal que producía un débil silbido (*hiss*) de fondo interfería con sus experimentos de comunicaciones por medio de satélite. A pesar de sus persistentes esfuerzos, la señal seguía. A la larga, se volvió evidente que estaban percibiendo radiación de fondo de microondas (a una longitud de onda de 7.35 cm) que representaba el "resplandor" dejado por el Big Bang.

El cuerno de microondas que sirvió como antena receptora se muestra en la figura 46.17. La intensidad de la señal detectada permaneció invariable cuando la antena fue orientada en diferentes direcciones. El hecho de que la radiación tenía intensidad igual en todas las direcciones sugirió que todo el universo era la fuente de esta radiación. El desalojo de una parvada de palomas del cuerno de 20 pies y el enfriamiento del detector de microondas resultaron infructuosos para eliminar la señal. En una conversación casual, Penzias y Wilson descubrieron que un grupo en Princeton había predicho la radiación residual del Big Bang y planeaban un experimento que buscaba confirmar la teoría. La excitación en la comunidad científica fue considerable cuando Penzias y Wilson anunciaron que ellos ya habían observado un exceso de radiación de fondo de microondas compatible con una fuente de un cuerpo negro a 3 K.

Ya que las mediciones de Penzias y Wilson se tomaron a una sola longitud de onda, no confirmaron por completo la radiación como la de un cuerpo negro a 3 K. Experimentos subsecuentes de otros grupos añadieron datos de intensidad a diferentes longitudes de onda, como se muestra en la figura 46.18. Los resultados confirmaron que la radiación era la de un cuerpo negro a 2.7 K. Esta figura es, quizá, la evidencia más clara de la teoría del Big Bang. El premio Nobel de física de 1978 fue otorgado a Penzias y Wilson por este descubrimiento tan importante.

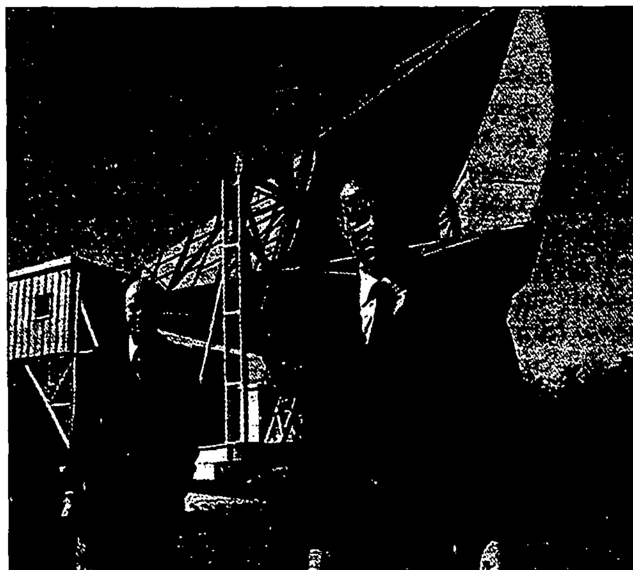


Figura 46.17 Robert W. Wilson (*izquierda*) y Arno A. Penzias con la antena de cuerno-reflector de los Bell Telephone Laboratories. *(AT&T Bell Laboratories)*

Sin embargo, el descubrimiento de la radiación cósmica de fondo trajo consigo un problema —la radiación era demasiado uniforme—. Los científicos creyeron que debían ocurrir ligeras fluctuaciones en este fondo para que se formaran objetos tales como las galaxias. En 1989 la NASA lanzó un satélite llamado COBE (KOH-bee), por Cosmic Background Explorer [Explorador del Fondo Cósmico] para estudiar la radiación de manera más detallada. En 1992 George Smoot (n. 1945), del Law-

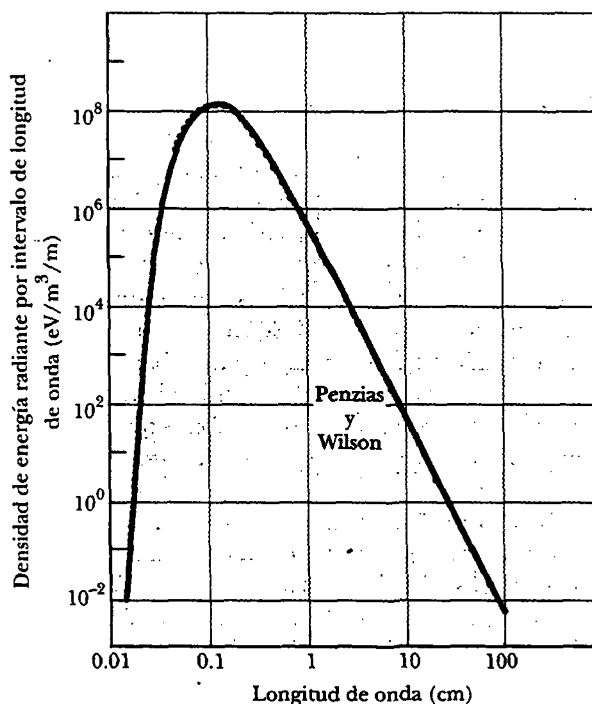


Figura 46.18 Cuerpo negro teórico (curva roja) y espectros de radiación medidos (puntos negros) del Big Bang. La mayor parte de los datos fueron colectados desde el satélite Explorador del Fondo Cósmico (COBE). Se indican los datos de Wilson y Penzias.

rence Berkeley Laboratory, encontró, con base en los datos recolectados, que el fondo no era perfectamente uniforme sino que contenía irregularidades que correspondían a variaciones de temperatura de 0.000 3 K. Son estas pequeñas variaciones las que proporcionan sitios de nucleación para la formación de las galaxias y otros objetos que ahora se ven en el cielo.

Otras evidencias de un universo en expansión

La teoría del Big Bang en la cosmología predice que el universo está en expansión. La mayor parte de los descubrimientos clave que sostienen la teoría de un universo en expansión fueron realizados en el siglo XX. Vesto Melvin Slipher (1875-1969), un astrónomo estadounidense, informó en 1912 que la mayor parte de las nebulosas se están alejando de la Tierra a magnitudes de velocidad mayores a varios millones de millas por hora. Slipher fue uno de los primeros científicos en usar los corrimientos Doppler (véase la sección 17.5) en líneas espectrales para medir velocidades.

A finales de la década de 1920, Edwin P. Hubble hizo la audaz afirmación de que todo el universo estaba expandiéndose. De 1928 a 1936, él y Milton Humason (1891-1972) trabajaron asiduamente en el Monte Wilson en California para demostrar esta afirmación, hasta llegar a los límites del telescopio de 100 pulgadas. Los resultados de este trabajo y de su continuación con el uso de un telescopio de 200 pulgadas en la década de 1940 demostraron que las magnitudes de velocidad a las cuales se están alejando las galaxias de la Tierra aumentan en proporción directa a su distancia R desde la Tierra (Fig. 46.19). Dicha relación lineal, conocida como **ley de Hubble**, puede escribirse

$$v = HR \tag{46.7}$$

donde H, llamado **parámetro de Hubble**, tiene el valor aproximado

$$H \approx 17 \times 10^{-3} \text{ m/s} \cdot \text{año luz}$$

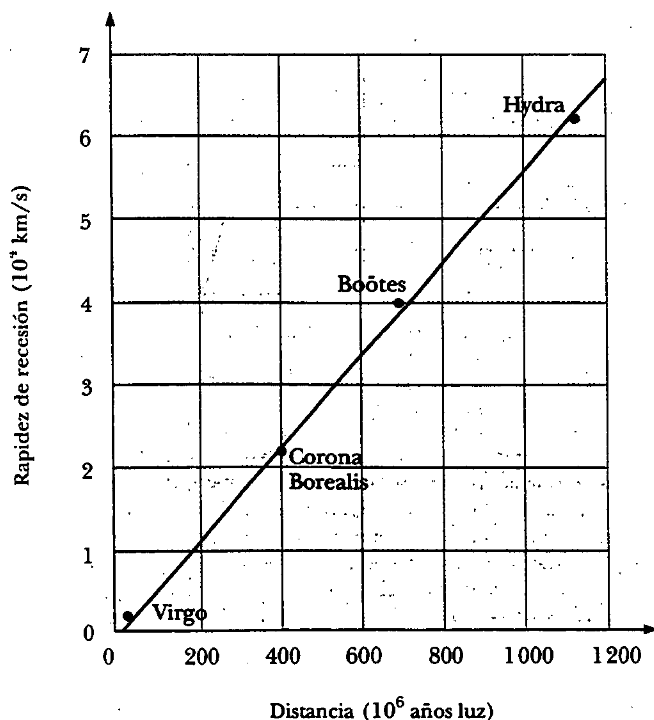


Figura 46.19 Ley de Hubble: gráfica de rapidez de recesión *versus* distancia para cuatro galaxias.

EJEMPLO **Recesión de un quasar**

Un quasar es un objeto similar a una estrella que está muy distante de la Tierra. Su rapidez puede obtenerse a partir de mediciones de corrimiento Doppler de la luz que emite. Cierto quasar se aleja de la Tierra a una rapidez de $0.55c$. ¿A qué distancia se encuentra?

Solución Puede encontrar la distancia a partir de la ley de Hubble:

$$R = \frac{v}{H} = \frac{(0.55)(3.00 \times 10^8\,\text{m/s})}{17 \times 10^{-3}\,\text{m/s} \cdot \text{años luz}} = 9.7 \times 10^9 \text{ años luz}$$

Ejercicio Suponiendo que el quasar se ha movido a esta rapidez desde el Big Bang, estime la edad del universo.

Respuesta $t = R/v = 1/H \approx$ 18 000 millones de años, lo cual concuerda bastante bien con otros cálculos.

¿El universo se expandirá por siempre?

En las décadas de 1950 y 1960, Allan R. Sandage usó el telescopio de 200 pulgadas en el Monte Palomar para medir las magnitudes de velocidad de galaxias a distancias de hasta 6 000 millones de años luz de alejamiento de la Tierra. Tales mediciones mostraron que estas muy distantes galaxias se estaban moviendo alrededor de 10 000 km/s más rápido que lo predicho por la ley de Hubble. De acuerdo con este resultado, el universo debe haberse expandido más rápidamente [illegible] millones de años y, en consecuencia, se concluye que la rapidez de expan[illegible]á deteniendo[5] (Fig. 46.20). Hoy día, los astrónomos y los físicos están tratando de determinar la rapidez de detenimiento. Si la densidad de masa promedio del universo

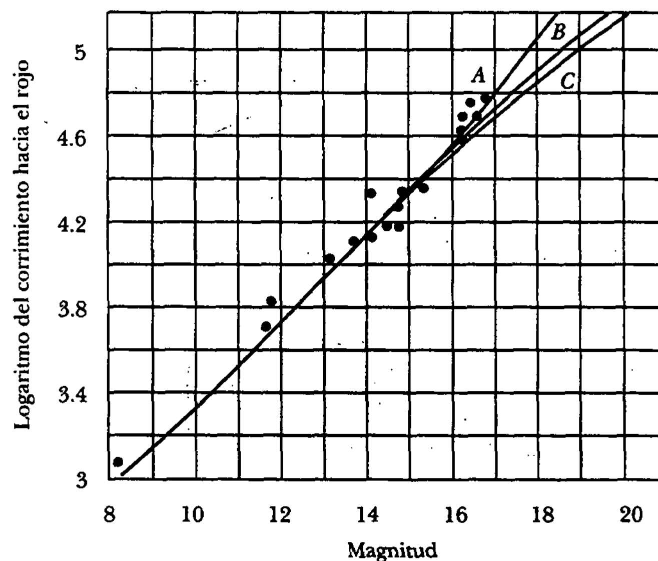


Figura 46.20 Corrimiento hacia el rojo, o rapidez de recesión, *versus* magnitud (la cual está relacionada con la brillantez) de 18 cúmulos de galaxias tenues. Se presenta una dispersión significativa de los datos, por lo que la extrapolación de la curva en el ángulo superior derecho es incertidumbre. La curva *A* es la tendencia sugerida por los seis cúmulos más tenues. La curva *C* corresponde a un universo que tiene una rapidez constante de expansión. Si se tomasen más datos y el conjunto completo de los mismos indicara una curva que cae entre *B* y *C*, la expansión se frenaría, mas nunca se detendría. Si los datos cayesen a la izquierda de *B*, la expansión terminaría por detenerse y el universo comenzaría a contraerse.

[5] Los datos a grandes distancias tienen grandes incertidumbres observacionales y pueden ser sistemáticamente erróneos a partir de efectos como el brillo anormal en los cúmulos visibles más distantes.

es menor que cierto valor crítico ($\rho_c \approx 3$ átomos/m^3); las galaxias se frenarán en su precipitación hacia afuera pero seguirán escapando hacia el infinito. Si la densidad promedio excede el valor crítico, la expansión terminará por detenerse y comenzará la contracción, conduciendo posiblemente a un estado superdenso seguido de otra expansión. En un caso así se tiene un universo oscilante.

EJEMPLO 46. La densidad crítica del universo

a) A partir de la conservación de la energía deduzca una expresión para la densidad de masa crítica del universo ρ_c en términos del parámetro de Hubble H y de la constante gravitacional universal G.

Solución La figura 46.21 muestra una gran sección del universo, contenida dentro de una esfera de radio R. La masa total de las galaxias en este volumen es M. Una galaxia de masa $m \ll M$ que tiene una rapidez v a una distancia R desde el centro de la esfera escapará al infinito (en el cual su rapidez tenderá a cero) si la suma de su energía cinética y la energía potencial gravitacional del sistema —la galaxia más el resto del universo— es cero en cualquier momento. El universo puede ser infinito en extensión espacial, pero la ley de Gauss implica que sólo la masa M dentro de la esfera contribuye a la energía potencial gravitacional de la galaxia:

$$E_{\text{total}} = 0 = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R}$$

La masa M contenida dentro de la esfera se sustituye con el producto de la densidad crítica y el volumen de la esfera:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{Gm\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_c}{R}$$

Al resolver para la densidad crítica se obtiene

$$\rho_c = \frac{3v^2}{8\pi G R^2}$$

A partir de la ley de Hubble la proporción de v a R es $v/R = H$, de modo que esta expresión se convierte en

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

b) Estime un valor numérico para la densidad crítica en gramos por centímetro cúbico.

Solución Utilizando $H = 17 \times 10^{-3}$ m/s · año luz, donde 1 año luz = 9.46×10^{15} m, se encuentra para la densidad crítica

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3(17 \times 10^{-3}\,\text{m/s} \cdot \text{año luz})^2}{8\pi(6.67 \times 10^{-11}\,\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)}\left(\frac{1\ \text{año luz}}{9.46 \times 10^{15}\,\text{m}}\right)^2$$

$$= 6 \times 10^{-27}\,\text{kg/m}^3$$

Al convertir esto en las unidades solicitadas se tiene $\rho_c = 6 \times 10^{-30}$ g/cm^3. Como la masa de un átomo de hidrógeno es 1.67×10^{-24} g, este valor de ρ_c corresponde a 3×10^{-6} átomos de hidrógeno por centímetro cúbico, o 3 átomos por metro cúbico.

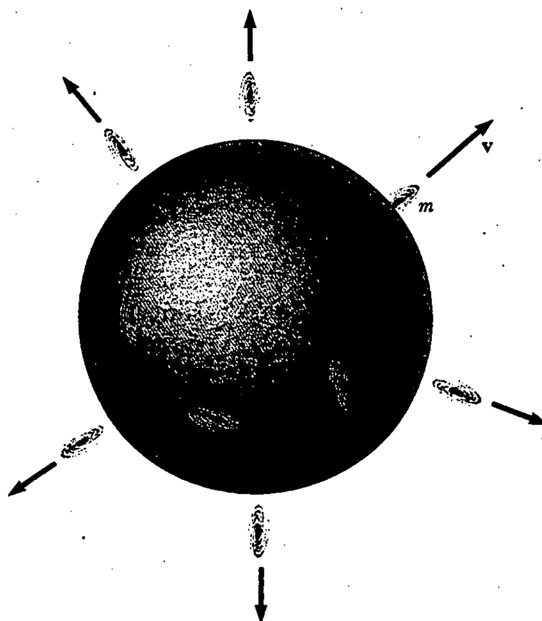


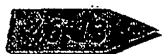
Figura 46.21 La galaxia marcada con masa m está escapando de un gran cúmulo de galaxias contenidas dentro de un volumen esférico de radio R. Sólo la masa dentro de R frena a la masa m.

¿Falta masa en el universo?

La materia luminosa en las galaxias promedia una densidad del universo de hasta 5×10^{-33} g/cm^3. La radiación en el universo tiene una masa equivalente de alrededor de 2% de la materia luminosa. La masa total de toda la materia no luminosa (como el gas interestelar o los hoyos negros) puede estimarse a partir de las magnitudes de

velocidad de las galaxias orbitando entre sí en un cúmulo. Cuanto más alta es la rapidez de las galaxias, tanto mayor es la masa en el cúmulo. Las mediciones en el cúmulo de galaxias Coma indican, sorprendentemente, que la cantidad de materia no luminosa es de 20 a 30 veces la cantidad de materia luminosa presente en estrellas y nubes de gas luminosas. Incluso esta gran componente invisible de la *materia oscura*, si se extrapola al universo como un todo, deja a la densidad de masa observada en un factor de 10 menor que ρ_c. El déficit llamado *masa faltante* ha sido el tema de importantes trabajos teóricos y experimentales con partículas exóticas, como los axiones, fotinos y partículas de supercuerda sugeridas como candidatos para la masa faltante. Las propuestas más conocidas han sido las de que la masa faltante está presente en los neutrinos. De hecho, los neutrinos son tan abundantes que la energía en reposo de un diminuto neutrino del orden de sólo 20 eV proveería la masa faltante y "cerraría" el universo. Por consiguiente, los experimentos actuales diseñados para medir la energía en reposo del neutrino tendrán un impacto sobre las predicciones para el futuro del universo.

Aunque se tiene cierto grado de certidumbre acerca del principio del universo, se tiene incertidumbre acerca de cómo terminará la historia. ¿El universo se expandirá por siempre o algún día se colapsará y entonces se expandirá de nuevo, acaso en una serie interminable de oscilaciones? Los resultados y respuestas a tales cuestiones siguen inconclusas y la emocionante controversia continúa.



PROBLEMAS Y PERSPECTIVAS

En tanto los físicos de partículas han estado explorando el reino de lo muy pequeño, los cosmólogos han estado explorando la historia cósmica hacia atrás, al primer microsegundo del Big Bang. La observación de los eventos que ocurren cuando dos partículas chocan en un acelerador es esencial para reconstruir los primeros momentos de la historia cósmica. Por tal razón, quizá la clave para entender el universo temprano es entender primero el mundo de las partículas elementales. Los cosmólogos y físicos encuentran ahora que tienen muchas metas comunes y están sumando esfuerzos para tratar de entender el mundo físico a su nivel más fundamental.

El entendimiento de la física a cortas distancias está lejos de ser completo. La física de partículas se enfrenta a muchas interrogantes. ¿Por qué existe tan poca antimateria en el universo? ¿Es posible unificar las teorías fuerte y electrodébil de un modo lógico y consistente? ¿Por qué los quarks y los leptones forman tres familias similares pero distintas? ¿Los muones son lo mismo que los electrones aparte de su diferencia en masa o tienen otras diferencias sutiles que todavía no se han detectado? ¿Por qué algunas partículas están cargadas y otras son neutras? ¿Por qué los quarks tienen carga fraccionaria? ¿Qué determina las masas de los constituyentes fundamentales de la materia? ¿Pueden existir quarks aislados? Las preguntas siguen y siguen. Debido a los rápidos avances y a los nuevos descubrimientos en el campo de la física de partículas, en el momento en que usted lea este libro quizá algunas de estas cuestiones ya se hayan resuelto al tiempo que otras hayan surgido.

Una importante y evidente pregunta que queda es si los leptones y los quarks tienen una estructura subyacente. Si la tienen, podría imaginarse un número infinito de niveles de estructura más profundos. Sin embargo, si los leptones y los quarks en efecto son los últimos constituyentes de la materia, como los físicos actuales tienden a creer, será posible construir una teoría final de la estructura de la materia, como el propio Einstein soñó. Esta teoría, caprichosamente llamada Teoría del Todo, es una combinación de GTU y una teoría cuántica de la gravedad. De acuerdo con la perspectiva de muchos físicos, el final del camino está a la vista, pero cuánto tardará en alcanzarse todavía es una interrogante para todos.

RESUMEN

Antes de que fuese desarrollada la teoría de los quarks, las cuatro fuerzas fundamentales en la naturaleza fueron identificadas como nuclear, electromagnética, débil y gravitacional. Todas las interacciones en las cuales intervenían estas fuerzas eran mediadas por **partículas de campo**. La interacción electromagnética es mediada por el fotón; la interacción débil es mediada por los bosones $W^{\pm}$ y Z^0; la interacción gravitacional es mediada por gravitones; la interacción nuclear es mediada por gluones.

Una partícula cargada y su **antipartícula** tienen la misma masa pero carga opuesta, y otras propiedades pueden tener valores opuestos, como el número leptónico y el número bariónico. Es posible producir pares partícula-antipartícula en reacciones nucleares si la energía disponible es mayor que $2mc^2$, donde m es la masa de la partícula (o antipartícula).

Las partículas diferentes a las partículas de campo se clasifican como hadrones o leptones. Los **hadrones** interactúan a través de las cuatro fuerzas fundamentales. Tienen tamaño y estructura y no son partículas elementales. Hay dos tipos: **bariones** y **mesones**. Los bariones, los cuales por lo general son las partículas de gran masa, tienen **número bariónico** diferente de cero y espín de $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$. Los mesones tienen número bariónico cero y espín cero o entero.

Los **leptones** no tienen estructura o tamaño y se consideran verdaderamente elementales. Sólo interactúan a través de las fuerzas débil, gravitacional y electromagnética. Hay seis tipos de leptones: el electrón e^-, el muón μ^-, el tau τ^- y sus neutrinos ν_e, ν_μ y ν_τ.

En todas las reacciones y decaimientos, cantidades como la energía, *momentum* lineal, *momentum* angular, carga eléctrica, número bariónico y número leptónico se conservan estrictamente. Ciertas partículas tienen propiedades llamadas **extrañeza** y **encanto**. Dichas propiedades inusuales se conservan sólo en aquellas reacciones nucleares y decaimientos que ocurren por medio de la fuerza (interacción) fuerte.

Los teóricos en física de partículas elementales han postulado que todos los hadrones están compuestos por unidades más pequeñas conocidas como **quarks**. Los quarks tienen carga eléctrica fraccionaria y vienen en seis **sabores:** arriba (u), abajo (d), extraño (s), encantado (c), superior (t) e inferior (b). Cada barión contiene tres quarks, y cada mesón contiene un quark y un antiquark.

De acuerdo con la teoría de la **cromodinámica cuántica**, los quarks tienen una propiedad llamada **color**, y la fuerza entre quarks se conoce como **fuerza (interacción) fuerte** o **fuerza de color**. La fuerza (interacción) fuerte ahora se considera como una fuerza fundamental. La fuerza nuclear, la cual originalmente fue considerada como fundamental, ahora se considera como un efecto secundario de la fuerza (interacción) fuerte, debida al intercambio de gluones entre los hadrones.

Las fuerzas electromagnética y débil ahora se consideran como manifestaciones de una sola fuerza llamada **fuerza electrodébil.** La combinación de cromodinámica cuántica y teoría electrodébil se denomina **Modelo estándar**.

La radiación de microondas de fondo descubierta por Penzias y Wilson sugiere fuertemente que el universo se inició con un Big Bang hace 12 a 15 mil millones de años. La radiación de fondo es equivalente a la de un cuerpo negro a 3 K. Varias mediciones astronómicas sugieren de manera convincente que el universo se está expandiendo. De acuerdo con la **ley de Hubble**, las galaxias distantes se alejan de la Tierra a una rapidez $v = HR$, donde R es la distancia de la Tierra a la galaxia y H es el **parámetro de Hubble,** $H \approx 17 \times 10^{-3}$ m/s · año luz.

PREGUNTAS

1. Nombre las cuatro interacciones fundamentales y las partículas de campo que median cada una de ellas.
2. Describa el modelo de quark de los hadrones, incluyendo las propiedades de los quarks.
3. ¿Cuáles son las diferencias entre hadrones y leptones?
4. Describa las propiedades de bariones y mesones y las diferencias importantes entre ellos.
5. Partículas conocidas como resonantes tienen tiempos de vida muy cortos, del orden de 10^{-23} s. A partir de esta información, ¿podría usted adivinar si son hadrones o leptones? Explique.
6. Todos los kaones decaen hasta estados finales que no contienen protones o neutrones. ¿Cuál es el número bariónico de los kaones?
7. La partícula Ξ^0 decae mediante interacción débil de acuerdo con el modo de decaimiento $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$. ¿Esperaría usted que este decaimiento sea rápido o lento? Explique.
8. Identifique los decaimientos de partículas de la tabla 46.2 que ocurren por medio de la interacción débil. Justifique sus respuestas.
9. Identifique los decaimientos de partículas de la tabla 46.2 que ocurren por medio de interacción electromagnética. Justifique sus respuestas.
10. Dos protones en un núcleo interactúan mediante la interacción nuclear. ¿Están sujetos también a la interacción débil?
11. Estudie las siguientes leyes de conservación: energía, *momentum* lineal, *momentum* angular, carga eléctrica, número bariónico, número leptónico y extrañeza. ¿Todas estas leyes están basadas en propiedades fundamentales de la naturaleza? Explique.
12. Un antibarión interactúa con un mesón. ¿Puede producirse un barión en una interacción de este tipo? Explique.
13. Describa los rasgos esenciales del Modelo estándar de la física de partículas.
14. ¿Cuántos quarks hay en cada uno de los siguientes: a) un barión, b) un antibarión, c) un mesón, d) un antimesón? ¿Cómo explica usted el hecho de que los bariones tengan espines semienteros mientras los mesones tienen espines de 0 o 1? (*Sugerencia*: Los quarks tienen espín $\frac{1}{2}$.)
15. En la teoría de la cromodinámica cuántica los quarks se presentan en tres colores. ¿Cómo justificaría el enunciado de que "todos los bariones y mesones son incoloros"?
16. ¿Cuál barión predijo Murray Gell-Mann en 1961? ¿Cuál es la composición de quarks de esta partícula?
17. ¿Cuál es la composición de quarks de la partícula Ξ^-? (Véase la tabla 46.5.)
18. Los bosones W y Z fueron producidos por primera vez en el CERN en 1983 (causado por un haz de protones y un haz de antiprotones que chocan a alta energía). ¿Por qué fue éste un descubrimiento importante?
19. ¿Cómo determinó Edwin Hubble (en 1928) que el universo se estaba expandiendo?
20. **Pregunta de repaso.** Una niña y su abuela muelen maíz mientras la mujer le cuenta a la niña algunas historias iluminadoras. Un niño aleja a los cuervos para que no se roben el maíz mientras su abuelo se sienta en la sombra y le habla acerca del universo y los lugares que hay en él. Lo que los niños no comprendan este verano lo entenderán mejor el próximo año. Ahora usted debe tomar el papel de los adultos. Establezca las verdades más generales, las fundamentales, las universales que usted conozca. Si usted se encuentra repitiendo las ideas de alguien más, proporcione la mejor versión que pueda acerca de las mismas, y cite su fuente. Si hay algo que usted no comprenda, formule un plan para entenderlo mejor el siguiente año.

PROBLEMAS

1, 2, 3 = sencillo, intermedio, desafiante □ = solución completa disponible en el *Student Solutions Manual and Study Guide*
WEB = solución disponible en **http://www.saunderscollege.com/physics/** = use computadora para resolver el problema = Física interactiva □ = problemas pareados: numéricos/simbólicos

Sección 46.1 Las fuerzas fundamentales en la naturaleza

Sección 46.2 Positrones y otras antipartículas

1. Un fotón produce un par protón-antiprotón de acuerdo con la reacción $\gamma \rightarrow p + \bar{p}$. ¿Cuál es su longitud de onda?
2. Se producen dos fotones cuando un protón y un antiprotón se aniquilan entre sí. ¿Cuál es la frecuencia mínima y la longitud de onda correspondiente de cada fotón?
3. Un fotón con una energía $E_\gamma = 2.09$ GeV crea un par protón-antiprotón en el cual el protón tiene una energía cinética de 95.0 MeV. ¿Cuál es la energía cinética del antiprotón? ($m_pc^2 = 938.3$ MeV.)

Sección 46.3 Mesones y el principio de la física de partículas

4. Ocasionalmente, muones de alta energía colisionan con electrones y producen dos neutrinos de acuerdo con la reacción $\mu^+ + e^- \rightarrow 2\nu$. ¿Qué clase de neutrinos son éstos?
5. Uno de los mediadores de la interacción débil es el bosón Z^0, de 93 GeV/c^2 de masa. Emplee esta información para encontrar el orden de magnitud del alcance de la interacción débil.

6. Un neutrón libre sufre decaimiento beta creando un protón, un electrón y un antineutrino de acuerdo con la reacción $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$. Suponga, no obstante, que un neutrón libre sufre decaimiento beta creando un protón y un electrón de acuerdo con la reacción

$$n \longrightarrow p + e^-$$

y suponga que el neutrón está inicialmente en reposo en el laboratorio. a) Determine la energía liberada en esta reacción. b) Determine las magnitudes de velocidad del protón y el electrón después de la reacción. (La energía y el *momentum* se conservan en la reacción.) c) ¿Alguna de estas partículas se mueve con magnitudes de velocidad relativistas? Explique.

7. Cuando un protón o pión de alta energía que viaja cerca de la rapidez de la luz choca con un núcleo, recorre una distancia promedio de 3×10^{-15} m antes de la interacción. A partir de esta información encuentre el orden de magnitud del tiempo para que ocurra la interacción fuerte.

8. Calcule el intervalo de la fuerza que se puede producir mediante el intercambio virtual de un protón.

WEB 9. Un pión neutro en reposo decae en dos fotones de acuerdo con

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

Encuentre la energía, *momentum* y frecuencia de cada fotón.

Sección 46.4 Clasificación de partículas

10. Identifique la partícula desconocida en el lado izquierdo de la siguiente reacción:

$$? + p \rightarrow n + \mu^+$$

11. Mencione un posible modo de decaimiento (véase la tabla 46.2) para Ω^+, $\bar{K}_S^0$, $\bar{\Lambda}^0$ y $\bar{n}$.

Sección 46.5 Leyes de conservación

12. Cada una de las siguientes reacciones está prohibida. Determine una ley de conservación que se viola en cada reacción.

a) $p + \bar{p} \rightarrow \mu^+ + e^-$

b) $\pi^- + p \rightarrow p + \pi^+$

c) $p + p \rightarrow p + \pi^+$

d) $p + p \rightarrow p + p + n$

e) $\gamma + p \rightarrow n + \pi^0$

13. a) Muestre que el número bariónico y la carga se conservan en las siguientes reacciones de un pión con un protón.

$$\pi^+ + p \longrightarrow K^+ + \Sigma^+ \quad (1)$$

$$\pi^+ + p \longrightarrow \pi^+ + \Sigma^+ \quad (2)$$

b) Se observa que puede ocurrir la primera reacción, pero la segunda no. Explique.

14. La primera de las siguientes dos reacciones puede ocurrir, no así la segunda. Explique.

$K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ (puede ocurrir)

$\Lambda^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ (no puede ocurrir)

WEB 15. Las siguientes reacciones o decaimientos involucran uno o más neutrinos. En cada caso proporcione los neutrinos faltantes (ν_e, ν_μ o ν_τ).

a) $\pi^- \rightarrow \mu^- + ?$ d) $? + n \rightarrow p + e^-$

b) $K^+ \rightarrow \mu^+ + ?$ e) $? + n \rightarrow p + \mu^-$

c) $? + p \rightarrow n + e^+$ f) $\mu^- \rightarrow e^- + ? + ?$

16. Una partícula K_S^0 en reposo decae en un π^+ y un π^-. ¿Cuál será la rapidez de cada uno de los piones? La masa del K_S^0 es 497.7 MeV/c^2, y la masa de cada π es 139.6 MeV/c^2.

WEB 17. Determine cuál de las siguientes reacciones puede ocurrir. Con respecto a las que no puedan ocurrir determine la ley (o leyes) de conservación violada(s):

a) $p \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ d) $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$

b) $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$ e) $n \rightarrow \bar{p} + e^- + \bar{\nu}_e$

c) $p + p \rightarrow p + \pi^+$ f) $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + n$

18. a) Demuestre que la reacción de decaimiento de protón

$$p \rightarrow e^+ + \gamma$$

no puede ocurrir porque viola la conservación del número bariónico. b) Imagine que esta reacción ocurre, y que el protón está inicialmente en reposo. Determine la energía y *momentum* del positrón y el fotón después de la reacción. (*Sugerencia*: Recuerde que la energía y el *momentum* deben conservarse en la reacción.) c) Determine la rapidez del positrón después de la reacción.

19. Determine el tipo de neutrino o antineutrino involucrado en cada uno de los siguientes procesos.

a) $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + ?$

b) $? + p \rightarrow \mu^- + p + \pi^+$

c) $\Lambda^0 \rightarrow p + \mu^- + ?$

d) $\tau^+ \rightarrow \mu^+ + ? + ?$

Sección 46.6 Partículas extrañas y extrañeza

20. El mesón ρ neutro decae por medio de la interacción fuerte en dos piones: $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, vida media de 10^{-23} s. El kaón neutro decae también en dos piones: $K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, vida media de 10^{-10} s. ¿Cómo explica la diferencia en las vidas medias?

21. Determine si la extrañeza se conserva en los siguientes decaimientos y reacciones.

a) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ d) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$

b) $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$ e) $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$

c) $\bar{p} + p \rightarrow \bar{\Lambda}^0 + \Lambda^0$ f) $\Xi^0 \rightarrow p + \pi^-$

22. Para cada uno de los siguientes decaimientos prohibidos determine cuál ley de conservación se viola:

a) $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$ d) $p \rightarrow e^+ + \pi^0$

b) $n \rightarrow p + e^- + \nu_e$ e) $\Xi^0 \rightarrow n + \pi^0$

c) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^0$

23. ¿Cuáles de los siguientes procesos son permitidos por la interacción fuerte, la interacción electromagnética, la interacción débil o ninguna interacción en absoluto?

a) $\pi^- + p \rightarrow 2\eta$

b) $K^- + n \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$
c) $K^- \rightarrow \pi^- + \pi^0$
d) $\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \pi^0$
e) $\eta \rightarrow 2\gamma$

24. Identifique las cantidades conservadas en los siguientes procesos.
a) $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \mu^- + \nu_\mu$
b) $K_S{}^0 \rightarrow 2\pi^0$
c) $K^- + p \rightarrow \Sigma^0 + n$
d) $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$
e) $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$
f) $\overline{p} + n \rightarrow \overline{\Lambda}^0 + \Sigma^-$

25. Encuentre la partícula faltante. Suponga que a) ocurre mediante la interacción fuerte y que b) y c) involucran la interacción débil.
a) $K^+ + p \rightarrow ? + p$
b) $\Omega^- \rightarrow ? + \pi^-$
c) $K^+ \rightarrow ? + \mu^+ + \nu_\mu$

Sección 46.7 Creación de partículas y medición de sus propiedades
Sección 46.8 Descubrimiento de patrones en las partículas
Sección 46.9 Quarks: Al fin

26. La composición en quark del protón es uud, y la del neutrón es udd. Demuestre que, en cada caso, la carga, número bariónico y extrañeza de la partícula es igual, respectivamente, a las sumas de dichos números para los quarks constituyentes.

a) Encuentre el número de electrones y el número de cada especie de quark en 1 L de agua. b) Haga una estimación del orden de magnitud del número de cada clase de partícula de materia fundamental en su cuerpo. Establezca sus suposiciones y las cantidades que tomó como datos.

28. Las composiciones de quarks de las partículas K^0 y Λ^0 son $\overline{s}$d y uds, respectivamente. Muestre que la carga, número bariónico y extrañeza de estas partículas es igual, respectivamente, a la suma de estos números para los quarks constituyentes.

Suponiendo que las energías de enlace se pueden ignorar, estime las masas de los quarks u y d a partir de las masas del protón y el neutrón.

30. El texto estableció que la reacción $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$ ocurre con gran probabilidad, mientras que la reacción $\pi^- + p \rightarrow K^0 + n$ nunca ocurre. Estudie estas reacciones en el nivel de quark. Demuestre que la primera reacción conserva el número total de cada tipo de quark, y la segunda reacción no lo hace.

31. Analice cada reacción en términos de los quarks constituyentes.
a) $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$
b) $\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$
c) $K^- + p \rightarrow K^+ + K^0 + \Omega^-$
d) $p + p \rightarrow K^0 + p + \pi^+ + ?$
En la última reacción identifique la partícula misteriosa.

32. Una partícula Σ^0 al viajar a través de la materia incide sobre un protón; entonces emergen una Σ^+ y un rayo gamma, así como una tercera partícula. Emplee el modelo de quarks de cada una para determinar la identidad de la tercera partícula.

33. Identifique las partículas que corresponden a los estados de quarks a) suu, b) $\overline{u}$d, c) $\overline{s}$d y d) ssd.

34. ¿Cuál es la carga eléctrica de los bariones con las composiciones de quarks a) $\overline{u}\,\overline{u}\,\overline{d}$ y b) $\overline{u}\,\overline{d}\,\overline{d}$? ¿Cómo se llaman estos bariones?

Sección 46.10 Quarks multicoloreados
Sección 46.11 El modelo estándar
Sección 46.12 La conexión cósmica

35. **Problema de repaso** Revise la sección 39.4. Pruebe que el corrimiento Doppler en la longitud de onda de las ondas electromagnéticas está dado por

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

donde λ' es la longitud de onda medida por un observador que se mueve a rapidez v alejándose de una fuente que radia ondas de longitud de onda λ.

36. Empleando la ley de Hubble (Ec. 46.7) encuentre la longitud de onda de la línea de sodio de 590 nm emitida por galaxias a a) 2.00×10^6 años luz de la Tierra, b) 2.00×10^8 años luz, y c) 2.00×10^9 años luz. Usted puede usar el resultado del problema 35.

WEB **37.** Un quasar distante se aleja de la Tierra a una rapidez tal que la línea azul de 434 nm del hidrógeno se observa a 650 nm, en la parte roja del espectro. a) ¿Qué tan rápido se aleja el quasar? Usted puede usar el resultado del problema 35. b) Empleando la ley de Hubble determine la distancia desde la Tierra a este quasar.

38. Las diversas líneas espectrales observadas en la luz desde un quasar distante tienen longitudes de onda λ_n' más grandes que las longitudes de onda λ_n medidas en la luz desde una fuente estacionaria. El cambio fraccionario en la longitud de onda hacia el rojo es el mismo para todas las líneas espectrales. Esto es, el parámetro de corrimiento rojo Z definido por

$$Z = (\lambda_n' - \lambda_n)/\lambda_n$$

es común a todas las líneas espectrales para un objeto. En términos de Z determine a) la rapidez de retroceso del quasar y b) la distancia desde la Tierra a este quasar. Use el resultado del problema 35 y la ley de Hubble.

39. Casi siempre es culpa de su compañero de cuarto. Astrónomos curiosos han descubierto suficiente basura y desorden en su dormitorio como para constituir la masa faltante requerida para cerrar al universo. Luego de observar el piso, sus closets, camas y archivos de computadora calculan que la densidad promedio del universo observable es de $1.20\ \rho_C$. ¿Cuántas veces más grande se volverá el universo antes de comenzar a colapsarse? Es decir, ¿por qué factor aumentará en el futuro la distancia entre las galaxias remotas?

40. El universo temprano estaba denso con fotones de rayos gamma de energía $\sim k_B T$ y a una temperatura tan elevada que los protones y antiprotones fueron creados mediante el proceso $\gamma \rightarrow p + \overline{p}$ tan rápidamente como se aniquilaban entre ellos. Conforme el universo se enfriaba en expansión adiabática, su temperatura cayó bajo cierto valor, y la producción de pares de protones se volvió rara. Al mismo tiempo existían un poco más protones que antiprotones, y, en esencia, todos los protones en el universo actual datan de aquel tiempo. a) Estime el orden de magnitud de la temperatura del universo cuando los protones se condensaron. b) Estime el orden de magnitud de la temperatura del universo cuando los electrones se condensaron.

41. **Problema de repaso.** La radiación cósmica de fondo es radiación de cuerpo negro a una temperatura de 2.73 K. a) Determine la longitud de onda a la cual esta radiación tiene su intensidad máxima. b) ¿En qué parte del espectro electromagnético está el pico de la distribución?

Sección 46.13 Problemas y perspectivas

42. La relatividad general clásica visualiza la estructura del espacio-tiempo como determinística y bien definida bajo distancias arbitrariamente pequeñas. Por otra parte, la relatividad general cuántica prohíbe distancias menores a la longitud de Planck dada por $L = (\hbar G/c^3)^{1/2}$. a) Calcule el valor de la longitud de Planck. La limitación cuántica sugiere que, luego del Big Bang, cuando todas las secciones del universo que en la actualidad se observan estaban reducidas a una singularidad parecida a un punto, nada pudo observarse hasta que la singularidad creció más allá de la longitud de Planck. Ya que el tamaño de la singularidad creció a la rapidez de la luz, se puede inferir que no fue posible hacer observaciones durante el tiempo que le tomó a la luz recorrer la longitud de Planck. b) Calcule este tiempo, conocido como el tiempo de Planck T, y compárelo con la época ultracaliente mencionada en el texto. c) ¿Esto sugiere que nunca se podrá conocer lo que ocurrió entre el tiempo $t = 0$ y el tiempo $t = T$?

PROBLEMAS ADICIONALES

43. La fuerza nuclear se puede atribuir al intercambio de una partícula elemental entre protones y neutrones si están suficientemente cercanos. Tome el intervalo de la fuerza nuclear como aproximadamente 1.4×10^{-15} m. a) Utilice el principio de incertidumbre $\Delta E\, \Delta t \geq \hbar/2$ para estimar la masa de la partícula elemental si ésta se mueve casi a la rapidez de la luz. b) Empleando la tabla 46.2 identifique la partícula.

44. Mencione al menos una ley de conservación que evite cada una de las siguientes reacciones.

a) $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^0$

b) $\mu^- \rightarrow \pi^- + \nu_e$

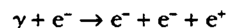
c) $p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$

WEB 45. El flujo de energía transportado por los neutrinos desde el Sol se estima en el orden de 0.4 W/m² en la superficie de la Tierra. Estime la pérdida de masa fraccional del Sol durante 10^9 años debido a la radiación de neutrinos. (La masa del Sol es de 2×10^{30} kg. La distancia Tierra-Sol es 1.5×10^{11} m.)

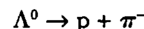
Dos protones se aproximan uno al otro con 70.4 MeV de energía cinética y entran en una reacción en la cual emergen en reposo un protón y un pión positivo. ¿Cuál tercera partícula, evidentemente sin carga y por ello difícil de detectar, debe haberse creado?

Problema de repaso. Se estima que la Supernova 1987A, ubicada a aproximadamente 170 000 años luz de la Tierra, ha emitido un pulso de $\sim 10^{46}$ J de neutrinos. Suponga que la energía de neutrino promedio fue de 6 MeV y que su cuerpo presenta un área de sección transversal de 5 000 cm². A un orden de magnitud, ¿cuántos de estos neutrinos pasaron a través de usted?

Un fotón de rayo gamma golpea un electrón estacionario. Determine la mínima energía de rayo gamma para hacer viable la siguiente reacción:


$$\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^+$$

Determine las energías cinéticas del protón y el pión que resultan del decaimiento de una Λ^0 en reposo:


$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$$

Una partícula inestable, inicialmente en reposo, decae en un protón (energía en reposo de 938.3 MeV) y un pión negativo (energía en reposo de 139.5 MeV). Un campo magnético uniforme de 0.250 T existe perpendicular a las velocidades de las partículas creadas. El radio de curvatura de cada traza es de 1.33 m. ¿Cuál es la masa de la partícula inestable original?

Una partícula Σ^0 en reposo decae de acuerdo con


$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$$

Encuentre la energía del rayo gamma.

Dos protones se acercan uno al otro con velocidades iguales y opuestas. ¿Cuál es la mínima energía cinética de cada uno de los protones si van a producir un mesón π^+ en reposo en la siguiente reacción?

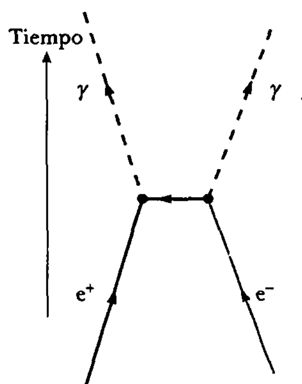

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+$$

Si un mesón $K_S{}^0$ en reposo decae en 0.900×10^{-10} s, ¿qué distancia recorrerá un mesón $K_S{}^0$ si se mueve a $0.960c$ por una cámara de burbujas?

Un mesón π en reposo decae de acuerdo con $\pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$. ¿Cuál es la energía que se lleva el neutrino? (Suponga un neutrino sin masa que se mueve a la rapidez de la luz.) $m_\pi c^2 = 139.5$ MeV, $m_\mu c^2 = 105.7$ MeV.

55. **Problema de repaso.** Use la función de distribución de Boltzmann $e^{-E/k_B T}$ para calcular la temperatura a la cual 1.00% de una población de fotones tendrá energía mayor a 1.00 eV. La energía requerida para excitar un átomo es del orden de 1.00 eV. Por tanto, conforme la temperatura del universo cae bajo el valor que usted calcule, átomos neutros podrían formarse a partir de plasma, y el universo se volvería transparente. La radiación cósmica de fondo representa una amplia vista del corrimiento hacia el rojo de la opaca bola de fuego del Big Bang como era en dicho tiempo y temperatura. La bola de fuego nos rodea; somos brasas.

56. ¿Qué procesos se describen por medio de los diagramas de Feynman en la figura P46.56? ¿Cuál es la partícula intercambiada en cada proceso?



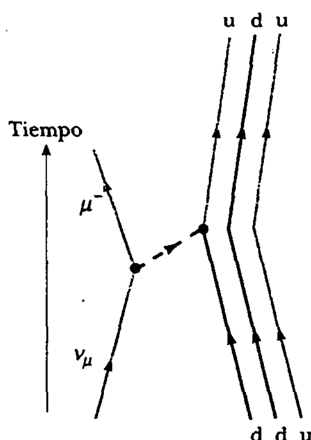


Figura P46.56

57. Identifique los mediadores de las dos interacciones descritas en los diagramas de Feynman presentados en la figura P46.57.

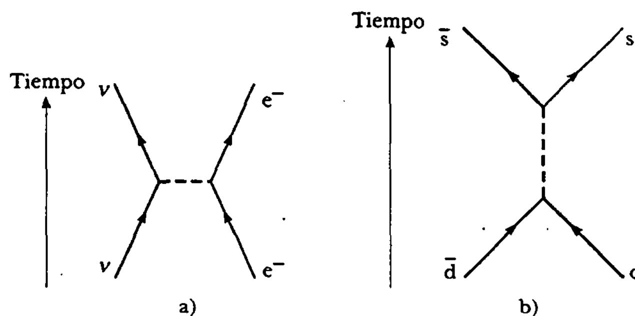


Figura P46.57

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS SORPRESA

46.1 a) Dentro del plano. La regla de la mano derecha para la partícula positiva dice que ésta es la dirección que conduce a una fuerza dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria. b) La partícula debe haber sido frenada (mediante colisiones) durante su encuentro con el plomo, provocando con ello que se mueva en una trayectoria circular más estrecha (véase la Ec. 29.13, $r = mv/qB$).

46.2 La ecuación 46.3 indica que las masas de ambas partículas de campo deben ser cero; de otro modo, d sería menos que infinita.

46.3 No, porque se violan varias leyes de conservación. La carga eléctrica no se conserva porque la carga negativa en el electrón desaparece. El número leptónico del electrón no se conserva porque antes del decaimiento existe un electrón con $L_e = 1$, y después del decaimiento existen dos neutrinos, cada uno con $L_e = 1$. El *momentum* angular no se conserva porque antes del decaimiento existe una partícula con espín $\frac{1}{2}$, mientras que después del decaimiento existen dos partículas con espín $\frac{1}{2}$.

46.4 Se puede argüir esto a partir del punto de vista de la creación de pares partícula-antipartícula y de las ener-

gías disponibles. Si la energía se convierte en energía en reposo de un par leptón-antileptón, no ocurre cambio neto en el número de leptones porque $L_e = 1$ para el leptón y $L_e = -1$ para el antileptón. La energía también se puede transformar en energía en reposo de un par barión-antibarión. El barión tiene $B = +1$ y el antibarión tiene $B = -1$, de modo que no ocurre cambio neto en el número bariónico.

Ahora suponga que la energía se transforma en energía en reposo de un par quark-antiquark. Por definición, tal par es un mesón. En consecuencia, un mesón ha sido creado a partir de energía: no existía mesón anterior; ahora existe uno. Por ende, el número de mesón no se conserva. Con más energía se pueden crear más mesones, sin restricción de ley de conservación alguna, excepto la de conservación de energía.



"Partículas, partículas, partículas."

El significado del éxito

Merecer el respeto de la gente inteligente y obtener el afecto de los niños;
Apreciar la belleza de la naturaleza y de todo lo que nos rodea;
Buscar y nutrirse de lo mejor de los demás;
Dar lo mejor de usted mismo a otros sin el menor pensamiento de recompensa, porque es en el dar que recibimos;
Terminar una tarea, ya sea salvar un alma perdida, sanar a un niño enfermo, escribir un libro o arriesgar su vida por un amigo;
Celebrar y reír con gran regocijo y entusiasmo y cantar con exaltación;
Tener esperanza incluso en tiempo de desesperanza, pues mientras tenga esperanza, tiene vida;
Amar y ser amado;
Ser comprendido y comprender;
Saber que incluso una vida ha aspirado tranquilidad porque usted ha vivido;
Éste es el significado del éxito.

RALPH WALDO EMERSON
Modificado por Ray Serway, diciembre de 1989

TABLA A.1 Factores de conversión

Longitud

	m	cm	km	pulg	pie	milla
1 metro	1	10^{2}	10^{-3}	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1 centímetro	10^{-2}	1	10^{-5}	0.393 7	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1 kilómetro	10^{3}	10^{5}	1	3.937×10^{4}	3.281×10^{3}	0.621 4
1 pulgada	2.540×10^{-2}	2.540	2.540×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 pie	0.304 8	30.48	3.048×10^{-4}	12	1	1.894×10^{-4}
1 milla	1 609	1.609×10^{5}	1.609	6.336×10^{4}	5 280	1

Masa

	kg	g	slug	u
1 kilogramo	1	10^{3}	6.852×10^{-2}	6.024×10^{26}
1 gramo	10^{-3}	1	6.852×10^{-5}	6.024×10^{23}
1 slug	14.59	1.459×10^{4}	1	8.789×10^{27}
1 unidad de masa atómica	1.660×10^{-27}	1.660×10^{-24}	1.137×10^{-28}	1

Nota: 1 tonelada métrica = 1 000 kg.

Tiempo

	s	min	h	día	año
1 segundo	1	1.667×10^{-2}	2.778×10^{-4}	1.157×10^{-5}	3.169×10^{-8}
1 minuto	60	1	1.667×10^{-2}	6.994×10^{-4}	1.901×10^{-6}
1 hora	3 600	60	1	4.167×10^{-2}	1.141×10^{-4}
1 día	$.640 \times 10^{4}$	1 440	24	1	2.738×10^{-5}
1 año	3.156×10^{7}	5.259×10^{5}	8.766×10^{3}	365.2	1

Rapidez

	m/s	cm/s	pie/s	milla/h
1 metro por segundo	1	10^{2}	3.281	2.237
1 centímetro por segundo	10^{-2}	1	3.281×10^{-2}	2.237×10^{-2}
1 pie por segundo	0.304 8	30.48	1	0.681 8
1 milla por hora	0.447 0	44.70	1.467	1

Nota: 1 milla/min = 60 mi/h = 88 pies/s.

continúa

TABLA A.1 Continuación

Fuerza

	N	lb
1 newton	1	0.224 8
1 libra	4.448	1

Trabajo, energía, calor

	J	pie·lb	eV
1 joule	1	0.737 6	6.242×10^{18}
1 pie·lb	1.356	1	8.464×10^{18}
1 eV	1.602×10^{-19}	1.182×10^{-19}	1
1 cal	4.186	3.087	2.613×10^{19}
1 Btu	1.055×10^{3}	7.779×10^{2}	6.585×10^{21}
1 kWh	3.600×10^{6}	2.655×10^{6}	2.247×10^{25}

	cal	Btu	kWh
1 joule	0.238 9	9.481×10^{-4}	2.778×10^{-7}
1 pie·lb	0.323 9	1.285×10^{-3}	3.766×10^{-7}
1 eV	3.827×10^{-20}	1.519×10^{-22}	4.450×10^{-26}
1 cal	1	3.968×10^{-3}	1.163×10^{-6}
1 Btu	2.520×10^{2}	1	2.930×10^{-4}
1 kWh	8.601×10^{5}	3.413×10^{2}	1

Presión

	Pa	atm
1 pascal	1	9.869×10^{-6}
1 atmósfera	1.013×10^{5}	1
1 centímetro de mercurio[a]	1.333×10^{3}	1.316×10^{-2}
1 libra por pulgada^2	6.895×10^{3}	6.805×10^{-2}
1 libra por pie^2	47.88	4.725×10^{-4}

	cm Hg	lb/pulg^2	lb/pie^2
1 newton por metro^2	7.501×10^{-4}	1.450×10^{-4}	2.089×10^{-2}
1 atmósfera	76	14.70	2.116×10^{3}
1 centímetro mercurio[a]	1	0.194 3	27.85
1 libra por pulgada^2	5.171	1	144
1 libra por pie^2	3.591×10^{-2}	6.944×10^{-3}	1

[a] A 0°C y en una localidad donde la aceleración debida a la gravedad tiene su valor "estándar", 9.806 65 m/s^2.

Cantidad	Símbolo común	Unidad[a]	Dimensiones[b]	Unidad en términos de unidades base del SI
Aceleración	**a**	m/s²	L/T²	m/s²
Aceleración angular	α	rad/s²	T⁻²	s⁻²
Ángulo	θ, φ	radián (rad)	1	
Área	*A*	m²	L²	m²
Calor	*Q*	joule (J)	ML²/T²	kg·m²/s²
Calor específico	*c*	J/kg·K	L²/T²·K	m²/s²·K
Calor específico molar	*C*	J/mol·K		kg·m²/s²·mol·K
Campo eléctrico	**E**	V/m	ML/QT²	kg·m/A·s³
Campo magnético	**B**	tesla (T) (= Wb/m²)	M/QT	kg/A·s²
Cantidad de sustancia	*n*	mole		mol
Capacitancia	*C*	farad (F)	Q²T²/ML²	A·s⁴/kg·m²
Carga	*q, Q, e*	coulomb (C)	Q	A·s
Conductividad	σ	1/Ω·m	Q²T/ML³	A²·s³/kg·m³
Constante dieléctrica	κ			
Corriente	*I*	AMPERE	Q/T	A
Densidad	ρ	kg/m³	M/L³	kg/m³
Densidad de carga				
Lineal	λ	C/m	Q/L	A·s/m
Superficial	σ	C/m²	Q/L²	A·s/m²
Volumétrica	ρ	C/m³	Q/L³	A·s/m³
Densidad de corriente	**J**	A/m²	Q/T²	A/m²
Desplazamiento	**r, s**	METRO	L	m
Distancia	*d, h*			
Longitud	*ℓ, L*			
Energía	*E, U, K*	joule (J)	ML²/T²	kg·m²/s²
Entropía	*S*	J/K	ML²/T²·K	kg·m/s²·K
Flujo eléctrico	Φ_E	V·m	ML³/QT²	kg·m³/A·s³
Flujo magnético	Φ_B	weber (Wb)	ML²/QT	kg·m²/A·s²
Frecuencia	*f*	hertz (Hz)	T⁻¹	s⁻¹
Frecuencia angular	ω	rad/s	T⁻¹	s⁻¹
Fuerza	**F**	newton (N)	ML/T²	kg·m/A·s³
Fuerza electromotriz	**ℰ**	volt (V)	ML²/QT²	kg·m²/A·s³
Inductancia	*L*	henry (H)	ML²/Q²	kg·m²/A²·s²
Longitud de onda	λ	m	L	m
Masa	*m. M*	KILOGRAMO	M	kg
Momento de dipolo eléctrico	**p**	C·m	QL	A·s·m
Momento de dipolo magnético	**μ**	N·m/T	QL²/T	A·m²
Momento de inercia	*I*	kg·m²	ML²	kg·m²
Momento de torsión	**τ**	N·m	ML²/T²	kg·m²/s²
Momentum	**p**	kg·m/s	ML/T	kg·m/s
Momentum angular	**L**	kg·m²/s	ML²/T	kg·m²/s
Número atómico	*Z*			
Periodo	*T*	s	T	s
Permeabilidad del espacio	μ_0	N/A²(= H/m)	ML/Q²T	kg·m/A²·s²
Permitividad del espacio	ϵ_0	C²/N·m²(= F/m)	Q²T²/ML³	A²·s⁴/kg·m³

continúa

Cantidad	Símbolo común	Unidad[a]	Dimensiones[b]	Unidad en términos de unidades base del SI
Potencia	$\mathcal{P}$	watt (W) (= J/s)	ML^2/T^3	$kg \cdot m^2/s^3$
Potencial	V	volt (V) (= J/C)	ML^2/QT^2	$kg \cdot m^2/A \cdot s^3$
Presión	P	pascal (Pa) = (N/m^2)	M/LT^2	$kg/m \cdot s^2$
Rapidez	v	m/s	L/T	m/s
Resistencia	R	ohm (Ω) (= V/A)	ML^2/Q^2T	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^3$
Temperatura	T	KELVIN	K	K
Tiempo	t	SEGUNDO	T	s
Trabajo	W	joule (J) (= N·m)	ML^2/T^2	$kg \cdot m^2/s^2$
Velocidad angular	ω	rad/s	T^{-1}	s^{-1}
Volumen	V	m^3	L^3	m^3

[a]Las unidades base del SI están dadas en letras mayúsculas.
[b]Los símbolos M, L, T y Q denotan masa, longitud, tiempo y carga, respectivamente.

TABLA A.3 Tabla de masas atómicas[a]

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Masa atómica química (u)	Número de masa (*indica radiactividad) A	Masa atómica (u)	Abundancia porcentual	Vida media (si es radiactivo) $T_{1/2}$
0	(Neutrón)	n		1*	1.008 665		10.4 min
1	Hidrógeno	H	1.007 9	1	1.007 825	99.985	
	Deuterio	D		2	2.014 102	0.015	
	Tritio	T		3*	3.016 049		12.33 años
2	Helio	He	4.002 60	3	3.016 029	0.000 14	
				4	4.002 602	99.999 86	
				6*	6.018 886		0.81 s
3	Litio	Li	6.941	6	6.015 121	7.5	
				7	7.016 003	92.5	
				8*	8.022 486		0.84 s
4	Berilio	Be	9.012 2	7*	7.016 928		53.3 días
				9	9.012 174	100	
				10*	10.013 534		1.5×10^6 años
5	Boro	B	10.81	10	10.012 936	19.9	
				11	11.009 305	80.1	
				12*	12.014 352		0.020 2 s
6	Carbono	C	12.011	10*	10.016 854		19.3 s
				11*	11.011 433		20.4 min
				12	12.000 000	98.90	
				13	13.003 355	1.10	
				14*	14.003 242		5 730 años
				15*	15.010 599		2.45 s
7	Nitrógeno	N	14.006 7	12*	12.018 613		0.011 0 s
				13*	13.005 738		9.96 min
				14	14.003 074	99.63	
				15	15.000 108	0.37	
				16*	16.006 100		7.13 s
				17*	17.008 450		4.17 s

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Masa atómica química (u)	Número de masa (*indica radiactividad) A	Masa atómica (u)	Abundancia porcentual	Vida media (si es radiactivo) $T_{1/2}$
8	Oxígeno	O	15.999 4	14*	14.008 595		70.6 s
				15*	15.003 065		122 s
				16	15.994 915	99.761	
				17	16.999 132	0.039	
				18	17.999 160	0.20	
				19*	19.003 577		26.9 s
9	Flúor	F	18.998 40	17*	17.002 094		64.5 s
				18*	18.000 937		109.8 min
				19	18.998 404	100	
				20*	19.999 982		11.0 s
				21*	20.999 950		4.2 s
10	Neón	Ne	20.180	18*	18.005 710		1.67 s
				19*	19.001 880		17.2 s
				20	19.992 435	90.48	
				21	20.993 841	0.27	
				22	21.991 383	9.25	
				23*	22.994 465		37.2 s
11	Sodio	Na	22.989 87	21*	20.997 650		22.5 s
				22*	21.994 434		2.61 años
				23	22.989 770	100	
				24*	23.990 961		14.96 h
12	Magnesio	Mg	24.305	23*	22.994 124		11.3 s
				24	23.985 042	78.99	
				25	24.985 838	10.00	
				26	25.982 594	11.01	
				27*	26.984 341		9.46 min
13	Aluminio	Al	26.981 54	26*	25.986 892		7.4×10^5 años
				27	26.981 538	100	
				28*	27.981 910		2.24 min
14	Silicio	Si	28.086	28	27.976 927	92.23	
				29	28.976 495	4.67	
				30	29.973 770	3.10	
				31*	30.975 362		2.62 h
				32*	31.974 148		172 años
15	Fósforo	P	30.973 76	30*	29.978 307		2.50 min
				31	30.973 762	100	
				32*	31.973 908		14.26 días
				33*	32.971 725		25.3 días
16	Azufre	S	32.066	32	31.972 071	95.02	
				33	32.971 459	0.75	
				34	33.967 867	4.21	
				35*	34.969 033		87.5 días
				36	35.967 081	0.02	
17	Cloro	Cl	35.453	35	34.968 853	75.77	
				36*	35.968 307		3.0×10^5 años
				37	36.965 903	24.23	

continúa

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Masa atómica química (u)	[illegible] masa (* indica radiactividad) A	Masa atómica (u)	Abundancia porcentual	[illegible] (si es radiactivo) $T_{1/2}$
18	Argón	Ar	39.948	36	35.967 547	0.337	
				37*	36.966 776		35.04 días
				38	37.962 732	0.063	
				39*	38.964 314		269 años
				40	39.962 384	99.600	
				42*	41.963 049		33 años
19	Potasio	K	39.098 3	39	38.963 708	93.258 1	
				40*	39.964 000	0.011 7	1.28×10^9 años
				41	40.961 827	6.730 2	
20	Calcio	Ca	40.08	40	39.962 591	96.941	
				41*	40.962 279		1.0×10^5 años
				42	41.958 618	0.647	
				43	42.958 767	0.135	
				44	43.955 481	2.086	
				46	45.953 687	0.004	
				48	47.952 534	0.187	
21	Escandio	Sc	44.955 9	41*	40.969 250		0.596 s
				45	44.955 911	100	
22	Titanio	Ti	47.88	44*	43.959 691		49 años
				46	45.952 630	8.0	
				47	46.951 765	7.3	
				48	47.947 947	73.8	
				49	48.947 871	5.5	
				50	49.944 792	5.4	
23	Vanadio	V	50.941 5	48*	47.952 255		15.97 días
				50*	49.947 161	0.25	1.5×10^{17} años
				51	50.943 962	99.75	
24	Cromo	Cr	51.996	48*	47.954 033		21.6 h
				50	49.946 047	4.345	
				52	51.940 511	83.79	
				53	52.940 652	9.50	
				54	53.938 883	2.365	
25	Manganeso	Mn	54.938 05	54*	53.940 361		312.1 días
				55	54.938 048	100	
26	Hierro	Fe	55.847	54	53.939 613	5.9	
				55*	54.938 297		2.7 años
				56	55.934 940	91.72	
				57	56.935 396	2.1	
				58	57.933 278	0.28	
				60*	59.934 078		1.5×10^6 años
27	Cobalto	Co	58.933 20	59	58.933 198	100	
				60*	59.933 820		5.27 años
28	Níquel	Ni	58.693	58	57.935 346	68.077	
				59*	58.934 350		7.5×10^4 años
				60	59.930 789	26.223	
				61	60.931 058	1.140	
				62	61.928 346	3.634	
				63*	62.929 670		100 años
				64	63.927 967	0.926	

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Masa atómica química (u)	Número de masa (*indica radiactividad) A	Masa atómica (u)	Abundancia porcentual	[illegible] radiactivo) $T_{1/2}$
29	Cobre	Cu	63.54	63	62.929 599	69.17	
				65	64.927 791	30.83	
30	Zinc	Zn	65.39	64	63.929 144	48.6	
				66	65.926 035	27.9	
				67	66.927 129	4.1	
				68	67.924 845	18.8	
				70	69.925 323	0.6	
31	Galio	Ga	69.723	69	68.925 580	60.108	
				71	70.924 703	39.892	
32	Germanio	Ge	72.61	70	69.924 250	21.23	
				72	71.922 079	27.66	
				73	72.923 462	7.73	
				74	73.921 177	35.94	
				76	75.921 402	7.44	
33	Arsénico	As	74.921 6	75	74.921 594	100	
34	Selenio	Se	78.96	74	73.922 474	0.89	
				76	75.919 212	9.36	
				77	76.919 913	7.63	
				78	77.917 307	23.78	
				79*	78.918 497		≤6.5 × 10^4 años
				80	79.916 519	49.61	
				82*	81.916 697	8.73	1.4 × 10^{20} años
35	Bromo	Br	79.904	79	78.918 336	50.69	
				81	80.916 287	49.31	
36	Kriptón	Kr	83.80	78	77.920 400	0.35	
				80	79.916 377	2.25	
				81*	80.916 589		2.1 × 10^5 años
				82	81.913 481	11.6	
				83	82.914 136	11.5	
				84	83.911 508	57.0	
				85*	84.912 531		10.76 años
				86	85.910 615	17.3	
37	Rubidio	Rb	85.468	85	84.911 793	72.17	
				87*	86.909 186	27.83	4.75 × 10^{10} años
38	Estroncio	Sr	87.62	84	83.913 428	0.56	
				86	85.909 266	9.86	
				87	86.908 883	7.00	
				88	87.905 618	82.58	
				90*	89.907 737		29.1 años
39	Ytrio	Y	88.905 8	89	88.905 847	100	
40	Zirconio	Zr	91.224	90	89.904 702	51.45	
				91	90.905 643	11.22	
				92	91.905 038	17.15	
				93*	92.906 473		1.5 × 10^6 años
				94	93.906 314	17.38	
				96	95.908 274	2.80	

continúa

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Masa atómica química (u)	masa (*indica radiactividad) A	Masa atómica (u)	Abundancia porcentual	(si es radiactivo) $T_{1/2}$
41	Niobio	Nb	92.906 4	91*	90.906 988		6.8×10^2 años
				92*	91.907 191		3.5×10^7 años
				93	92.906 376	100	
				94*	93.907 280		2×10^4 años
42	Molibdeno	Mo	95.94	92	91.906 807	14.84	
				93*	92.906 811		3.5×10^3 años
				94	93.905 085	9.25	
				95	94.905 841	15.92	
				96	95.904 678	16.68	
				97	96.906 020	9.55	
				98	97.905 407	24.13	
				100	99.907 476	9.63	
43	Tecnecio	Tc		97*	96.906 363		2.6×10^6 años
				98*	97.907 215		4.2×10^6 años
				99*	98.906 254		2.1×10^5 años
44	Rutenio	Ru	101.07	96	95.907 597	5.54	
				98	97.905 287	1.86	
				99	98.905 939	12.7	
				100	99.904 219	12.6	
				101	100.905 558	17.1	
				102	101.904 348	31.6	
				104	103.905 428	18.6	
45	Rodio	Rh	102.905 5	103	102.905 502	100	
46	Paladio	Pd	106.42	102	101.905 616	1.02	
				104	103.904 033	11.14	
				105	104.905 082	22.33	
				106	105.903 481	27.33	
				107*	106.905 126		6.5×10^6 años
				108	107.903 893	26.46	
				110	109.905 158	11.72	
47	Plata	Ag	107.868	107	106.905 091	51.84	
				109	108.904 754	48.16	
48	Cadmio	Cd	112.41	106	105.906 457	1.25	
				108	107.904 183	0.89	
				109*	108.904 984		462 días
				110	109.903 004	12.49	
				111	110.904 182	12.80	
				112	111.902 760	24.13	
				113*	112.904 401	12.22	9.3×10^{15} años
				114	113.903 359	28.73	
				116	115.904 755	7.49	
49	Indio	In	114.82	113	112.904 060	4.3	
				115*	114.903 876	95.7	4.4×10^{14} años
50	Estaño	Sn	118.71	112	111.904 822	0.97	
				114	113.902 780	0.65	
				115	114.903 345	0.36	
				116	115.901 743	14.53	
				117	116.902 953	7.68	

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Masa atómica química (u)	Número de masa (* indica radiactividad) A	Masa atómica (u)	Abundancia porcentual	Vida media (si es radiactivo) $T_{1/2}$
(50)	(Estaño)			118	117.901 605	24.22	
				119	118.903 308	8.58	
				120	119.902 197	32.59	
				121*	120.904 237		55 años
				122	121.903 439	4.63	
				124	123.905 274	5.79	
51	Antimonio	Sb	121.76	121	120.903 820	57.36	
				123	122.904 215	42.64	
				125*	124.905 251		2.7 años
52	Telurio	Te	127.60	120	119.904 040	0.095	
				122	121.903 052	2.59	
				123*	122.904 271	0.905	1.3×10^{13} años
				124	123.902 817	4.79	
				125	124.904 429	7.12	
				126	125.903 309	18.93	
				128*	127.904 463	31.70	$> 8 \times 10^{24}$ años
				130*	129.906 228	33.87	$\leq 1.25 \times 10^{21}$ años
53	Yodo	I	126.904 5	127	126.904 474	100	
				129*	128.904 984		1.6×10^{7} años
54	Xenón	Xe	131.29	124	123.905 894	0.10	
				126	125.904 268	0.09	
				128	127.903 531	1.91	
				129	128.904 779	26.4	
				130	129.903 509	4.1	
				131	130.905 069	21.2	
				132	131.904 141	26.9	
				134	133.905 394	10.4	
				136*	135.907 215	8.9	$\geq 2.36 \times 10^{21}$ años
55	Cesio	Cs	132.905 4	133	132.905 436	100	
				134*	133.906 703		2.1 años
				135*	134.905 891		2×10^{6} años
				137*	136.907 078		30 años
56	Bario	Ba	137.33	130	129.906 289	0.106	
				132	131.905 048	0.101	
				133*	132.905 990		10.5 años
				134	133.904 492	2.42	
				135	134.905 671	6.593	
				136	135.904 559	7.85	
				137	136.905 816	11.23	
				138	137.905 236	71.70	
57	Lantano	La	138.905	137*	136.906 462		6×10^{4} años
				138*	137.907 105	0.090 2	1.05×10^{11} años
				139	138.906 346	99.909 8	
58	Cerio	Ce	140.12	136	135.907 139	0.19	
				138	137.905 986	0.25	
				140	139.905 434	88.43	
				142*	141.909 241	11.13	$> 5 \times 10^{16}$ años
59	Praseodimio	Pr	140.907 6	141	140.907 647	100	

continúa

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Masa atómica química (u)	Número másico (* indica radiactividad) A	Masa atómica (u)	Abundancia porcentual	Vida media (si es radiactivo) $T_{1/2}$
60	Neodimio	Nd	144.24	142	141.907 718	27.13	
				143	142.909 809	12.18	
				144*	143.910 082	23.80	2.3×10^{15} años
				145	144.912 568	8.30	
				146	145.913 113	17.19	
				148	147.916 888	5.76	
				150*	149.920 887	5.64	$> 1 \times 10^{18}$ años
61	Praseodimio	Pm		143*	142.910 928		265 días
				145*	144.912 745		17.7 años
				146*	145.914 698		5.5 años
				147*	146.915 134		2.623 años
62	Samario	Sm	150.36	144	143.911 996	3.1	
				146*	145.913 043		1.0×10^{8} años
				147*	146.914 894	15.0	1.06×10^{11} años
				148*	147.914 819	11.3	7×10^{15} años
				149*	148.917 180	13.8	$> 2 \times 10^{15}$ años
				150	149.917 273	7.4	
				151*	150.919 928		90 años
				152	151.919 728	26.7	
				154	153.922 206	22.7	
63	Europio	Eu	151.96	151	150.919 846	47.8	
				152*	151.921 740		13.5 años
				153	152.921 226	52.2	
				154*	153.922 975		8.59 años
				155*	154.922 888		4.7 años
64	Gadolinio	Gd	157.25	148*	147.918 112		75 años
				150*	149.918 657		1.8×10^{6} años
				152*	151.919 787	0.20	1.1×10^{14} años
				154	153.920 862	2.18	
				155	154.922 618	14.80	
				156	155.922 119	20.47	
				157	156.923 957	15.65	
				158	157.924 099	24.84	
				160	159.927 050	21.86	
65	Terbio	Tb	158.925 3	159	158.925 345	100	
66	Disprosio	Dy	162.50	156	155.924 277	0.06	
				158	157.924 403	0.10	
				160	159.925 193	2.34	
				161	160.926 930	18.9	
				162	161.926 796	25.5	
				163	162.928 729	24.9	
				164	163.929 172	28.2	
67	Holmio	Ho	164.930 3	165	164.930 316	100	
				166*	165.932 282		1.2×10^{3} años
68	Erbio	Er	167.26	162	161.928 775	0.14	
				164	163.929 198	1.61	
				166	165.930 292	33.6	

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Masa atómica química (u)	[illegible] masa (* indica radiactividad) A	Masa atómica (u)	Abundancia porcentual	[illegible] radiactivo) $T_{1/2}$
(68)	(Erbio)			167	166.932 047	22.95	
				168	167.932 369	27.8	
				170	169.935 462	14.9	
69	Tulio	Tm	168.934 2	169	168.934 213	100	
				171*	170.936 428		1.92 años
70	Iterbio	Yb	173.04	168	167.933 897	0.13	
				170	169.934 761	3.05	
				171	170.936 324	14.3	
				172	171.936 380	21.9	
				173	172.938 209	16.12	
				174	173.938 861	31.8	
				176	175.942 564	12.7	
71	Lutecio	Lu	174.967	173*	172.938 930		1.37 años
				175	174.940 772	97.41	
				176*	175.942 679	2.59	3.78×10^{10} años
72	Hafnio	Hf	178.49	174*	173.940 042	0.162	2.0×10^{15} años
				176	175.941 404	5.206	
				177	176.943 218	18.606	
				178	177.943 697	27.297	
				179	178.945 813	13.629	
				180	179.946 547	35.100	
73	Tantalio	Ta	180.947 9	180	179.947 542	0.012	
				181	180.947 993	99.988	
74	Tungsteno (Wolframio)	W	183.85	180	179.946 702	0.12	
				182	181.948 202	26.3	
				183	182.950 221	14.28	
				184	183.950 929	30.7	
				186	185.954 358	28.6	
75	Renio	Re	186.207	185	184.952 951	37.40	
				187*	186.955 746	62.60	4.4×10^{10} años
76	Osmio	Os	190.2	184	183.952 486	0.02	
				186*	185.953 834	1.58	2.0×10^{15} años
				187	186.955 744	1.6	
				188	187.955 832	13.3	
				189	188.958 139	16.1	
				190	189.958 439	26.4	
				192	191.961 468	41.0	
				194*	193.965 172		6.0 años
77	Iridio	Ir	192.2	191	190.960 585	37.3	
				193	192.962 916	62.7	
78	Platino	Pt	195.08	190*	189.959 926	0.01	6.5×10^{11} años
				192	191.961 027	0.79	
				194	193.962 655	32.9	
				195	194.964 765	33.8	
				196	195.964 926	25.3	
				198	197.967 867	7.2	
79	Oro	Au	196.966 5	197	196.966 543	100	

continúa

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Masa atómica química (u)	Número de masa (* indica radiactividad) A	Masa atómica (u)	Abundancia porcentual	Vida media (si es radiactivo) $T_{1/2}$
80	Mercurio	Hg	200.59	196	195.965 806	0.15	
				198	197.966 743	9.97	
				199	198.968 253	16.87	
				200	199.968 299	23.10	
				201	200.970 276	13.10	
				202	201.970 617	29.86	
				204	203.973 466	6.87	
81	Talio	Tl	204.383	203	202.972 320	29.524	
				204*	203.973 839		3.78 años
				205	204.974 400	70.476	
		(Ra E″)		206*	205.976 084		4.2 min
		(Ac C″)		207*	206.977 403		4.77 min
		(Th C″)		208*	207.981 992		3.053 min
		(Ra C″)		210*	209.990 057		1.30 min
82	Plomo	Pb	207.2	202*	201.972 134		5×10^4 años
				204*	203.973 020	1.4	$\geq 1.4 \times 10^{17}$ años
				205*	204.974 457		1.5×10^7 años
				206	205.974 440	24.1	
				207	206.975 871	22.1	
				208	207.976 627	52.4	
		(Ra D)		210*	209.984 163		22.3 años
		(Ac B)		211*	210.988 734		36.1 min
		(Th B)		212*	211.991 872		10.64 h
		(Ra B)		214*	213.999 798		26.8 min
83	Bismuto	Bi	208.980 3	207*	206.978 444		32.2 años
				208*	207.979 717		3.7×10^5 años
				209	208.980 374	100	
		(Ra E)		210*	209.984 096		5.01 días
		(Th Q)		211*	210.987 254		2.14 min
				212*	211.991 259		60.6 min
		(Ra C)		214*	213.998 692		19.9 min
				215*	215.001 836		7.4 min
84	Polonio	Po		209*	208.982 405		102 años
		(Ra F)		210*	209.982 848		138.38 días
		(Ac C′)		211*	210.986 627		0.52 s
		(Th C′)		212*	211.988 842		0.30 μs
		(Ra C′)		214*	213.995 177		164 μs
		(Ac A)		215*	214.999 418		0.001 8 s
		(Th A)		216*	216.001 889		0.145 s
		(Ra A)		218*	218.008 965		3.10 min
85	Astato	At		215*	214.998 638		≈100 μs
				218*	218.008 685		1.6 s
				219*	219.011 294		0.9 min
86	Radón	Rn					
		(An)		219*	219.009 477		3.96 s
		(Tn)		220*	220.011 369		55.6 s
		(Rn)		222*	222.017 571		3.823 días
87	Francio	Fr					
		(Ac K)		223*	223.019 733		22 min

TABLA A.3 *Continuación*

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Masa atómica química (u)	Número de masa (*indica radiactividad) A	Masa atómica (u)	Abundancia porcentual	Vida media (si es radiactivo) $T_{1/2}$
88	Radio	Ra					
		(Ac X)		223*	223.018 499		11.43 días
		(Th X)		224*	224.020 187		3.66 días
		(Ra)		226*	226.025 402		1 600 años
		(Ms Th_1)		228*	228.031 064		5.75 años
89	Actinio	Ac		227*	227.027 749		21.77 años
		(Ms Th_2)		228*	228.031 015		6.15 h
90	Torio	Th	232.038 1				
		(Rd Ac)		227*	227.027 701		18.72 días
		(Rd Th)		228*	228.028 716		1.913 años
				229*	229.031 757		7 300 años
		(Io)		230*	230.033 127		75.000 años
		(UY)		231*	231.036 299		25.52 h
		(Th)		232*	232.038 051	100	1.40×10^{10} años
		(UX_1)		234*	234.043 593		24.1 días
91	Protoactinio	Pa		231*	231.035 880		32.760 años
		(Uz)		234*	234.043 300		6.7 h
92	Uranio	U	238.028 9	232*	232.037 131		69 años
				233*	233.039 630		1.59×10^5 años
				234*	234.040 946	0.005 5	2.45×10^5 años
		(Ac U)		235*	235.043 924	0.720	7.04×10^8 años
				236*	236.045 562		2.34×10^7 años
		(UI)		238*	238.050 784	99.274 5	4.47×10^9 años
93	Neptunio	Np		235*	235.044 057		396 días
				236*	236.046 560		1.15×10^5 años
				237*	237.048 168		2.14×10^6 años
94	Plutonio	Pu		236*	236.046 033		2.87 años
				238*	238.049 555		87.7 años
				239*	239.052 157		2.412×10^4 años
				240*	240.053 808		6 560 años
				241*	241.056 846		14.4 años
				242*	242.058 737		3.73×10^6 años
				244*	244.064 200		8.1×10^7 años

[a] Las masas en la sexta columna son masas atómicas, las cuales incluyen la masa de Z electrones. Los datos fueron tomados del Centro Nacional de Datos Nucleares (National Nuclear Data Center), Brookhaven National Laboratory, preparada por Jagdish K. Tuli, en julio de 1990, y están basados en resultados experimentales reportados en *Nuclear Data Sheets* y en *Nuclear Physics*, así como en *Chart of the Nuclides*, 14a. edición. Las masas atómicas están basadas en las reportadas por A. H. Wapstra, G. Audi y R. Hoekstra. Las abundancias de isótopos se basan en lo reportado por N. E. Holden.

APÉNDICE B • *Repaso de matemáticas*

El propósito de estos apéndices de matemáticas es repasar operaciones y métodos en forma breve. Al principio de este curso usted debió estar totalmente familiarizado con las técnicas algebraicas básicas, la geometría analítica y la trigonometría. Los apéndices sobre cálculo diferencial e integral son más detallados y se dirigen a aquellos estudiantes que tienen dificultades al aplicar los conceptos de cálculo en situaciones físicas.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Muchas cantidades con las que trabajan los científicos a menudo tienen valores o muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, la rapidez de la luz es aproximadamente de 300 000 000 m/s, y la tinta que se usó para hacer el punto sobre una *i* en este libro de texto tiene una masa de casi 0.000 000 001 kg. Como es evidente, es muy problemático leer, escribir y recordar números como éstos. Este problema se evita usando un método relacionado con potencias del número 10:

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

y así sucesivamente. El número de ceros corresponde a la potencia a la cual se eleva el 10, llamado **exponente** de 10. Por ejemplo, la rapidez de la luz, 300 000 000 m/s, puede expresarse como 3×10^8 m/s.

En este método algunos números representativos más pequeños que la unidad son

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10 \times 10} = 0.01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = 0.001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.000\,1$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.000\,01$$

En estos casos el número de lugares que el punto decimal está a la izquierda del dígito 1 es igual al valor del exponente (negativo). Los números expresados como alguna potencia de 10 multiplicados por otro número entre 1 y 10 se dice que están en **notación científica**. Por ejemplo, la notación científica para 5 943 000 000 es 5.943×10^9, y la correspondiente a 0.000 083 2 es 8.32×10^{-5}.

Cuando los números expresados en notación científica se multiplican, la siguiente regla general es muy útil:

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m} \quad \textbf{(B.1)}$$

donde n y m pueden ser *cualesquiera* números (no necesariamente enteros). Por ejemplo, $10^2 \times 10^5 = 10^7$. La regla se aplica también si uno de los exponentes es negativo: $10^3 \times 10^{-8} = 10^{-5}$.

Advierta que cuando se dividen números expresados en notación científica,

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^n \times 10^{-m} = 10^{n-m} \quad \textbf{(B.2)}$$

Ejercicios

Con la ayuda de las reglas anteriores verifique las siguientes respuestas:

1. $86\,400 = 8.64 \times 10^4$
2. $9\,816\,762.5 = 9.816\,762\,5 \times 10^6$
3. $0.000\,000\,039\,8 = 3.98 \times 10^{-8}$
4. $(4 \times 10^8)(9 \times 10^9) = 3.6 \times 10^{18}$
5. $(3 \times 10^7)(6 \times 10^{-12}) = 1.8 \times 10^{-4}$
6. $\dfrac{75 \times 10^{-11}}{5 \times 10^{-3}} = 1.5 \times 10^{-7}$
7. $\dfrac{(3 \times 10^6)(8 \times 10^{-2})}{(2 \times 10^{17})(6 \times 10^5)} = 2 \times 10^{-18}$

ÁLGEBRA

Algunas reglas básicas

Cuando se efectúan operaciones algebraicas se aplican las leyes de la aritmética. Símbolos como x, y y z se utilizan por lo común para representar cantidades que no están especificadas, las cuales se denominan **incógnitas**.

Comience por considerar la ecuación

$$8x = 32$$

Si desea resolver para x, puede dividir (o multiplicar) cada lado de la ecuación por el mismo factor sin afectar la igualdad. En este caso, si se dividen ambos lados entre 8, se tiene

$$\frac{8x}{8} = \frac{32}{8}$$

$$x = 4$$

A continuación considere la ecuación

$$x + 2 = 8$$

En expresiones de este tipo puede sumar o restar la misma cantidad de cada lado. Si se sustrae 2 de cada lado, se obtiene

$$x + 2 - 2 = 8 - 2$$
$$x = 6$$

En general, si $x + a = b$, entonces $x = b - a$.

Considere ahora la ecuación

$$\frac{x}{5} = 9$$

Si se multiplica cada lado por 5, nos quedamos sólo con x a la izquierda y 45 a la derecha:

$$\left(\frac{x}{5}\right)(5) = 9 \times 5$$

$$x = 45$$

En todos los casos *cualquier operación que se realice en el lado izquierdo de la igualdad debe efectuarse también en el lado derecho.*

Las siguientes reglas para multiplicar, dividir, sumar y restar fracciones deben recordarse, donde a, b y c son tres números:

	Regla	Ejemplo
Multiplicando	$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$	$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{15}$
Dividiendo	$\frac{(a/b)}{(c/d)} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2/3}{4/5} = \frac{(2)(5)}{(4)(3)} = \frac{10}{12}$
Sumando	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{(2)(5) - (4)(3)}{(3)(5)} = -\frac{2}{15}$

Ejercicios

En los siguientes ejercicios resuelva para x:

	Respuestas
1. $a = \dfrac{1}{1 + x}$	$x = \dfrac{1 - a}{a}$
2. $3x - 5 = 13$	$x = 6$
3. $ax - 5 = bx + 2$	$x = \dfrac{7}{a - b}$
4. $\dfrac{5}{2x + 6} = \dfrac{3}{4x + 8}$	$x = -\dfrac{11}{7}$

Potencias

Cuando se multiplican potencias de una cantidad dada x, se aplican las siguientes reglas:

$$x^n x^m = x^{n+m} \qquad \textbf{(B.3)}$$

Por ejemplo $x^2x^4 = x^{2+4} = x^6$.

Cuando se dividen las potencias de una cantidad dada, la regla es

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \tag{B.4}$$

Por ejemplo, $x^8/x^2 = x^{8-2} = x^6$.

Una potencia que es una fracción, como $\frac{1}{3}$, corresponde a una raíz de la manera siguiente:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \tag{B.5}$$

Por ejemplo, $4^{1/3} = \sqrt[3]{4} = 1.5874$. (En estos cálculos es muy útil una calculadora científica.)

Por último, cualquier cantidad x^n elevada a la potencia m-ésima es

$$(x^n)^m = x^{nm} \tag{B.6}$$

La tabla B.1 resume las reglas de los exponentes.

TABLA B.1
Reglas de los exponentes

$x^0 = 1$
$x^1 = x$
$x^nx^m = x^{n+m}$
$x^n/x^m = x^{n-m}$
$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$
$(x^n)^m = x^{nm}$

Ejercicios

Verifique lo siguiente:

1. $3^2 \times 3^3 = 243$
2. $x^5x^{-8} = x^{-3}$
3. $x^{10}/x^{-5} = x^{15}$
4. $5^{1/3} = 1.709\ 975$ (Utilice su calculadora.)
5. $60^{1/4} = 2.783\ 158$ (Utilice su calculadora.)
6. $(x^4)^3 = x^{12}$

Factorización

Algunas fórmulas útiles para factorizar una ecuación son:

$ax + ay + az = a(x + y + z)$	factor común
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$	cuadrado perfecto
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	diferencia de cuadrados

Ecuaciones cuadráticas

La forma general de una ecuación cuadrática es

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{B.7}$$

donde x es la cantidad desconocida, y a, b y c son factores numéricos conocidos como **coeficientes** de la ecuación. Esta ecuación tiene dos raíces, dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{B.8}$$

Si $b^2 \geq 4ac$, las raíces son reales.

EJEMPLO

La ecuación $x^2 + 5x + 4 = 0$ tiene las siguientes raíces que corresponden a los dos signos del término de la raíz cuadrada:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - (4)(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

$$x_+ = \frac{-5+3}{2} = -1 \qquad x_- = \frac{-5-3}{2} = -4$$

donde x_+ se refiere a la raíz que corresponde al signo positivo y x_- se refiere a la raíz que corresponde al signo negativo.

Ejercicios

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas:

	Respuestas	
1. $x^2 + 2x - 3 = 0$	$x_+ = 1$	$x_- = -3$
2. $2x^2 - 5x + 2 = 0$	$x_+ = 2$	$x_- = \frac{1}{2}$
3. $2x^2 - 4x - 9 = 0$	$x_+ = 1 + \sqrt{22}/2$	$x_- = 1 - \sqrt{22}/2$

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal tiene la forma general

$$y = mx + b \tag{B.9}$$

donde m y b son constantes. Esta ecuación se denomina lineal debido a que la gráfica de y *versus* x es una línea recta, como se muestra en la figura B.1. La constante b, conocida como **ordenada al origen**, representa el valor de y al cual la línea recta cruza al eje y. La constante m es igual a la **pendiente** de la línea recta y también es igual a la tangente del ángulo que la línea forma con el eje x. Si dos puntos cualesquiera en la línea recta se especifican por las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), como en la figura B.1, entonces la pendiente de una línea recta puede expresarse como

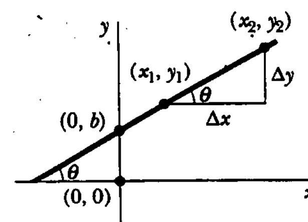


Figura B.1

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta \tag{B.10}$$

Advierta que m y b pueden tener valores positivos o negativos. Si $m > 0$, la línea recta tiene una pendiente *positiva*, como en la figura B.1. Si $m < 0$, la línea recta tiene una pendiente *negativa*. En la figura B.1, tanto m como b son positivas. Otras tres situaciones posibles se presentan en la figura B.2.

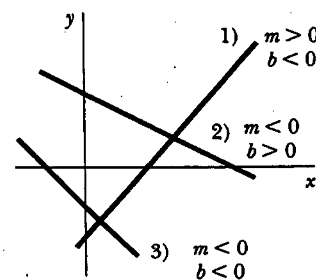


Figura B.2

Ejercicios

1. Dibuje gráficas de las siguientes líneas rectas:
   a) $y = 5x + 3$ b) $y = -2x + 4$ c) $y = -3x - 6$
2. Encuentre las pendientes de las líneas rectas descritas en el ejercicio 1.

Respuestas a) 5 b) −2 c) −3

3. Encuentre las pendientes de las líneas rectas que pasan por los siguientes conjuntos de puntos:
a) (0, –4) y (4, 2), b) (0, 0) y (2, –5), y c) (–5, 2) y (4, –2)

Respuestas a) 3/2 b) –5/2 c) –4/9

Resolución de ecuaciones lineales simultáneas

Considere la ecuación $3x + 5y = 15$, la cual tiene dos incógnitas, x y y. Esta ecuación no tiene una solución única. Por ejemplo, advierta que $(x = 0, y = 3)$, $(x = 5, y = 0)$ y $(x = 2, y = 9/5)$, son todas soluciones de esta ecuación.

Si un problema tiene dos incógnitas, una solución única es posible sólo si se tienen *dos* ecuaciones. En general, si un problema tiene n incógnitas, su solución requiere n ecuaciones. Con el propósito de resolver dos ecuaciones simultáneas que involucran dos incógnitas, x y y, resuelva una de las ecuaciones respecto de x en función de y y sustituya esta expresión en la otra ecuación.

Ejemplo 2

Resuelva las siguientes dos ecuaciones simultáneas:

$$(1)\ 5x + y = -8$$

$$(2)\ 2x - 2y = 4$$

Solución De (2), $x = y + 2$. La sustitución de esto en (1) produce

$$5(y + 2) + y = -8$$

$$6y = -18$$

$$y = -3$$

$$x = y + 2 = -1$$

Solución alternativa Multiplique cada término en (1) por el factor 2 y sume el resultado a (2):

$$10x + 2y = -16$$

$$\underline{2x - 2y = 4}$$

$$12x = -12$$

$$x = -1$$

$$y = x - 2 = -3$$

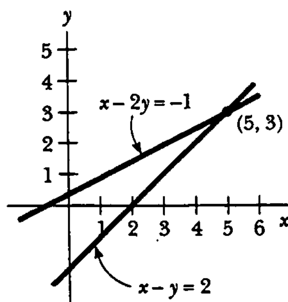


Figura B.3

Dos ecuaciones lineales que contienen dos incógnitas pueden resolverse también mediante un método gráfico. Si las líneas rectas correspondientes a las dos ecuaciones se grafican en un sistema de coordenadas convencional, la intersección de las dos líneas representa la solución. Por ejemplo, considere las dos ecuaciones

$$x - y = 2$$

$$x - 2y = -1$$

Éstas se grafican en la figura B.3. La intersección de las dos líneas tiene las coordenadas $x = 5$, $y = 3$. Esto representa la solución a las ecuaciones. Usted debe comprobar esta solución por medio de la técnica analítica estudiada con antelación.

Ejercicios

Resuelva los siguientes pares de ecuaciones simultáneas que involucran dos incógnitas:

Respuestas

1. $x + y = 8$ $\quad$ $x = 5, y = 3$
$x - y = 2$

2. $98 - T = 10a$ $T = 65,\ a = 3.27$
   $T - 49 = 5a$
3. $6x + 2y = 6$ $x = 2,\ y = -3$
   $8x - 4y = 28$

Logaritmos

Suponga que la cantidad x se expresa como una potencia de alguna cantidad de a:

$$x = a^y \quad \textbf{(B.11)}$$

El número a se conoce como **base**. El **logaritmo** de x respecto de la base a es igual al exponente al cual debe elevarse la base con el fin de satisfacer la expresión $x = a^y$:

$$y = \log_a x \quad \textbf{(B.12)}$$

Por el contrario, el **antilogaritmo** de y es el número x:

$$x = \text{antilog}_a\, y \quad \textbf{(B.13)}$$

En la práctica las dos bases que se usan con mayor frecuencia son la base 10, denominada base logarítmica *común*, y base $e = 2.718...$, que recibe el nombre de constante de Euler o base logarítmica *natural*. Cuando se usan logaritmos comunes,

$$y = \log_{10} x \qquad (\text{o } x = 10^y) \quad \textbf{(B.14)}$$

Cuando se usan logaritmos naturales,

$$y = \ln_e x \qquad (\text{o } x = e^y) \quad \textbf{(B.15)}$$

Por ejemplo, $\log_{10} 52 = 1.716$, por lo que $\text{antilog}_{10} 1.716 = 10^{1.716} = 52$. De igual modo, $\ln_e 52 = 3.951$, de modo que $\text{antiln}_e 3.951 = e^{3.951} = 52$.

En general, observe que usted puede convertir entre la base 10 y la base e con la igualdad

$$\ln_e x = (2.302\,585) \log_{10} x \quad \textbf{(B.16)}$$

Por último, algunas propiedades útiles de los logaritmos son

$$\log(ab) = \log a + \log b$$
$$\log(a/b) = \log a - \log b$$
$$\log(a^n) = n \log a$$
$$\ln e = 1$$
$$\ln e^a = a$$
$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

GEOMETRÍA

La **distancia** d entre dos puntos que tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \textbf{(B.17)}$$

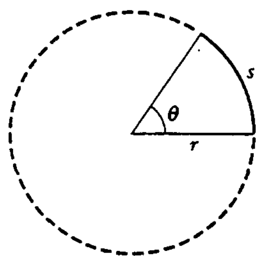


Figura B.4

Medida de radianes: La longitud de arco s de un arco circular (Fig. B.4) es proporcional al radio r para un valor fijo de θ (en radianes):

$$s = r\theta \tag{B.18}$$

$$\theta = \frac{s}{r}$$

La tabla B.2 proporciona las áreas y volúmenes de varias formas geométricas utilizadas a lo largo de este texto:

TABLA B.2 Información útil de geometría

Forma	Área o volumen	Forma	Área o volumen
Rectángulo (ℓ, w)	Área = ℓw	Esfera	Área de la superficie = $4\pi r^2$ Volumen = $\frac{4\pi r^3}{3}$
Círculo (r)	Área = πr^2 (Circunferencia = $2\pi r$)	Cilindro (ℓ)	Área de la superficie lateral = $2\pi r\ell$ Volumen = $\pi r^2 \ell$
Triángulo (b, h)	Área = $\frac{1}{2}bh$	Caja rectangular (h, w, ℓ)	Área = $2(\ell h + \ell w + hw)$ Volumen = ℓwh

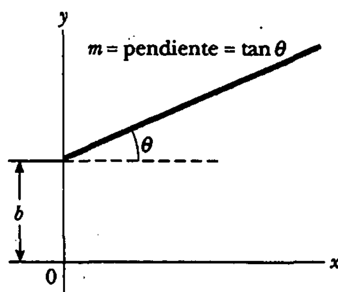


Figura B.5

La ecuación de una **línea recta** (Fig. B.5) es

$$y = mx + b \tag{B.19}$$

donde b es la ordenada al origen y m es la pendiente de la recta.

La ecuación de un **círculo** de radio R centrado en el origen es

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{B.20}$$

La ecuación de una **elipse** que tiene el origen en su centro (Fig. B.6) es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{B.21}$$

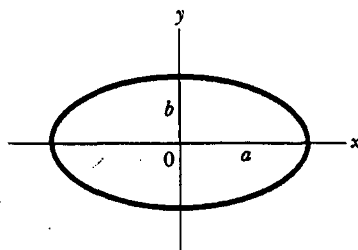


Figura B.6

donde a es la longitud del eje semimayor (el más largo) y b es la longitud del eje semimenor (el más corto).

La ecuación de una **parábola** cuyo vértice se encuentra en $y = b$ (Fig. B.7) es

$$y = ax^2 + b \tag{B.22}$$

La ecuación de una **hipérbola rectangular** (Fig. B.8) es

$$xy = \text{constante} \tag{B.23}$$

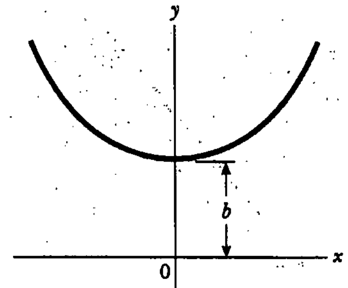


Figura B.7

TRIGONOMETRÍA

La parte de las matemáticas que tiene su fundamento en las propiedades especiales del triángulo recto recibe el nombre de trigonometría. Por definición, un triángulo recto es uno que incluye un ángulo de 90°. Considere el triángulo recto que se muestra en la figura B.9, donde el lado a es opuesto al ángulo θ, el lado b es adyacente al ángulo θ y el lado c es la hipotenusa del triángulo. Las tres funciones trigonométricas básicas definidas para dicho triángulo son las funciones seno (sen), coseno (cos) y tangente (tan). En términos del ángulo θ estas funciones se definen por medio de

$$\text{sen}\ \theta \equiv \frac{\text{lado opuesto } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \tag{B.24}$$

$$\cos\theta \equiv \frac{\text{lado adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \tag{B.25}$$

$$\tan\theta \equiv \frac{\text{lado opuesto } \theta}{\text{lado adyacente a } \theta} = \frac{a}{b} \tag{B.26}$$

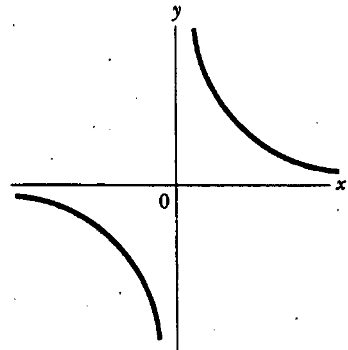


Figura B.8

El teorema de Pitágoras brinda la siguiente relación entre los lados de un triángulo recto:

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{B.27}$$

A partir de las definiciones anteriores y del teorema de Pitágoras se deduce que

$$\text{sen}^2\ \theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta}$$

Las funciones cosecante, secante y cotangente están definidas por

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\ \theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Las relaciones siguientes surgen directamente del triángulo recto mostrado en la figura B.9:

$$\text{sen}\ \theta = \cos\ (90° - \theta)$$

$$\cos\theta = \text{sen}\ (90° - \theta)$$

$$\cot\theta = \tan\ (90° - \theta)$$

a = lado opuesto
b = lado adyacente
c = hipotenusa

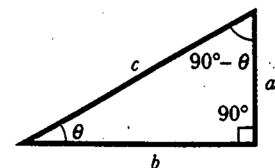


Figura B.9

Algunas propiedades de las funciones trigonométricas son:

$$\text{sen}\ (-\theta) = -\text{sen}\ \theta$$

$$\cos\ (-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan\ (-\theta) = -\tan\theta$$

Las siguientes relaciones se aplican a *cualquier* triángulo, como se muestra en la figura B.10:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

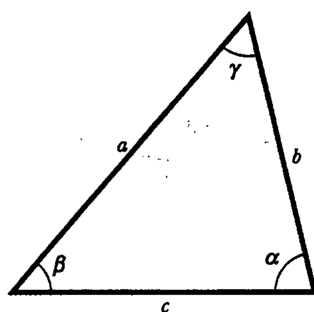


Figura B.10

Ley de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Ley de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$

La tabla B.3 registra varias identidades trigonométricas útiles.

TABLA B.3 Algunas identidades trigonométricas

$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$

$\tan 2\theta = \dfrac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

$\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$

$\operatorname{sen}^2 \dfrac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$

$\cos^2 \dfrac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$

$1 - \cos \theta = 2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{\theta}{2}$

$\tan \dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$

$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$
$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} [\frac{1}{2}(A \pm B)] \cos [\frac{1}{2}(A \mp B)]$
$\cos A + \cos B = 2 \cos [\frac{1}{2}(A + B)] \cos [\frac{1}{2}(A - B)]$
$\cos A - \cos B = 2 \operatorname{sen} [\frac{1}{2}(A + B)] \operatorname{sen} [\frac{1}{2}(B - A)]$

EJEMPLO

Considere el triángulo recto en la figura B.11, en el cual $a = 2$, $b = 5$ y c se desconoce. A partir del teorema de Pitágoras se tiene

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$$

$$c = \sqrt{29} = 5.39$$

Para encontrar el ángulo θ, advierta que

$$\tan \theta = \frac{a}{b} = \frac{2}{5} = 0.400$$

De una tabla de funciones o de una calculadora se tiene

$$\theta = \tan^{-1} (0.400) = 21.8°$$

donde $\tan^{-1}$ (0.400) es la notación para "ángulo cuya tangente es 0.400", escrito algunas veces como arctan (0.400).

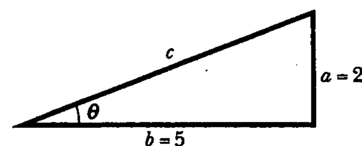


Figura B.11

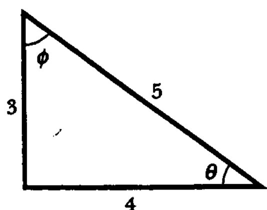


Figura B.12

EJERCICIOS

1. En la figura B.12 identifique a) el lado opuesto a θ y b) el lado adyacente a ϕ, y luego c) $\cos \theta$, d) $\operatorname{sen} \phi$ y e) $\tan \phi$.

Respuestas a) 3, b) 3, c) $\frac{4}{5}$, d) $\frac{4}{5}$ y e) $\frac{4}{3}$

2. En cierto triángulo recto los dos lados que son perpendiculares entre sí miden 5 y 7 m de largo. ¿Cuál es la longitud del tercer lado?

Respuesta 8.60 m

3. Un triángulo recto tiene una hipotenusa de 3 m de longitud y uno de sus ángulos es de 30°. ¿Cuál es la longitud de a) el lado opuesto al ángulo de 30° y b) el lado adyacente al ángulo de 30°?

Respuestas a) 1.5 m, b) 2.60 m

DESARROLLOS DE SERIES

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \tfrac{1}{2}x^2 \pm \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \quad |x| \sim \Pi/2 \end{aligned}\right\} x \text{ en radianes}$$

Para $x \ll 1$ pueden usarse las siguientes aproximaciones:[1]

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \qquad \operatorname{sen} x \approx x$$

$$e^x \approx 1 + x \qquad \cos x \approx 1$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x \qquad \tan x \approx x$$

CÁLCULO DIFERENCIAL

En diversas ramas de la ciencia en ocasiones es necesario usar las herramientas básicas del cálculo, inventadas por Newton, para describir los fenómenos físicos. El uso del cálculo es fundamental en el tratamiento de distintos problemas en la mecánica newtoniana, la electricidad y el magnetismo. En esta sección sólo se establecen algunas propiedades básicas y reglas prácticas que le conviene al estudiante repasar.

Primero debe especificarse una **función** que relacione una variable con otra (por ejemplo, una coordenada como función del tiempo). Suponga que una de las variables se denomina y (la variable dependiente) y la otra x (la variable independiente). Podría tener una relación de función como

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Si a, b, c y d son constantes especificadas, entonces y puede calcularse para cualquier valor de x. Por lo común se trata con funciones continuas, es decir, aquellas para las cuales y varía "uniformemente" con x.

[1]Las aproximaciones para las funciones sen x, cos x y tan x son para $x \leq 0.1$ rad.

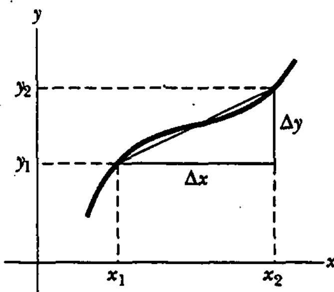


Figura B.13

La **derivada** de y respecto de x se define como el límite, conforme Δx tiende a cero, de las pendientes de las cuerdas dibujadas entre dos puntos en la curva y *versus* x. Matemáticamente, esta definición se escribe como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \quad \textbf{(B.28)}$$

donde Δy y Δx se definen como $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$ (Fig. B.13). Es importante advertir que dy/dx *no* significa dy dividida entre dx, sólo que es una notación del proceso del límite de la derivada según la define la ecuación B.28.

Una expresión útil que debe recordarse cuando $y(x) = ax^n$, donde a es una *constante* y n es *cualquier* número positivo o negativo (entero o fraccionario), es

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} \quad \textbf{(B.29)}$$

Si $y(x)$ es una función polinomial o algebraica de x, aplique la ecuación B.29 a *cada* término en el polinomio y tome $d[\text{constante}]/dx = 0$. En los ejemplos del 4 al 7 se evalúan las derivadas de varias funciones.

EJEMPLO 4

Suponga que $y(x)$ (es decir, y como una función de x) está dada por

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

donde a y b son constantes. Así, se concluye que

$$y(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x) + c$$

$$y(x + \Delta x) = a(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) + b(x + \Delta x) + c$$

por lo que

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = a(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) + b\Delta x$$

Sustituyendo esto en la ecuación B.28 se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [3ax^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2] + b$$

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b$$

EJEMPLO 5

$$y(x) = 8x^5 + 4x^3 + 2x + 7$$

Solución Al aplicar la ecuación B.29 a cada término independientemente, y recordando que d/dx (constante) = 0, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 8(5)x^4 + 4(3)x^2 + 2(1)x^0 + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 40x^4 + 12x^2 + 2$$

Propiedades especiales de la derivada

A. Derivada del producto de dos funciones Si una función $f(x)$ está dada por el producto de dos funciones, por ejemplo, $g(x)$ y $h(x)$, entonces la derivada de $f(x)$ se define como

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}[g(x)h(x)] = g\frac{dh}{dx} + h\frac{dg}{dx} \quad \textbf{(B.30)}$$

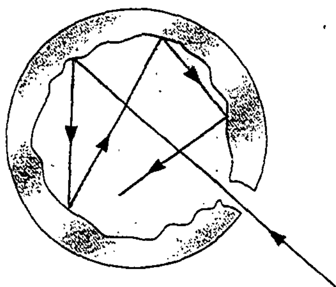


Figura 40.1 La abertura a la cavidad dentro de un objeto hueco es una buena aproximación de un cuerpo negro. La luz que entra por la pequeña abertura golpea la pared más alejada, donde parte de ella es absorbida y otra reflejada en un ángulo aleatorio. La luz continúa siendo reflejada, y en cada reflexión una parte de la luz es absorbida por las paredes de la cavidad. Después de muchas reflexiones, en esencia toda la energía incidente ha sido absorbida.

el espectro continuo de radiación emitido por el objeto. Cerca del final del siglo XIX, sin embargo, se puso en evidencia que la teoría clásica de la radiación térmica era inadecuada. El problema principal fue la comprensión de la distribución de longitudes de onda observada en la radiación emitida por un cuerpo negro. Como se vio en la sección 20.7, un cuerpo negro es un sistema ideal que absorbe toda la radiación que incide sobre él. Una buena aproximación al cuerpo es un agujero que conduce al interior de un objeto hueco, como se muestra en la figura 40.1. La naturaleza de la radiación emitida a través de un pequeño agujero que conduce a la cavidad depende sólo de la temperatura de las paredes de la cavidad y no del material del cual están hechas las paredes. Los espacios entre trozos de carbón caliente (Fig. 40.2) emiten luz que es muy parecida a la radiación de cuerpo negro.

En la figura 40.3 se observa cómo la energía de la radiación de cuerpo negro varía con la temperatura y la longitud de onda. A medida que se incrementa la temperatura del cuerpo negro, se observan dos comportamientos distintos. El primer efecto es que el pico de la distribución se corre hacia las longitudes de onda más cortas. Por ello el objeto descrito al principio de esta sección cambia de no parecer brillar (pico en el infrarrojo) a rojo radiante (pico en la cercanía del infrarrojo con algo visible en el extremo rojo del espectro) a blanco radiante (pico en el visible).

Experimento sorpresa

Use un marcador negro o piezas de cinta eléctrica negra para confeccionar un área muy negra sobre la parte exterior de una caja de zapatos. Perfore un agujero en el centro del área negra con un lápiz. Ahora coloque una tapa sobre la caja y compare la negrura del agujero con la negrura del área oscura que lo rodea. El agujero actúa como un cuerpo negro.



Figura 40.2 El brillo que emana de los espacios entre esta briqueta de carbón caliente es, hasta una aproximación muy cercana, radiación de cuerpo negro. El color de la luz depende sólo de la temperatura de la briqueta. *(Corbis)*

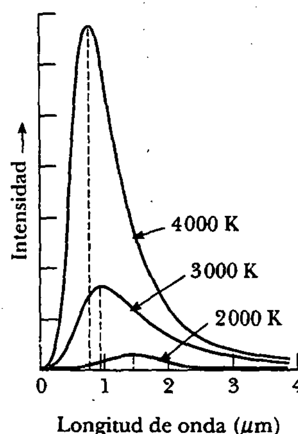


Figura 40.3 Intensidad de radiación de cuerpo negro *versus* longitud de onda a tres temperaturas. Observe que la cantidad de radiación emitida (el área bajo una curva) aumenta con el incremento de la temperatura.

Se descubrió que este corrimiento obedecía la siguiente relación denominada **ley de desplazamiento de Wien**:

$$\lambda_{\text{máx}} T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K} \quad \textbf{(40.1)}$$

donde $\lambda_{\text{máx}}$ es la longitud de onda a la cual la curva tiene su pico y T es la temperatura absoluta del objeto que emite la radiación. La longitud de onda en el pico de la curva es inversamente proporcional a la temperatura absoluta; es decir, conforme la temperatura aumenta, el pico se "desplaza" a longitudes de onda más cortas.

El segundo efecto es que la cantidad total de energía que el objeto emite aumenta con la temperatura, lo cual se describe por la ley de Stefan, la cual se proporciona en la ecuación 20.18, que se escribió en la forma $\mathcal{P} = \sigma A e T^4$. Recordando que $I = \mathcal{P}/A$ es la intensidad de la radiación sobre la superficie del objeto y que $e = 1$ para un cuerpo negro, la ley de Stefan se puede escribir en la forma $I = \sigma T^4$.

Para describir la distribución de energía de un cuerpo negro es útil definir $I(\lambda, T)d\lambda$ como la potencia por unidad de área emitida en el intervalo de longitud de onda $d\lambda$. El resultado de un cálculo basado en un modelo clásico de la radiación de cuerpo negro conocido como la **ley de Rayleigh-Jeans** es

Ley de Rayleigh-Jeans

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi c k_B T}{\lambda^4} \quad \textbf{(40.2)}$$

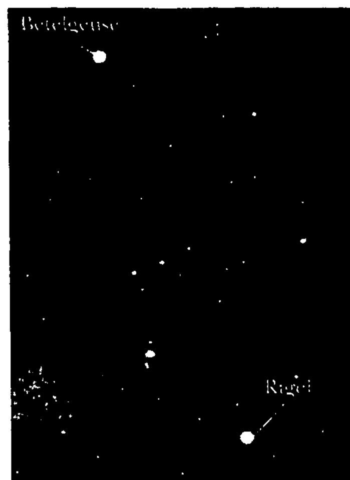
donde k_B es la constante de Boltzmann. En este modelo clásico de radiación de cuerpo negro, los átomos en las paredes de la cavidad se consideran como un conjunto de osciladores que emiten ondas electromagnéticas en todas las longitudes de onda. Tal modelo conduce a una energía promedio por oscilador que es proporcional a T.

Una gráfica experimental del espectro de radiación de cuerpo negro se muestra en la figura 40.4, junto con la predicción teórica de la ley de Rayleigh-Jeans. A longitudes de onda largas, la ley de Rayleigh-Jeans está en razonable concordancia con los datos experimentales, pero a longitudes de onda cortas parece haber un mayor desacuerdo. Lo anterior se observa al advertir que cuando λ tiende a cero, la función $I(\lambda, T)$ dada por la ecuación 40.2 tiende al infinito. Por tanto, en el espectro de cuerpo negro no sólo debe predominar la longitud de onda corta, sino que la energía emitida por cualquier cuerpo negro debe volverse infinita en el límite de cero longitudes de onda. En contraste con esta predicción, los datos experimentales graficados en la figura 40.4 muestran que conforme λ se acerca a cero, $I(\lambda, T)$ también tiende a cero. Tal disparidad de la teoría y el experimento fue tan desconcertante que los científicos la denominaron *catástrofe ultravioleta*. (Este nombre es un término inadecuado, ya que la "catástrofe" —energía infinita— ocurre cuando la longitud de onda tiende a cero, no las longitudes de onda ultravioleta.)

Otra discrepancia entre la teoría y el experimento tiene relación con la energía total emitida por el cuerpo negro. Experimentalmente, la energía total por unidad

Experimento sorpresa

En una noche clara, salga de la ciudad, a un sitio alejado de las luces, y encuentre la constelación Orión (visible desde noviembre hasta abril en el cielo vespertino). Mire con mucho cuidado el color de Betelgeuse y Rigel. ¿Puede usted decir cuál estrella está más caliente? Si Orión está bajo el horizonte, compare dos de las estrellas más brillantes que pueda ver, como Vega en Lyra y Arcturus en Boötes. *(John Chumack/Photo Researchers, Inc.)*



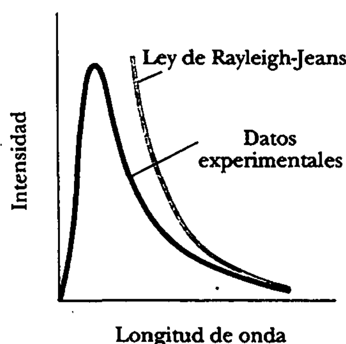


Figura 40.4 Comparación de resultados experimentales y la curva predicha por la ley de Rayleigh-Jeans para la distribución de radiación de cuerpo negro.

B. Derivada de la suma de dos funciones Si una función $f(x)$ es igual a la suma de dos funciones, entonces la derivada de la suma es igual a la suma de las derivadas:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[g(x) + h(x)] = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx} \qquad \textbf{(B.31)}$$

C. Regla de la cadena del cálculo diferencial Si $y = f(x)$ y $x = g(z)$, entonces dy/dx puede escribirse como el producto de dos derivadas:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz} \qquad \textbf{(B.32)}$$

D. La segunda derivada La segunda derivada de y respecto de x se define como la derivada de la función dy/dx (la derivada de la derivada). Suele escribirse

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad \textbf{(B.33)}$$

EJEMPLO 6

Encuentre la derivada de $y(x) = x^3/(x + 1)^2$ respecto de x.

Solución Puede reescribir esta función como $y(x) = x^3(x + 1)^{-2}$ y aplicar la ecuación B.30:

$$\frac{dy}{dx} = (x + 1)^{-2}\frac{d}{dx}(x^3) + x^3\frac{d}{dx}(x + 1)^{-2}$$

$$= (x + 1)^{-2}3x^2 + x^3(-2)(x + 1)^{-3}$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{3x^2}{(x + 1)^2} - \frac{2x^3}{(x + 1)^3}$$

EJEMPLO 7

Una fórmula útil que se desprende de la ecuación B.30 es la derivada del cociente de dos funciones. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{h\frac{dg}{dx} - g\frac{dh}{dx}}{h^2}$$

Solución Puede escribir el cociente como gh^{-1} y después aplicar las ecuaciones B.29 y B.30:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{d}{dx}(gh^{-1}) = g\frac{d}{dx}(h^{-1}) + h^{-1}\frac{d}{dx}(g)$$

$$= -gh^{-2}\frac{dh}{dx} + h^{-1}\frac{dg}{dx}$$

$$= \frac{h\frac{dg}{dx} - g\frac{dh}{dx}}{h^2}$$

Algunas de las derivadas de funciones que se usan más comúnmente se listan en la tabla B.4.

B.7 CÁLCULO INTEGRAL

La integración se considera como la inversa de la diferenciación. Como ejemplo, sea la expresión

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b \qquad \textbf{(B.34)}$$

que fue el resultado de diferenciar la función

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

TABLA B.2 Derivadas para diversas funciones

$$\frac{d}{dx}(a) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } ax) = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \text{ sen } ax$$

$$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a\sec^2 ax$$

$$\frac{d}{dx}(\cot ax) = -a\csc^2 ax$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{1}{x}$$

Nota: Las letras a y n son constantes.

en el ejemplo 4. Puede escribir la ecuación B.34 como $dy = f(x)\,dx = (3ax^2 + b)\,dx$ y obtener $y(x)$ "sumando" sobre todos los valores de x. Matemáticamente, esta operación inversa se escribe

$$y(x) = \int f(x)\,dx$$

Para la función $f(x)$ dada por la ecuación B.34 se tiene

$$y(x) = \int (3ax^2 + b)\,dx = ax^3 + bx + c$$

donde c es una constante de la integración. Este tipo de integral se conoce como *integral indefinida* debido a que su valor depende de la elección de c.

Una **integral indefinida** general $I(x)$ se define cómo

$$I(x) = \int f(x)dx \tag{B.35}$$

donde $f(x)$ recibe el nombre de *integrando* y $f(x) = \dfrac{dI(x)}{dx}$.

Para una función *continua general* $f(x)$ la integral puede describirse como el área bajo la curva acotada por $f(x)$ y el eje x, entre dos valores especificados de x, por ejemplo, x_1 y x_2, como en la figura B.14.

El área del elemento azul es aproximadamente $f(x_i)\Delta x_i$. Si se suman todos estos elementos de área de x_1 y x_2 y se toma el límite de esta suma a medida que $\Delta x_i \to 0$, se obtiene el área *real* bajo la curva acotada por $f(x)$ y x, entre los límites x_1 y x_2:

$$\text{Área} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \tag{B.36}$$

Las integrales del tipo definidas por la ecuación B.36 se conocen como **integrales definidas**.

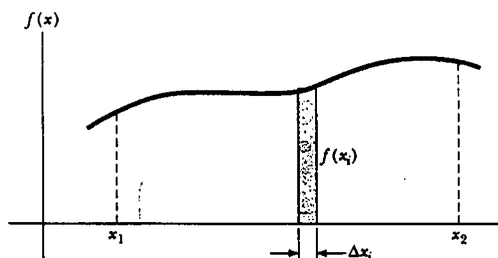


Figura B.14

Una integral común que surge en situaciones prácticas tiene la forma

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1) \tag{B.37}$$

Este resultado es evidente, pues la diferenciación del lado derecho respecto de x produce directamente $f(x) = x^n$. Si se conocen los límites de integración, esta integral se vuelve una *integral definida* y se escribe

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n\,dx = \frac{x_2^{\,n+1} - x_1^{\,n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1) \tag{B.38}$$

Ejemplos

1. $\int_0^a x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3}$

2. $\int_0^b x^{3/2}\,dx = \left.\frac{x^{5/2}}{5/2}\right]_0^b = \frac{2}{5}b^{5/2}$

3. $\int_3^5 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_3^5 = \frac{5^2-3^2}{2} = 8$

Integración parcial

Algunas veces es útil aplicar el método de *integración parcial* (llamado también "integración por partes") para evaluar ciertas integrales. Este método aprovecha la propiedad de que

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{B.39}$$

donde u y v se eligen con *sumo cuidado* de manera que se reduzca una integral compleja a una más simple. En muchos casos es necesario efectuar varias reducciones. Considere la función

$$I(x) = \int x^2 e^x\,dx$$

Ésta puede evaluarse integrando por partes dos veces. Primero, si elige $u = x^2$, $v = e^x$, se obtiene

$$\int x^2e^x\,dx = \int x^2\,d(e^x) = x^2e^x - 2\int e^x x\,dx + c_1$$

Ahora, en el segundo término escoja $u = x$, $v = e^x$, lo que produce

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx + c_1$$

o

$$\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c_2$$

La diferencial perfecta

Otro método útil que se debe recordar es el empleo de la *diferencial perfecta*, en la cual se busca un cambio de variable de modo que la diferencial de la función sea la diferencial de la variable independiente que aparece en el integrando. Por ejemplo, considere la integral

$$I(x) = \int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx$$

Ésta se vuelve más fácil de evaluar si reescribe la diferencial como $d(\cos x) = -\operatorname{sen} x\,dx$. La integral se vuelve entonces

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx = -\int \cos^2 x\,d(\cos x)$$

Si después de esto se cambian las variables, dejando $y = \cos x$, se obtiene

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx = -\int y^2\,dy = -\frac{y^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

La tabla B.5 lista algunas integrales indefinidas útiles. La tabla B.6 proporciona la integral de probabilidades de Gauss y otras integrales definidas. Una lista más completa puede encontrarse en varios manuales, como *The Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Press.

TABLA B.5 Algunas integrales indefinidas (se debe añadir una constante arbitraria a cada una de estas integrales)

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (\text{siempre que } n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}\,dx = \ln x$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\ln(a+bx)$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = -\frac{1}{a}\ln\frac{x+a}{x}$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} \qquad (a^2-x^2>0)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} \qquad (x^2-a^2>0)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2\pm x^2} = \pm\tfrac{1}{2}\ln(a^2\pm x^2)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} = -\cos^{-1}\frac{x}{a} \qquad (a^2-x^2>0)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \sqrt{x^2\pm a^2}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}[x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})]$$

$$\int x(\sqrt{x^2\pm a^2})\,dx = \tfrac{1}{3}(x^2\pm a^2)^{3/2}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int \ln ax\,dx = (x\ln ax) - x$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

$$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac}\ln(a+be^{cx})$$

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax$$

$$\int \tan ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\cos ax) = \frac{1}{a}\ln(\sec ax)$$

$$\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\operatorname{sen} ax)$$

$$\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a}\ln\left[\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\int \csc ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a}\ln\left(\tan\frac{ax}{2}\right)$$

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a}\cot ax$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\tan ax$$

$$\int \tan^2 ax\,dx = \frac{1}{a}(\tan ax) - x$$

$$\int \cot^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}(\cot ax) - x$$

$$\int \operatorname{sen}^{-1} ax\,dx = x(\operatorname{sen}^{-1} ax) + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$$

$$\int \cos^{-1} ax\,dx = x(\cos^{-1} ax) - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

TABLA B.6 Integral de probabilidad de Gauss y otras integrales definidas

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \text{(Integral de probabilidad de Gauss)}$$

$$I_1 = \int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a}$$

$$I_2 = \int_0^\infty x^2e^{-ax^2}\,dx = -\frac{dI_0}{da} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$I_3 = \int_0^\infty x^3e^{-ax^2}\,dx = -\frac{dI_1}{da} = \frac{1}{2a^2}$$

$$I_4 = \int_0^\infty x^4e^{-ax^2}\,dx = \frac{d^2I_0}{da^2} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

$$I_5 = \int_0^\infty x^5e^{-ax^2}\,dx = \frac{d^2I_1}{da^2} = \frac{1}{a^3}$$

$$\vdots$$

$$I_{2n} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_0$$

$$I_{2n+1} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_1$$

APÉNDICE C • *Tabla periódica de los elementos*

Elementos de transición

Grupo I	Grupo II									
H 1 1.008 0 $1s^1$										
Li 3 6.94 $2s^1$	**Be** 4 9.012 $2s^2$									
Na 11 22.99 $3s^1$	**Mg** 12 24.31 $3s^2$									
K 19 39.102 $4s^1$	**Ca** 20 40.08 $4s^2$	**Sc** 21 44.96 $3d^14s^2$	**Ti** 22 47.90 $3d^24s^2$	**V** 23 50.94 $3d^34s^2$	**Cr** 24 51.996 $3d^54s^1$	**Mn** 25 54.94 $3d^54s^2$	**Fe** 26 55.85 $3d^64s^2$	**Co** 27 58.93 $3d^74s^2$
Rb 37 85.47 $5s^1$	**Sr** 38 87.62 $5s^2$	**Y** 39 88.906 $4d^15s^2$	**Zr** 40 91.22 $4d^25s^2$	**Nb** 41 92.91 $4d^45s^1$	**Mo** 42 95.94 $4d^55s^1$	**Tc** 43 (99) $4d^55s^2$	**Ru** 44 101.1 $4d^75s^1$	**Rh** 45 102.91 $4d^85s^1$
Cs 55 132.91 $6s^1$	**Ba** 56 137.34 $6s^2$	57-71*	**Hf** 72 178.49 $5d^26s^2$	**Ta** 73 180.95 $5d^36s^2$	**W** 74 183.85 $5d^46s^2$	**Re** 75 186.2 $5d^56s^2$	**Os** 76 190.2 $5d^66s^2$	**Ir** 77 192.2 $5d^76s^2$
Fr 87 (223) $7s^1$	**Ra** 88 (226) $7s^2$	89-103**	**Rf** 104 (261) $6d^27s^2$	**Db** 105 (262) $6d^37s^2$	**Sg** 106 (263)	**Bh** 107 (262)	**Hs** 108 (265)	**Mt** 109 (266)

Símbolo — **Ca** 20 — Número atómico
Masa atómica † — 40.08
$4s^2$ — Configuración electrónica

*Serie de lantánidos	**La** 57 138.91 $5d^16s^2$	**Ce** 58 140.12 $5d^14f^16s^2$	**Pr** 59 140.91 $4f^36s^2$	**Nd** 60 144.24 $4f^46s^2$	**Pm** 61 (147) $4f^56s^2$	**Sm** 62 150.4 $4f^66s^2$
**Serie de actínidos	**Ac** 89 (227) $6d^17s^2$	**Th** 90 (232) $6d^27s^2$	**Pa** 91 (231) $5f^26d^17s^2$	**U** 92 (238) $5f^36d^17s^2$	**Np** 93 (239) $5f^46d^17s^2$	**Pu** 94 (239) $5f^66d^07s^2$

Los valores de masa atómica dados están promediados sobre los isótopos en los porcentajes en que se encuentran en la naturaleza.
† Para un elemento inestable el número de masa del isótopo conocido más estable está dado entre paréntesis.
†† Los elementos 110, 111, 112 y 114 aún no tienen nombre.
††† Para una descripción de los datos atómicos visite **physics.nist.gov/atomic**

			Grupo III	Grupo IV	Grupo V	Grupo VI	Grupo VII	Grupo 0
							H 1 1.008 0 $1s^1$	**He** 2 4.002 6 $1s^2$
			B 5 10.81 $2p^1$	**C** 6 12.011 $2p^2$	**N** 7 14.007 $2p^3$	**O** 8 15.999 $2p^4$	**F** 9 18.998 $2p^5$	**Ne** 10 20.18 $2p^6$
			Al 13 26.98 $3p^1$	**Si** 14 28.09 $3p^2$	**P** 15 30.97 $3p^3$	**S** 16 32.06 $3p^4$	**Cl** 17 35.453 $3p^5$	**Ar** 18 39.948 $3p^6$
Ni 28 58.71 $3d^84s^2$	**Cu** 29 63.54 $3d^{10}4s^1$	**Zn** 30 65.37 $3d^{10}4s^2$	**Ga** 31 69.72 $4p^1$	**Ge** 32 72.59 $4p^2$	**As** 33 74.92 $4p^3$	**Se** 34 78.96 $4p^4$	**Br** 35 79.91 $4p^5$	**Kr** 36 83.80 $4p^6$
Pd 46 106.4 $4d^{10}$	**Ag** 47 107.87 $4d^{10}5s^1$	**Cd** 48 112.40 $4d^{10}5s^2$	**In** 49 114.82 $5p^1$	**Sn** 50 118.69 $5p^2$	**Sb** 51 121.75 $5p^3$	**Te** 52 127.60 $5p^4$	**I** 53 126.90 $5p^5$	**Xe** 54 131.30 $5p^6$
Pt 78 195.09 $5d^96s^1$	**Au** 79 196.97 $5d^{10}6s^1$	**Hg** 80 200.59 $5d^{10}6s^2$	**Tl** 81 204.37 $6p^1$	**Pb** 82 207.2 $6p^2$	**Bi** 83 208.98 $6p^3$	**Po** 84 (210) $6p^4$	**At** 85 (218) $6p^5$	**Rn** 86 (222) $6p^6$
110†† (269)	111†† (272)	112†† (277)		114†† (289)				

Eu 63 152.0 $4f^76s^2$	**Gd** 64 157.25 $5d^14f^76s^2$	**Tb** 65 158.92 $5d^14f^86s^2$	**Dy** 66 162.50 $4f^{10}6s^2$	**Ho** 67 164.93 $4f^{11}6s^2$	**Er** 68 167.26 $4f^{12}6s^2$	**Tm** 69 168.93 $4f^{13}6s^2$	**Yb** 70 173.04 $4f^{14}6s^2$	**Lu** 71 174.97 $5d^14f^{14}6s^2$
Am 95 (243) $5f^76d^07s^2$	**Cm** 96 (245) $5f^76d^17s^2$	**Bk** 97 (247) $5f^86d^17s^2$	**Cf** 98 (249) $5f^{10}6d^07s^2$	**Es** 99 (254) $5f^{11}6d^07s^2$	**Fm** 100 (253) $5f^{12}6d^07s^2$	**Md** 101 (255) $5f^{13}6d^07s^2$	**No** 102 (255) $6d^07s^2$	**Lr** 103 (257) $6d^17s^2$

APÉNDICE D • *Unidades del SI*

TABLA D.1 Unidades del SI

	Unidad base del SI	
Cantidad base	**Nombre**	**Símbolo**
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Corriente eléctrica	Ampere	A
Temperatura	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd

TABLA D.2 Algunas unidades derivadas del SI

Cantidad	**Nombre**	**Símbolo**	**Expresión en términos de las unidades base**	**Expresión en términos de otras unidades del SI**
Ángulo plano	radián	rad	m/m	
Frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}	
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$	J/m
Presión	pascal	Pa	$kg/m \cdot s^2$	N/m^2
Energía; trabajo	joule	J	$kg \cdot m^2/s^2$	$N \cdot m$
Potencia	watt	W	$kg \cdot m^2/s^3$	J/s
Carga eléctrica	coulomb	C	$A \cdot s$	
Potencial eléctrico	volt	V	$kg \cdot m^2/A \cdot s^3$	W/A
Capacitancia	farad	F	$A^2 \cdot s^4/kg \cdot m^2$	C/V
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^3$	V/A
Flujo magnético	weber	Wb	$kg \cdot m^2/A \cdot s^2$	$V \cdot s$
Intensidad de campo magnético	tesla	T	$kg/A \cdot s^2$	
Inductancia	henry	H	$kg \cdot m^2/A^2 \cdot s^2$	$T \cdot m^2/A$

Todos los premios Nobel de física están listados y marcados con una F, igual que los premios Nobel de química importantes están marcados con una Q. Se proporcionan los datos clave de su trabajo científico, el cual a menudo realizaron mucho antes de recibir el premio.

1901 (F) *Wilhelm Roentgen* por el descubrimiento de los rayos X (1895).
1902 (F) *Hendrik A. Lorentz* por predecir el efecto Zeeman, y *Pieter Zeeman* por descubrir el efecto Zeeman, el desdoblamiento de líneas espectrales en campos magnéticos.
1903 (F) *Antoine-Henri Becquerel* por descubrir la radiactividad (1896) y *Pierre* y *Marie Curie* por estudiar la radiactividad.
1904 (F) *Lord Rayleigh* por estudiar la densidad de gases y descubrir el argón.
(Q) *William Ramsay* por descubrir los elementos gaseosos inertes helio, neón, xenón y kriptón, y ponerlos en la tabla periódica.
1905 (F) *Philipp Lenard* por estudiar los rayos catódicos, electrones (1898-1899).
1906 (F) *J. J. Thomson* por estudiar la descarga eléctrica a través de gases y descubrir el electrón (1897).
1907 (F) *Albert A. Michelson* por inventar instrumentos ópticos y medir la rapidez de la luz (1880-1890).
1908 (F) *Gabriel Lippmann* por hacer la primera placa fotográfica en color, utilizando métodos de interferencia (1891).
(Q) *Ernest Rutherford* por descubrir que los átomos pueden partirse mediante rayos alfa y por el estudio de la radiactividad.
1909 (F) *Guglielmo Marconi* y *Carl Ferdinand Braun* por desarrollar la telegrafía inalámbrica.
1910 (F) *Johannes D. van der Waals* por estudiar la ecuación de estado para gases y líquidos (1881).
1911 (F) *Wilhelm Wien* por descubrir la ley de Wien que proporciona el pico de un espectro de cuerpo negro (1893).
(Q) *Marie Curie* por descubrir el radio y el polonio (1898) y aislar el radio.
1912 (F) *Nils Dalén* por inventar reguladores de gas automáticos para faros.
1913 (F) *Heike Kamerlingh Onnes* por el descubrimiento de la superconductividad y la licuefacción del helio (1908).
1914 (F) *Max T. F. von Laue* por el estudio de los rayos X a partir de su difracción en cristales, lo que demostró que los rayos X son ondas electromagnéticas (1912).
(Q) *Theodore W. Richards* por determinar los pesos atómicos de 60 elementos, señalando la existencia de isótopos.
1915 (F) *William Henry Bragg* y *William Lawrence Bragg*, su hijo, por el estudio de la difracción de rayos X en cristales.
1917 (F) *Charles Barkla* por el estudio de átomos mediante la dispersión de rayos X (1906).
1918 (F) *Max Planck* por el descubrimiento del cuanto de energía (1900).
1919 (F) *Johannes Stark* por descubrir el efecto Stark, el desdoblamiento de líneas espectrales en campos eléctricos (1913).

1920 (F) *Charles-Édouard Guillaume* por descubrir el invar, una aleación de níquel-acero con bajo coeficiente de expansión.
(Q) *Walther Nernst* por estudiar los cambios térmicos en reacciones químicas y formular la tercera ley de la termodinámica (1918).

1921 (F) *Albert Einstein* por explicar el efecto fotoeléctrico y por sus logros en física teórica (1905).
(Q) *Frederick Soddy* por estudiar la química de sustancias radiactivas y descubrir isótopos (1912).

1922 (F) *Niels Bohr* por su modelo del átomo y su radiación (1913).
(Q) *Francis W. Aston* por usar el espectrógrafo de masas para estudiar pesos atómicos, descubriendo de ese modo 212 de los 287 isótopos que se presentan naturalmente.

1923 (F) *Robert A. Millikan* por medir la carga en un electrón (1911) y por estudiar el efecto fotoeléctrico en forma experimental (1914).

1924 (F) *Karl M. G. Siegbahn* por su trabajo en la espectroscopia de rayos X.

1925 (F) *James Franck* y *Gustav Hertz* por descubrir el efecto Franck-Hertz en choques electrón-átomo.

1926 (F) *Jean-Baptiste Perrin* por estudiar el movimiento browniano para validar la estructura discontinua de la materia y medir el tamaño de los átomos.

1927 (F) *Arthur Holly Compton* por descubrir el efecto Compton en los rayos X, su cambio de longitud de onda cuando chocan con la materia (1922), y *Charles T. R. Wilson* por inventar la cámara de niebla utilizada para estudiar partículas cargadas (1906).

1928 (F) *Owen W. Richardson* por estudiar el efecto termoiónico y los electrones emitidos por metales calientes (1911).

1929 (F) *Louis Victor de Broglie* por descubrir la naturaleza ondulatoria de los electrones (1923).

1930 (F) *Chandrasekhara Venkata Raman* por estudiar la dispersión Raman, la dispersión de la luz por átomos y moléculas con un cambio en la longitud de onda (1928).

1932 (F) *Werner Heisenberg* por crear la mecánica cuántica (1925).

1933 (F) *Erwin Schrödinger* y *Paul A. M. Dirac* por desarrollar la mecánica ondulatoria (1925) y la mecánica cuántica relativista (1927).
(Q) *Harold Urey* por descubrir el hidrógeno pesado, deuterio (1931).

1935 (F) *James Chadwick* por descubrir el neutrón (1932).
(Q) *Irène* y *Frédéric Joliot-Curie* por sintetizar nuevos elementos radiactivos.

1936 (F) *Carl D. Anderson* por descubrir el positrón en particular y la antimateria en general (1932), y *Victor F. Hess* por descubrir los rayos cósmicos.
(Q) *Peter J. W. Debye* por estudiar momentos de dipolo y la difracción de rayos X y electrones en gases.

1937 (F) *Clinton Davisson* y *George Thomson* por descubrir la difracción de electrones por cristales, lo que confirmó la hipótesis de De Broglie (1927).

1938 (F) *Enrico Fermi* por la producción de elementos radiactivos transuránicos mediante la irradiación de neutrones (1934-1937).

1939 (F) *Ernest O. Lawrence* por inventar el ciclotrón.

1943 (F) *Otto Stern* por desarrollar estudios de haces moleculares (1923) y usarlos para descubrir el momento magnético del protón (1933).

1944 (F) *Isidor I. Rabi* por descubrir la resonancia magnética nuclear en haces atómicos y moleculares.
(Q) *Otto Hahn* por descubrir la fisión nuclear (1938).

1945 (F) *Wolfgang Pauli* por descubrir el principio de exclusión (1924).

1946 (F) *Percy W. Bridgman* por estudiar la física de las altas presiones.

1947 (F) *Edward V. Appleton* por estudiar la ionosfera.

1948 (F) *Patrick M. S. Blackett* por estudiar la física nuclear con fotografías de la cámara de niebla de interacciones de rayos cósmicos.
1949 (F) *Hideki Yukawa* por predecir la existencia de mesones (1935).
1950 (F) *Cecil F. Powell* por desarrollar el método para estudiar rayos cósmicos con emulsiones fotográficas y descubrir nuevos mesones.
1951 (F) *John D. Cockcroft* y *Ernest T. S. Walton* por transmutar núcleos en un acelerador (1932).
(Q) *Edwin M. McMillan* por producir neptunio (1940), y *Glenn T. Seaborg* por producir plutonio (1941) y elementos transuránicos adicionales.
1952 (F) *Felix Bloch* y *Edward Mills Purcell* por descubrir la resonancia magnética nuclear en líquidos y gases (1946).
1953 (F) *Frits Zernike* por inventar el microscopio de contraste de fases, el cual emplea la interferencia para brindar alto contraste.
1954 (F) *Max Born* por interpretar la función de onda como una probabilidad (1926) y otros descubrimientos de la mecánica cuántica, y *Walther Bothe* por desarrollar el método de coincidencia para estudiar partículas subatómicas (1930-1931), lo que produjo, en particular, la partícula interpretada por Chadwick como el neutrón.
1955 (F) *Willis E. Lamb, Jr.,* por descubrir el corrimiento Lamb en el espectro de hidrógeno (1947), y *Polykarp Kusch* por determinar el momento magnético del electrón (1947).
1956 (F) *John Bardeen, Walter H. Brattain* y *William Shockley* por inventar el transistor (1956).
1957 (F) *T.-D. Lee* y *C.-N. Yang* por predecir que la paridad no se conserva en el decaimiento beta (1956).
1958 (F) *Pavel A. Čerenkov* por descubrir la radiación Čerenkov (1935) e *Ilya M. Frank* e *Igor Tamm* por interpretarla (1937).
1959 (F) *Emilio G. Segrè* y *Owen Chamberlain* por descubrir el antiprotón (1955).
1960 (F) *Donald A. Glaser* por inventar la cámara de burbujas para estudiar partículas elementales (1952).
(Q) *Willard Libby* por desarrollar el fechamiento mediante radiocarbono (1947).
1961 (F) *Robert Hofstadter* por descubrir la estructura interna en protones y neutrones, y *Rudolf L. Mössbauer* por descubrir el efecto Mössbauer de la emisión de rayos gamma sin retroceso (1957).
1962 (F) *Lev Davidovich Landau* por sus teorías sobre el helio líquido y otra materia teóricamente condensada.
1963 (F) *Eugene P. Wigner* por aplicar los principios de simetría a la teoría de las partículas elementales, y *Maria Goeppert Mayer* y *J. Hans D. Jensen* por estudiar el modelo de capas de los núcleos (1947).
1964 (F) *Charles H. Townes, Nikolai G. Basov* y *Alexandr M. Prokhorov* por desarrollar máseres (1951-1952) y rayos láser.
1965 (F) *Sin-itiro Tomonaga, Julian S. Schwinger* y *Richard P. Feynman* por desarrollar la electrodinámica cuántica (1948).
1966 (F) *Alfred Kastler* por sus métodos ópticos para estudiar los niveles de energía atómicos.
1967 (F) *Hans Albrecht Bethe* por descubrir las rutas de producción de energía en las estrellas (1939).
1968 (F) *Luis W. Álvarez* por descubrir los estados de resonancia de partículas elementales.
1969 (F) *Murray Gell-Mann* por clasificar las partículas elementales (1963).
1970 (F) *Hannes Alfvén* por desarrollar la teoría magnetohidrodinámica, y *Louis Eugène Félix Néel* por descubrir el antiferromagnetismo y el ferromagnetismo (años 30).

1971 (F) *Dennis Gabor* por desarrollar la holografía (1947).
(Q) *Gerhard Herzberg* por estudiar la estructura de las moléculas espectroscópicamente.

1972 (F) *John Bardeen, Leon N. Cooper* y *John Robert Schrieffer* por explicar la superconductividad (1957).

1973 (F) *Leo Esaki* por descubrir el efecto túnel en semiconductores, *Ivar Giaever* por descubrir el efecto túnel en superconductores, y *Brian D. Josephson* por predecir el efecto Josephson, el cual implica el efecto túnel de electrones pareados (1958-1962).

1974 (F) *Anthony Hewish* por descubrir pulsares, y *Martin Ryle* por desarrollar la radiointerferometría.

1975 (F) *Aage N. Bohr, Ben R. Mottelson* y *James Rainwater* por descubrir por qué algunos núcleos toman formas asimétricas.

1976 (F) *Burton Richter* y *Samuel C. C. Ting* por descubrir la partícula J/psi, la primera partícula encantada (1974).

1977 (F) *John H. Van Vleck, Nevill F. Mott* y *Philip W. Anderson* por estudiar los sólidos con la mecánica cuántica.
(Q) *Ilya Prigogine* por extender la termodinámica para mostrar cómo pudo surgir la vida a pesar de la segunda ley.

1978 (F) *Arno A. Penzias* y *Robert W. Wilson* por descubrir la radiación cósmica de fondo (1965), y *Pyotr Kapitsa* por sus estudios del helio líquido.

1979 (F) *Sheldon L. Glashow, Abdus Salam* y *Steven Weinberg* por desarrollar la teoría que unifica las fuerzas débiles y electromagnéticas (1958-1971).

1980 (F) *Val Fitch* y *James W. Cronin* por descubrir la violación de la PC (paridad de carga) (1964), la cual posiblemente explica el predominio cosmológico de la materia sobre la antimateria.

1981 (F) *Nicolaas Bloembergen* y *Arthur L. Schawlow*, por desarrollar la espectroscopia láser, y *Kai M. Siegbahn* por desarrollar la espectroscopia de electrones de alta resolución (1958).

1982 (F) *Kenneth G. Wilson* por desarrollar un método con el que se construyen teorías de transiciones de fase para analizar fenómenos críticos.

1983 (F) *William A. Fowler* por estudios teóricos de nucleosíntesis astrofísica, y *Subramanyan Chandrasekhar* por estudiar los procesos físicos de importancia para la estructura y evolución estelares, incluyendo la predicción de las estrellas enanas blancas (1930).

1984 (F) *Carlo Rubbia* por descubrir las partículas W y Z, lo que verifica la unificación electrodébil, y *Simon van der Meer* por desarrollar el método de enfriamiento estocástico del haz del CERN que hizo posible el descubrimiento (1982-1983).

1985 (F) *Klaus von Klitzing* por el efecto Hall cuantizado, que relaciona la conductividad en presencia de un campo magnético (1980).

1986 (F) *Ernst Ruska* por inventar el microscopio electrónico (1931), y *Gerd Binnig* y *Heinrich Rohrer* por inventar el microscopio electrónico de efecto túnel exploratorio (1981).

1987 (F) *J. Georg Bednorz* y *Karl Alex Müller* por el descubrimiento de la superconductividad a alta temperatura (1986).

1988 (F) *Leon M. Lederman, Melvin Schwartz* y *Jack Steinberger* por un experimento en colaboración que condujo al desarrollo de una nueva herramienta para estudiar la fuerza nuclear débil, la cual afecta el decaimiento radiactivo de los átomos.

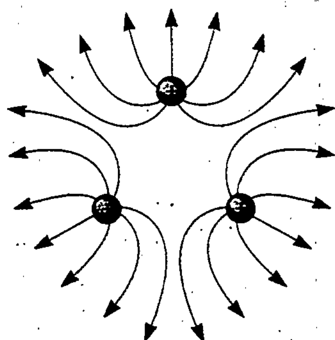
1989 (F) *Norman Ramsay* (E.U.) por diversas técnicas de física atómica, *Hans Dehmelt* (E.U.) y *Wolfgang Paul* (Alemania) por el desarrollo de técnicas para confinar partículas de una sola carga.

1990 (F) *Jerome Friedman, Henry Kendall* (ambos de E.U.) y *Richard Taylor* (Canadá) por importantes experimentos para el desarrollo del modelo del quark.
1991 (F) *Pierre-Gilles de Gennes* por descubrir que los métodos desarrollados para estudiar fenómenos ordenados en sistemas simples pueden generalizarse a formas de materia más complejas, en particular a cristales líquidos y polímeros.
1992 (F) *George Charpak* por desarrollar detectores que siguen las trayectorias de partículas subatómicas evanescentes producidas en aceleradores de partículas.
1993 (F) *Russell Hulse* y *Joseph Taylor* por descubrir evidencias de ondas gravitacionales.
1994 (F) *Bertram N. Brockhouse* y *Clifford G. Shull* por su trabajo pionero en la dispersión de neutrones.
1995 (F) *Martin L. Perl* y *Frederick Reines* por descubrir la partícula tau y el neutrino, respectivamente.
1996 (F) *David M. Lee, Douglas C. Osheroff* y *Robert C. Richardson* por desarrollar un superfluido usando helio 3.
1997 (F) *Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji* y *William D. Phillips* por desarrollar métodos para enfriar y atrapar átomos con luz láser.
1998 (F) *Robert B. Laughlin, Horst L. Störmer* y *Daniel C. Tsui* por descubrir una nueva forma de fluido cuántico con excitaciones fraccionalmente cargadas.

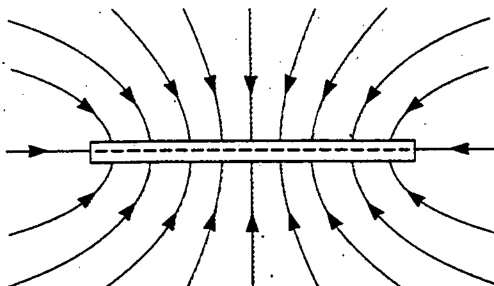
Respuestas a problemas de número impar

Capítulo 23

1. a) 2.62×10^{24} electrones b) 2.38 electrones
3. La fuerza es $\sim 10^{26}$ N.
5. 514 kN
7. 0.873 N a 330°
9. a) 82.2 nN b) 2.19 Mm/s
11. a) 55.8 pN/C hacia abajo b) 102 nN/C hacia arriba
13. 1.82 m a la izquierda de la carga negativa
15. a) $(18.0\mathbf{i} - 218\mathbf{j})$ kN/C b) $(36.0\mathbf{i} - 436\mathbf{j})$ mN
17. a) El campo es cero en el centro del triángulo.



    b) $(1.73\ k_e q/a^2)\mathbf{j}$
19. a) $5.91 k_e q/a^2$ a 58.8° b) $5.91 k_e q^2/a^2$ a 58.8°
23. $-(\pi^2 k_e q/6a^2)\ \mathbf{i}$
25. $-(k_e \lambda_0/x_0)\ \mathbf{i}$
27. a) $6.64\mathbf{i}$ MN/C b) $24.1\mathbf{i}$ MN/C c) $6.40\mathbf{i}$ MN/C d) $0.664\mathbf{i}$ MN/C, tomando el eje del anillo como el eje x
29. a) 383 MN/C alejándose b) 324 MN/C alejándose c) 80.7 MN/C alejándose d) 6.68 MN/C alejándose
33. $-21.6\mathbf{i}$ MN/C
37. a) 86.4 pC para cada uno
    b) 324 pC, 459 pC, 459 pC, 432 pC
    c) 57.6 pC, 106 pC, 154 pC, 96.0 pC
39.

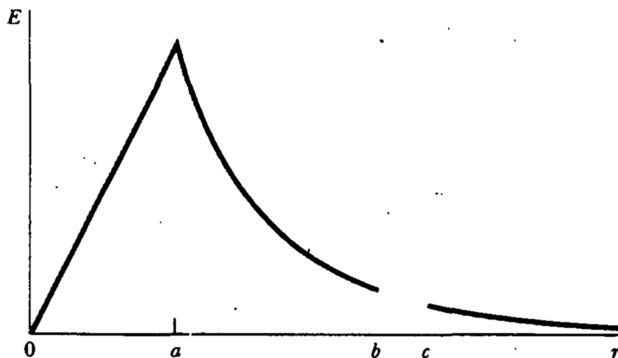


41. 4.39 Mm/s y 2.39 km/s
43. a) 61.4 Gm/s^2 b) 19.5 μs c) 11.7 m d) 1.20 fJ
45. K/ed en la dirección de movimiento
47. a) 111 ns b) 5.67 mm c) $(450\mathbf{i} + 102\mathbf{j})$ km/s
49. a) 36.9°, 53.1° b) 167 ns, 221 ns
51. a) 21.8 μm b) 2.43 cm
53. a) 10.9 nC b) 5.43 mN
55. 40.9 N a 263°
57. 26.7 μC
61. $-707\mathbf{j}$ mN
63. a) $\theta_1 = \theta_2$
65. b) La aceleración del objeto es una constante negativa por su desplazamiento desde el equilibrio.
    $T = (\pi 8^{-1/4})\ (mL^3/k_e qQ)^{1/2}$
67. a) $-(4\ k_e q/3a^2)\mathbf{j}$ b) (0, 2.00 m)
69. a) $\mathbf{F} = 1.90(k_e q^2/s^2)\ (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
    b) $\mathbf{F} = 3.29\ (k_e q^2/s^2)$ en la dirección que se aleja de los vértices opuestos diagonalmente
71. $(-1.36\mathbf{i} + 1.96\mathbf{j})$ kN/C

Capítulo 24

1. a) 858 N · m^2/C b) 0 c) 657 N · m^2/C
3. 4.14 MN/C
5. a) -2.34 kN · m^2/C b) $+2.34$ kN · m^2/C c) 0
7. q/ϵ_0
9. EhR
11. a) -6.89 MN · m^2/C b) El número de líneas que entran excede el número de las que salen por 2.91 veces o más.
13. a) $q/2\epsilon_0$ b) $q/2\epsilon_0$ c) El plano y el cuadrado parecen iguales a la carga.
15. a) $+Q/2\epsilon_0$ b) $-Q/2\epsilon_0$
17. 5.22 kN · m^2/C
19. -18.8 kN · m^2/C
21. 0 cuando $R < d$ y $\lambda L/\epsilon_0$ cuando $R > d$
23. a) 3.20 MN · m^2/C b) 19.2 MN · m^2/C c) La respuesta al inciso a) podría cambiar, pero la respuesta al inciso b) permanecería igual.
25. $-q/24\epsilon_0$
27. a) 0 b) 366 kN/C c) 1.46 MN/C d) 650 kN/C
29. $\mathbf{E} = \rho r/2\epsilon_0$ alejándose del eje
31. a) 0 b) 7.19 MN/C alejándose del centro
33. a) ~ 1 mN b) ~ 100 nC c) ~ 10 kN/C d) ~ 10 kN · m^2/C
35. a) 51.4 kN/C hacia afuera b) 646 N · m^2/C
37. 508 kN/C, hacia arriba
39. a) 0 b) 5 400 N/C hacia afuera c) 540 N/C hacia afuera
41. a) $+708$ nC/m^2 y -708 nC/m^2 b) $+177$ nC y -177 nC
43. 2.00 N
45. a) $-\lambda$, $+3\lambda$ b) $3\lambda/2\pi\epsilon_0 r$ radialmente hacia afuera

47. a) 80.0 nC/ m^2 en cada cara b) (9.04**k**) kN/C c) (− 9.04**k**) kN/C
49. a) 0 b) 79.9 MN/C radialmente hacia afuera c) 0 d) 7.35 MN/C radialmente hacia afuera
51. b) $Q/2\epsilon_0$ c) Q/ϵ_0
53. a) + 2Q b) radialmente hacia afuera c) $2k_eQ/r^2$ d) 0 e) 0 f) 3Q g) $3k_eQ/r^2$ radialmente hacia afuera h) $3Qr^3/a^3$ i) $3k_eQr/a^3$ radialmente hacia afuera j) − 3Q k) + 2Q l) Véase la parte media de la esta columna
55. a) $\rho r/3\epsilon_0$; $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$; 0; $Q/4\pi\epsilon_0 r^2$, todas radialmente hacia afuera b) $-Q/4\pi b^2$ y $+Q/4\pi c^2$
57. Para $r < a$, $\mathbf{E} = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$ radialmente hacia afuera. Para $a < r < b$, $\mathbf{E} = [\lambda + \rho\pi(r^2 - a^2)]/2\pi\epsilon_0 r$ radialmente hacia afuera. Para $r > b$, $\mathbf{E} = [\lambda + \rho\pi(b^2 - a^2)]/2\pi\epsilon_0 r$ radialmente hacia afuera



Capítulo 24, problema 53

59. a) σ/ϵ_0 alejándose de ambas placas b) 0 c) σ/ϵ_0 alejándose de ambas placas
61. c) $f = (1/2\pi)\ (k_e e^2/m_e R^3)^{1/2}$ d) 102 pm
65. $\mathbf{E} = a/2\epsilon_0$ radialmente hacia afuera
69. b) $\mathbf{g} = GM_E r/R_E^3$ radialmente hacia adentro

Capítulo 25

1. 1.35 MJ
3. a) 152 km/s b) 6.49 Mm/s
5. −0.502 V
7. 1.67 MN/C
9. − 38.9 V; el origen
11. a) 0.500 m b) 0.250 m c) 1.26 s d) 0.343 m
13. 40.2 kV
15. 0.300 m/s
17. a) F = 0 b) E = 0 c) 45.0 kV
19. a) − 27.3 eV b) − 6.81 eV c) 0
21. − 11.0 MV
25. $-5k_eq/R$
27. a) 10.8 m/s y 1.55 m/s b) más largo
29. 0.720 m, 1.44 m, 2.88 m. No. Los radios de las equipotenciales son inversamente proporcionales al potencial.
31. 27.4 fm
33. − 3.96 J
35. 22.8 k_eq^2/s
37. $\mathbf{E} = (-5 + 6xy)\ \mathbf{i} + (3x^2 - 2z^2)\mathbf{j} - 4yz\ \mathbf{k}$; 7.08 N/C
39. $$E_y = \frac{k_eQ}{\ell y}\left[1 - \frac{y^2}{\ell^2 + y^2 + \ell\sqrt{\ell^2 + y^2}}\right]$$
41. $-0.553k_eQ/R$
43. a) C/m^2 b) $k_e\alpha[L - d\ln(1 + L/d)]$
45. $(\sigma/2\epsilon_0)\ [(x^2 + b^2)^{1/2} - (x^2 + a^2)^{1/2}]$
47. 1.56×10^{12} electrones removidos
49. a) 0, 1.67 MV b) 5.85 MN/C alejándose, 1.17 MV c) 11.9 MN/C alejándose, 1.67 MV
51. a) 450 kV b) 7.50 μC,
53. 253 MeV
57. a) 6.00 m b) − 2.00 μC
59. a) $$\frac{k_eQ}{b}\ln\left(\frac{d + h + \sqrt{(d + h)^2 + R^2}}{d + \sqrt{d^2 + R^2}}\right)$$
b) $$\frac{k_eQ}{R^2h}\left[(d + h)\sqrt{(d + h)^2 + R^2} - d\sqrt{d^2 + R^2} + R^2\ln\left(\frac{d + h + \sqrt{(d + h)^2 + R}}{d + \sqrt{d^2 + R^2}}\right) - 2dh - h^2\right]$$
61. $k_eQ^2/2R$
63. $V_2 - V_1 = (-\lambda/2\pi\epsilon_0)\ \ln(r_2/r_1)$
65. a) Los campos son radiales. $E_A = 0$; $E_B = (89.9\ \text{V/m})/r^2$; $E_C = (-45\ \text{V/m})/r^2$ b) $V_A = 150$ V; $V_B = -450\ \text{V} + 89.9\ \text{V}/r$, $V_C = -45\ \text{V}/r$
67. a) $1.00\ \text{kV} - (1.41\ \text{kV/m})\ x - (1.44\ \text{kV})\ln\left(1 - \frac{x}{3\text{m}}\right)$ b) + 633 nJ
69. a) $E_r = 2k_ep\cos\theta/r^3$; $E_\theta = k_ep\ \text{sen}\ \theta/r^3$; sí; no b) $V = k_epy\ (x^2 + y^2)^{-3/2}$; $\mathbf{E} = 3k_epxy\ (x^2 + y^2)^{-5/2}\ \mathbf{i} + k_ep\ (2y^2 - x^2)\ (x^2 + y^2)^{-5/2}\mathbf{j}$
71. $$V = \pi k_eC\left[R\sqrt{x^2 + R^2} + x^2\ln\left(\frac{x}{R + \sqrt{x^2 + R^2}}\right)\right]$$
73. a) 1.42 mm b) 9.20 kV/m

Capítulo 26

1. a) 48.0 μC b) 6.00 μC
3. a) 1.33 μC/m^2 b) 13.3 pF
a) 5.00 μC sobre la esfera mayor y 2.00 μC sobre la esfera menor b) 89.9 kV
7. a) 11.1 kV/m hacia la placa negativa b) 98.3 nC/m^2 c) 3.74 pF d) 74.8 pC
9. 4.42 μm
11. a) 2.68 nF b) 3.02 kV
13. 1.23 kV
15. a) 15.6 pF b) 256 kV
17. a) 17.0 μF b) 9.00 V c) 45.0 μC y 108 μC
19. 6.00 pF y 3.00 pF
21. a) 5.96 μF b) 89.5 μC sobre el capacitor de 20 μF, 63.2 μC sobre el capacitor de 6 μF y 26.3 μC sobre los capacitores de 15 μF y 3 μF
23. 120 μC; 80.0 μC y 40.0 μC

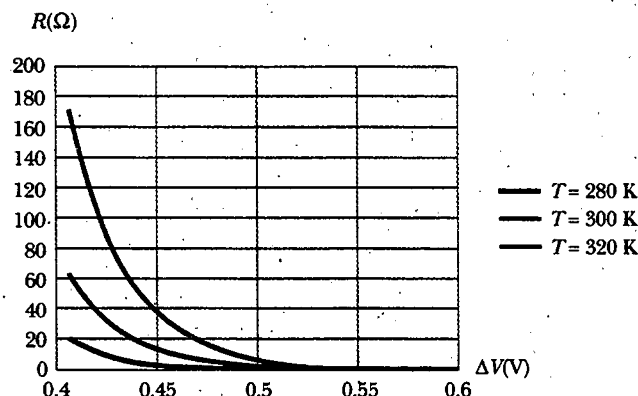
25. a) 400 μC b) 2.50 kN/m
27. 10
29. 83.6 μC,
31. a) 216 μJ b) 54.0 μJ
33. La energía almacenada se duplica.
37. 9.79 kg
39. 1.40 fm
41. a) 8.13 nF b), 2.40 kV
43. 1.04 m
45. a) 4.00 μF b) 8.40 μF c) 5.71 V y 48.0 μC
47. $4\pi\kappa_1\kappa_2 abc\epsilon_0/[\kappa_2 bc - \kappa_1 ab + (\kappa_1 - \kappa_2)\, ac]$
49. 22.5 V
51. b) – 8.78 MN/C · m; – 55.3i mN
57. 0.188 m^2
59. $\epsilon_0 A/(s-d)$
61. $1 + q/q_0$
63. a) $Q_0^2 d\,(\ell - x)/(2\ell^3\epsilon_0)$ b) $Q_0^2 d/(2\ell^3\epsilon_0)$ hacia la derecha c) $Q_0^2/(2\ell^4\epsilon_0)$ d) $Q_0^2/(2\ell^4\epsilon_0)$
65. 4.29 μF
67. 3.00 μF
69. b) $Q/Q_0 = \kappa$
71. 2/3
73. 19.0 kV
75. 3.00 μF

Capítulo 27

1. 7.50 × 10^{15} electrones
3. a) 0.632 $I_0\tau$ b) 0.999 95 $I_0\tau$ c) $I_0\tau$
5. 400 nA
7. a) 17.0 A b) 85.0 kA/m^2
9. a) 99.5 kA/m^2 b) 0.800 cm
11. a) 2.55 A/m^2 b) 5.31 × 10^{10} m^{-3} c) 1.20 × 10^{10} s
13. 500 mA
15. 6.43 A
17. a) 1.82 m b) 280 μm
19. a) 777 nΩ b) 3.28 μm/s
21. 1.56 R
23. 6.00 × 10^{-15}/Ω · m
25. 0.180 V/m
27. 21.2 nm
29. 1.44 × 10^3 °C
31. a) 31.5 nΩ · m b) 6.35 MA/m^2 c) 49.9 mA d) 659 μm/s e) 0.400 V
33. 0.125
35. 67.6°C
37. 5.00 A; 24.0 Ω
39. 28.9 Ω
41. 36.1%
43. a) 5.97 V/m b) 74.6 W c) 66.1 W
45. 0.833 W
47. 26.9 centavos/día
49. a) 184 W b) 461°C
51. ~$1
53. 25.5 años
57. Resistividad experimental = 1.47 $\mu\Omega$ · m ± 4%, en concordancia con 1.50 $\mu\Omega$ · m
59. a) 8.00i V/m b) 0.637 Ω c) 6.28 A d) 200i MA/m^2
61. 2 020°C,
63. a) 667 A b) 50.0 km
65.

Material	$\alpha' = \alpha/(1 - 20\alpha)$
Plata	4.1 × 10^{-3}/°C
Cobre	4.2 × 10^{-3}/°C
Oro	3.6 × 10^{-3}/°C
Aluminio	4.2 × 10^{-3}/°C
Tungsteno	4.9 × 10^{-3}/°C
Hierro	5.6 × 10^{-3}/°C
Platino	4.25 × 10^{-3}/°C
Plomo	4.2 × 10^{-3}/°C
Nicromo	0.4 × 10^{-3}/°C
Carbono	–0.5 × 10^{-3}/°C
Germanio	–24 × 10^{-3}/°C
Silicio	–30 × 10^{-3}/°C

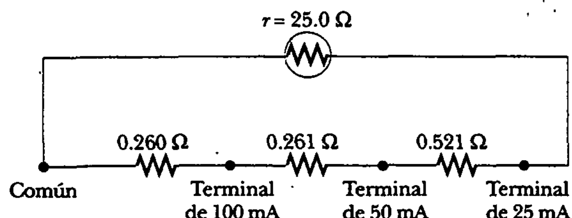
67. No. Los fusibles no deberían pasar más de 3.87 A.
71. Las gráficas son como sigue:



Capítulo 28

1. a) 6.73 Ω b) 1.97 Ω
3. a) 4.59 Ω b) 8.16%
5. 12.0 Ω
7. Puede poner los tres resistores en paralelo.
9. a) 227 mA b) 5.68 V
11. a) 75.0 V b) 25.0 W, 6.25 W, y 6.25 W; 37.5 W
13. 1.00 kΩ
15. 14.3 W, 28.5 W, 1.33 W, 4.00 W
17. a) El resistor de 11 Ω b) 148 W = 148 W c) El resistor de 22 Ω d) 33.0 W = 33.0 W e) La configuración en paralelo
19. 846 mA hacia abajo en el resistor de 8 Ω; 462 mA hacia abajo en la rama media; 1.31 A hacia arriba en la rama del lado derecho.
a) – 222 J y 1.88 kJ b) 687 J, 128 J, 25.6 J, 616 J, 205 J c) 1.66 kJ
23. 50.0 mA desde a hasta e
25. Marcha, 171 A; batería, 0.283 A
27. a) 909 mA b) – 1.82 V
29. a) 5.00 s b) 150 μC c) 4.06 μA
31. $U_0/4$
33. a) 6.00 V b) 8.29 μs
35. 1.60 MΩ
37. 0.982 s

39. 16.6 kΩ
41. 0.302 Ω
43. 0.588 A
45. 1.36 V
47. a) Calentador, 12.5 A; tostador, 6.25 A; parrilla eléctrica, 8.33 A b) No; juntos requerirían 27.1 A.
49. 15.5 A
51. 2.22 h
53. 4.00 V, con a en el potencial más elevado
55. 6.00 Ω; 3.00 Ω
57. a) $R \to \infty$ b) $R \to 0$ c) $R = r$
59. a) $R \leq 1050\ \Omega$ b) $R \geq 10.0\ \Omega$
61. a) 9.93 μC b) 33.7 nA c) 334 nW d) 337 nW
63. a) 40.0 W b) 80.0 V, 40.0 V, 40.0 V
65. Coloque en paralelo con el galvanómetro una rama que consta de tres resistores en serie, con contactos entre ellos del modo siguiente:



67. a) 0 en el resistor de 3 kΩ y 333 μA en los otros b) 50.0 μC c) 278 $\mu A e^{-t/180\ ms}$ d) 290 ms
71. 48.0 W
73. a) $\mathcal{E}^2/3R$ b) $3\mathcal{E}^2/R$ c) en la conexión en paralelo

Capítulo 29

1. a) hacia arriba b) hacia usted, afuera del plano de la página c) no hay desviación d) hacia el plano de la página
3. dirección z negativa
5. $(-20.9\mathbf{j})$ mT
7. 8.93×10^{-30} N hacia abajo, 1.60×10^{-17} N hacia arriba, 4.80×10^{-17} N hacia abajo
9. 48.8° o 131°
11. 2.34 aN
13. 0.245 T al este
15. a) 4.73 N b) 5.46 N c) 4.73 N
17. 196 A al este
19. 1.07 m/s
21. $2\pi r I B$ sen θ hacia arriba
23. a) 5.41 mA · m² b) 4.33 mN · m
25. 9.98 N · m; en el sentido de las manecillas del reloj visto hacia abajo desde arriba
27. a) 80.1 mN · m b) 0.104 N · m c) 0.132 N · m d) La espira circular experimenta un momento de torsión mayor.
29. a) mínimo: con su extremo norte apuntando al norte a 48.0° bajo la horizontal; máximo: con su extremo norte apuntando hacia el sur a 48.0° sobre la horizontal b) 1.07 μJ
31. a) 49.7 aN al sur b) 1.29 km
33. 115 keV
35. $r_\alpha = r_d = \sqrt{2}r_p$
37. 4.99×10^8 rad/s
39. 7.88 pT
41. 244 kV/m
43. 0.278 m
45. a) 4.31×10^7 rad/s b) 51.7 Mm/s
47. 70.1 mT
49. 3.70×10^{-9} m³/C
51. 43.2 μT
53. a) 179 ps b) 351 keV
55. a) La corriente eléctrica experimenta una fuerza magnética.
57. a) B_x es indeterminado; B_y es cero; B_z es $-F_i/ev_i$ b) $-F_i\mathbf{j}$ c) $-F_i\mathbf{j}$
59. a) $(3.52\mathbf{i} - 1.60\mathbf{j})$ aN b) 24.4°
61. 0.588 T
63. 19.6 mT
65. 438 kHz
67. 3.70×10^{-24} N · m
69. a) 0.501 m b) 45.0°
71. a) 1.33 m/s b) No. Los iones positivos que se mueven hacia usted en el campo magnético a la derecha experimentan una fuerza magnética ascendente y migran hacia arriba en el vaso sanguíneo. Los iones negativos que se mueven hacia usted experimentan una fuerza magnética descendente y se acumulan en el fondo de esta sección del vaso. Por tanto, ambas especies pueden participar en la generación de la fem.

Capítulo 30

1. 12.5 T
3. a) 28.3 μT dentro de la página b) 24.7 μT dentro de la página
5. $\mu_0 I/4\pi x$ dentro de la página
7. 58.0 μT dentro de la página
9. 26.2 μT dentro de la página
11. $\dfrac{\mu_0 I}{12}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$ afuera de la página
13. $0.475\mu_0 I/R$ dentro de la página
15. $-13.0\mathbf{j}$ μT
17. $-27.0\mathbf{i}$ μN
19. 20.0 μT hacia el fondo de la página
21. 200 μT hacia la parte superior de la página; 133 μT hacia el fondo de la página
23. a) 3.60 T b) 1.94 T
25. a) 6.34 mN/m hacia adentro b) mayor
27. a) $\mu_0 b r_1^2/3$ b) $\mu_0 b R^3/3r_2$
29. 31.8 mA
31. 464 mT
33. a) 3.13 mWb b) 0
35. a) $B\pi R^2 \cos\theta$ b) $B\pi R^2 \cos\theta$
37. a) 11.3 GV · m/s b) 0.100 A
39. 0.191 T
41. 150 μT · m²
43. 2.62 MA/m
45. b) 6.45×10^4 K · A/T · m

47. a) 8.63×10^{45} electrones b) 4.01×10^{20} kg
49. 2.00 GA al oeste
51. $\sim 10^{-5}$ T o 10^{-6} T; en el orden de un décimo de largo
53. $\frac{\mu_0 I}{2\pi w} \ln\left(1 + \frac{w}{b}\right) \mathbf{k}$
55. 143 pT alejándose a lo largo del eje
59. a) 2.46 N hacia arriba b) 107 m/s^2 hacia arriba
61. a) 274 μT b) $-$ 274**j** μT c) 1.15**i** mN d) 0.384**i** m/s^2 e) la aceleración es constante. f) 0.999**i** m/s
63. a) $\mu_0 \sigma v/2$ b) afuera del plano de la página, paralela al eje de rodamiento
65. 28.8 mT
67. $4\sqrt{2}/\pi^2$
71. $\frac{\mu_0 I}{4\pi}(1 - e^{-2\pi})$ afuera del plano de la página
73. $\rho\mu_0\omega R^2/3$
75. a) $\frac{\mu_0 I}{\pi r}\frac{(2r^2 - a^2)}{(4r^2 - a^2)}$ a la izquierda

b) $\frac{\mu_0 I}{\pi r}\frac{(2r^2 - a^2)}{(4r^2 - a^2)}$ hacia la parte superior de la página

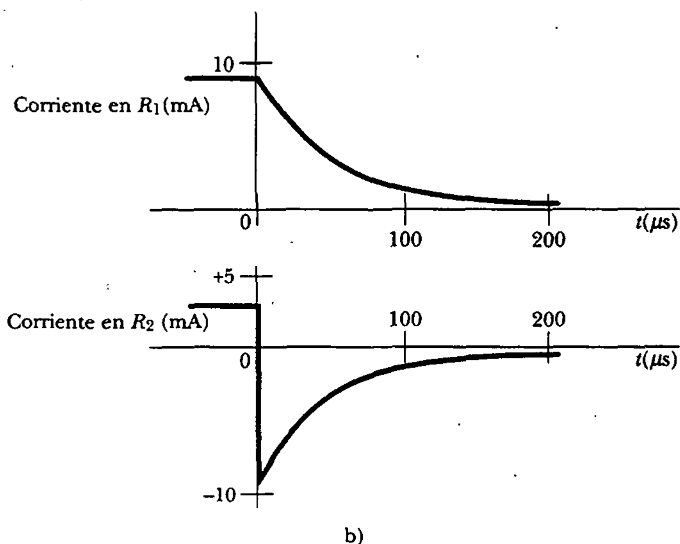
Capítulo 31

1. 500 mV
3. 9.82 mV
5. 160 A
7. a) 1.60 A en sentido contrario al de las manecillas del reloj b) 20.1 μT c) hacia arriba
9. a) $(\mu_0 IL/2\pi)$ ln $(1 + w/h)$ b) $-$ 4.80 μV; la corriente está en sentido contrario al de las manecillas del reloj
11. 283 μA hacia arriba
13. (68.2 mV)$e^{-1.6t}$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj
15. 272 m
17. (0.422 V) cos ωt
19. 0.880 C
21. a) 3.00 N a la derecha b) 6.00 W
23. 0.763 V con la punta del ala izquierda positiva
25. 2.83 mV
a) $F = N^2B^2\ w^2v/R$ a la izquierda b) 0
c) $F = N^2B^2\ w^2v/R$ a la izquierda
29. negativa
31. 145 μA
33. 1.80 mN/C hacia arriba y a la izquierda, perpendicular a r_1
35. a) (9.87 mV/m)cos($100\pi t$) b) en sentido de las manecillas del reloj
37. a) 7.54 kV b) El plano de la bobina es paralelo a **B**.
39. (28.6 mV)sen($4\pi t$)
41. a) 0.640 N · m b) 241 W
43. a) (8.00 mT · m^2)cos(377t) b) (3.02 V)sen(377t) c) (3.02 A)sen(377t) d) (9.10 W)sen^2(377t) e) (24.1 mN · m)sen^2(377t)
45. b) Una R más grande forma una corriente menor, de modo que la espira debe viajar más rápido para mantener igualdad de la fuerza magnética y el peso. c) La fuerza magnética es proporcional al producto del campo magnético y la corriente, mientras la corriente es proporcional al campo magnético. Si B se reduce a la mitad, se debe cuadruplicar la rapidez para compensar.
47. ($-$ 2.87**j** + 5.75**k**) Gm/s^2
49. $-$ 7.22 mV cos(2π 523 t/s)
51. a) 43.8 A b) 38.3 W
53. a) 3.50 A y 1.40 A b) 34.3 W c) 4.29 N
57. 1.20 μC
59. a) 0.900 A b) 0.108 N c) b d) no
61. a) $a\pi r^2$ b) $-$ $b\pi r^2$ c) $-$ $b\pi r^2/R$ d) $b^2\pi^2r^4/R$
63. a) 36.0 V b) 600 mWb/s c) 35.9 V d) 4.32 N · m
65. $-$ 10.2 μV
67. $\mu_0 I\ell vw/2\pi Rr(r + w)$
69. 6.00 A
71. a) (1.19 V)cos($120\pi t$) b) 88.5 mW
73. ($-$ 87.1 mV)cos($200\pi t + \phi$)
75. $-$ 6.75 V

Capítulo 32

1. 19.5 mV
3. 100 V
5. 240 nT · m^2
7. (18.8 V) cos(377t)
9. $-$ 0.421 A/s
11. a) 360 mV b) 180 mV c) 3.00 s
13. a) 15.8 μH b) 12.6 mH
15. $\mathcal{E}_0/k^2L$
17. a) 0.139 s b) 0.461 s
19. a) 2.00 ms b) 0.176 A c) 1.50 A d) 3.22 ms
21. a) 0.800 b) 0
23. a) 6.67 A/s b) 0.332 A/s
25. (500 mA) (I $-$ $e^{-10t/s}$), 1.50 A $-$ (0.25 A) $e^{-10t/s}$
27. 0 para $t < 0$; (10 A) $(1 - e^{-10\,000t})$ para $0 < t < 200$ μs; (63.9 A) $e^{-10\,000t}$ para $t > 200$ μs
29. a) 5.66 ms b) 1.22 A c) 58.1 ms
31. 0.064 8 J
33. 2.44 μJ
35. 44.2 nJ/m^3 para el campo **E** y 995 μJ/m^3 para el campo **B**
37. a) 20.0 W b) 20.0 W c) 0 d) 20.0 J
39. $2\pi B_0^2R^3/\mu_0 = 2.70 \times 10^{18}$ J
41. 1.00 V
43. a) 18.0 mH b) 34.3 mH c) $-$ 9.00 mV
45. b) 3.95 nH
47. $(L_1L_2 - M^2)/(L_1 + L_2 - 2M)$
49. 20.0 V
51. 608 pF
53. a) 135 Hz b) 119 μC c) $-$ 114 mA
55. a) 6.03 J b) 0.529 J c) 6.56 J
57. a) 4.47 krad/s b) 4.36 krad/s c) 2.53%
59. $0.693(2L/R)$ b) $0.347(2L/R)$
61. a) $-$ 20.0 mV b) $-$ (10.0 MV/s^2)t^2 c) 63.2 μs
63. $\frac{Q}{2N}\sqrt{\frac{3L}{C}}$
65. a) $L \approx (\pi/2)N^2\mu_0 R$ b) $\sim$100nH c) $\sim$1 ns
71. a) 72.0 V; b

b)



b)

c) 75.2 μs

73. 300 Ω

75. a) Crea un campo magnético. b) La larga área rectangular estrecha entre los conductores encierra todo el flujo magnético.

77. a) 62.5 GJ b) 2 000 N

79. a) 2.93 mT hacia arriba b) 3.42 Pa c) en sentido de las manecillas del reloj d) hacia arriba e) 1.30 mN

Capítulo 33

1. $\Delta v(t) = (283\text{V})\ \text{sen}(628t)$

3. 2.95 A, 70.7 V

5. 14.6 Hz

7. 3.38 W

9. a) 42.4 mH b) 942 rad/s

11. 5.60 A

13. 0.450 T · m²

15. a) 141 mA b) 235 mA

17. 100 mA

19. a) 194 V b) la corriente adelanta por 49.9°

21. a) 78.5 Ω b) 1.59 kΩ c) 1.52 kΩ d) 138 mA e) − 84.3°

23. a) 17.4° b) el voltaje adelanta la corriente

25. a) 146 V b) 213 V c) 179 V d) 33.4 V

27. a) 124 nF b) 51.5 kV

29. 8.00 W

31. a) 16.0 Ω b) − 12.0 Ω

33. 132 mm

35. $11\ (\Delta V)^2/14R$

37. 1.82 pF

39. 242 mJ

41. 0.591 y 0.987; el circuito en el problema 23

43. 687 V

45. 87.5 Ω

47. a) 29.0 kW b) 5.80×10^{-3} c) Si el generador estuviese limitado a 4 500 V, no más de 17.5 kW podrían entregarse a la carga, nunca 5 000 kW.

49. a) 613 μF b) 0.756

51. a) 580 μH y 54.6 μF b) 1 c) 894 Hz d) ΔV_{afuera} adelanta a $\Delta V_{\text{adentro}}$ por 60.0° a 200 Hz; ΔV_{afuera} y $\Delta V_{\text{adentro}}$ están en fase a 894 Hz; ΔV_{afuera} se atrasa a $\Delta V_{\text{adentro}}$ por 60.0° a 4 000 Hz. e) 1.56 W, 6.25 W, 1.56 W f) 0.408

53. 0.317

55. 56.7 W

57. a) 225 mA b) 450 mA

59. a) El circuito a) es un filtro pasaaltos, y el circuito b) es un filtro pasabajos.

b) $$\frac{\Delta V_{\text{afuera}}}{\Delta V_{\text{adentro}}} = \frac{(R_L^2 + X_L^2)^{1/2}}{\left[R_L^2 + (X_L - X_C)^2\right]^{1/2}} \quad \text{para el circuito a)}$$

$$\frac{\Delta V_{\text{afuera}}}{\Delta V_{\text{adentro}}} = \frac{X_C}{\left[R_L^2 + (X_L - X_C)^2\right]^{1/2}} \quad \text{para el circuito b)}$$

61. $\sim 10^2$ o 10^3 A

63. a) 200 mA; el voltaje adelanta por 36.8° b) 40.0 V; $\phi = 0°$ c) 20.0 V; $\phi = -90.0°$ d) 50.0 V; $\phi = +90.0°$

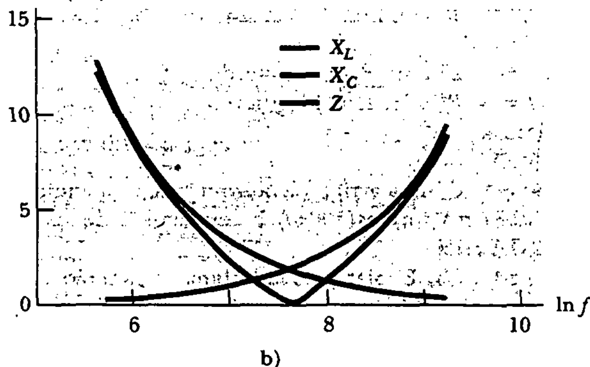
65. b) 31.6

67. a) 919 Hz b) 1.50 A, 1.60 A, 6.73 mA c) 2.19 A d) la corriente está atrasada por $\phi = -46.7°$

69. a)

f (Hz)	X_L (Ω)	X_C (Ω)	Z (Ω)
300	282	12 600	12 300
600	565	6 290	5 720
800	754	4 710	3 960
1 000	942	3 770	2 830
1 500	1 410	2 510	1 100
2 000	1 880	1 880	40.0
3 000	2 830	1 260	1 570
4 000	3 770	942	2 830
6 000	5 660	629	5 030
10 000	9 420	377	9 040

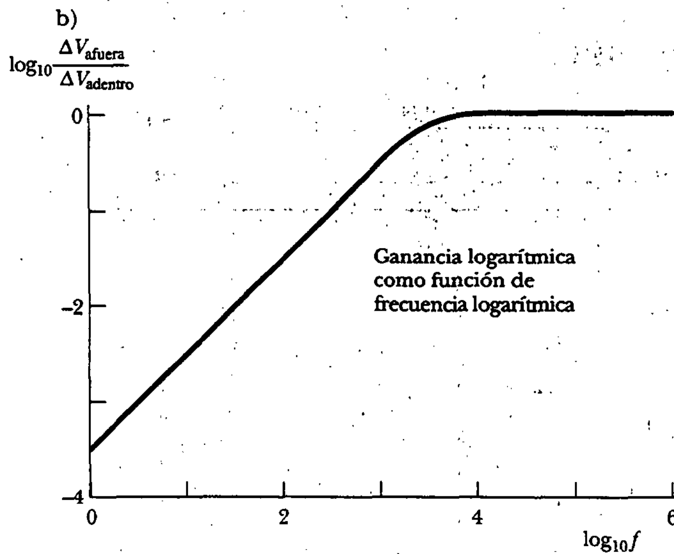
b)



b)

71. a) 1.84 kHz

b)



Capítulo 34

1. 2 680 A.D
3. 733 nT
5. a) 6.00 MHz b) 73.3 nT ($-\mathbf{k}$) c) $\mathbf{B} = (-73.3 \text{ nT}) \cos(0.126x - 3.77 \times 10^7 t)\mathbf{k}$
7. a) 0.333 μT b) 0.628 μm c) 477 THz
9. 75.0 MHz
11. 3.33 μJ/m^3
13. 307 μW/m^2
15. 3.33×10^3 m^2
17. a) 332 kW/m^2 radialmente hacia adentro b) 1.88 kV/m y 222 μT
19. 29.5 nT
21. a) 2.33 mT b) 650 MW/m^2 c) 510 W
23. a) 4.97 kW/m^2 b) 16.6 μJ/m^3
25. 83.3 nPa
27. a) 5.36 N b) 8.93×10^{-4} m/s^2 c) 10.7 días
29. a) 1.90 kN/C b) 50.0 pJ c) 1.67×10^{-19} kg · m/s
31. a) 11. 3 kJ b) 1.13×10^{-4} kg · m/s
33. a) 2.26 kW b) 4.71 kW/m^2
35. a) alejada a lo largo del bisector perpendicular del segmento de línea que une las antenas b) a lo largo de las extensiones del segmento de recta que une las antenas
37. 56.2 m
39. a) radio, radio, radio, microonda, infrarrojo, ultravioleta, rayo X, rayo γ, rayo γ; b) radio, radio, microonda, infrarrojo, ultravioleta o rayo X, rayo X o γ, rayo γ, rayo γ
41. 545 THz
43. a) 6.00 pm b) 7.50 cm
45. La radioaudiencia lo escucha primero, 8.41 ms antes que las personas en la sala de noticias.
47. a) 186 m a 556 m b) 2.78 m a 3.41 m
49. a) 3.77×10^{26} W b) 1.01 kV/m y 3.35 μT
51. a) $2\pi^2 r^2 f B_{máx} \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre el campo magnético y la normal la espira b) La espira debería estar en el plano vertical que contiene la línea de visión al transmisor.
53. a) 6.67×10^{-16} T b) 5.31×10^{-17} W/m^2 c) 1.67×10^{-14} W d) 5.56×10^{-23} N
55. a) $\frac{1}{2}\mu_0 n^2 r i \frac{di}{dt}$ radialmente hacia adentro b) $\mu_0 \pi n^2 r^2 \ell i \frac{di}{dt}$ c) $(\Delta V) i$
57. 95.1 mV/m
59. a) $B_{máx} = 583$ nT, $k = 419$ rad/m, $\omega = 12.6$ Trad/s, el plano xz b) $S_{prom} = \frac{1}{2} S_{máx} = 40.6$ W/m^2 c) 271 nPa d) 406 nm/s^2
61. a) 22.6 h b) 30.6 s
63. a) 8.32×10^7 W/m^2 b) 1.05 kW
65. a) 625 kW/m^2 b) 21.7 kN/C, 72.4 μT c) 17.8 min
67. b) 17.6 Tm/s^2, 1.75×10^{-27} W c) 1.80×10^{-24} W
69. 3.00×10^{-2} grados
71. $\epsilon_0 E^2 A / 2m$

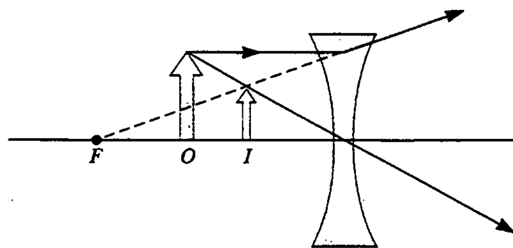
Capítulo 35

1. 299.5 Mm/s
3. 114 rad/s
5. 25.5°, 442 nm
7. 19.5° sobre el horizonte
9. a) 181 Mm/s b) 225 Mm/s c) 136 Mm/s
11. 30.0° y 19.5° al entrar; 19.5° y 30.0° al salir
13. 3.39 m
15. seis veces desde el espejo 1 y cinco veces desde el espejo 2
17. 106 ps
19. 6.39 ns
21. a) 58.9° b) sólo si $\theta_1 = 0$
23. a) 66.8 μs b) 0.250% más largo
25. 0.171°
27. 86.8°
29. 4.61°
31. 27.9°
33. 18.4°
35. a) 24.4° b) 37.0° c) 49.8°
37. 1.000 08
39. 62.4°
41. 1.08 cm < d < 1.17 cm
43. La luz incidente desde arriba viaja hacia abajo del plástico. Si el índice de refracción del plástico es mayor que 1.41, los rayos cerca de la dirección a la vertical son totalmente reflejados desde las paredes laterales de la placa y desde ambas caras en el fondo del plástico, donde no esté inmerso en gasolina. Esta luz regresa hacia arriba dentro del plástico y lo hace parecer brillante. Donde el plástico está inmerso en gasolina, la reflexión interna total se frustra, y la propagación descendente de la luz pasa desde el plástico hacia afuera, a la gasolina. Poca luz se refleja hacia arriba, y el medidor aparece oscuro.
45. 77.5°
47. 2.27 m
49. a) 0.172 mm/s b) 0.345 mm/s c) Hacia el norte a 50.0° bajo la horizontal d) Hacia el norte a 50.0° bajo la horizontal
51. a) 1.76×10^7 b) 3.25×10^{-6} grados
53. 62.2%
55. 82 reflexiones
57. b) 68.5 %
59. 27.5°
61. a) Siempre ocurre. b) 30.3° c) No puede ocurrir.

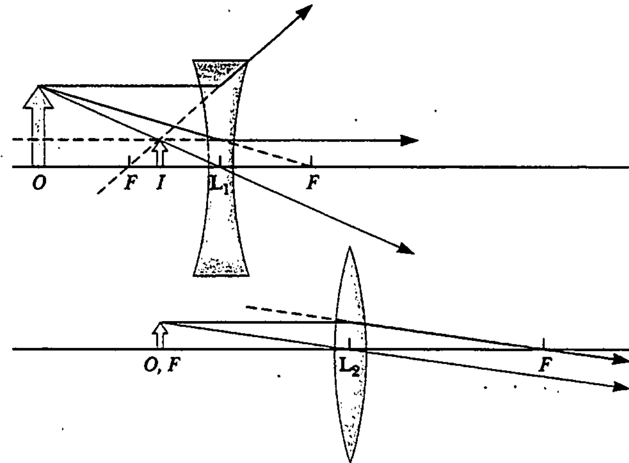
63. 2.37 cm
67. a) $n = [1 + (4t/d)^2]^{1/2}$ b) 2.10 cm c) violeta
a) 1.20 b) 3.40 ns

Capítulo 36

1. $\sim 10^{-9}$ s más joven
3. 2′11″
5. 10.0 pies, 30.0 pies, 40.0 pies
7. 0.267 m tras el espejo; virtual, vertical, disminuida; M = 0.026 7
9. a) − 12.0 cm; 0.400 b) − 15.0 cm; 0.250 c) vertical
11. a) q = 45.0 cm; M = − 0.500 b) q = − 60.0 cm; M = 3.00 c) La imagen a) es real, invertida y disminuida. La imagen b) es virtual, vertical y alargada. Los diagramas de rayos son como las figuras 36.15a y 36.15b, respectivamente.
13. a) un espejo cóncavo con 2.08 m de radio de curvatura b) 1.25 m desde el objeto
15. a) 15.0 cm b) 60.0 cm
17. a) Una imagen real se mueve desde +0.600 m al infinito, luego una imagen virtual se mueve desde −∞ a 0. b) 0.639 s y 0.782 s
19. 38.2 cm bajo la superficie superior del hielo
21. 8.57 cm
23. a) 45.0 cm b) − 90.0 cm c) − 6.00 cm
25. dentro del tazón a −9.01 cm
27. a) 16.4 cm b) 16.4 cm
29. a) 650 cm desde el lente en el lado opuesto del objeto; real, invertida, alargada b) 600 cm desde el lente en el mismo lado del objeto; virtual, vertical, alargada
31. 2.84 cm
33. a) ya sea 9.63 cm o 3.27 cm b) 2.10 cm
37. a) −12.3 cm, a la izquierda del lente b) 0.615 c)



39. a) 4.00 m y 1.00 m b) Mientras ambas imágenes son reales e invertidas, la primera tiene ampliación de −0.250 y la segunda de −4.00.
41. 2.18 mm alejada de la película plana
43. 21.3 cm
45. −4.00 dioptrías; una lente divergente
47. 3.50
49. −575
51. a) − 800 b) de cabeza
53. a) virtual b) al infinito c) 15.0 cm, − 5.00 cm
55. − 40.0 cm
57. 160 cm a la izquierda de la lente; invertida; M = −0.800
59. 25.3 cm a la derecha del espejo; virtual, vertical; derecha; alargada 8.05 veces
61. 0.107 m a la derecha del vértice de la cara hemisférica
63. 8.00 cm



65. 1.50 m frente al espejo; 1.40 cm (invertido)
67. a) 30.0 cm y 120 cm b) 24.0 cm c) real, invertida, disminuida, con M = −0.250
69. −75.0
71. a) 44.6 dioptrías b) 3.03 dioptrías
73. a) 20.0 cm a la derecha del segundo lente; M = −6.00 b) invertida c) 6.67 cm a la derecha del segundo lente; M = −2.00; invertido

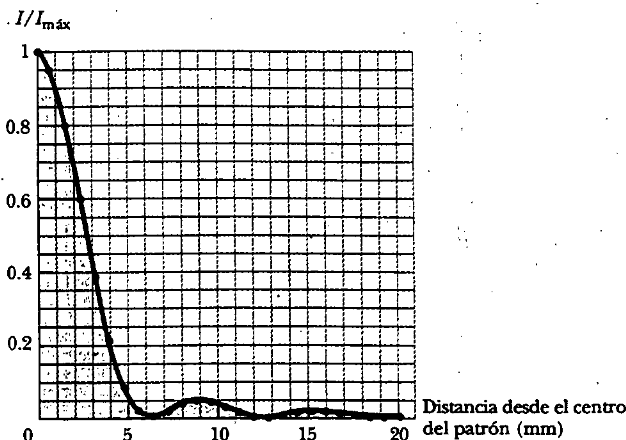
Capítulo 37

1. 1.58 cm
3. a) 55.7 m b) 124 m
5. 1.54 mm
7. a) 2.62 mm b) 2.62 mm
9. 11.3 m
11. a) 13.2 rad b) 6.28 rad c) 0.012 7 grados d) 0.059 7 grados
13. a) 1.93 μm b) 3.00 λ c) máximo
15. 48.0 μm
17. a) 7.95 rad b) 0.453
19. a) y b) 19.7 kN/C a 35.0° c) 9.36 kN/C a 169°
21. 10.0 sen$(100\pi t + 0.927)$
23. 26.2 sen$(\omega t + 36.6°)$
25. $\pi/2$
27. 360°/N
29. a) verde b) violeta
31. 0.500 cm
33. Ninguna reflexión máxima en el espectro visible
35. 290 nm
37. 4.35 μm
39. 1.20 mm
41. 39.6 μm
43. 1.000 369
45. 1.25 m
47. $\lambda/2(n-1)$
49. 5.00 km²
51. 3.58°
53. 421 nm
55. 113 franjas oscuras

59. a) $2(4h^2 + d^2)^{1/2} - 2d$ b) $(4h^2 + d^2)^{1/2} - d$
61. $y' = (n - 1)tL/d$
63. a) 70.6 m b) 136 m
65. 7.99 sen (ωt + 4.44 rad)
69. 0.505 mm

Capítulo 38

1. 4.22 mm
3. 0.230 mm
5. Tres máximos, a 0° y cerca de 46° a la izquierda y derecha
7. 0.016 2
11. 1.00 mrad
13. 3.09 m
15. 13.1 m
17. 1.90 m si la longitud de onda predominante es 650 nm
19. 105 m
21. 2.10 m
23. 7.35°
25. 5.91° en primer orden, 13.2° en segundo orden, 26.5° en tercer orden
27. a) 478.7 nm, 647.6 nm, y 696.6 nm b) 20.51°, 28.30°, y 30.66°
29. a) 12 000, 24 000, 36 000 b) 11.1 pm
31. a) 2 800 líneas b) 4.72 μm
33. a) 5 órdenes b) 10 órdenes en la región de longitud de onda corta
35. 93.4 pm
37. 14.4°
39. 31.9°
41. 3/8
43. a) 54.7° b) 63.4° c) 71.6°
45. 60.5°
47. 36.9° sobre el horizonte
49. a) 6 b) 7.50°
51. 632.8 nm
53. a) 25.6° b) 19.0°
55. 0.244 rad = 14.0°
57. a) 3.53×10^3 líneas por centímetro b) 11 máximos
59. 15.4
61. a) 41.8° b) 0.593 c) 0.262 m
63. b) 15.3 μm
65. $a = 99.5$ μm ± 1%



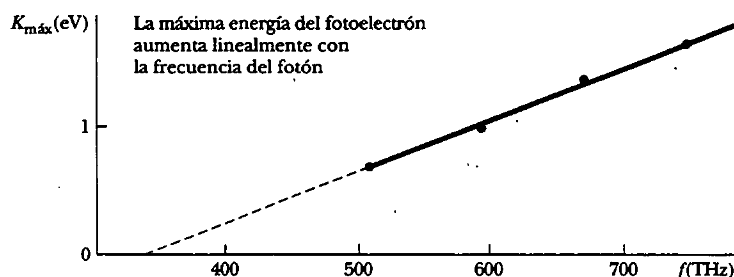
67. $\phi = 1.391\ 557\ 4$ después de 17 pasos o menos
69. b) 0.428 mm

Capítulo 39

5. 0.866c
7. 64.9/min; 10.6/min
9. 1.54 ns
11. 0.800c
13. a) 2.18 μs b) 649 m
15. 0. 789c
17. a) 20.0 m b) 19.0 m c) 0.312c
19. 1.13×10^4 Hz
21. b) 0.050 4c
23. 0.960c
25. 0.357c
27. a) 2.73×10^{-24} kg · m/s b) 1.58×10^{-22} kg · m/s c) 5.64×10^{-22} kg · m/s
29. 4.50×10^{-14}
31. 0.285c
33. 1.63×10^3 MeV/c
35. a) 939 MeV b) 3.01 GeV c) 2.07 GeV
37. 18.4 g/cm^3
41. a) 0.302c b) 4.00 f J
43. 3.88 MeV y 28.8 MeV
45. 3.18×10^{-12} kg, no detectable
47. 0.842 kg
49. 4.19×10^9 kg/s
53. a) unos cien segundos b) $\sim 10^8$ km
55. 0.712%
57. a) 0.946c b) 0.160 años luz c) 0.114 años d) 7.50×10^{22} J
59. a) 76.0 min b) 52.1 min
61. Sí, con 18.8 m para pasar
63. b) Para u pequeña comparada con c, la aceleración relativista concuerda con la expresión clásica. Conforme u tiende a c, la aceleración tiende a cero; por tanto, la rapidez del objeto nunca puede alcanzar o sobrepasar la rapidez de la luz.
c) Realice $\int(1 - u^2/c^2)^{-3/2}du = (qE/m)\int dt$ para obtener $u = qEct(m^2c^2 + q^2E^2t^2)^{-1/2}$ y luego $\int dx = \int qEct(m^2c^2 + q^2E^2t^2)^{-1/2}dt$ para obtener $x = (c/qE)[(m^2c^2 + q^2E^2t^2)^{1/2} - mc]$.
65. a) 6.67 ks b) 4.00 ks
67. a) 0.800c b) 7.50 ks c) 1.44 Tm, – 0.385c d) 12.5 ks
69. a) 0.544c, 0.866c b) 0.833 m
71. 0.185c = 55.4 Mm/s
73. 6.71×10^8 kg

Capítulo 40

1. 5.18×10^3 K
3. a) 999 nm b) La región infrarroja del espectro es mucho más ancha que la región visible, y la función de distribución espectral es más alta en el infrarrojo.
5. a) 70.9 kW b) 580 nm c) 7.99×10^{10} W/m d) 9.42×10^{-1226} W/m e) 1.00×10^{-227} W/m f) 5.44×10^{10} W/m g) 7.38×10^{10} W/m h) 0.260 W/m i) 2.60×10^{-9} W/m j) ≈20 kW



Capítulo 40, problema 65a)

7. a) 2.57 eV b) 12.8 μeV c) 191 neV.
d) 484 nm (visible), 9.68 cm y 6.52 m (ondas de radio)
9. 2.27×10^{30} fotones/s
11. 1.34×10^{31}
15. a) 296 nm, 1.01 PHz b) 2.71 V
17. a) sólo litio b) 0.808 eV
19. a) 1.90 eV b) 0.216 V
21. 148 días; absurdamente largo
23. a) El efecto Doppler aumenta la frecuencia incidente sobre el metal. b) 3.87 eV c) 8.78 eV
25. a) 488 fm b) 268 keV c) 31.5 keV
27. 70.1°
29. a) 43.0° b) 602 keV, 3.21×10^{-22} kg · m/s
c) 278 keV, 3.21×10^{-22} kg · m/s
31. a) 33.0° b) 0.785c
33. a) 2.88 pm b) 101°
37. a) 5 b) no; no
39. 634 nm, rojo
41. a) 0.212 nm b) 9.95×10^{-25} kg · m/s
c) 2.11×10^{-34} kg · m²/s d) 3.40 eV e) – 6.80 eV
f) – 3.40 eV
43. a) 3.03 eV b) 410 nm c) 732 THz
47. 97.5 nm
49. a) $E_n = -54.4$ eV$/n^2$ para $n = 1, 2, 3,...$
b) 54.4 eV
53. 397 fm
55. a) 0.709 nm b) 414 nm
57. a) ~ 100 MeV o más b) No. Con energía cinética mucho mayor que la magnitud de su energía potencial eléctrica negativa, el electrón escaparía inmediatamente.
59. b) No. $\lambda^{-2} + \lambda_C^{-2}$ no puede ser igual a λ^{-2}.
61. $c/\sqrt{2}$ = 212 Mm/s
63. 1.36 eV
65. a) Véase la parte alta de la página.
b) 6.4×10^{-34}J · s ± 8% c) 1.4 eV
67. Las partículas están separadas por $r_n = (0.106 \text{ nm})n^2$ y $E_n = -6.80$ eV$/n^2$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$
69. La frecuencia clásica es $4\pi^2 m_e k_e^2 e^4 / h^3 n^3$.

Capítulo 41

1. a) 993 nm b) 4.97 mm c) Si su detección forma parte de un patrón de interferencia, el neutrón debe haber atravesado ambas rendijas. Si se prueba a ver por cuál rendija pasa un neutrón particular, no formará parte del patrón de interferencia.
3. b) 907 fm
5. a) 15.1 keV b) 124 keV
7. A 1.00° sobre ambos lados del máximo central
9. Dentro de 1.16 mm para el electrón, 5.28×10^{-32} m para la bala
11. 1.16 Mm/s
13. b) 0.519 fm
15. a) 126 pm b) 5.27×10^{-24} kg · m/s c) 95.5 eV
17. a) n

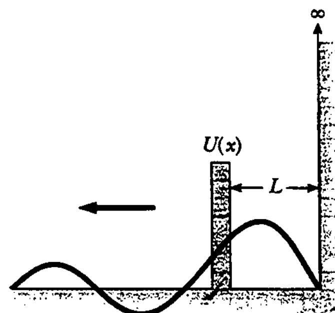
4 ———— 603 eV

3 ———— 339 eV

2 ———— 151 eV

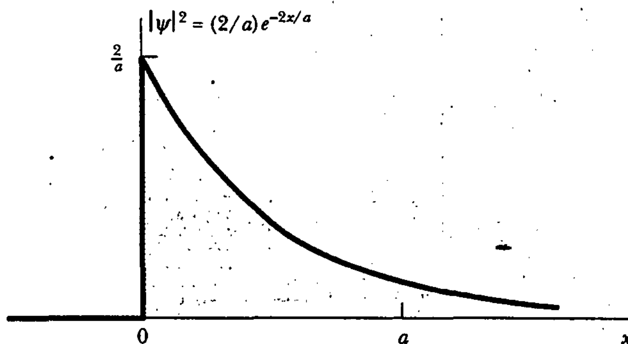
1 ———— 37.7 eV

b) 2.20 nm, 2.75 nm, 4.12 nm, 4.71 nm, 6.60 nm, 11.0 nm
19. 0.793 nm
21. 202 fm, 6.14 MeV, un rayo gamma
23. 0.513 MeV, 2.05 MeV, 4.62 MeV; si
27. A $L/4$ y a $3L/4$
29. a) 5.13×10^{-3}eV b) 9.41 eV c) El electrón tiene energía más alta porque es de mucho menor masa.
33. a) $E = \hbar^2/mL^2$
b) Haciendo $\int_{-L}^{L} A^2(1 - x^2/L^2)^2 dx = 1$ que se obtiene $A = (15/16L)^{1/2}$. c) 47/81 = 0.580
35. a)



b) $2L$

37. a) 0.010 3 b) 0.990
39. Por 0.959 nm, para 1.91 nm
41. 3.92%
43. b) $b = m\omega/2\hbar$, $E = 3\hbar\omega/2$ c) primer estado excitado
45. a) $B = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$ b) $(m\omega/\pi\hbar)^{1/2}\delta$
47. $\sim 10^{-10^{30}}$)
49. Véase la parte baja de la página.
c) La función de onda es continua. Muestra localización al tender a cero conforme $x \rightarrow \pm\infty$. Es finita en todas partes y puede ser normalizada. d) $A = \sqrt{\alpha}$ e) 0.632
51. 0.029 4
53. a) 2.82×10^{-37}m b) 1.06×10^{-32} J
c) 2.87×10^{-35}% o más
55. a) 434 THz b) 691 nm c) 165 peV o más
59. a)



b) 0 c) 0.865
61. a) $\Delta p \geq \hbar/2r$
b) Eligiendo $p \cong \hbar/r$, $E = \hbar^2/2m_e r^2 - k_e e^2/r$
c) $r = \hbar^2/m_e k_e e^2 = a_0$ y $E = -13.6$ eV, en concordancia con la teoría de Bohr.
63. a) $-7k_e e^2/3d$ b) $\hbar^2/36m_e d^2$ c) 49.9 pm
d) El espaciamiento del átomo de Li es 280 pm, lo cual es 5.62 veces mayor que la respuesta c).
65. a) $A = (2/17L)^{1/2}$ b) $|A|^2 + |B|^2 = 1/a$
67. a) La luz no está polarizada. Contiene tanto oscilaciones horizontales como verticales de campo eléctrico. b) Aparece el patrón de interferencia, pero con intensidad total disminuida. c) Los resultados son los mismos en cada caso. d) El patrón de interferencia aparece y desaparece conforme el polarizador gira, con un contraste que aumenta y disminuye en forma alternativa entre las franjas brillantes y oscuras. La intensidad sobre la pantalla es precisamente cero en el centro de una franja oscura cuatro veces en cada revolución, cuando el eje del filtro ha girado por 45°, 135°, 225° y 315° desde la vertical. e) Observando la energía luminosa total que llega a la pantalla se ve un patrón de interferencia de bajo contraste. Después de ordenar las trayectorias de los fotones individuales en los que corresponden a los intentos 1, 2 y 3 se tiene la replicación de los resultados originales: las trayectorias para los intentos 1 y 2 forman las dos gráficas azules en la figura 41.3, y las trayectorias para el intento 3 configuran la gráfica roja.

Capítulo 42

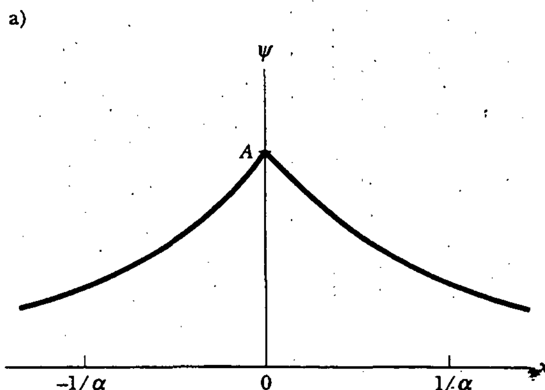
1. a) 56.8 fm b) 11.3 N
3. a) 3 b) 520 km/s
5. a) 1.31 μm b) 164 nm
7. a)

n	ℓ	m_ℓ	m_s
3	2	2	1/2
3	2	2	−1/2
3	2	1	1/2
3	2	1	−1/2
3	2	0	1/2
3	2	0	−1/2
3	2	−1	1/2
3	2	−1	−1/2
3	2	−2	1/2
3	2	−2	−1/2

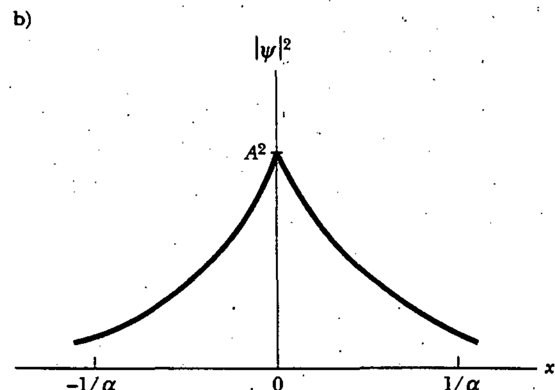
b)

n	ℓ	m_ℓ	m_s
3	1	1	1/2
3	1	1	−1/2
3	1	0	1/2
3	1	0	−1/2
3	1	−1	1/2
3	1	−1	−1/2

a)



b)



Capítulo 41, problema 49

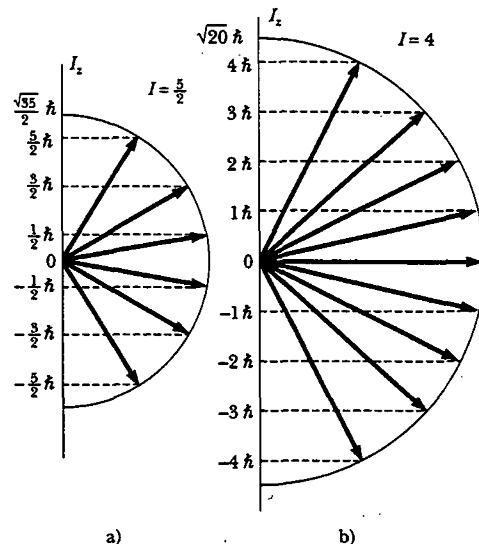
9. b) 0.497
11. Lo hace, con $E = -k_e e^2/2a_0$.
13. a) $\sqrt{6}\hbar$ b) $\sqrt{12}\hbar$
15. $\sqrt{6}\hbar$
17. a) 2 b) 8 c) 18 d) 32 e) 50
19. a) 3.99×10^{17} kg/m^{3}b) 81.7 am c) 1.77 Tm/s
d) $5.91 \times 10^3 c$
21. a) 5.05×10^{-27} J/T = 31.6 neV/T b) Aquí μ_n es 1 836 veces más pequeña que μ_B, porque un protón es 1 836 veces de mayor masa que un electrón. El electrón tiene una proporción carga/masa mayor que cualquier otra partícula, lo cual le proporciona una "manija" más grande para que gire un campo magnético.
23. $n = 3$; $\ell = 2$; $m_\ell = -2, -1, 0, 1,$ o 2; $s = 1$; $m_s = -1, 0,$ o 1
25. La subcapa 4*s* se llena primero. Se esperaría que $[\text{Ar}]3d^4 4s^2$ tuviera menor energía, pero $[\text{Ar}]3d^5 4s^1$ tiene más espines no pareados y menor energía, como sugiere la regla de Hund. Ésta es la configuración del estado base del cromo.
27. a) Zn o Cu b) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 5s^2$o $1s^2 2s^2 2p^6$-$3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 5s^1$
29. a) 1*s*, 2*s*, 2*p*, 3*s*, 3*p*, 4*s*, 3*d*, 4*p*, 5*s*, 4*d*, 5*p*, 6*s*, 4*f*, 5*d*, 6*p*, 7*s* b) El elemento 15 tendría valencia +3 o −5, y la tiene. El elemento 47 tendría valencia −1, pero tiene valencia +1. El elemento 86 debería ser inerte, y lo es.
31. a) $\ell = 0$ y $m_\ell = 0$; o $\ell = 1$ y $m_\ell = -1, 0,$ o 1; o $\ell = 2$ y $m_\ell = -2, -1, 0, 1,$ o 2 b) −6.05 eV
33. 0.031 0 nm
35. 0.072 5 nm
37. a) 14 keV b) .89 pm
39. a) 1 b) 0.69
41. 6.21×10^{-14} J · s/m^3
43. 3.49×10^{16} fotones
45. a) 1.22×10^{-33} b) $10^{-2\,253}$
47. a) 4.24 PW/m^2 b) 1.20 pJ = 7.50 MeV
51. a) 1.57×10^{14}m$^{-3/2}$ b) 2.47×10^{28}m^{-3}
c) 8.69×10^8 m^{-1}
53. a) 4.20 mm b) 1.05×10^{19} fotones
c) 8.82×10^{16}/mm^3
57. 5.39 keV
59. a) Para el Al, casi 0.255 nm ~ 0.1 nm; para U, casi 0.276 nm ~ 0.1 nm. b) Para un electrón exterior la carga nuclear es exhibida por los electrones interiores. Para un electrón de capa interna la carga nuclear no es exhibida. La escala de la distancia de la función de onda que representa el tamaño orbital es proporcional a a_0/Z.
61. 0.125
63. b) 0.846 ns
65. 9.79 GHz
67. a) 137 b) $\lambda_C/r_e = 2\pi/\alpha$
c) $a_0/\lambda_C = 1/2\pi\alpha$ d) $1/R_H\, a_0 = 4\pi/\alpha$

Capítulo 43

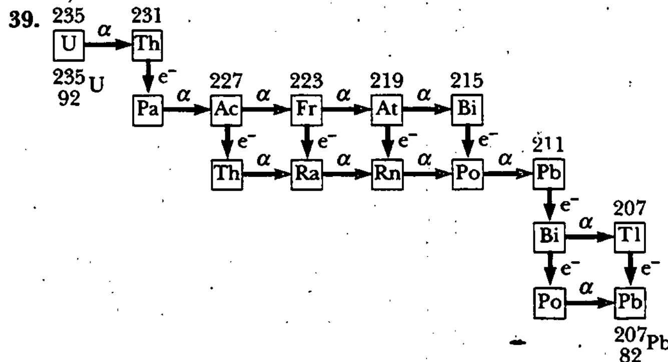
1. a) 921 pN hacia el otro ion b) −2.88 eV
3. a) $(2A/B)^{1/6}$ b) $B^2/4A$ c) 74.2 pm, 4.46 eV
a) 40.0 μeV, 9.66 GHz b) 20% más grande si *r* es 10% más pequeño
5.69 Trad/s
9. a) 1.81×10^{-45} kg · m^2 b) 1.62 cm
11. 0.358 ev
13. 0, 364 μeV, 1.09 meV b) 98.2 meV, 295 meV, 491 meV
15. 558
17. 6.25×10^9
19. −7.84 eV
23. Un átomo promedio contribuye con 0.981 electrón a la banda de conducción
25. a) 2.54×10^{28} electrones/m^3 b) 3.15 eV
c) 1.05 Mm/s
27. 5.28 eV
31. a) 1.10 b) 1.55×10^{-25}; mucho menor
33. Todas las líneas de Balmer son absorbidas, excepto por la línea roja a 656 nm, la cual es transmitida.
35. 1.24 eV o menos; sí
37. a) 59.5 mV b) − 59.5 mV
39. 4.19 mA
41. 203 A para producir un campo magnético en la dirección del campo original
43. a) 61.5 THz b) 1.59×10^{-46} kg · m^2
c) 4.79 μm o 4.96 μm
45. 7
49. a) 0.350 nm b) −7.02 eV c) −1.20i nN
51. a) r_0 b) B c) $(a/\pi)[B/2\mu]^{1/2}$
d) $B-(ha/\pi)[B/8\mu]^{1/2}$
53. b) No. El cuarto término es más grande que la suma de los primeros tres.

Capítulo 44

1. $\sim 10^{28}$, $\sim 10^{28}$, $\sim 10^{28}$
3. a) 27.6 N b) 4.17×10^{27} m/s^2 lejos del núcleo
c) 1.73 MeV
5. a) 455 fm b) 6.04 Mm/s
7. a) 1.90 fm b) 7.44 fm
9. 16.0 km
11. *Z* mágico: He, O, Ca, Ni, Sn, Pb; *N* mágico: isótopos de H, He, N, O, Cl, K, Ca, V, Cr, Sr, Y, Zr, Xe, Ba, La, Ce, Pr, Nd, Pb, Bi, Po
13.



15. a) 1.11 MeV/nucleón b) 7.07 MeV/nucleón c) 8.79 MeV/nucleón d) 7.57 MeV/nucleón
17. a) Cs b) La c) Cs
19. mayor para N por 3.54 MeV
21. 7.93 MeV
23. 200 MeV
25. 1.16 ks
27. a) 1.55×10^{-5}/s, 12.4 h b) 2.39×10^{13} átomos c) 1.87 mCi
29. 9.47×10^{9} núcleos
31. 41.8 TBq o 4.18×10^{13} decaimientos/s
33. 4.27 MeV
35. 18.6 keV
37. a) $e^- + p \rightarrow n + \nu$ b) ${}^{15}_{8}O$ átomo $\rightarrow$ ${}^{15}_{7}N$ átomo $+ \nu$ c) 2.75 MeV
39.



41. a) 0.281 b) 1.65×10^{-29} c) El radio-226 continuamente crea radón
43. a) ${}^{197}_{79}Au + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{198}_{80}Hg + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}$ b) 7.89 MeV
45. 1 MeV
47. 8.005 3 u, 10.013 5 u
49. $\sqrt{2}$
51. a) 2.52×10^{24} b) 2.29 TBq c) 1.07 Myr
53. a) 2.75 fm b) 152 N c) 2.62 MeV d) 7.44 fm, 379 N, 17.6 MeV
55. a) Conservación de energía b) Energía electrostática del núcleo c) 1.20 MeV
57. b) 4.78 MeV
59. b) 0.001 94 eV
61. a) $\sim 10^{-1349}$ b) 0.892
63. a) 4.28 pJ b) 1.19×10^{57} átomos c) 107 Gyr
65. 2.20 μeV
69. 0.400%
71. 2.64 min

21. 1.66×10^{3} años
23. a) 2.5 mrem por rayos X b) 5 rem/año es 38 veces 0.13 rem/año
25. 2.09×10^{6} s
27. 1.14 rad
29. a) 3.12×10^{7} b) 3.12×10^{10} electrones
31. a) 10 b) 10^{6} c) 1.00×10^{8} eV
33. 4.45×10^{-8} kg/h
35. a) $\sim 10^{6}$ b) $\sim 10^{-15}$ g
37. a) 8×10^{4} eV b) 4.62 MeV y 13.9 MeV c) 1.03×10^{7} kWh
39. 0.375% para fusión D-T, lo cual es casi cuatro veces mayor que 0.095 0% para fisión de ${}^{235}U$.
41. 482 Ci, menor que para el inventario de fisión en el orden de 100 millones de veces
43. 2.56×10^{4} kg
45. a) 2.65 GJ b) La energía de fusión es 78.0 veces mayor.
47. a) 4.91×10^{8} kg/h = 4.91×10^{5} m³/h b) 0.141 kg/h
49. a) 15.5 cm b) 51.7 MeV c) El número de decaimientos por segundo es la rapidez de decaimiento R y la energía liberada en cada decaimiento es Q. Entonces la energía liberada por vez es $\mathcal{P} = QR$. d) 227 kJ/año e) 3.18 J/año
51. 14.1 MeV
53. a) 2.24×10^{7} kWh b) 17.6 MeV c) 2.34×10^{8} kWh d) 9.36 kWh e) El carbón es barato en este momento de la historia humana. Se espera que los problemas de seguridad y disposición de desechos se puedan resolver de modo que sea posible disponer de la energía nuclear antes de que la escasez eleve el precio de los combustibles fósiles.
55. b) 26.7 MeV
57. a) 5×10^{7} K
b)

Reacción	Q (MeV)
${}^{12}C + {}^{1}H \rightarrow {}^{13}N + \gamma$	1.94
${}^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^+ + \nu$	1.20
$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$	1.02
${}^{13}C + {}^{1}H \rightarrow {}^{14}N + \gamma$	7.55
${}^{14}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{15}O + \gamma$	7.30
${}^{15}O \rightarrow {}^{15}N + e^+ + \nu$	1.73
$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$	1.02
${}^{15}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{12}C + {}^{4}He$	4.97
Total	26.7

c) La mayoría de los neutrinos dejan la estrella directamente después de su creación, sin interactuar con cualesquiera otras partículas.

Capítulo 45

1. 192 MeV
3. $n + {}^{232}Th \rightarrow {}^{233}Th \rightarrow {}^{233}Pa + e^- + \bar{\nu}$ y ${}^{233}Pa \rightarrow {}^{233}U + e^- + \bar{\nu}$
5. a) 201 MeV b) 0.091 3%
7. 5.80 Mm
9. alrededor de 3 000 años
11. 6.25×10^{19} Bq
13. a) 2.30×10^{-14} $Z_1 Z_2$J b) 0.144 MeV para ambos
15. a) 2.22 Mm/s b) $\sim 10^{-7}$ s
17. a) 1.7×10^{7} J b) 7.3 kg
19. 1.30×10^{25} ${}^{6}Li$; 1.61×10^{26} ${}^{7}Li$

Capítulo 46

1. 453 ZHz; 662 am
3. 118 MeV
5. $\sim 10^{-18}$ m
7. $\sim 10^{-23}$ s
9. 67.5 MeV, 67.5 MeV/c, 16.3 ZHz
11. $\Omega^+ \rightarrow \bar{\Lambda}^0 + K^+$ $\bar{K}_S^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ $\bar{\Lambda}^0 \rightarrow \bar{p} + \pi^+$ $\bar{n} \rightarrow \bar{p} + e^+ + \nu_e$
13. b) La segunda reacción viola la conservación de extrañeza
15. a) $\bar{\nu}_\mu$ b) ν_μ c) $\bar{\nu}_e$ d) ν_e e) ν_μ f) $\bar{\nu}_e + \nu_\mu$

17. a), c) y f) violan la conservación de número bariónico. b), d) y e) pueden ocurrir. f) viola la conservación del número muón-leptón

19. a) ν_e b) ν_μ c) $\bar{\nu}_\mu$ d) $\nu_\mu + \bar{\nu}_\tau$

21. b) y c) conservan extrañeza. a), d), e) y f) violan la conservación de extrañeza.

23. a) no está permitido; viola la conservación del número bariónico b) interacción fuerte c) interacción débil d) interacción débil e) interacción electromagnética

25. a) K^+ b) Ξ^0 c) π^0

27. a) $3.34 \times 10^{26} e^-$, 9.36×10^{26}u, 8.70×10^{26}d b) $\sim 10^{28}\ e^-$, $\sim 10^{29}$u, $\sim 10^{29}$d. Mi extrañeza, encanto, verdad y belleza son cero.

29. $m_u = 312\ \text{MeV}/c^2$ $m_d = 314\ \text{MeV}/c^2$

31. La reacción $\bar{u}d + uud \rightarrow \bar{s}d + uds$ tiene un total de 1 u, 2 d y 0 s quarks, original y al final. b) La reacción du + uud $\rightarrow \bar{s}u + uus$ tiene un neto de 3 u, 0 d y 0 s, antes y después. c) $\bar{u}s + uud \rightarrow \bar{s}u + \bar{s}d + sss$ muestra conservación a quarks 1 u, 1 d y 1 s. d) El proceso $uud + uud \rightarrow \bar{s}d + uud + \bar{d}u + uds$ tiene un neto de 4 u, 2 d, 0 s, inicial y al final; la partícula misteriosa es Λ^0.

33. a) Σ^+ b) π^- c) K^0 d) Ξ^-

37. a) $0.383c$ b) 6.76×10^9 años luz

39. 6.00

41. a) 1.06 mm b) microonda

43. a) $\sim 100\ \text{MeV}/c^2$ b) pión cargado o neutro

45. una parte en 50 000 000

47. $\sim 10^{14}$

49. 5.35 MeV y 32.3 MeV

51. 74.4 MeV

53. 9.26 cm

55. 2.52×10^3 K

57. a) bosón Z^0 b) gluón

Índice

Números de página en *itálica* indican ilustraciones; números de página seguidos por una "n" indican nota a pie de página; números de página seguidos por "t" indican tabla.

Equilibrio electrostático, conductores en, 754-756, *754*, *755*, *756*, 760

[illegible]

Símbolo	Unidad	Símbolo	Unidad
A	ampere	K	kelvin
Å	angstrom	kcal	kilocaloría
u	unidad de masa atómica	kg	kilogramo
atm	atmósfera	kmol	kilomol
Btu	unidad térmica británica	L	litro
C	coulomb	lb	libra
°C	grado Celsius	m	metro
cal	caloría	min	minuto
eV	electrón-volt	mol	mol
°F	grado Fahrenheit	N	newton
F	farad	Pa	pascal
ft	pie	rad	radián
G	gaus	rev	revolución
g	gramo	s	segundo
H	henry	T	tesla
h	hora	V	volt
hp	caballo de fuerza	W	watt
Hz	hertz	Wb	weber
in	pulgada	Ω	ohm
J	joule		

Símbolos matemáticos usados en el texto y su significado

Símbolo	Significado
$=$	es igual a
$\equiv$	es definido como
$\neq$	no es igual a
$\propto$	es proporcional a
$\sim$	es del orden de
$>$	es mayor que
$<$	es menor que
$\gg$ ($\ll$)	es mucho mayor (menor) que
$\approx$	es aproximadamente igual a
Δx	el cambio en x
$\sum_{i=1}^{N} x_i$	la suma de todas las cantidades x_i desde $i = 1$ hasta $i = N$
$\|x\|$	la magnitud de x (siempre una cantidad no negativa)
$\Delta x \to 0$	Δx tiende a cero
$\frac{dx}{dt}$	la derivada de x respecto a t
$\frac{\partial x}{\partial t}$	la derivada parcial de x respecto a t
$\int$	integral

Longitud

1 pulgada (pulg) = 2.54 cm (exacto)
1 m = 39.37 pulg = 3.281 pie
1 pie = 0.304 8 m
12 pulg = 1 pie
3 pie = 1 yarda
1 yarda = 0.914 4 m
1 km = 0.621 milla
1 milla = 1.609 km
1 milla = 5 280 pie
1 Å = 10^{-10} m
1 μm = 1 μ = 10^{-6} m = 10^{3} nm
1 año luz = 9.461×10^{15} m

Área

1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10.76 pie^2
1 pie^2 = 0.092 9 m^2 = 144 $pulg^2$
1 $pulg^2$ = 6.452 cm^2

Volumen

1 m^3 = 10^6 cm^3 = 6.102×10^4 $pulg^3$
1 pie^3 = 1 728 $pulg^3$ = 2.83×10^{-2} m^3
1 L = 1 000 cm^3 = 1.057 6 qt (cuartos) = 0.035 3 pie^3
1 pie^3 = 7.481 galón (gal) = 28.32 L = 2.832×10^{-2} m^3
1 gal = 3.786 L = 231 $pulg^3$

Masa

1 000 kg = 1 t (tonelada métrica)
1 slug = 14.59 kg
1 u = 1.66×10^{-27} kg = 931.5 MeV/c^2

Fuerza

1 N = 0.224 8 lb
1 lb = 4.448 N

Velocidad

1 milla/h = 1.47 pie/s = 0.447 m/s = 1.61 km/h
1 m/s = 100 cm/s = 3.281 pie/s
1 milla/min = 60 milla/h = 88 pie/s

Aceleración

1 m/s^2 = 3.28 pie/s^2 = 100 cm/s^2
1 pie/s^2 = 0.304 8 m/s^2 = 30.48 cm/s^2

Presión

1 bar = 10^5 N/m^2 = 14.50 lb/$pulg^2$
1 atm = 760 mm Hg = 76.0 cm Hg
1 atm = 14.7 lb/$pulg^2$ = 1.013×10^5 N/m^2
1 Pa = 1 N/m^2 = 1.45×10^{-4} lb/$pulg^2$

Tiempo

1 año = 365 días = 3.16×10^7 s
1 día = 24 h = 1.44×10^3 min = 8.64×10^4 s

Energía

1 J = 0.738 pie·lb
1 cal = 4.186 J
1 Btu = 252 cal = 1.054×10^3 J
1 eV = 1.6×10^{-19} J
1 kWh = 3.60×10^6 J

Potencia

1 hp = 550 pie·lb/s = 0.746 kW
1 W = 1 J/s = 0.738 pie·lb/s
1 Btu/h = 0.293 W

Algunas aproximaciones útiles para problemas de estimación

1 m $\approx$ 1 yarda
1 kg $\approx$ 2 lb
1 N $\approx$ $\frac{1}{4}$ lb
1 L $\approx$ $\frac{1}{4}$ gal
1 m/s $\approx$ 2 millas/h
1 año $\approx$ $\pi \times 10^7$ s
60 millas/h $\approx$ 100 pies/s
1 km $\approx$ $\frac{1}{2}$ milla

[a] Véase la tabla A.1 del apéndice A para una lista más completa.

Alfa	A	α	Iota	I	ι	Rho	P	ρ
Beta	B	β	Kapa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Upsilon	Y	υ
Epsilon	E	ϵ	Nu	N	ν	Fi	Φ	ϕ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Omicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

Serway • Beichner

BEST SELLER INTERNACIONAL

Tomo II

Quinta edición

Mc Graw Hill

Algunas constantes fundamentales[a]

Cantidad	Símbolo	Valor[b]
Unidad de masa atómica	u	$1.660\ 540\ 2(10) \times 10^{-27}$ kg $931.494\ 32(2\ 8)$ MeV/c^2
Número de Avogadro	N_A	$6.022\ 136\ 7(36) \times 10^{23}$ partículas/mol
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$	$9.274\ 015\ 4(31) \times 10^{-24}$ J/T
Radio de Bohr	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2 k_e}$	$0.529\ 177\ 249\ (24) \times 10^{-10}$ m
Constante de Boltzmann	$k_B = R/N_A$	$1.380\ 658\ (12) \times 10^{-23}$ J/K
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$	$2.426\ 310\ 58(2\ 2) \times 10^{-12}$ m
Constante de Coulomb	$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$8.987\ 551\ 787 \times 10^9$ N·m²/C² (exacto)
Masa del deuterón	m_d	$3.343\ 586\ 0(20) \times 10^{-27}$ kg $2.013\ 553\ 214\ (24)$ u
Masa del electrón	m_e	$9.109\ 389\ 7(54) \times 10^{-31}$ kg $5.485\ 799\ 03(1\ 3) \times 10^{-4}$ u $0.510\ 999\ 06(1\ 5)$ MeV/c^2
Electrón-volt	eV	$1.602\ 177\ 33(4\ 9) \times 10^{-19}$ J
Carga elemental	e	$1.602\ 177\ 33(4\ 9) \times 10^{-19}$ C
Constante de los gases	R	$8.314\ 510\ (70)$ J/K·mol
Constante gravitacional	G	$6.672\ 59(8\ 5) \times 10^{-11}$ N·m²/kg²
Energía del estado base del hidrógeno	$E_I = -\frac{e^2 k_e}{2a_0}$	$-13.605\ 698\ (40)$ eV
Proporción frecuencia-voltaje de Josephson	$2e/h$	$4.835\ 976\ 7(14) \times 10^{14}$ Hz/V
Cuanto de flujo magnético	$\Phi_0 = \frac{h}{2e}$	$2.067\ 834\ 61(6\ 1) \times 10^{-15}$ T·m²
Masa del neutrón	m_n	$1.674\ 928\ 6(10) \times 10^{-27}$ kg $1.008\ 664\ 904\ (14)$ u $939.565\ 63(2\ 8)$ MeV/c^2
Magnetón nuclear	$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p}$	$5.050\ 786\ 6(17) \times 10^{-27}$ J/T
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A (exacto)
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854\ 187\ 817 \times 10^{-12}$ C²/N·m² (exacto)
Constante de Planck	h	$6.626\ 075(40) \times 10^{-34}$ J·s
	$\hbar = h/2\pi$	$1.054\ 572\ 66(6\ 3) \times 10^{-34}$ J·s
Masa del protón	m_p	$1.672\ 623\ (10) \times 10^{-27}$ kg $1.007\ 276\ 470\ (12)$ u $938.272\ 3(28)$ MeV/c^2
Constante de Rydberg	R_H	$1.097\ 373\ 153\ 4(13) \times 10^7$ m⁻¹
Rapidez de la luz en el vacío	c	$2.997\ 924\ 58 \times 10^8$ m/s (exacta)

[a] Estas constantes son los valores recomendados en 1986 por la CODATA, están basados en un ajuste de mínimos cuadrados de datos de distintas mediciones. Para una lista más completa véase E. R. Cohen y B. N. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* 59:1121, 1987.

[b] Los números entre paréntesis para los valores en esta columna representan las incertidumbres de los últimos dos dígitos.

Datos del Sistema Solar

Cuerpo	Masa (kg)	Radio medio (m)	Periodo (s)	Distancia desde el Sol (m)
Mercurio	3.18×10^{23}	2.43×10^{6}	7.60×10^{6}	5.79×10^{10}
Venus	4.88×10^{24}	6.06×10^{6}	1.94×10^{7}	1.08×10^{11}
Tierra	5.98×10^{24}	6.37×10^{6}	3.156×10^{7}	1.496×10^{11}
Marte	6.42×10^{23}	3.37×10^{6}	5.94×10^{7}	2.28×10^{11}
Júpiter	1.90×10^{27}	6.99×10^{7}	3.74×10^{8}	7.78×10^{11}
Saturno	5.68×10^{26}	5.85×10^{7}	9.35×10^{8}	1.43×10^{12}
Urano	8.68×10^{25}	2.33×10^{7}	2.64×10^{9}	2.87×10^{12}
Neptuno	1.03×10^{26}	2.21×10^{7}	5.22×10^{9}	4.50×10^{12}
Plutón	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^{6}$	7.82×10^{9}	5.91×10^{12}
Luna	7.36×10^{22}	1.74×10^{6}	—	—
Sol	1.991×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—

Datos físicos usados con frecuencia[a]

Distancia promedio Tierra-Luna	3.84×10^{8} m
Distancia promedio Tierra-Sol	1.496×10^{11} m
Radio promedio de la Tierra	6.37×10^{6} m
Densidad del aire (0°C y 1 atm)	1.29 kg/m^3
Densidad del agua (20°C y 1 atm)	1.00×10^{3} kg/m^3
Aceleración de caída libre	9.80 m/s^2
Masa de la Tierra	5.98×10^{24} kg
Masa de la Luna	7.36×10^{22} kg
Masa del Sol	1.99×10^{30} kg
Presión atmosférica estándar	1.013×10^{5} Pa

[a]Éstos son los valores de las constantes como se usan en el texto.

Algunos prefijos para las potencias de diez

Potencia	Prefijo	Abreviatura	Potencia	Prefijo	Abreviatura
10^{-24}	yocto	y	10^{1}	deca	da
10^{-21}	zepto	z	10^{2}	hecto	h
10^{-18}	ato	a	10^{3}	kilo	k
10^{-15}	femto	f	10^{6}	mega	M
10^{-12}	pico	p	10^{9}	giga	G
10^{-9}	nano	n	10^{12}	tera	T
10^{-6}	micro	μ	10^{15}	peta	P
10^{-3}	mili	m	10^{18}	exa	E
10^{-2}	centi	c	10^{21}	zeta	Z
10^{-1}	deci	d	10^{24}	yota	Y

